第2章　活動の数学的基礎：可謬主義的数学論

第1節　論証的数学とユークリッド的方法論

1．論証：数学的活動の本性

「論証」(demonstration)もしくは「証明」(proof)は、数学の基本的な特徴であり、数学の本性とも言うことができる。全米数学協会(MAA: Mathematical Association of America)の会長であったロースは、「科学は観察を通して立証するが、数学は論理的推論を通して立証する。こうして、数学の本性は証明にあり、(小数のケースの)例示や予想と、証明の区別が重視されるべきである。」(Ross, 1998: 254, 挿入筆者)[1]と述べ、数学は、実験に基づき仮説を検証する科学と、論証という点で明確に異なっていることを強調する。さらに、「有効な議論、つまり、証明の構築と、議論を批判することは、数学をすることの主要部分である」(ibid: 254)と指摘し、証明が数学的活動の柱をなしていることを示唆している。

数学の本性である論証は、歴史的に、古代ギリシアにおいて確立された。それに基づいて数学が建設され、現代にいたるまで当時そのままの形で伝えているものが、ユークリッドの『原論』(Euclidis Elementa)[2]である。『原論』では、定義は事物の本質についての記述であり、公理や共通概念は当然のこととして受け入れられるべき幾何学や数学全般の真理を述べているものと理解された。こうして『原論』は、自明の真理から出発し、厳密な証明に従って演繹的に構成された真理体系とみなされてきた。こうした理解は、数学において論証と呼ばれる方法論、すなわち、議論の余地のない絶対確実な基礎からすべての真理を導き出すという方法論が形成された。ラカトシュは、こうした数学固有の方法論を「ユークリッド的方法論」(Euclidean methodology: Lakatos, 1976: 107)[3]と呼んでいる。

論証とは、既知の命題から、論理的手続きに従って、新しい命題を導きだすことである。初めに真であると認める最も根元的な既知の命題は「公理系」(axiom system)であり、論理的手続きは、普通「推論(導出)規則」(rules of inference (derivation))と呼ばれている(Stolyar,

[1] Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*, 252-255.
[2] *Euclidis Elementa* , (1883). Lipsiae (中村幸四郎他(訳). (1971). *ユークリッド原論.* 共立出版)
[3] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge University Press.

1970: 63)[4]。それは、次のように形式的に定義される。

$H_1, H_2, \cdots\cdots, H_n$ を前提とし、結論 C を導く論証とは、次のような有限個の命題の系列 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ のことである：

(1) P_n は C である。

(2) P_i は次の何れかである。

(a)公理，(b) H_i，(c)先行する P_j, P_k から、推論規則によって導かれるもの[5]。

ここで「推論規則」とは、「連言推理」、「肯定法(モドゥス・ポーネンス)」、「否定法(モドゥス・トーレンス)」、「対偶法」、「(仮言)三段論法」等である。このように、「論証」(demonstration)というのは、論理・形式的に定義できる概念であり、これに対して「証明」(proof)といわれるのは、論証を様々な程度に略記したもので、公理の代わりに既に証明された定理を用いたり、「連言推理」の結論を省略したり、「肯定法」の大前提を省略したりする略記法である。証明は、元来、パスカル(Pascal)のいう説得術[6]であり、どこまで詳しく述べるかは、説得しようとする相手や状況に依存しているといえる(平林, ibid: 19)。

2．論証的数学の教育的意義

数学の本性とでもいうべき論証、すなわち論証的数学は、学校数学、特に中等教育におけるそれにとって、幹をなす部分となっている。論証は、単に論理・形式的な正確さのみならず、いろいろの教育的意義を持っている。

数学教育における論証の意義に関して、三輪(1987)[7]は、次の 3 点を挙げている。

(1) ことがらが真であることを確立すること
(2) ことがらの体系化をはかること
(3) ことがらに洞察を与えること

第一に、証明は、演繹の方法によって推論すること、つまり、すでに真とされたことがらを基に、他のことがらの真であることを導くことである。したがって、証明は、第一に、あることがらが真であることを確かに示すこと、あるいは、そのことがらの「正当化」(justification)である。この証明という正当化の方法は、前提とされることがら(仮定)

[4] Stolyar, A. A. (1970). *Introduction to elementary mathematical logic*. New York: Dover.
[5] 平林一栄 (1991). 論証について. *新中学校数学指導実例講座, 3, 図形*(pp. 18-19). 金子書房.
[6] パスカル (前田・由木訳), (1966). *幾何学的精神について*. 中央公論社.
[7] 三輪辰郎 (1987). 証明の指導を通して思考力を育てる. *学習指導研修*, 11, 64-67.

が真である限り、証明されたことがら(結論)が真であることは確立されたのであり、それはゆるぎないものとなる(三輪, ibid: 64)。いくつかの具体例による尤もらしい(蓋然的)推論では、一般的に真であることは正当化されない。このことに関して、先のロース(Ross, 1998)は、次のように述べている。

> 重視すべきことは、数学の結果が、明示された、あるいは明示されない仮定から必然的に従うことである。仮定に基づいて、解決に至る道は多くあるかもしれないが、数学にはただ1つの正しい答えがあるのである。・・(中略)・・答えは、仮定が変わらない限り、変わらないのである。(Ross, ibid: 254)

このように、証明の強さは、仮定を満たす限り、結論がつねに成り立つこと、つまり、命題は真と断定しきれるところにある。

第二に、証明は、すでに真とされたことがらを根拠にして、推論を進めるのであるから、根拠とすることがらが当然問題になる。そして、根拠とする事柄を基にしてさらなることがらの正当化を進めていくと同時に、より根源的な根拠を探っていくこととなる。これは、ことがらの体系化を考えることであり、そこに、証明が大きな役割を果たしている(三輪, ibid: 65)。この体系化という考えは、数学に特徴的なものといえる。こうした体系化は、公理と無定義術語を出発点とし、そして、これらを基に、次々とことがらが証明され、さらに、証明されたことがらを基にして、また、別のことがらが証明され、ことがらの体系が作り上げられていく。こうした体系化の過程で、いわゆる循環論法が問題とされる。より厳密には、公理系の「無矛盾性」(consitency)、「独立性」(independence)、そして「完全性」(completeness)が重要な研究関心となってくる(Stolyar, 1970: 115-125)。

第三に、証明には、ことがらの正当化だけでなく、そのことがらが「なぜ真であるかの洞察を与える」ことが期待できる。より具体的には、証明は、ことがらが真であることに、条件(仮定)がどのように関わるかを明らかにすることができる(三輪, ibid: 66)。英国の数学教育者アラン・ベル(Alan Bell)は、「照明」(illumination: Bell, 1976: 24)[8]という語を巧みに用い、ことがらの本質に光を当てることに留意している。三輪(1987)は、こうした照明の機能によって、ことがらについての理解が深まり、その内容の吟味ができるような力を持つに至り、それに基づいて、新しいことがらを発見することもできる点に、証明の教育的価値を見いだしている。先のロースが、

> 証明の重視は、その形式的正確さよりも一層教育的価値があるべきことを忘れてはならない。理解あるいは洞察に導かないような証明の細部、ときには証明全体に、時間を浪費する必要はない。(Ross, ibid: 254, 強調は筆者)

[8] Bell, A. W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 23-40.

と述べるとき、証明が事柄の本質についての理解を深め、洞察を与える点を重視すべきことを述べているように思われる。証明のこうした発見法的な働きは、本論文の立場から見て、学校数学に対して新しい視点を与えてくれると考え、後の章(第 4 章)で再び取り上げる。

これまでのことから、論証的数学は、数学の本性であり、教育的にも意義深いものであることが述べられた。しかしながら、論証指導は、数学教育が直面する主要な困難の一つであるといわれている。そうした困難点の第一は、生徒が、なぜ証明するのか、その必要性がつかめないことであろう。論証は、帰納的な方法の不十分さの認識、すなわち、全称命題を扱うことの認識を必要とするが、実際は、多数の中学二・三年生でも、凡そ 3/4 の生徒が、幾何の問題の証明で、実験実測による正当化を受け入れているとされる(国宗, 2000: 6)[9]。さらに、真であることの正当化のための証明は、証明することの必要感があり、証明によって未知のことが明らかになったという実感を持たせるようなものでなければならないであろうが、実際には、余りにも見えすいた命題や、いたずらに込み入った前提条件をもつ命題が取り上げられることもあり、それでは、真であることの正当化をしようという気力を生み出すことが困難になる。これは、先の「ユークリッド的方法論」が過度に強調されることによるものと思われる。また、既に述べたように、「体系化」も証明の重要な側面であった。しかし、第 1 章 1 節で議論したように、ファン・ヒーレによる「思考水準論」では、演繹体系の認識は、出発点を第 0 水準とした第 3 水準にあたり、今日の中学校ではごく狭い範囲内での体系化を行う第 2 水準の達成が目指されていることに鑑みても、実際に、体系化は、思考としてかなり高いレベルのものである。

このように、論証的数学は、数学的活動の本来的な姿であり、いろいろな指導上の困難点は認められるものの、優れた教育的意義を持っており、中等教育段階以降の数学的活動のいわば「高次目標」とされているように思われる。しかしながら、初等段階から前期中等段階にかけての創造的で活動的な数学教育を検討するとき、論証的数学という高次目標の基礎となり、かつまた、それに向けて発展する可能性のある数学的活動の側面(例えば、杉山, 1986)[10]を検討し、学校数学の幹として取り入れていくことが重要であるように思われる。

[9] 国宗進 (2000). 図形の論証に関する理解度の変化. *日本数学教育学会 数学教育, 82*(3), 2-12.
[10] 杉山吉茂 (1986). *公理的方法に基づく算数・数学の学習指導.* 東洋館.

３．論証的数学と蓋然的数学

論証的数学を数学的活動の高次の本質とし、それに向けて発展する可能性のある数学的活動の側面を検討しようとするとき、本論文にとって示唆的であると思われるのは、ジョージ・ポリア(G. Polya)による「数学における蓋然的推論」に関する研究(Polya, 1954a, 1954b)[11]である。ポリアは、数学が、蓋然的過程である推測の構成と演繹的過程である証明の構成から成り立っているとしながら、伝統的に、数学は論証的科学として特徴づけられていることを問題視し、次のように述べている。

> 数学は論証科学と考えられています。だがそれは、そのただ一面に過ぎません。完成した形に提供される完成した数学は、証明ばかりから成り立っているところの純粋に論証的なものとして表されています。ですが、制作途上の数学は、他の任意の制作途上の人間の知識によく似ています。あなた方は、ある数学的定理を証明する前に、予測しなければなりません。つまり、あなた方は、詳細な点を実行する以前に、証明のアイディアを予測しなければならないのです。あなた方は、いろいろな観察を組み合わせ、類比をたどらねばなりません。つまり、幾度も幾度も試みてみなければならないのです。数学者の創造的仕事の結果は、論証的推論であり、証明です。しかし、その証明は、蓋然的推論によって、推測によって発見されるのです。(Polya, 1954a: vi)

このように、数学が、推測を構成し、その証明のアイデアを予想する際の蓋然的推論と、推測を証明し、理論体系を構築する際の論証的推論という二つの側面から成り立っているが、専ら、後者の論証的科学としての側面が強調されている。こうしたことの原因を、ポリアは、数学的推測の構成や理論の発見は、専ら心理学的問題であって、科学的で体系的な研究の対象とはみなされてこなかった点にあるとしている。ポリアは、こうした立場に異論をとなえ、数学的推測を定式化する際の蓋然的な推論にも一定の合理的なパターンが見いだされること、さらに、そうした蓋然的な推論が演繹的証明のアイデアを洞察する契機となりうることを、実際の数学的問題や数学的理論の発見の過程を帰納的な素材として例示し、強調したのであった[12]。本論文では、論証的活動へと展開する可能性をもつ数学的な探究活動を検討することを課題としており、その意味で、こうした蓋然的な数学的活動のパターン、科学哲学において「発見学」と呼ばれる分野について、系統的に検討を進めていくことが適切であると考える。そこで、次節では数理哲学の分野における「発見学」を取り上げ、その特徴を明らかにすることにしたい。

---

[11] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1. Induction and analogy in mathematics.* Princeton University Press. Polya, G. (1954b). Mathematics and plausible reasoning; vol.2. Patterns of plausible inference. Princeton University Press.

[12] ポリアは、帰納を帰納的に研究すること」(Polya, 1954a: viii)、すなわち、科学哲学の分野において、帰納の問題、一般的には蓋然的推論の問題を、数学的な実例を用いて帰納的に研究する方法を提示した。

第２節　近代発見学の展開

１．発見学：蓋然的推論の合理的研究

「発見学」(heuristics)とは、ジョージ・ポリア(G. Polya)によれば、「発明や発見の方法と法則の研究」(Polya, 1957: 112)[13]、または、「問題を解く過程における有効な思考作用を理解しようとする試み」(Polya, ibid, 129-130)であるという。それは、論理学、哲学、心理学などの学問分野にまたがっており、明確な境界設定がなされていないため、定義することは難しいとされる[14]。ポリアの著作は、数学教育に関連する脈絡でしばしば語られるが、彼の第一の主要な関心は、科学哲学における発見学の近代的研究であった。実際、ポリアは「本書は発見学を近代的で穏当な形で復活させることである。」(Polya, ibid: 113)と述べている。以下では、ポリアによる発見学の研究を取り上げ、その特徴的性質を検討していく。

ポリアが「近代的発見学」(modern heuristic: Polya, ibid: 129)を復興させようとした動機は、数学的探究における発見学の位置付けが適切に扱われていないことへの不満にあったとみられる。このことに関しては、ラカトシュ(Lakatos, 1976)[15]がより明確に述べている。概して、数学においては、蓋然的過程である推測と演繹的過程である証明、つまり「発見の論理」(logic of discovery)と「正当化の文脈」(logic of justification)とが区別され、発見の脈絡は心理学の分析対象であるのに対して、論理学は正当化の脈絡に関連してきた。そして、伝統的に、数学は専ら論証的科学として特徴付けられており、数学的推測の定式化や理論の発見は心理学的問題であって、科学的で体系的な研究の対象とは見なされてこなかった(Lakatos, ibid: 3-4)。演繹主義的スタイルを擁護するある者は、演繹は数学に定まった発見的様式なのであり、「発見の論理」は「演繹の論理」であると主張している。他のある者は、このことが真でない、すなわち、数学的発見は演繹的に進められるわけではないことを認めながらも、もし数学的発見を合理的に提示しようとするなら、演繹主義的スタイルで行わなくてはならないと主張する(Lakatos, ibid: 3-4)。したがって、今日、演繹主義的スタイルについては二つの議論がある。第一の議論は、発見法は合理的で演繹主義的であるというもので、第二の議論は、発見法は演繹主義的でも合理的でもないというものである。こうした立場に異論を唱えたのがポリアであったといえ

[13] Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press.
[14] ポリアは、発見学の源泉をパップス(Pappus of Alexandria)においている。また、近代的発見学として、ルネ・デカルト(R. Descartes)とゴットフリード・ライプニッツ(G. W. Leibnitz)をあげる。
[15] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.

る。

ポリアは、その著書『数学と蓋然的推論』(Polya, 1954a)[16]の序文において、この著書が「哲学的エッセイでもある」(Polya, ibid: v)と述べている。この労作を通じて彼が強調したことは、数学には帰納をその一部分として含む「蓋然的推論」(plausible reasoning: Polya, ibid: v)の合理的なパターンがあり、またそうした種々のパターンを体系的に記述することが可能であるということである。また「数学は、自然諸科学や博物学のように、観察、実験、そして帰納に満ちている」(Polya, ibid: viii)と言うように、数学は、博物学や他の自然科学に劣らず、事物の観察から始まり、帰納的証拠を組織的に秩序付けてゆく経験科学と同じ側面があることを強調し、例証している。さらに、「数学は、蓋然的推論を学ぶ恰好の機会を提供する」(Polya, ibid: ix)とも述べ、蓋然的推論が教育の対象になりうることを示唆している。そうした蓋然的推論において、最も基本的なものが「帰納」(induction)、すなわち、「特定のいろいろの例から一般法則を推測したり、一般法則を証明したりするために幾つもの事実を生産すること」(Polya, ibid: 10)である。

この小節では、ポリアにならい、整数論における未解決問題である「ゴールドバッハの推測」[17](Goldbach conjecture, 1742)を例として取り上げる。ポリアは、次のように議論を展開する(Polya, ibid: 4-5)。

何かのはずみに、$3+7=10$、$3+17=20$、$13+17=30$ のような関係が頭に浮かび、その間に何か類似があることに気付いたとしよう。まず、$3, 7, 13, 17$ という数が奇数の素数であることに思い当たる。二つの奇数の素数の和は必然的に偶数となる。では、この逆の事柄、すなわち、「他の偶数は二つの奇数の素数(奇素数)で表されるだろうか」(Polya, ibid: 4, 挿入は筆者)という意識的な問いが設定される。

二つの奇素数の和に書ける最初の偶数はもちろん $6\ (3+3)$ である。6 以上の偶数については、

$$8=3+5, 10=3+7=5+5, 12=5+7,$$
$$14=3+11=7+7,\ 16=3+13=5+11, 18=5+13=7+11$$

となる。こうした特定の場合の観察は、次のような一般的命題を暗示する。

4 より大きな任意の偶数は二つの奇素数の和である。

こうして、帰納によって一つの推測が構成された。それは観察によって暗示され、特

[16] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1. Induction and analogy In mathematics.* Princeton, NJ: Princeton University Press.
[17] クリスチャン・ゴールドバッハ(C. Goldbach)が 1742年にオイラー(L. Euler)に宛てた手紙に書いた問題。

別な二三の実例によって支持されたのである。その過程は、まず、幾つかの対象の観察からそれらの間に一定の類似(類比)があることに気付き、その次には、明瞭なる一般的命題を得た。このように、幾つかの特殊な事例の観察から、概念的に明白な類似に気付き、そこから一般的な推測を定立する過程を、ポリアは「暗示的接触」(suggestive contact: Polya, ibid: 4)と呼び、帰納の第一段階であるとした。

ポリアは、一定の推測が構成された際に、その推測を検証する手続きに進むことが合理的であるとする。ここで推測を検証することを、オイラー(の編集者)にならい、「擬実験」(quasi-experiment: Polya, ibid: 5)と呼ぶ[18]。実際、数学では、実験の際の条件や仮説を、実際の実験装置によって設定するのではなく、念頭においてなかば自由に設定することができるからである。この意味で、「擬実験」は「思考実験」(thought experiment: Lakatos, 1976: 9)[19]とも呼ばれる。

ここで立てられた推測の場合、擬実験は、新たな偶数についてそれが二つの奇素数の和となるか調べることである。その際に、取り上げる偶数は適当にとりうるという意味で思考実験の自由度は大きい。ここでポリアは、60を取り上げ実験している。これは、ポパー(K. Popper)がいうところの「決定的な実験」(crucial experiment: Popper, 1979: 14)[20]、すなわち、勝手に選んだのではない事例に基づいて、テストされる仮説を論駁しうるような実験である。実験の結果、60＝3＋57であることが分かり、テストは肯定的な結果を得た。これで、当該の推測は新たな一つの場合において確かめられ、支持された。このことに関して、ポリアは、「この検定は推測に味方しその信頼性を高める有望な徴候となり、より信頼できるものとなる。この有望な徴候にどれくらいの重みをつけるかは、その人の個人的判断に任されているわけであるが」(Polya, 1954a: 6, 強調は筆者)と述べる[21]。こうした検証をさらに系統的に進めてゆくことで、その度毎に推測は確かめられ、推測は心理的に強化され、信頼性は高められる(もちろん証明にはならないが)。このように、暗示的接触によって構成された推測を思考実験にかけて確認し、信頼性を増すことをポリアは「支持的接触」(supportive contact: Polya, ibid: 5)と呼ぶ。かくして、ポリアは、今なお未解決である「ゴールドバッハ予想」を例として、帰納という蓋然的な過程には、「暗示的接触」および「支持的接触」と呼ばれる典型的なパターンがあることを示している。

---

[18] Euler, L. *Opera Omnia*(オイラー全集)シリーズ 1, 第 2 巻, 459 頁, Specimen de usu observationum in mathesi pura の中に「擬実験」なる用語が述べられている。

[19] Lakatos, I. (1976). ***Proofs and refutations***. Cambridge University Press.

[20] Popper, K. R. (1979). *Objective knowledge*. Clarendon Press. これは、第 1 章 2 節(59 頁)で述べた。

[21] これは、次節で取り上げる「帰納論理学」の立場に対する批判的な注意となっている。

さて、ポリアは、科学哲学における「発見法」の議論、ことに帰納の問題に関して、その合理的パターンを強調したが、決してそれを強調しすぎることはなかった。実際、ポリアは、演繹的論証科学としての数学の側面と帰納的・経験的科学としての側面との間のバランスと、内的関連性を強調したのであった。しかしながら、科学哲学における「発見法」の議論においては、帰納的・経験的過程を過度に強調し、理論の進歩の判断基準をそれに還元しようとする立場もあった。その立場は、数理論理学者ルドルフ・カルナップ(R. Carnap)を代表とする「帰納論理学」(inductive logic)であった。

2．帰納論理学

序章で述べたように、「プラトン主義」の認識論は何世紀もの間、数学において優勢な地位を占めてきた。しかしながら、19 世紀、これに反対の態度をとる経験主義の考え方が英国において現れた(Bloor, 1979)[22]。経験主義者は、すべての知識は経験に由来すると主張した。従って、数学も知識である限り、それもまた経験から生まれるものでなくてはならないとした。経験主義の代表的な哲学者はジョン・ミル(J. S. Mill)である。ミルは、幾何学や算術のような演繹的科学は、実は物理学や化学のような「帰納科学」のほんの一種にすぎないことを示そうとした。実際、ミルは「演繹的ないし論証的科学はすべて帰納科学である」(Mill, 1959, Vol.2(6): 1, cited in Bloor, ibid: 87)[23]と述べている。ミルに代表される経験主義者は、「2 つの直線では空間を囲むことはできない」といったような数学的言明は、プラトン的世界ではなく現実の世界における対象についての言明であり、われわれの知覚的な実験や直接的な観察からの帰納的結論であるとする。また、演繹科学を支える証明に関しては、それは、三段論法の形式によって構成される議論ではなく、問題から問題へと具体的に進んでいく帰納的推論の連続であると見なした。このように、経験主義者たちは、数学の基礎を、直接的な観察と帰納法の確実性に置こうとした。こうした経験主義者の方法は、ポパー(Popper, 1959) [24]の用語を用いるなら、命題の真理性(真理値)を決定できる堅固な事実を表わす比較的少数の経験的事実、すなわち、観察または実験の記述のような「単称言明」(singular statement)だけを公理として認め、そこから帰納的推論によって仮説または理論のような「普遍言明」(universal statement)へと進むものである(Popper, ibid: 27)。

19 世紀後半のユークリッド的方法の挫折とともに、数学理論の科学性の基準が問題となると、こうした経験主義を哲学的・方法論的基礎とした「帰納論理学」(inductive logic)

[22] Bloor, D. (1976). *Knowledge and social imagery*. The University of Chicago Press.
[23] Mill, J. S. (1959/1848). *A system of logic* (8th ed.). Longmans.
[24] Popper, K. (1959). *The logic of scientific discovery*. Hutchinson.

が興隆してきた。代表的人物は、ルドルフ・カルナップ(R. Carnap)[25]である。彼は、いろいろな理論の数学的確率を、手に入る全証拠に基づいて定義し、確率が高ければ科学的であり、低かったりゼロであったりするものは科学的でないという真理性の基準を提唱した。以下では、こうした帰納論理学の考え方の適否を、ポリアに習い、数学的な事例により具体的に検討する[26]。

ここでは、代数学者バシェ(Bachet)による「四数定理」とポリア(Polya, 1954a)による定理の２つをとりあげ、帰納論理学的な観点から、両命題の科学的信憑性を比較してみる。先ずはバシェの定理(それを B で表す)を取り上げる。

> B：任意の数(ただし正の整数)は平方であるか、さもなければ、二つ、 三つ、もしくは四つの平方の和であるか、その何れかである。

バシェは、この推測を帰納的なものとして提示した。実際、彼は、それを 325 までテストし確認しただけで、証明なしでそれを公表したのであった(Polya, ibid: 62)。

他方、ポリアの定理(それを P で表す)は、次の問題に関する美しい結果である。

> u を正の奇数とするとき、方程式 $4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ の x, y, z, w が正の奇数であるような解の個数を求めよ。

この問題を検討する上で、代表的な事例として、例えば $u = 25$ を取る。すると $4u = 100$ となり、100 を四つの奇数の平方の和として表すような、すべての表現を見つけるという問題となる。そうした表現を、増加しない順に表現すると、次のようになる。

$$100 = 81+9+9+1 = 49+49+1+1 = 49+25+25+1 = 25+25+25+25$$

ここで、項のすべての並べ方を異なる解とみなす(例えば、81+9+9+1 と 81+9+1+9 を相違なる表現と考える)と、100 を四つの奇数の平方の和として表現する方法は、計 31 通りとなる。このような計算を、25 までの奇数、すなわち $u = 1, 3, 5, \cdots, 25$ について系統的に調べ整理すると、次のような表になる。

u	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
表現数	1	4	6	8	13	12	14	24	18	20	32	24	31

これは、一見して、何の関係も見いだせない散り散りばらばらの二列のデータであるが、ポリアは、それに対して合理的に探究しつつ、「古生物学者が石化した骨から死滅した動物の本来の容貌を再構成するように」(Polya, 1954a: 68)、その断片をつなげてゆき、

[25] Carnap, R. (1945). On inductive logic. Philosophy of science, 12, 72-97. Carnap, R. (1953). Inductive logic and science. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, 80*, 189-197.
[26] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1.* Princeton University Press.

一つの規則性を持った推測を発見する。「約数だ!」(Polya, ibid: 68)。すなわち、第 2 行の各数はそれに対応する第 1 行の数の約数の和に対応しているのである。かくして、次の推測(P)が導かれる。

> P : u が奇数であれば、$4u$ の四つの奇数の平方の和としての表現の数は、u の約数の和に等しい。

ここでポリアは、カルナップの「帰納論理学」の原理に基づき、2 つの推測に対する帰納的証拠について、それがどのくらい有力なのか、つまり、得られた証拠がどのくらい人を納得させるものかについて、数値的な比較を行う。すなわち、帰納的推論の証拠の強さを、「確証の個数」(number of verification)、「予言の正確さ」(precision of prediction)、そして「競争推測」(rival conjectures)という観点から比較する(Polya, ibid: 69-70)。

[確証の個数]　・バシェの推測は 325 個について確かめられている。
　・ポリアの推測は 13 個の場合について確かめられている。
[予言の正確さ]　・バシェの推測は(解の数)≧ 1 であることを予言している。
　・ポリアの推測は解の数が、これこれの量に正確に等しいことを予言している。
[競争推測]　・バシェの推測は $M = 4$ を主張する。しかし、それが他の推測($M = 5$ など)よりも優れている理由を持っておらず、多くの明白な競争相手を持つことになる。
　・ポリアの推測には競争相手は一つもない。まったく明白な規則が発見され、ほかのどのような規則もほとんど期待されない。

こうした比較から、バシェの推測(B)の証拠の方は、一つの点(確証の個数)については強いが、他の諸点については、ポリアの推測(P)の証拠の方が強い。このように、推測の帰納的証拠の有力さは、それぞれの観点によって異なり、どちらがどれほど有力かどうか、あるいは、確率的に尤もらしいかどうかということを、一概に決めることは困難である。ポリアは、こうした具体的な数学の問題に基づき、「帰納論理学」の発見法の原理、すなわち、帰納的証拠および既知の事実もしくは定理に基づき、理論の信用性の百分率、すなわち「確証度」(degree of confirmation: Popper, 1989: 282)[27]を測度とする確率関数を与えることが非現実的であると述べている。

> わたしは、この種のことを広範な一般性において試みようとするある哲学者達を知っている。しかし、具体的な問題を目の当たりにして、彼らは尻込みし、回避してしまい、面と向かってその問題に取り組まない理由を、何千回も弁明するのである。おそらく、この問題は、あなた方が一般的には多弁を費やし、また、真剣に悩みさえするが、具体的言葉に持ち込もうとすると、無に帰し消え去ってしまう、典型的

[27] Popper, K. R. (1989). *Conjectures and refutations.* Routledge.

な哲学的問題の一つなのである。(Polya, 1954a: 69)

帰納的な支持が多いほど理論の真理値が高いという、帰納論理学者における理論の科学性の基準、つまり手に入る全証拠に基づいて定められる確率値により決定するという方法は、数学の帰納的推測の場合に適用することは現実的でなく危険でもあると言える。数学における帰納の危険性を示す有名な命題は、「フェルマーの小定理」の逆、すなわち、次の命題である[28]。

> $2^{n-1}-1$は、nが奇数の素数のときnによって割り切れるが、nが合成数のときはnによって割り切れない。

中国では、古くからこの命題に気付いていたとされる。また、ライプニッツ(G. W. Leibniz)も中国の文献を読み、それを信じていたという(和田, 1985: 99)[29]。しかし、1819 年にフランスの数学者サルー(P. F. Sarrus)は、$341=11\times31$となる合成数であるにもかかわらず、$2^{341-1}-1$は341で割れることを示し、その推測を論駁した、つまり、この命題が偽であることを示したのであった。この命題は、帰納的な証拠に関しては、バシェの「四数定理」と同様に尤もらしいものである(実際、一方が340、他方が325まで成立する)。しかし、バシェの定理を325まで調べることに比べて、フェルマーの小定理の逆を341まで調べることの困難性は歴然としている。この推測が、341で初めて反証されることを思うとき、帰納論理学の科学性の基準は説得的なものとは言えないように思われる。

3．反証主義

これまでの節では、帰納の問題に関するポリアとカルナップの議論を、数学における具体的な問題を取り上げて検討してきた。ポリアは、帰納に代表される蓋然的推論において、一定の発見の論理、すなわち発見の合理的なパターンを再構成することができるとした。実際、ポリアは、数学的発見がいかにして起こったかについての「ありそうな物語を脚色し」(Polya, 1954a: vi)、発見のもとになっている動機や蓋然的推論を強調する。他方で、帰納論理学は、経験に基づく帰納こそが発見の論理であり、さらに、理論の確証性の基準でもあるとする。

これに反して、カール・ポパー(K. R. Popper)は、帰納に科学的発見の論理があるという主張は間違いであるとし、また、帰納的推論によって科学の諸法則を正当化すること

---

[28] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1*. Princeton University Press.
[29] 和田秀男 (1985). 代数学における反例. 岡部恒治(他著). *反例からみた数学*. 遊星社.

は不可能であると主張する[30]。

> わたしは、理論を考案あるいは発明する行為については、何ら論理的分析も必要ないし、また出来るものでもないと考える。・・・科学者をある新しい真理の発見に導いた段取りを「合理的に再構成」することが認識論の仕事であると考えた方が、より目的にかなうのではないかと反論する人もいるだろう。・・・もし、再構成されるべきものが、インスピレーションの生起に関する過程であるとするなら、わたしは、それを認識の論理学として取り上げるのを拒否しなければならない。このような過程は、実験心理学が問題にすべきことであって、論理学の関わることではない。(Popper, 1959: 31)[31]

> 論理的観点からすれば、単称言明から普遍言明を推論する(特殊から一般を導く)ことは、どんなに多くの単称言明を持ってしても、到底正当化されない。・・・いかに多くの黒いカラスの事例をわれわれが観察したにしても、このことは、「すべての」カラスは黒い、という結論を正当化するものでない。(Popper, ibid: 27)

ポパーは、あらゆる言明は仮説的性格を持っており、実証することができないという立場に立つ。実際、ポパーは「すべての理論は仮説である」(Popper, 1979: 29)[32]と断言する。知識はすべて推測的なものであるから、当然間違いや偏見が含まれる。知識には誤りが含まれているために、推測が実験の結果と衝突したり、推測の内部に矛盾が発見されたりすることがある。しかしながら、知識の中に誤りを発見したとき、人は真理に一歩近づくことができるとポパーは考える。というのも、誤りに気づくことにより、そこまでの知識の限界やそれに伴う困難について理解することになり、その困難を克服するためにより良い推測を構成しようとするからである。

誤りから学び、知識を成長させることによって真理に近づくために、ポパーは「推測と反駁の方法」(Conjectures and Refutations)[33]を考えた。この方法は、後に、次のような単純化された図式によって表された。

$$P_1 \rightarrow TT \rightarrow EE \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \text{(Popper, 1979: 119)}^{34}$$

ここで、P_1はわれわれの出発点となる問題(problem)である。TTはその問題を解決しようと試みる「暫定的理論」(tentative theory)である。EEはわれわれの最初の推測、暫定的理論の厳しい批判的吟味であり、「誤りを排除する過程」(error-elimination)である。P_2は問題を解決しようとした暫定的理論の批判的吟味から生じる新しい問題である。つまり、

---

[30] この点で、ポパーの労作「科学的発見の論理」そして「客観的知識」のタイトルは、誤解しやすい。
[31] Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery.* Hutchinson.
[32] Popper, K. R. (1979). *Objective knowledge.* Clarendon Press.
[33] Popper, K. R. (1989). *Conjectures and refutations.* Routledge.
[34] Popper, K. R. (1979). *Objective knowledge.* Clarendon Press.

問題P_1から出発し、TT、EEの過程を経て、新しい問題P_2で終わる。そしてこのP_2を新たな出発点として同じ過程が導かれ、さらに新たな問題P_3が生み出される。以下同じように探究が続けられる。このように、「知識の成長は、古い問題から新しい問題へと、推測と反駁の方法によって進む」(Popper, ibid: 258)のである。

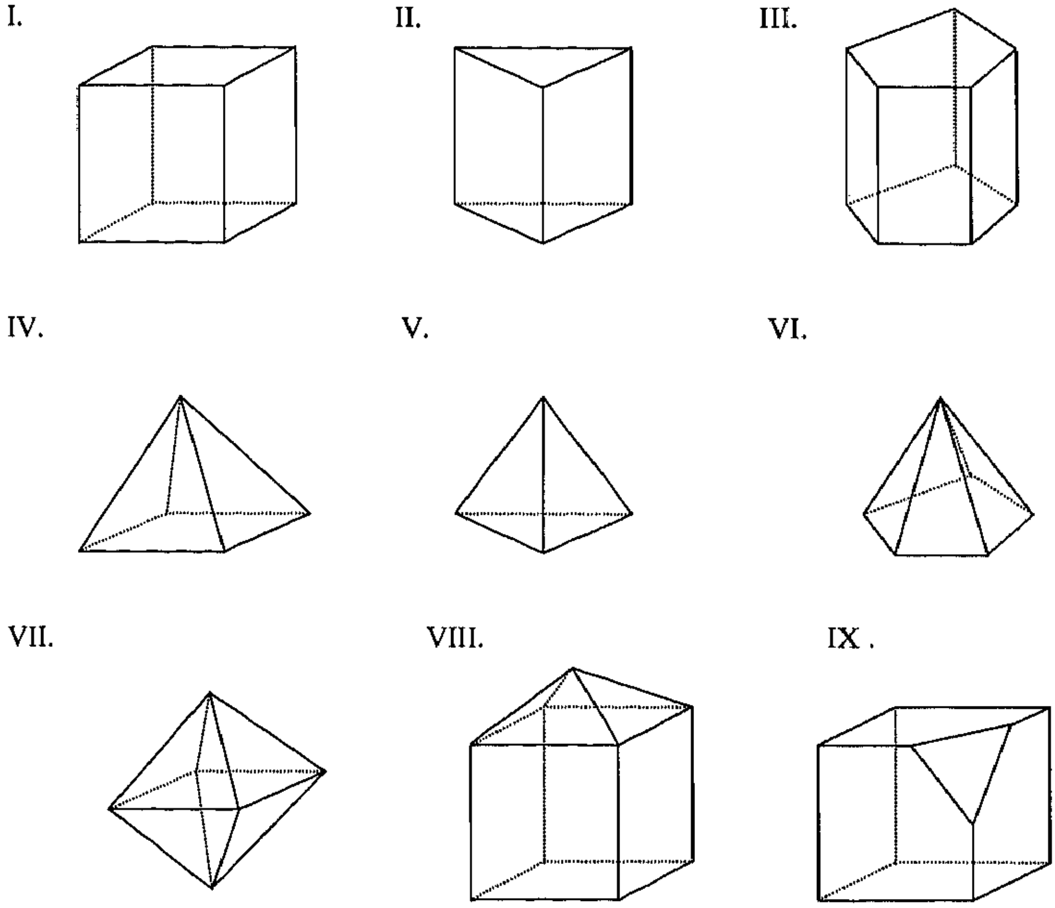
ある理論に問題が生じると、それを解決し、より良き理論に置き換えることにより新しい理論が生み出される。この場合、もとの理論と新しい理論との比較が問題になる。ポパーは、より良き理論とは、より多くのことを説明できる理論であるとする。つまり、提出すべき理論は、より多くの内容、ポパーの用語では「経験内容」(empirical content: Popper, 1959: 113)をもつ大胆なものでなければならないのである。より多くのことを説明しようとすれば、それだけ誤りを犯す危険性が増し、また、理論の弱点が発見され反駁される可能性も高くなる。しかしながら、人は誤りから学びうるのであり、それにより真理に近づくことができるとすれば、こうした「反証可能性」(falsifiability: Popper, ibid: 40)を探ることが理論構築の唯一の発見法的指針となる。かくして、ポパーの「推測と反駁の方法」は、大胆な理論を提出し、その誤りを発見するよう厳しく批判し続けることに、理論科学性、そして科学的探究の正当性を見いだすのである。

これまでの議論は、「反証主義」の立場に関する一般的な議論であった。そこで、次には、反証主義における探究の事例を、ポリアの著作から取り上げることにする。ここでは、「デカルト・オイラー予想」(Daescartes-Euler conjecture: Polya, 1954a: 35-37)[35]を取り上げる。

この予想は、多面体を分類する問題に関連している。その背景には、平面図形と立体図形の間の自然な類比がある。すなわち、平面の多角形においては、頂点の数と辺の数は一致し、これらのいずれにおいても多角形は簡単に分類することができる。そこで、多面体の頂点、辺、面の数の間に何か一般的な関係が成り立ちはしないか、という問題が提起される。

こうした問題の背景を踏まえた上で、ポリアは、下図に示されている、9個の手ごろな多面体を素材として、それらの頂点V、辺E、そして面の数Fを調べ、それらの間に成り立つ一般的な関係性を見いだそうとする。以下では、意識的に推測を立て、それを批判的にテストし、反証するという探究的な過程が、合理的に再構成されている。

[35] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1.* Princeton University Press.



最初の意識的な推測は、「面の数Fは頂点の数Vとともに増す」というものである。これは、平面の多角形においては、「辺の数が増せば頂点も増す」ことに鑑みて、自然な推測である。しかし、下の表から分かるように、この推測は正しくない。表では、立方体と八面体では、面Fは増えるのに、頂点Vは減っている。

	多面体	F	V	E
I.	立方体	6	8	12
II.	三角柱	5	6	9
III.	五角柱	7	10	15
IV.	四角錐	5	6	8
V.	三角錐	4	4	6
VI.	五角錐	6	6	10
VII.	八面体	8	6	12
VIII.	「塔」	9	9	16
IX.	「切頭」	7	10	15

こうして、手元にあるデータにより、推測が容易に論駁されると、さらなる意識的推測が提示される。それらは、「EはFとともに増す」、そして「EはVとともに増す」

というものである。これらの推測をテストするには、辺の数 E が(広義に)増加する順序で、F, V を並べ替えることが合理的であるとされる。

多面体	F	V	E
三角錐	4	4	6
四角柱	5	6	8
三角柱	5	6	9
五角錐	6	6	10
立方体	6	8	12
八面体	8	6	12
五角柱	7	10	15
「塔」	9	9	16
「切頭」	7	10	15

こうすることで、作業の見通しがよくなるが、残念なことに、何れの推測も結局は論駁されてしまう(前者に関しては五角錐と立方体が、後者に関しては八面体と五角柱が、それぞれ反証例となる)。しかし、ポリアは、ここで、論駁された推測から何らかの教訓を得ようとする。「われわれは、もとの予想が完全に間違っていたとは思いたくない。予想をいくらか修正すれば、やっぱり正しいのかも知れない。」(Polya, ibid: 40)。そして、次のように考えていく。F, V のどちらも E とともに増しはしないが、「全体的に見て」増すように見える。上の並べ替えた資料を見ると、F と V は「助け合って」増すように見える。こうした観察に基づく次の推測「$F+V$ は E とともに増す」は、表全体にわたって、すなわち、9 つすべての多面体において、$F+V=E+2$ となっている。こうした規則性は、単なる偶然の一致とは思えない。このことから、「任意の多面体において、面の数に頂点の数を加えたものは辺の数に 2 を加えたものに等しい。」という推測が暗示される(Polya, ibid: 38)[36]。ここで定式化された推測は、もちろん 9 つの特定の多面体を手がかりとしてはいるが、それが定式化に至るまでの過程を振り返るとき、それは、純粋に帰納的な過程というよりも、「推測と反駁」によって到達したといえる。

ここで構成された推測に対して、ポリアは「支持的接触」(supportive contact: Polya, ibid, 38)を得ようと、推測に対するテストを組織する。それは、ポパーが言うところの「反証可能性」(falsifiability, Popper, 1989: 40)[37]を探ってゆく際の、「厳格なテスト」を組織することに該当する。現段階において尤もらしく合理的なテストは、次のように組織される。すなわち、この推測が一般的に成り立つならば、多面体において最も調和性のある「正

[36] 本論文の第 5 章で、この素材と探究過程を参考して、高等学校で実験授業を組織する。
[37] Popper, K. R. (1989). *Conjectures and refutations*. Routledge.

多面体(正立体)」においても当然成り立つはずである、というものである(Polya, ibid: 38)。先の 9 つの多面体において、「正多面体」の中の三つが既に確かめられているので、残るは「正二十面体」と「正十二面体」であり、そのデータは次のようになる。

多面体	F	V	E
二十面体	20	12	30
十二面体	12	20	30

テストの結果、この推測はすべての正多面体において成り立つことがわかる。

このテストの成功により、推測は尤もらしくなった。しかし、反証主義の立場では、さらに新しいテストを組織しなければならない。最初の 9 つの多面体では、I、II、III の立体はすべて角柱であり、IV、V、VI の立体はすべて角錐である[38]。これらの三つの角柱と三つの角錐に対して、先の推側は真であった。そこで、ポリアは、今の時点で、一般的な角柱および角錐に対して推測をテストすることは「反証可能性」を探る実験としては当を得ているという(Polya, ibid: 39)。というのは、一般の角柱および角錐によるテストは、ポパーの言うところの、より多くの「経験内容」を説明できる大胆なものであり、同時に、それだけ誤りを犯す危険性が高く、理論の弱点が発見され、反証される可能性が高くなるのである。一般的な角柱、角錐の面、頂点、辺の数(F, V, E)を、文字を用いて表すと、次のようになる。

多面体	F	V	E
n 個の側面を持つ角柱	$n+2$	$2n$	$3n$
n 個の側面を持つ角錐	$n+1$	$n+1$	$2n$

そして、テストは成功し、推測は「験証」(corroborate: Popper, 1956: 33)[39]、すなわち、暫定的な支持が与えられる。これで、$F+V=E+2$ という推測は、単に一つや二つの新たな多面体に対してではなく、二種類の無数の多面体の系列に対して真であることが判明した。

このように、推測は簡単なテストにはかなり耐える。そこで、推測をやりこめる可能性が多分にありそうなより厳重なテストを組織してみる必要がある。そうしたテストのヒントとなるのは、VIII の多面体「塔」である。これは、立方体の一面を取り去り、その上に屋根を葺いたものであるが、立方体の代わりに任意の多面体をとり、その多面体の任意の面を選んで、その上に「屋根を葺く」という操作を行うことが考えられる。も

[38] ポリアの 9 つの多面体は実にうまく選びだされている。
[39] Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery*. Hutchinson.

との多面体が、F 個の面、V 個の頂点、E 個の辺を持つとし、選んだ面が n 個の辺を持つとするとき、この面の上に n 個の側面を持つ角錐をおけば、一つの新しい多面体が得られる。この新しい屋根を葺かれた多面体の面、頂点、そして辺の数を考えると、それぞれ、$F-1+n$，$V+1$，$E+n$ 個である。従って、$F+V=E+2$ が成り立つとき、明らかに、

$$(F-1+n)+(V+1)=(E+n)+2$$

も成り立つ。ゆえに、推測は「屋根を葺く」という手厳しいテストを無事に通過した、すなわち験証されたことになる。反証主義は、さらなる別種のテストを組織するが、そうしたテストとして、立方体の代わりに、任意の多面体の任意の頂点を選んで、そこを切り取ること、つまり「切頭」という操作により、「切頭多面体」を作ることである。推測は、こうした別種の、したがって、新しいいテストにも耐え得ることがわかる。ここで、一般的というのは、「屋根葺」や「切頭」という操作は、一定の多面体から出発して次から次へと新しい多面体を生み出す手続きを与えるからである。

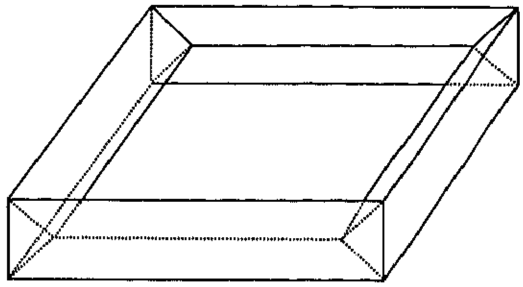
これまで見てきたように、ポリアは、「デカルトーオイラー予想」の帰納的研究を例示していく過程で、「推測をやりこめる可能性が多分にありそうな、何か手厳しい、厳格な検定をやってみるべきである」と言い、「厳格なテスト」(severe test)、「別種の確証」(verification of another kind)を行うことを述べている(Polya, ibid: 39)[40]。そこでは、立てられた推測に対して、これまで行ってきたテストよりもいっそう厳しく、かつ質的に異なるテストを考案し、試みている。反証主義の立場では、推測がテストをくぐり抜けることは、当該の推論の尤もらしさを高めるというよりも、単に、その推測が現段階でまだ生き残っていると見なすのであり、従って、さらなる手厳しいテストを計画しなくてはならないのである。このことに関して、ポリアは次のように述べている。

> 危険が大きいほど、名誉も大きい。最も危険な試験を通過すれば、最高の報酬、最強の実験的証拠が授かるのである。幾多の例また例があり、幾多の確証また確証がある。相反することがありそうな例ほど、そうでなさそうな例よりも、推測を決定に向かって近づけるのである。(Polya, ibid: 41)

このように、ポリアは、推測に一致する事例ではなくて、反証しそうな事例を探すのが望ましいと述べ、今までにテストしたものとは非常に異なった多面体を考えてみるように誘い、「額縁」のような形をした多面体についてテストするようにいう(Polya, ibid: 42)。その結果、これまで多くの手厳しいテストを通過してきた推測も、ついに、この事例に

[40] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1*. Princeton University Press.

よって反証されることになる。



反証事例　$F+V=E+0$

さて、反証主義では、どのような理論も、やがて反証されることを予期しているのであるが、その際に行われるのは、先程のポパーの図式(93頁)で示されているように、「誤謬を除去すること」(error-elimination)であった。このことに関して、ポリアは次のように述べる。

> 推測が十分一般的に考えたときに間違っているということになった場合に、「いつも凸な多面体を考えていたので、額縁のような「ドーナツ状」の多面体を考えてはいなかったのだ」、ということはできる。だが、それは言い訳というものである。事実、われわれは立場を変えて、もとの命題を修正しなければならないのである。受けた打撃が、結局において、有益なものとなり、ついには推測の、訂正されたより正確な命題に導くことは、まったくあり得ることである。(Polya, ibid: 46)

このように、反証事例は、当初の推測をより正確なものに洗練する上で有効なものとなりうる。この場合は、凸な多面体もしくは「球状」(球と同相な)多面体において、「デカルト・オイラー予想」が成り立つことが示唆される。さらに、ポリアは、上で組織した一例の手厳しいテストは、推測に対する証明のアイデアさえも示唆すると述べている。実際、「屋根ね葺き」、そして「切頭」という操作は、結果として、「三角形状の面だけをもつ凸多面体」、そして「三つの辺が出る頂点だけをもつ多面体」に対して推測を証明すれば、それで十分であることが示唆されるからである。

これまで見てきたように、「反証主義」は、理論の信頼性を高める上での合理的で規範的な探究の指針であり、また、それによって理論を進歩させ、新しい理論を生み出すための発見法でもあるということができる。

４．方法論的反証主義

反証主義は、知識というものはすべて推論的であり、常に反証可能性を検討し、誤りを除去しながら洗練・改良していこうという立場であった。しかし、実際に、数学が実

践される過程や、理論が構築される過程においては、必ずしも反証主義の考え方が当を得てない場合がある。つまり、理論の不備な点が最初からわかっている、すなわち、反証例を最初から予期しているが、それを重要とは見なさず、無視し、理論の構築を進めていくことが実際には多いということである。理論を進歩させる上でのこうした発見法的立場は「方法論的反証主義」(methodological falsificationism: Lakatos, 1978a: 20)[41]と呼ばれる。これに対して、先に取り上げた反証主義は「自然主義的」(naturalistic)と形容される(Lakatos, ibid: 12)。

ここで、理論が不備であることを最初から承知しつつ、また、反証例に直面しても理論を却下せず、理論構築を進めていった一つの例を取り上げる。この例は、レオンハルト・オイラー(L. Euler)による無限級数の和、すなわち、$\varsigma(n)$ の値を求める方法についてである。これは、ポリアが蓋然的推論の一つである「類比」による発見の威力を示そうと、合理的に再構成した歴史的事例である(Polya, 1954a: 17-22)[42]。

その問題の歴史はこうである。スイスの数学者であり、ニュートン(I. Newton)やライプニッツ(G. W. Leibnitz)と同時代人であったジャック・ベルヌイ(J. Bernouli)は、いろいろな無限級数の和を発見したが、どうしても解決できない級数があった。それは、次のような、平方の逆数の和である。

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots\cdots$$

ベルヌイは、「今までの自分の努力に逆らっているこの値を発見することに成功してそのことを知らせてくれたなら、どんなに有り難いことだろう」(cited in Polya, ibid: 18)と書簡で述べている。この問題は、ジャックの弟のジャン・ベルヌイの教え子であったオイラーの注意をひいた。彼は、求める和に対してさまざまな表示(定積分、他の級数)を発見し、その近似値(1.644934)を求めたが、どれも彼を満足させなかった。様々な努力の結果、オイラーは、ついに類比に基づく方法を編み出した。そこでは類比がきわめて大胆な推測に導いた。

この方法は、n 次の代数方程式の解と係数の関係についての基本的事項を用いる。

n 次の方程式

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n=0$$

が n 個の異なった解

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots\alpha_n$$

---

[41] Lakatos, I. (1978a). *The methodology of scientific research programs.* Cambridge University Press.
[42] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1.* Princeton University Press.

を持つならば(どれも0に等しくないとする)、左辺の多項式は次のようにn個の一次因数の積として表される。

$$a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)$$

この恒等式の両辺の、xの同じ巾の項を比べることにより、方程式の解と係数の関係(解の逆数の基本対称式)が導かれる。その最も簡単なものはxの係数を比べることによって得られる

$$a_1=-a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$

さて、オイラーの方法は次のものである。彼は、$2n$次の多項式、

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots\cdots+(-1)^n b_n x^{2n}=0 \qquad \cdots\cdots\cdot(1)$$

が$2n$個の異なった根、

$$\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \cdots\cdots, \beta_n -\beta_n$$

を持つとすると、この多項式は次のような因数の積として表せる

$$b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1{}^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2{}^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n{}^2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdot(2)$$

また、根と係数の関係から、次なる関係が成り立つ。

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1{}^2}+\frac{1}{\beta_2{}^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\beta_n{}^2}\right) \qquad \cdots\cdots\cdot(3)$$

オイラーは、有限次数の多項式(1)において成り立つ関係(2)と(3)を用いて、初等関数

$$\sin x=0$$

を級数展開、この場合は、マクローリン展開した無限次の多項式

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots\cdots$$

が無限個の根

$$0,\ \pi,\ -\pi,\ 2\pi,\ -2\pi,\ 3\pi,\ -3\pi,\ \cdots$$

を持つことを「ちっとも不思議ではない」(Polya, ibid: 19)という。そして、根のうちの0を捨てたものについて、有限次数での議論と類比な議論を展開し、級数の値を大胆に予言する。すなわち、

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

この式の、解と係数の関係より、

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\cdots$$

となる。従って、

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

となり、ベルヌイが希求してやまなかった級数の和が定まる。

オイラーは、自分の方法が大胆であることをよく知っていた。実際、「この方法は新しいものであって、そのような目的のために使われたことは、いまだかつてなかった。」と、10年後に書いている(Polya, ibid: 20)。オイラーの大胆な方法が類比によるものであることは、「有限次数」の代数方程式に対して成り立つ性質を「無限次数」の代数的でない方程式に適用できるとすること、つまりは、代数的でない初等関数 $\sin x$ が、方程式 $\sin x=0$ の無数個の根に対応して一次因数の積に分解可能であるとすること、さらに、解と係数の関係式が無限次数の場合でも成り立つとすることに現れている。

しかし、ポリアが述べているように、オイラー自身もこの方法に対して幾らか疑問を感じたし、彼の数学上の友人からも、多くの批判と異議が提出されたのであった(Polya, ibid: 20)。このことに関して、オイラーは、自分の理論仮説をより強力なものとするために、種々のテストに取り組み、いろいろな肯定的証拠を積み重ねている。例えば、彼が以前に計算した級数の和の近似値 (1.644934)は、最後の位まで $\frac{\pi^2}{6}$ と一致した。さらに、$\sin x$ を積として表した式において、新たな係数を比べて、例えば、4乗の逆数の和

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+\cdots\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

というような、人目を引く他のいろいろな級数の和も発見した。この場合についても、彼は数値を検査したが、ふたたび良く一致することを発見した。彼はまた、彼の方法によって、ライプニッツにより既に証明されていた重要な級数の和

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots$$

を再発見することに成功した。

オイラーは、他の例についても彼の方法によって験証するとともに、ベルヌイの級数の和を求める最初のアプローチを変更し、対数と級数の和による表示、すなわち

$0 < x < 1$に対して

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots\cdots$$

$$= \log x \cdot \log(1-x) + \frac{x + (1-x)}{1} + \frac{x^2 + (1-x)^2}{4} + \frac{x^3 + (1-x)^3}{9} + \cdots\cdots$$

を用いて、再び導くことに成功している(Polya, ibid: 33)。

オイラーは、自分の方法に対して次のように言っている。

> それは、ある人達には十分信頼できないように思えるだろうが、ここに至って一つの大きな確認があからさまにされた。それゆえ、われわれは同じ方法によって導かれる他のすべての事柄に対しても、全然疑いを抱くべきでないだろう。(cited in Polya, ibid: 21)

しかしながら、オイラーは依然として疑い続けたとされる。彼は、先の 4 乗の逆数の和の値の数値的確証を続けてやったし、もっと他の級数およびそれ以上の桁をも検査している。そして、すべての場合で一致することを発見した。

しかし、ずっと後になって、オイラーのこの方法に対する新たな異議が提出される。例えば、ジャン・ベルヌイの息子のダニエル・ベルヌイ(1700-1788)は、$\sin x$を一次因数に分解できることを、アプリオリに承認する理由などないこと、そして、 $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi$, ・・・以外に根が存在しないこと、すなわち、複素根が存在しないことを保証していない、という異議を提出する。しかし、オイラーは、最初の発見から約 10 年を経た後に、ようやく種々の異論に答え、彼の当初の発見的接近をある程度完全にし、新しい証明も与えた。かくして、オイラーの最も異彩をはなった結論が、10 余年の歳月をかけて満足に確かめられたのであった。

これまで見てきたようなオイラーの理論仮説は、最終的に証明されたが、それに至るまでの探究過程の大部分は、類比に基づく蓋然的推論によるものであった。ここで、オイラーが蓋然的推論の信頼性を高めるために行った一連の取り組みを、ポリアは、「予言する」、「確かめる」、そして、「一致する」という用語で説明する。ここで、「予言する」とは、ある推測が真であるという仮定のもとに、それまで知られていなかった他の事実を引き出すことを意味する。「確かめる」とは、その仮定をしないで引き出すことを意味する。そして、「一致する」とは、ある推測が真であるという仮定をもとにして、容易に引き出されることを意味する(Polya, ibid: 32)。

さて、オイラーによるこうした理論構築のパターンは、実は、ポパーの「方法論的反証主義」の典型的な事例となっているのである。方法論的反証主義の最も大きな特徴は、どのような理論も、それが提出されたときには膨大な「変則事例」(反証事例)に取り囲ま

れている、ということである。前の小節 3 で取り上げた「自然主義的な反証主義」に基づけば、そうした反証事例は、理論をたちまち反証してしまうことになる。しかし、ポパーが提唱する、「洗練された方法論的反証主義」は、反証可能性に関して「自然主義的な反証主義」とは異なる立場を取っている。それは、ある理論 T が反証されるのは、他の理論 T'が提出され、それが次の条件を持っているときであるとされる。すなわち、

1) T'が T よりも多くの経験内容を持っていること、つまり T がそれまでに言及していなかった新事実を予言すること。
2) T'が T のそれ以前の成功を説明すること、すなわち、T がもっている反駁されない内容はすべて T'の内容に含まれていること。
3) T'が持っている新たな内容のうち、その幾つかが験証されること。

であ(Lakatos, 1978a: 32)[43]。

ポリアが指摘しているように、オイラー自身は、自分の方法に対して半信半疑であったように思われる。しかし、自分の理論の不備を予想しながらも、また、他者から異議を提示されても、それに対して即座には対応せず、自分の理論の重要性と可能性を信じ、ある程度長期的な計画に基づき最終的に証明を提出するに至っている。こうしたオイラーの理論は、ポパーに代表される「方法論的反証主義」の基準に照らした場合に「科学的」であると見なされる。というのも、この理論は、(1) 当時まだ明らかにされていなかった新しい事実を「予言」しており、(2) 従前知られていた事実と「一致」することが「確かめられ」ており、そして、(3) 予言された値の幾つかが近似的方法もしくは別種の方法により験証されているからである。

これまでの議論では、数学および科学的発見法について、様々な哲学的立場を数学の具体例をとり上げて、その特徴を検討してきた。これまでの検討から示唆されることは、数学の理論が構築される具体的な過程を見るとき、「帰納論理学」や「自然主義的な反証主義」の考え方は、必ずしも重要とはならない場合があるということである。すなわち、科学者が理論仮説を発展させる際には、その理論の不備を当初から予想し、反証事例も最初から想定しているのである。さらに、反証事例に直面しても、研究者は、過度に神経をとがらすことなく、それらをあまり重要な事実とは見なさず、理論構築を進めていくことが多いのである。こうした理論構築の特徴を全面に出している科学哲学の立場が、「可謬主義」(fallibilism: Lakatos, ibid: 10)と呼ばれるものである。この立場は、本論で数学的活動論を検討する際の鍵であり、柱でもあるので、稿を改めて議論する。

[43] Lakatos, I. (1978a). *The methodology of scientific research programmes*. Cambridge University Press.

第３節　可謬主義的数学論

１．科学的研究プログラムの方法論

ラカトシュは、ポパーによる「方法論的反証主義」と数学論(これについては、後の 2 で取り上げる)を背景として、科学哲学の分野に「科学的研究プログラムの方法論」(*The Methodology of Scientific Research Programs*)という新しい立場を提唱した(Lakatos, 1978a)[44]。彼は、重要な科学的理論を「記述」するための形態的単位は、個々の仮説ではなく、「研究プログラム」であるとする。さらに、理論というのは、ある日突然に沸き上がってきたり消滅したりするものではなく、それは、長期的に構成されることを意図するプログラムであるとする。

「研究プログラム」は、大きく別けて、二つの構成部分からなっている。一つは、理論の主要な部分である「堅い核」(hard core)と、それを取り巻く補助仮説からなる「防御帯」(protective belt)である。もう一つは、強力な問題解決機構をもつ二種類の「発見法」(heuristics)、すなわち「肯定的発見法」(positive heuristics)と「否定的発見法」(negative heuristics)である。これらの発見法は、高度な数学的技術の助けを借りながら「変則事例」をうまく消化し、場合によってはそれを支持する証拠に変える役割を演ずる。以下では、これらの構成要素の意味を定める。

堅い核と防御帯　すべての科学的研究プログラムは、その「堅い核」と「防御帯」によって特徴付けられている。

> すべての研究プログラムは,その特徴としてしたたかに防御される堅い核をもち、どれもそれよりはもう少し柔軟性のある防御帯をもつ。(Lakatos, ibid: 5)

これらの意味を説明するために、ラカトシュは、しばしば「ニュートン物理学」を挙げる。ニュートン物理学は、その根幹をなす法則として、三つの力学法則(慣性の法則・運動の法則・作用反作用の法則)と万有引力の法則(重力理論)を含んでいる。これら四つの法則が、ニュートン物理学の研究プログラムでいう「堅い核」である。そして、ニュートン物理学が発達していく過程で、この堅い核を反証から守るために、数多くの補助仮説が構成される。それが「防御帯」と呼ばれるものである。ニュートン物理学の発達の初期には、それに対して、多くの反証事例が提示された。例えば、惑星の運行がニュ

---

[44] Lakatos, I. (1978a). *The methodology of scientific research programmes: Philosophical papers, vol.1.* Cambridge, NY: Cambridge University Press.

ートンの理論とは一致しないこと等である。それらの反例は、基本的に、ニュートン理論の心臓部、すなわち「堅い核」を反証することになるが、ニュートンとその理論の支持者は、様々な補助仮説を考案し、堅い核を反証から防御する。例えば、大気による光の屈折や磁気嵐中の光の伝播等についての仮説を提示することで、反証事例を説明し、堅い核が決して反証されないようにするのである。

肯定的発見法と否定的発見法　研究プログラムには二種類の「発見法」があり、理論の擁護する者は、その理論を取り巻いている「反証事例」を、そうした発見法を用いて巧妙に対処していく。一つは「否定的発見法」と呼ばれるもので、理論の「堅い核」に対して否定的推論を立ててはならないことを原則とする。理論の発展には、多くの異議や反証事例を伴うが、理論の提出者は、自分の理論の「堅い核」を防御するために「防御帯」を構成し、そうした反例を覆したり、験証事例へと変えていき、決して「堅い核」を反証しないようにする。

> プログラムの否定的発見法によれば、われわれはこの「堅い核」に対して否定的推論を立ててはならないことになる。そうする代わりに、われわれは創意工夫を重ねてこの核の周囲をめぐる防御帯を形成すべく「補助仮説」を練り上げたり創造したりさえせねばならず、これらの補助仮説の方に否定式をさし向けねばならないのである。(Lakatos, ibid: 6)

かくして、否定的発見法によって、防御帯は不断に修正され置き替えられたりもするが、堅い核は不変のままとなる。

研究プログラムには、もう一つの発見法、すなわち、「肯定的発見法」がある。これは、理論家がそれに従って理論を逐次洗練・発展させていく上での、長期間にわたる研究指針を定めたものである。また、「肯定的発見法」は、膨大な反証事例に対処する上での長期的な指針も与える。すなわち、何れの研究プログラムも、その進歩の過程で、膨大な反証事例を処理していくことになるが、その手続きは勝手気ままな順にではなく、基本的に、理論家の理論発展の基本構想、すなわち「肯定的発見法」に従って整理され、進められてゆくのである。

> 大きな研究プログラムの中には、常に変則事例があることが知られており、通常、研究者はそれを脇へ押しやって、そのプログラムの「肯定的発見法」に従っている。一般に研究者は、気を散らすような変則事例よりも「肯定的発見法」に注意を注ぎ、「手に負えない事例」も、プログラムが進歩するにつれて確証事例となっていくだろうと思っているのである。(Lakatos, ibid: 147)

このように、研究者は、自分が支持しているプログラムの「肯定的発見法」に規定されている指示に従って自分のモデルを構築することに一意専念し、現実の反証事例も、利

用可能なデータも無視する。かくして、「肯定的発見法」は、膨大な反証事例や変則事例に直面している科学者を混乱から救い出し、長期間にわたって定められた研究方針に従い理論の整備を進めることを可能にする、いわば「羅針盤」であると言える。さらに興味深いことは、「肯定的発見法」は、そのプログラムが強大なものであれば、まさに理論の開示時から、防御帯をどのように作っていくかの全体的路線も含まれているという(Lakatos, ibid: 88)。

ラカトシュは、科学の歴史上で、最も成功を収めた研究プログラムの例は、ニュートンの重力理論であると述べている。この理論が初めて提出されたとき、この研究プログラムは、膨大な量の変則事例と、それらを支持する理論から反論を受けていた。しかし、ニュートン主義者は、見事なほど我慢強く、また巧妙に、反証事例を次々に験証事例に変えてゆき、新たに生起する個別の困難を克服し、最終的に整備された理論に仕上げていった。このように、膨大な反証事例の海の中で、理論を精緻化できたのは、まさに「肯定的発見法」のおかげであろう。ニュートンは、最初の素朴な理論モデルが多くの変則事例を持つことを十分承知しつつ、それを提示している。

> ニュートンは、最初、太陽を固定点と考え、惑星も一つの点と考える惑星体系のプログラムを作り出した。ところが、このモデルは、ニュートンがみずから定めた力学の第三法則に抵触したため、太陽も惑星もそれらの共通の重力中心の周囲を回るようなモデルに置き代えねばならなかったのである。**この変化は、観察が引き金になって起こったのではなく、プログラムを発展させる上で生じた理論的困難が、その変化を促したというわけである。**・・・そして、今度は惑星間力を認めて、摂動の研究に取りかかったのである。この段階に至って、彼は諸事実に対して、以前よりも注意を払って眼を向け始めた。それらの事実のうちの多くは、このモデルによって見事に説明されたものの、そういかなかったものも少なくなかった。 (Lakatos, ibid: 49-51, 強調は筆者)

ラカトシュは、こうしたニュートンによる理論発展の事実ほど、研究プログラムのもつ「肯定的発見法」の存在を明確に物語っているものはないと述べている。

これまで二種類の発見法を見てきた。それを整理すると、「否定的発見法」は、「防御帯」を構成することで研究プログラムの「堅い核」を反証から守り、「肯定的発見法」は、「堅い核」に基づく理論を発展・精緻化する順序を指図するとともに、予期される不備に対して計画的に「防御帯」をも部分修正する全体路線を与えるものであった。

前進的問題移動と退行的問題移動　ラカトシュが科学的研究プログラムの方法論を提出したのは、科学理論の進歩を合理的に再構成し、説明することにあった。ラカトシュは、ポパーが提示した「方法論的反証主義」の科学性の基準を採用した。それは、先に(103頁)で述べたように、新しい事柄を予言し、既知の事実を新しい観点から説明し、予言し

た事実の一部を験証する、という基準であった。この基準は、複数の研究プログラムが競合している状況を前提としているが、ある研究プログラムが、それまで予期されていなかった新しい事実を予言する力を持つとき、それは「前進的問題移動」(progressive problemshift: Lakatos, ibid: 34)をしていると呼ぶ[45]。逆に、新しい事実を何も予言できなくなり、変則事例に対して後知恵的な説明しかできなくなった研究プログラムは「退行的問題移動」(degenerating problemshift: Lakatos, ibid: 34)をしていると呼ばれる。

> 前進的研究プログラムでは、理論が、それまでに知られていなかったような新しい事実の発見を促す。これに反して、退行的プログラムは、理論は既知の理論とうまく折り合うためにのみ組織される。(Lakatos, ibid: 5)

ラカトシュは、「前進的問題移動」をしている研究プログラムが「退行的問題移動」しかできなくなった研究プログラムを追い越していくことによって、科学的理論が進歩すると考えた。このことに関して、ラカトシュは再び、ニュートン理論を取り上げる。

> 1686 年、ニュートンが『プリンキピア』を発表したとき、ニュートン理論では月の運動さえきちんと説明することはできない、というのは一種の常識でさえあった。･･･しかし、この研究プログラムは、今までに夢にも気付かれたことがないか、以前のプログラムや競合するプログラムとは矛盾してしまうような、そんな事実を予言することができた。ニュートンが重力理論を発表した時、例えば、彗星に関して、二つの理論があった。一つは当時の優勢な見方で、彗星を神の怒りの現れであり、神が災厄を与えて人間を撃とうとしていることの警告と見なす理論であった。もう一つの、あまり知られていない方の理論はケプラーのもので、彗星は直線的な運動をする天体の一種であるというものであった。ところが、ニュートン理論は、彗星のうちには、放物線や双曲線を描いて運動し、二度と戻って来ないものもあるかと思うと、通常の楕円を描くものもあると見なした。ニュートンのプログラムの枠内で研究していたハレー(E. Halley)は、ある彗星の軌道の短い一部を観測したことを基礎に、それが 72 年毎に戻ってくるはずであることを算出した。彼は、それが天空のある特定の地点に再び見いだされるはずの時刻を、分の単位まで算定した。これは信じ難いことだった。けれども実際に 72 年後になって、もうニュートンもハレーも既に他界していたが、ハレー彗星はハレーが予言した通りの時刻に戻ってきたのだった。(Lakatos, ibid: 5)

このように、ニュートン力学は、それまでの理論が言及することがなかった、全く新しい予言を生み出す力を持っており、また、その一部が験証されるという意味で、前進的な問題移動をしているといえる。これとは対照的に、「退行的問題移動」をする理論もある。ラカトシュは、自然科学における歴史的な例として、ボーア(H. Bohr)による電子軌道に関する研究プログラムを挙げる。ラカトシュは、その理論の提出当初、多くの目

[45] 先に述べた「オイラーによる無限級数の和を求める方法論」は、数学において「前進的問題移動」をした一つの例である。

を見張る発明能力を示すが、やがて衰退をし始め、アド・ホックな仮説が増大し、対立する新しい研究プログラムである「波動力学」(wave mechanics)によって追い越されてしまう歴史を合理的に再構成している(Lakatos, ibid: 55-69)。このように、「退行的問題移動」を行う理論は、何ら新しい予言や説明をすることができず、変則事例の対応に腐心し、事実の後追いをするだけとなり、徐々に、新しい理論によって負い越されてしまうのである。このように、理論の退行、そしてまた前進も、比較的長い期間を要するのである。

2．証明と論駁の弁証法

本小節では、ラカトシュの労作『証明と論駁』(Lakatos, 1976)から、「デカルトーオイラー予想」をめぐる歴史を取り上げる。さらに、「証明と論駁の方法」の意義を述べ、最後に、それが、前節で述べた「科学的研究プログラムの方法論」とどのように関わっているかを議論する。先ず、「デカルト・オイラー予想」とその証明から始める。

前節(94 頁)で述べたように、オイラーは、18 世紀の半ばに「多面体の分類問題」に取り組んでいた。それは、平面における多角形の分類の類比的問題であった。多くの試行錯誤の後、オイラーは全ての正多面体に対して、$V-E+F=2$という関係が成り立つことに気づき、そして、どんな多面体においてもこの関係が成り立つと推測した。

この推測の証明は、19 世紀初頭(1810 年)に、フランスの数学者オーギュスタン・コーシー(A. L. Cauchy)により与えられた。その証明では、立方体をいわば「総称的な例」として挙げ、三つの段階、すなわち「補題」(lemma)に分けて説明する。

第 1 段階：多面体が、「薄いゴム」でできている表面をもち、中空であると想定する。このゴムでできた立方体の一つの面を切り出し、残りの表面を破らずに黒板上に平らに伸ばすことができる。面や辺が歪み、辺は曲がってしまうかもしれないが、V, E, F は変化しないので、原多面体に対して$V-E+F=2$であることは、この平らな網状組織では$V-E+F=1$であることと同値である。図 1 は立方体の場合の平らな網状組織を示す。

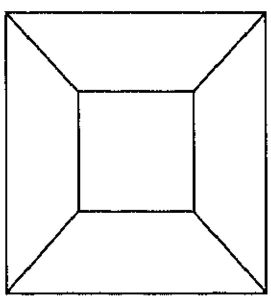


図 1

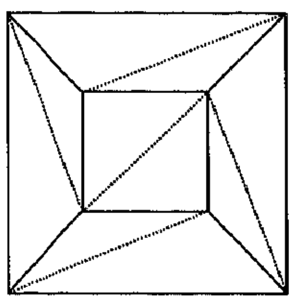


図 2

第２段階：こうして得た多角形からなる平面図形に対角線(点線)を引き、三角形分割する(図 2)。ここで、それぞれの対角線を描くことによってE、Fは両方とも一つずつ増えるが、全体の$V-E+F$は変わらない。

３段階：三角形分割された網状組織から今度は一つひとつ三角形を取り除く。一つの三角形を取り除く際、一つの辺を取り除くか(この場合一つの面と一つの辺が消える(図 3))、あるいは二つの辺と一つの頂点を取り除くか(この場合一つの面、二つの辺、一つの頂点が消える(図 4))のどちらかになる。そうすると、一つの三角形が取り除かれる前に$V-E+F=1$であるとすると、その三角形が取り除かれた後でもこの関係は変わらない。この手続きの終わりにはただ１つの三角形が残る。三角形では明らかに$V-E+F=1$であるから、今の議論を逆にたどると、伸開された図形で$V-E+F=1$となり、原多面体では$V-E+F=2$が真となる。こうして推測は証明される。(Lakatos, ibid: 7-8)

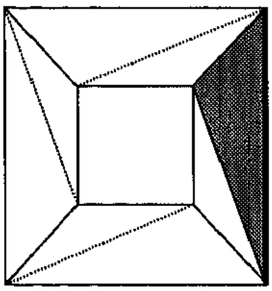


図 3

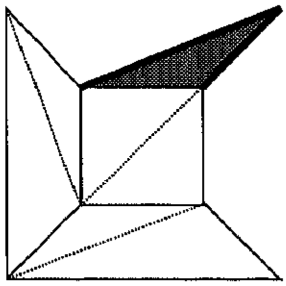


図 4

「デカルトーオイラー予想」とそれについてのコーシーの証明が提示されると、それをめぐって多くの数学者から種々の論駁や反例が提出された。ラカトシュは、反例を 2 種類に分けている。一つは、「局所的反例」(local counterexample: Lakatos, ibid: 10)と呼ばれるもので、推測それ自体を論駁するのではなく、証明のなかで使われている部分的補題を論駁するものである。それに対して「大局的反例」(global counterexample: Lakatos, ibid: 10)と呼ばれるものは、推測それ自体を論駁するものである[46]。そこで、本節では局所的反例による論駁とその対処法、そして大局的反例による論駁とその対処法についてラカトシュの議論を整理する。

局所的反例による証明批判とその対処法

立方体に関して初めの二つの操作(先の証明における操作)を行った結果得られる三角網状組織(図 2)を考える。もし、ジグソーパズルで断片を取り出す時のように、この網状組

[46] この意味で、反例は、3 種類に区別される、すなわち、「大局的かつ局所的」、「大局的であるが局所的でない」、「局所的であるが大局的でない」ものである。

織の内側から三角形を取り除くことにすると、一つの辺も頂点も取り除くことなく三角形を一つ取り除くことになる。このことに関して、証明の第三補題は誤りとされる[47]。

この論駁の対処法として、有罪とされた補題を論駁不可能なものとなるよう、それを変更した補題で置き換えることで、容易に証明を洗練・改良することができる。ここでは、「任意の三角形を取り除く」という部分を、単に、「任意の境界三角形を取り除く」というものに置き替える。つまり、証明の第三段階に「境界」というただ一語を挿入し、「三角形分割された網状組織から今度は一つひとつ境界三角形を取り除く」とする。これにより、もとの証明を正しく直したことになる。

ここで、局所的反例をもう一つ例挙げる。先の図(2)において、番号付けられた10個の三角形のうち、最初から8つを、図5の順序で取り除く。その時、第8番目の「境界三角形」を取り除く際、確かに二つの辺を取り除くが、頂点は一つも取り除いていないことになり(図6)、証明の第三補題は誤りとされる。

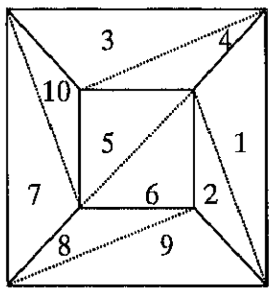


図 5

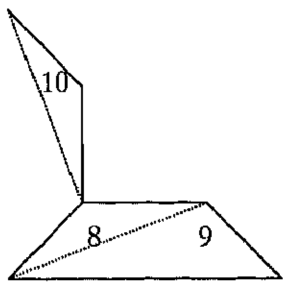


図 6

この論駁に対処するために、今度は三角形を取り除く操作に関する文を、「三角形を $V-E+F$ が変わらない仕方で、一つひとつ取り除く」というもので置き替える。これは、網状組織の三角形は、それを正しい順序で取り除く際、最後の三角形に至るまで $V-E+F$ が変わらないように番号を打つことができるということである。しかし、このような番号付けが可能であるかどうかという批判も、当然出てこよう。

大局的反例による推測批判とその対処法

大局的反例とは、推測それ自体を論駁するものであった。通常は、命題に対して一つでも反例が示されたなら、その命題は偽として却下される。ラカトシュは、これを論駁による「推測の拒否」(rejection of conjecture: Lakatos, ibid: 13)と呼ぶ。大局的反例を受け入れて、推測を偽と見なし、全面降伏することは、伝統的な学校数学における数学的世界観である。しかしながら、実際の数学者たちの活動は、論駁や反例が示された場合に、

[47] このことは、立方体の場合のみでなく、四面体を除くすべての多面体について誤りとなる。

複雑で多様な様相を呈する。論駁に対するその他の対処法として、ラカトシュは、「モンスター排除法」(monster-barring)、「モンスター調整法」(monster-adjustment)、「例外排除法」(exception-barring)、「補題組み込み法」(lemma-incorporation)などを区別する(Lakatos, ibid: 13-33)。

「モンスター排除法」とは、反例による論駁がなされたときに、推測を却下するのではなく、逆に、反例を「モンスター」、すなわち病的な例として忌み嫌い、排除しようとするものである。その際に、数学者は、込み入った多面体の定義を構成することで、反例が推測を論駁できないようにし、反例を多面体として受け入れることを拒絶するのである。例えば、図 7 のように、一対の入れ子になった立方体によって境界付けられた立体は、$V-E+F=4$であるから、推測を論駁する多面体である。

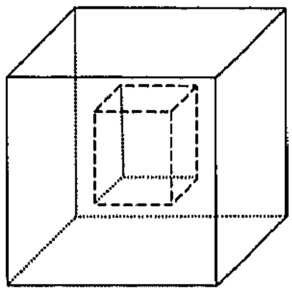


図 7　入れ子立方体($V-E+F=4$)

これに対して、「モンスター排除法」という対処法は、「多面体とは表面が多角形の面からなる立体である」というように、多面体の定義を改良することにより、この入れ子の立方体は多面体を不発にし、推測を論駁から防御するのである。

こうして定義を改良することにより、一旦は反例を拒否することができたが、さらなる反例が提示される。例えば、辺が共通である二つの四面体(図 8)と、頂点が共通である二つの四面体(図 9)を考える。両者ともただ一つの表面を作り、「表面が多角形の面からなる立体」であり、上の定義を満たすが、$V-E+F=3$となり、推測を論駁する。

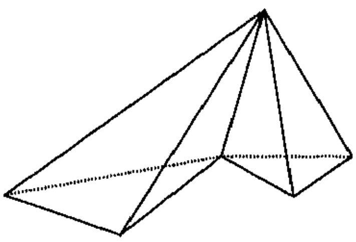


図　8

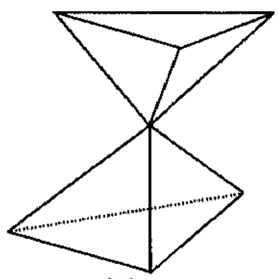


図　9

「モンスター排除法」は、これらの反例に対して、再び多面体の定義を改良し、反例

それ自体を拒絶する。例えば、「多面体は多角形の系で、あらゆる辺で、ちょうど二つの多角形が出会い、しかも、任意の多角形の内部から他の多角形の内部へいかなる辺とも一頂点では交わらない道を通って到達することができるも」という具合に、定義を改良するのである。この定義により、先の二つの反例は反例ではなくなり、再び、推測は論駁されないことになる。

しかしながら、いくら定義が改良されても、さらなる反例が提示される。その例は、先の「反証主義」の議論(113 頁)において取り上げた「額縁」の形をした多面体(図 10)である。

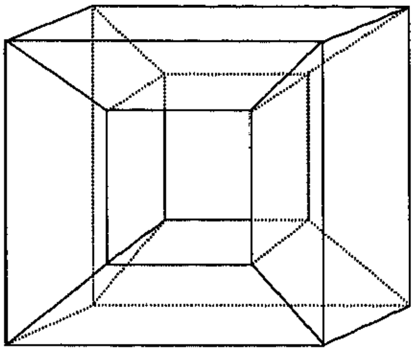


図 10 額縁 $V-E+F=0$

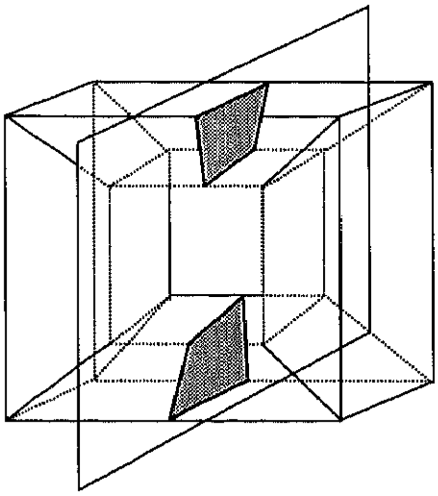


図 11 モンスター排除

これに対しては、「多面体では、空洞の任意の点を通り、ただ一つの多角形で切る平面が少なくとも一つ存在する」という条項を定義に含ませることにより、この「額縁」は多面体ではなくなり、従って、推測は論駁されないことになる。このように、様々な反例が提示されると、その都度、後知恵的に、多面体の定義に新たな条項を導入し、反例とされているものをモンスターとして排除し、推測を擁護するのである。

次の「例外排除法」は、大局的反例を病的な例、つまり「モンスター」と呼んだりして拒否してしまうのではなく、反例として受け入れようとするものである。その際に、「モンスター排除法」では定義のみが改良され推測には変化がなかったが、今度は、原推測に対して制限条項をつけ加えることによって改良する。「例外排除法」は、「デカルト・オイラー予想」の正しさには、一定の領域があるのだとする。この方法に関して、ラカトシュは、二種類の方法を挙げる。一つは「断片的排除」(piecemeal exclusion: Lakatos, ibid: 24)と呼ばれるもので、それぞれの大局的反例に対応して、推測に断片的な制限条項をつけ加えるものである。例えば、「入れ子立方体」が反例として提示されると「空洞を持たないすべての多面体」として、また、「額縁」という大局的反例に対して「トン

ネルを持たないすべての多面体に対して」、$V-E+F=2$が成り立つ、というふうに推測を改良するのである。もう1つは、「戦略的退却」(strategic withdrawal: Lakatos, ibid: 28)[48]と呼ばれるもので、例外を断片的に排除するのではなく、例外を一つにまとめた上で推測に制限条項をつけ加えるものである。例えば、上の二つの大局的反例に対して、「全ての凸多面体について、$V-E+F=2$が成り立つ」と、推測を改良するのである。しかしながら、こうした制限は、反例が提示された後の、アド・ホックで後知恵的な対処法であるため、制約条件によって境界付けられた多面体の集合の内部に反証事例が潜んでいる可能性や、境界の外部に正事例が残されてしまう可能性を否定できない(図12)。

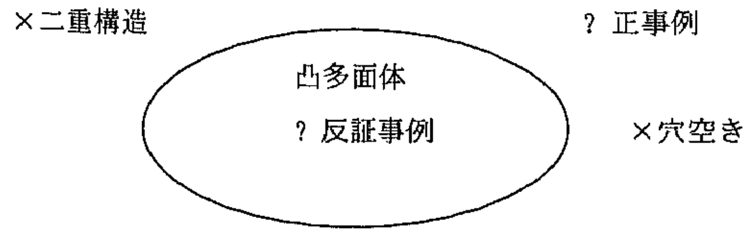
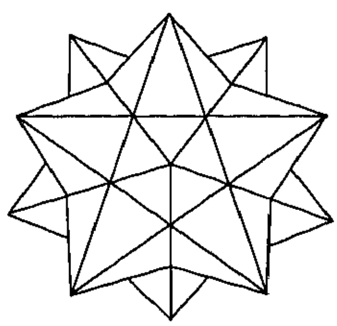


図12　例外排除法による推測のアド・ホックな境界設定

次の「モンスター調整法」も、「例外排除法」に似て、反例を敵視して放逐するのではなく、むしろ、提示された反例の解釈を修正して、それを自らの理論枠組みに包摂するものである。例えば、「ケプラーの星形12面体」(Kepler's star-polyhedron: Lakatos, ibid: 17)、(図13)を考える。これは、星形五角形(図14) 12枚によりできる多面体である。それは、12の頂点、30の辺そして12の面をもつので、$V-E+F=-6$である。



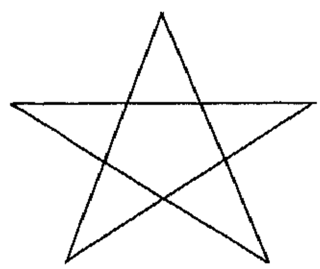


図13 星形正12面体 $V-E+F=-6$　　図14　星形五角形

こうした反例に対して、多角形の定義を制限することにより、それをモンスターとして排除することもできるが、「モンスター調整法」では、それを、32の頂点、90の辺そして60の3角面をもつ「三角多面体」と解釈することにより、$V-E+F=2$となり、

[48] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.

正事例、すなわち験証事例として包摂される。

最後の「補題組み込み法」は、これまで述べてきた種々の反例の対処法と大きく二点において異なっている。第一に、この対処法は、これまでの反例の対処法とは異なり、反例や論駁を歓迎し、それを積極的に扱う。第二に、これまでの対処法では、いずれも証明を利用しなかったが、「補題組み込み法」は「**証明分析**」(proof-analysis: Lakatos, ibid: 42)によって、推測を改良する。

この方法は、もし、大局的反例が推測を論駁する際には、必ず、証明の中に誤った補題、いわば「**有罪補題**」(guilty lemma: Lakatos, ibid: 34)があると考えるのである。この有罪補題は、証明を構成する際に見落とされていた「**隠れた補題**」(hidden lemma: Lakatos, ibid: 43)であったか、誤認されていたものと考える。そして、この補題をよく考察して、証明を注意深く分析することにより顕在化した有罪補題を、推測の中に条件として組み込むのである。これにより推測の領域を、有罪補題の領域へ制限することになるので、推測は、当初の大局的反例によって論駁されないことになる。この方法も、他の方法と同じく、大局的反例から推測の主要部分を防御する点では同じであるが、上で述べた二点に関して、全く異なる対処法となっている。

「補題組み込み法」の例として、先の「額縁」($V-E+F=0$)という大局的反例に対して、証明分析を行うと、この反例が第一補題、すなわち「初めに面の一つを切り出し、残りの表面を破らずに黒板上に平らに伸ばすことができる」を論駁することが分かる。これに対して、多面体の定義を、「一つの面を取り除いて平面上へ伸ばせる」という条項により制限し、それを「単純」(simple)多面体と呼び、推測に組み込む。かくして、原推測は、「単純多面体について$V-E+F=2$が成り立つ」となる[49]。

こうした証明分析法を説明するために、もう一つ反例を挙げる。ここで、てっぺんに小さな立方体をのせた立方体(重なり立方体)を考える(図 15)。これは、$V-E+F=3$となり、大局的反例となる。原推測をやり込めるこの多面体に対して、証明分析をすることにより、その第二補題、すなわち、「対角線を新しく引いて三角形分割する過程で、常に辺と面の数が一つずつ増える」が論駁されることがわかる。なぜならば、この重なり立方体の伸開した図を作ると、環状面(図 16 のグレーの部分)ができ、そこに引いた最初の対角線は、面の数を増加させないからである。これに対して、「対角線によって分割されるといかなる面も二つの部分に分けられる」ような面を、「**単連結**」(simly-connected)面と呼び、この概念を、前述の改良された推測に条件として組み込み、「単純多面体で、

[49] また、入れ子立方体などの二重構造をもった大局的反例も、「単純多面体」という概念を推測に組み込むことにより、対処可能となる。

すべての面が単連結なものに対して、$V-E+F=2$が成り立つ」と原推測を改良する。

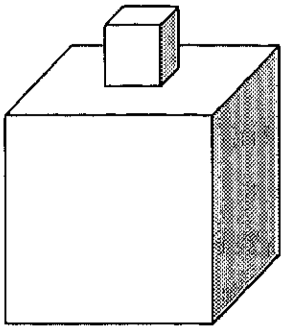


図 15 重なり立方体 $V-E+F=3$

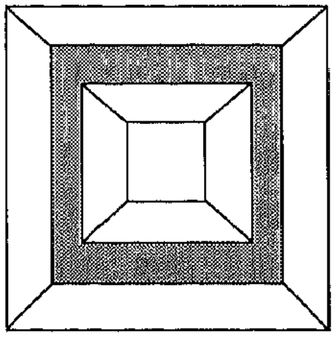


図 16 底面を除いた伸開図と環状面

これまで見てきたように、「デカルトーオイラー予想」に対して様々な大局的反例が出現した。その際、「推測の拒否」は推測を却下した。また、「モンスター排除法」は、モンスター排除定理、すなわち、「すべての多面体はオイラー的である($V-E+F=2$が成り立つ)」を得るように定義を改良することで、当初の推測を擁護した。しかし、モンスター排除定理は、最初の素朴な推測と言語表現で一致し、改良の工夫は、定理に含まれる多面体の意味の内密裏な変更の陰に隠れてしまう。他方、「例外排除法」では、本来は関係のない条件、つまり凸性を導入し、「すべての凸多面体はオイラー的である」という推測を構成した。これらの対処法とは対照的に、「補題組み込み法」は「証明」そして「反例による論駁」の両方を有効に利用する。つまり、大局的反例に照らして証明分析法を行い、その中から誤った補題を探し、それを条件として当初の推測に組み込むことで、最初の推測を着実に改良し、最後には、「単連結面をもつすべての単純多面体はオイラー的である」という定理を得る。かくして、「補題組み込み法」は、他の方法と異なり、「論駁」と「証明」とを有効利用するが故に、ラカトシュは、これを「証明と論駁の方法」(method of proofs and refutations: Lakatos, ibid: 64)と命名し、数学に特徴的な発見法として、これを推奨する。

「証明と論駁の方法」は、大局的反例を考慮に入れて、与えられた証明を分析し、隠れた有罪補題を探し出し、それに照らして最初の推測を改良することができ、そうした手続きを繰り返すことで最終的に正しい定理を得るというものである。ラカトシュは、「証明と論駁の方法」の一般的規則を次の三点に要約している。

規則 1 : 推測を得たら、それの証明に着手し、論駁せよ。あたりまえではない補題のリストを準備するため、証明を注意深く点検せよ(証明分析)。推測に対する反例(大局的反例)と、疑わしい補題に対する反例(局所的反例)を見いだせ。

規則 2 : 大局的反例が推測を放棄させるなら、証明分析に、反例で論駁されて

しまう適当な補題を加え、放棄された推測を、その補題を条件として組み込んだ改良された推測で置き換えよ。論駁をモンスターとして片付けるな。すべての「隠れた補題」を明らかにせよ。

規則3：局所的反例を得たなら、それがまた大局的反例でないかどうか点検せよ。もしそうなら、容易に規則2が適用できる。(Lakatos, ibid: 60)

まず、最初の推測は、証明分析の出発点である。次の「証明」(大凡の思考実験や議論)は、証明分析の対象であり、また、大局的反例は生まれつつある証明分析の発展にとってのいわば「酵素」(fermenting agent: Lakatos, ibid: 48)となる。最後に、証明分析の方法の極めて重要な核となるのは、「補題組込み」(lemma-incorporation: Lakatos, ibid: 33)である。つまり、大局的反例が出現する場合においては、慌てて最初の推測を放棄したり、それらをモンスターと見なして反例を拒否したり、当該の推測の道理に合わない例外としたりすることで、それを排除しない。その代わり、証明を分析する過程で隠れた補題を見出し、それを最初の推測に条件として組み込むことにより、改良された推測を得ることができる。このプロセスを十分に繰り返すことにより、最後には、正しい定理に到達するというものである。

このように、ラカトシュは「証明と論駁法」を強調し、特に「証明-分析法」の意義を強調する。第一に、「証明-分析法」は、反例がない場合でも利用できる。すなわち、明示的な反例がない場合でも、この方法によって原推測を改良することができるのである。証明の補題を論駁することが原推測についての予期しない論駁をもたらすことがあるように、ラカトシュは、証明と論駁を別々のもとして扱えないとする。こうした理由から、ラカトシュは彼の方法を「証明と論駁」法と呼んでいるのである。第二に、大局的反例は、原推測に条件を組み入れることで、推測を改良できる。しかし、それのみならず、局所的(かつ大局的でない)反例もまた「酵素」として利用される。局所的反例は、原推測ではなく、証明の補題を論駁するものであるが、それを論駁されないもので置き換えることにより、推測を洗練することができる。ラカトシュが、“proofs and refutations”と複数形を用いるのは、数学においては、幾つもの新しい証明、しかもより深い証明を見いだすことを強調している。そして、第三に、新しい推測を得るために、試行錯誤的方法だけでなく「演繹的推量の方法」(method of deductive guessing: Lakatos, 1976: 76)を利用する、つまり、原推測から出発し、演繹的推量を用いることにより、内容を増加させていき、一般的な結論が得られるのである。

上で定式化された「証明と論駁の方法」は、歴史的には、1840年代になって、ザイデル(P. L. Seidel, 1847)によって、やっと発見されたという。その典型的な例は、「連続関数の任意の収束級数の極限はそれ自身連続である」(Lakatos, ibid: 128)という原初的推測に

まつわる数学者間の取り組みである。この推測に対して最初に証明を与えたのは、かのコーシーであった。この推測が真であることは 18 世紀を通じて当然のことと見なされ、いかなる証明も必要ないものと考えられていた。しかしながら、19 世紀になって、フーリエ級数のあるものにおいて極限関数が不連続と見なされ、もってコーシーの推測への反例とみられるようになった。フランスの数学者ヨーゼフ・フーリエ(J. Fourier)の例が、反例として解釈されるようになると、デカルトーオイラー予想をめぐる歴史の場合と同様に、理論的混迷度が際立った。

1820 年代から 1840 年代にかけて主導的数学者は、コーシーの証明の欠点を見つけ証明と定理の両方を改良することに成功しなかった。その主たる理由を、ラカトシュは、「ユークリッド的方法論」があまりにも行きわたっていて、彼らが「証明と論駁の方法」を知らなかったことに見る(Lakatos, ibid: 136)。反例を発見した際に、取るべき対処法として、証明を注意深く分析し、有罪補題を見つけ出そうとすることを知らなかったのである。結局、数学者たちは、大局的反例を「例外排除法」によって取り扱ったのである。この「例外排除法」によって推測を改良しようと常に努力する傍ら、証明によって改良しようとする考え、すなわち証明-分析による改良は、彼らには全然起こらなかった(Lakatos, ibid: 137-138)。ラカトシュは、当時のこうした状況を次のように端的にまとめている。

> 推測と証明の二つの活動はユークリッド的伝統においては厳格に分離されているのである。・・・反例は重大で悲惨な欠陥と見なされていた。この場合、推測が間違っており、出発点から再び証明し始めなければならないと考えたのである。(Lakatos, ibid: 138)

やがて、ユークリッド的方法を支配している数学の無謬主義的哲学全体を修正しようとする動きが出始めた。これを修正するためには、全数学が議論の余地のない正しい事柄に還元できるという考えや、真理直観は無謬であるという考えを放棄しなければならない。これより、「証明と論駁法」の自由な発展への道が開かれることになった。ワイエルシュトラスは、フーリエの反例を証明に照らして分析することにより、「一様収束」(uniform convergence)[50]という概念を持ち込み、元々の推測を改良した。ここでワイエルシュトラス(K. Weierstrass)が用いた方法こそが、「証明と論駁法」であり、彼は、意識的

[50] 関数列 $\{f_n(x)\,|\,n=1,2,\cdots\}$ が $f(x)$ へ収束する仕方は色々あるが、その中で最も典型的なものは、いわば「各点収束」と呼ばれるもので、点 x をとめたとき、数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に近づくものである。これに対して、関数列の定義域 X 全体にわたって $f_n(x)$ がほぼ似よりの速さで $f(x)$ に近づくとするのが「一様収束」である。形式的には、任意の正数 ε に対して、十分大きな自然数 N を取ると、X のすべての点 x に対して、$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。

にこの方法を用いて、数学のその分野における知識を大いに発展させたとされる(Lakatos, ibid: 141)。こうしたことから、ワイエルシュトラスは、「証明と論駁法」を活用した数学者であるといえる。

以上が、ラカトシュの「証明と論駁の方法」に関する検討であった。これまでの検討の結果、「証明と論駁法」は、他の発見法と比較して、数学固有の発見法、すなわち数学の本性である証明を利用して理論を発見させる指針を提示していることが示唆される。ここで、次のことが問題となる。それは、前小節で取り上げた科学哲学における「科学的研究プログラムの方法論」と、本小節で取り上げた数理哲学における「証明と論駁法」の関係である。というのも、一方で、ラカトシュは「研究プログラム論」により、科学哲学の分野で著名である。他方で、論文集の編纂者は、「彼は本来自分を数学の哲学の研究者と考えていた」(Lakatos, 1978a: v)[51]と述べている。この意味で、「証明と論駁法」と「研究プログラム論」の異同を検討することは、数学における発見法の特徴を、具体例をこえたレベルで明確にすると考えるのである。そこで、次の小節では、両者の関係を明確にしたい。

3．研究プログラムとしての証明と論駁法

本小節では、「証明と論駁法」と「科学的研究プログラムの方法論」の内部構成を比較してみる。この比較により、前者が後者の概念枠組を与えていることを理解できる。これについてはツェン・ユーシン(Z. Yuxin)の論文「数学的発見の論理から科学的研究プログラムの方法論へ」(Yuxin, 1990)[52]に明確に示されている。ここでは、ユーシンの研究に拠りながら、両者の関係をまとめておきたい。

「補題」と「主要な結論」

「デカルト－オイラー予想」において例示されたように、「証明と論駁法」は、大局的反例に照らして証明を分析し、見いだされた有罪補題にもとづき、一定の条件を原推測に組み込み、推測を改良する方法であった。こうして改良された推測では、補題から組み込まれた条件によって、「主要な結論」、先の例では$V-E+F=2$という関係を維持する。こうして、原推測に条件を組み込む目的は、大局的反例を排除することであり、組み込まれるこれらの条件は、実際には、主要な結論を囲む「防御帯」として機能する。こうして見ると、数学的発見の論理と科学的研究プログラムの方法論の類似が明らかになる。ユーシンは、両者の関係を、次のような図式で表現する(Yixin, 1990: 395)。

---

[51] Lakatos, I. (1978a). *The methodology of scientific research programmes*. Cambridge University Press.
[52] Yuxin, Z. (1990). From the logic of mathematical discovery to the methodology of scientific research programmes. *British Journal for the Philosophy of Science, 41*, 377-399.

数　学

主要な結論	補題

科学的研究プログラムの方法論

堅い核	防御帯

「基礎原理」と「虚偽性の再移行原理」

先に述べたように、「証明と論駁法」は発見法の側面を持っている。その基本的はたらきは、推測の帰結($V-E+F=2$)に対する大局的な反例が示された際に、それを証明における局所的反例と見なし、推測の前提に適当な条件を組み入れることにより、主要な結論を攻撃する反例を直ちに排除することである。このことを、ラカトシュは「虚偽性の再移行原理」(Retransmission of Falsity: Lakatos, 1976: 47)と呼んだ。

> わたしは、この基準を「虚偽性の再移行原理」と呼びます。この原理は、大局的反例がまた局所的反例でもあることを要求しますから、虚偽性は、素朴な推測から補題へ、定理の帰結から前提へと再移行されるべきである。(Lakatos, ibid: 47)

明らかに「虚偽性の再移行原理」は、科学的研究プログラムの方法論における「否定的発見法」と一致している。実際、否定的発見法は、堅い核に対して否定的推論を立ててはならず、そうする代わりに創意工夫して補助仮説を練り上げ、この核の周囲を取り巻く「防御帯」を形成するものであった。ラカトシュによる「虚偽性の再移行原理」は、推測主要部、すなわち定理の結論が論駁されないように、補助仮説を作り上げ、それを定理の前提に組み込むのである。

さらに、ラカトシュは、「証明と論駁」において次のような重要な考えを提出している。それは、できるだけ早く試行錯誤の時期を脱出し、あまり事実を帰納的に尊重しすぎないように思考実験へと速やかに進むことである。このことに関して、ラカトシュは次のような原則を提出する。

> 要するに、できるだけ早く試行錯誤の時期を脱出し、あまり「事実」を「帰納的」に尊重しすぎないよう思考実験(証明)に速やかに進むことです。このような尊重は知識の成長の妨げになる。・・・より良い発見法を身に付けていたならば、少なくとも不利な観察によるテストを無視しようと試みるし、思考実験(証明)によってテストしようとする。(Lakatos, ibid: 90-91)

このように、数学的な知識の成長のためには、帰納による事実の重視ではなく、証明を

有効に利用すべきだとする。ユーシンは、こうした原理を「基礎原理」(basic principle: Yuxin, ibid: 396)と名付けている。この基礎原理は、「科学的研究プログラムの方法論」における「肯定的発見法」に対応している。実際、先に述べたように、研究プログラムの肯定的発見法は、自分が支持している理論の基本的部分を大切にし、一定の長期的指針にたってそれを洗練してゆくことに専念し、現実の反証事例も、利用可能なデータをも無視するのである。これと同じことが「証明と論駁法」に見られる。ことに、ラカトシュが「高等な」(advanced: Lakatos, ibid: ibid: 48)証明分析と呼ぶ、反例に依存しない証明分析において明確にみられる。大局的反例が明示的に示されていない場合でも、敢えて証明を構成することが、思わぬ反例や隠れた補題を発見することに導き、もって理論を発展させる原動力となる。かくして、このように、数学的発見法と科学的研究プログラムの方法論の間には、次のような関連性が示される(Yuxin, ibid: 396)。

数学的発見法

虚偽性の再移行原理	基礎原理

科学的研究プログラムの方法論

肯定的発見法	否定的発見法

補題組み込み法とモンスター排除法

最後に、ラカトシュは「証明と論駁法」という肯定的発見法と同時に、それに対立するような他の幾つかの大局的反例の対処法(モンスター排除法など)を示している。これらの方法もまた、反例の出現を排除するために使われるけれども、それらはいずれも理論の進歩を導くのではなく、言語上の策略などによって、後知恵的な説明を拵えてしまうのである。それらはすべて、ポパーが「アド・ホックな補助仮説」(ad hoc auxiliary hypothesis: Popper, 1959: 42)[53]と呼んでいるものを作り上げる。それゆえ、「証明と論駁」においては望ましい方法論と望ましくない方法論の区別があると言えるのである。「証明分析の方法」と他の大局的反例の対処法は、「科学的研究プログラムの方法論」における「前進的問題移動」と「退行的問題移動」の区別を数学的に具体化しているものと理解される。こうしたことから、数学と科学的研究プログラムの方法論との間には、次の関連性が打ち立てられる(Yuxin, ibid: 397)。

[53] Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery*. Hutchinson.

数　学

証明分析の方法	モンスター排除法等

科学的研究プログラムの方法論

前進的問題移動	退行的問題移動

これまで見てきたように、「デカルトーオイラー予想」の歴史的ケーススタディに基づく「証明と論駁法」は、数学の分野における「科学的研究プログラムの方法論」、すなわち数学の理論を合理的に発展させてゆく上での研究路線を示唆する肯定的・否定的発見法の思想的背景であることが示唆される。

4．数学的活動における可謬主義の位置

本章では、活動の数学的基礎として、数学の方法論、すなわち、数学的発見法に着目し、その様々な立場を、数学の史的素材を具体例としながら、比較・検討してきた。その目的は、数学的な特徴を有する発見法を吟味することであり、本章での比較・検討の結果、ラカトシュの数学論、すなわち、「可謬主義的数学論」がそれに適するものであるという結論に至った。

ラカトシュの数学論を検討する過程で、その随所に、科学哲学者ポパーと数学者ポリアの立場が参照された。このことは、ラカトシュの数学論が、両者の立場に深く依拠していることの現れであった。実際、ラカトシュ自身、『証明と論駁』において、ポパーとポリアの数理・科学哲学との関わりを明確に述べている。「この論文は、ポリアの数学的発見法の復活、そしてポパーの批判哲学が背景にあるものと見るべきである。」(Lakatos, 1976: xii)。しかしながら、ラカトシュの可謬主義的数学論は、単に両者の研究を取り合わせただけではなく、その独創的な立場も提示していると思われる。これまでの議論が、専らラカトシュ理論の内部構造、すなわち、「研究プログラムの方法論」と「証明と論駁法」の関連性におかれてきた。そこで、以下では、ラカトシュの数学論を、ポパーやポリア等の数理・科学哲学に位置付けつつ、ラカトシュの数学的活動の特徴を示し、あわせて、学校数学におけるラカトシュ論の位置を明確にする。

ポパーからラカトシュへ

ポパーの科学哲学は、ラカトシュの理論を発展させる際の基本的アイデアを提供している。ポパーは、科学の発展において批判がいかに重要な役割をはたしているかを明瞭に示している。彼は、科学の進歩は、大胆な推測、厳格なテストと論駁に満ちた、複雑で込み入った過程であることを描きだした。ラカトシュの数学の方法論は、ポパーの「批

判的合理主義」(critical rationalism: Lakatos, 1978a: 144)[54]を数学の分野に意識的に応用したものであると理解できる。実際、ラカトシュは、『証明と論駁』の目的を、次のように述べる。

> 非形式的で、擬似経験的な数学が、・・・ 思索と批判、証明と論駁による推量の不断の改良をへて成長する、という点を明確に練り上げるのが目的である。(Lakatos, 1976: 5)

ポパーとラカトシュの共通点と相違点は、両者の方法論、すなわち、ポパーの「推測と論駁法」(これは、先の 92 頁で示した)[55]とラカトシュの「証明と論駁法」の図式に見られる。

ポパーの方法論

$$P_1 \rightarrow TT \rightarrow EE \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots$$

「原問題」→「暫定的理論」→「批判・論駁」→「新しい問題」.

ラカトシュの方法論

「原推測」 → 「証明と論駁」 → 「改良された推測」

このように、両者の図式は類似しており、ラカトシュの「証明と論駁法」は、ポパーの「推測と論駁法」を、数学の分野にまで拡張したものと見なされる。布川(1994)[56]が指摘するように、ラカトシュが、ポパーの「推測と論駁法」を「証明と論駁法」へ発展させたのは、自然科学において大胆な推測を提出することが知識の成長の出発点となるように、数学においてもとりあえず何らかの証明を出してみることが知識の成長の出発点となると考えたからであった。但し、それは、自然科学から数学への単なる適用ではなく、それを超えていると考える。すなわち、ラカトシュの図式は、内容的に、ポパーの図式を超えていると考えるのである。それは、次の二点である。

第一に、ラカトシュは、「正当化の論理」のみならず「発見の論理」も取り扱う。先に(92 頁で)述べたように、ポパーの科学哲学は、もっぱら「正当化の論理」に関わっていた。実際、ポパーは、科学的発見の論理は心理学に属し、それは「何ら論理的分析も必要ないし、また出来るものでもない」(Popper, 1959: 31)[57]と述べる。これに対して、ラカトシュは、ポパーとは異なり、「発見の論理」を研究することの可能性と重要性をはっきりと理解していた。そして、「証明」が、数学の発展、取り分け、数学的発見にお

[54] Lakatos, I. (1978a). *The methodology of scientific research programmes.* Cambridge University Press.
[55] Popper, K. R. (1989). *Conjectures and refutations.* Routledge.
[56] 布川和彦 (1994). ラカトシュ論の数学的問題解決論への援用. *数学教育研究*, 第 9 号, pp. 23-32. 上越教育大学数学教室.
[57] Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery.* Hutchinson.

いて重要な役割を演ずるとラカトシュは考えたのであった。本章の冒頭で述べたように、証明が数学の発展にとって重要であることは、数学の本性に照らせば明らかである。しかし、ラカトシュは、「証明と論駁法」において「証明-分析法」を取り上げ、証明の役割を一層前面に、そして、広く押し出したのである(このことについては、116 頁で述べた)。

第二に、ポパーの図式では、新しい問題と原問題との間には、必然的な結びつきはない。実際、ポパーは、テスト・論駁後の新しい問題の発見の過程は、論理的分析を必要としないからである。これに対して、ラカトシュの図式では、両者は「証明と論駁法」によって内的に結びついている。ラカトシュが「推測と論駁法」ではなく、「証明と論駁法」と呼んだのは、数学の発展において、原推測と改良された推測が、「証明-分析」によって、必然的に結びついているのである。ラカトシュの数学の方法論には、数学の発展の連続性が含意される。これが、第二の特徴であった。これまで述べてきたように、ラカトシュの方法論は、ポパーのそれに基づきつつも、それを超えていると言える。

ポリアからラカトシュへ

ラカトシュは、『証明と論駁：数学的発見の論理』の序文において、次のように述べている。

> このエッセイの目的は、数学の方法論のいくつかの問題にアプローチすることである。わたしは「方法論」という言葉を、ポリアやベルナイスの「発見法」という意味で用いている。(Lakatos, 1976: 3)[58]

したがって、ラカトシュにとって、数学的発見の論理は、「発見法」を意味する。ラカトシュがポリアに影響を受け、それを超えて定式化した数学的発見法が、「証明と論駁法」であった。

ポリアとラカトシュの相違点は、「発見法」の位置付け、しかも「証明」の位置付けに見られる。それは、両者の著作、すなわち、『帰納と類比・蓋然的推論のパターン』、『証明と論駁』に現れている。ポリアは、数学の発見法は自然科学と同様に帰納的であり、そのパターンを合理的に研究することができることを強調する。これに対して、ラカトシュは次のように述べている。

> われわれは、今世紀における数学的発見法の再評価をポリアに負っている。彼の科学的発見法と数学的発見法の類似性の強調は、彼の賞賛すべき仕事の主要点の一つである。ただ、彼の唯一の弱点と考えられるものは、この強調と関連している。すなわち、彼は、科学が帰納的であることを決して疑問視しなかった。科学的発見法

[58] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.

と数学的発見法の間の深い類似を正しく捉えていたが故に、彼は数学もまた帰納的であると考えるに至ったのであった。(Lakatos, ibid: 87)

また、ポリアは、発見の道が、事実の帰納から推測へ、推測から証明へとなされると見なす。実際、ポリアは、上の著作で、次のように述べている。「推測し、そして証明せよ(*Guess and prove*)。数学的事実は、まず推測され、しかる後に証明される。本書のほとんどあらゆる箇所は、その事が正統な手続きであることを示そうと努めている。」(Polya, 1954b: 160, 挿入は筆者)[59]。ラカトシュは、「事実から推測へ、そして推測から証明へ」という発見の道筋を、「帰納法の神話」(Lakatos, ibid: 73)と呼ぶ。そしてラカトシュは、「素朴な推測は帰納法ではない。つまり、帰納的推測といったものは存在しないのです。」と断言する(Lakatos, ibid; 73)。ラカトシュは、「数学的発見法は科学的発見法である。両者が帰納的だからではなく、両者とも推測、証明、論駁によって特徴付けられるからである。」(Lakatos, ibid: 74)と特徴付けている。そして、数学者が推測に到達するのは帰納的な過程によるのではなく、推測と論駁による試行錯誤にあると主張する。

(素朴な推測は)推測をテストし論駁する過程で打ち立てられたものでした。死に絶え、今は忘れ去られたこれらの推測が事実を示唆したのであって、(帰納的)事実が推測を示唆したわけではありません。素朴な推測は帰納的推測ではない。つまり、わたしたちは推測と論駁による試行錯誤でそれに到達するのです。 (Lakatos, ibid: 73)

このように、ラカトシュは、発見法を帰納的推測に関連付けることを批判する。そして、証明、すなわち、演繹的推量にこそ発見法が適切に位置付けられるとする。従来、証明は、「発見の論理」、即ち、新しい事柄の発見とは無関係なものとして位置付けられてきた。ポリアがそうであったように、それは、むしろ「正当化の論理」、すなわち、洞察され発見された事柄を完全なものに仕上げるためのものと見なされてきた。証明に対するこうした考え方は、古代ギリシアからの数学の伝統であったと、ラカトシュは述べる。

推測(もしくは定理)が、発見の順序において証明に先んずることは、古代数学者にとっては普通のことであった。・・・ギリシア人は、前もって推量しもしないで、たまたま演繹的方向で思い付いた命題などほとんど考えもしなかった。それらを、彼らは、ポリスマとか系とか、定理の証明や問題の解から出てきた偶然の結果とか、直接求めていたのではないが、いわば偶然に何の努力もしないで出てきた一種の授かり物(ermaion)とかボーナス(kerdos)とか呼んだ。(Lakatos, ibid: 9)

この意味で、ポリアの格言、すなわち、「推測し、証明せよ」は、数学の伝統に相応し

[59] Polya, G. (1954b). Mathematics and plausible reasoning; vol.2. Princeton University Press.

いものであった。これに対して、ラカトシュは、証明が、数学において、正当化のみならず、発見の役割も演ずるとしたのであった。ポリアの格言が、「もし推測を得ているならば、先ず帰納的に事実を十分確認し、しかる後に証明せよ」であるのに対し、ラカトシュのそれは、「もし、推測を得ているならば、それを証明し、同時に論駁し始めよ」(Lakatos, ibid: 76)となる[60]。このように、「証明と論駁法」は、一方で改良された推測を見いだすので「発見の論理」に属する。このように、「証明と論駁法」は、「発見の論理と正当化の論理の本質的統一」(Lakatos, ibid: 37)となっている。以上が、ポリアとラカトシュの共通点と相違点についての検討であった。

これまでの議論から、ラカトシュの数学論の特徴は、「証明」、すなわち大凡の思考実験や議論が、数学における理論の発見と、理論の連続的発展をもたらすという点にある、という結論に至る。

学校数学における可謬主義の位置

さて、本章では、数学的活動を、数学の方法論、すなわち数学的発見法を視点として、検討してきた。ここで、本章を締めくくるにあたり、ラカトシュの可謬主義的活動論を、学校数学における数学的活動論の中に位置付ける。そのために、本論文では、ラカトシュの数学の方法論を、「ユークリッド的方法論」との関連性において整理することが適切であると考える。なぜならば、本章で数学の発見法を検討する契機は、論証的数学、すなわち、「ユークリッド的方法論」に対する問題意識にあったからである。論証的数学は、数学的活動の本来的な姿であり、また、優れた教育的意義を持ってきるが故に、中等教育段階以降でめざす数学的活動であるように思われる。しかしながら、初等・前期中等段階にかけての創造的で活動的な数学教育を考えるとき、論証的数学の基礎となり、かつまた、それに向けて発展する可能性のある数学的活動の側面を検討し、学校数学の基礎として取り入れていくことが重要であると考えたからであった。本論文は、ラカトシュの数学的方法論、すなわち可謬主義的数学論が、証明(ここでは、凡その思考実験)を用いた発見的で創造的な活動を特徴としているが故に、ユークリッド的方法論の基礎として位置付けられると考える。以下では、このことを議論する。

論証的数学を数学的活動の高次の本質とし、それに向けて発展する可能性のある数学的活動の側面を検討しようとするとき、先ず、本論文にとって示唆的であったのは、ポ

[60] ポリアによるデカルトーオイラー予想の議論は、まだ本格的な証明分析を伴わない段階での対処法、すなわち、モンスター排除法、例外排除法、モンスター調整法などを取り上げられていると理解することができるし、ラカトシュが「証明と論駁法」を開示する上で、ポリアの議論を受けてデカルトーオイラー予想の証明から対話を始めていることの意味が理解できる。

リアによる「数学における蓋然的推論」に関する研究(Polya, 1954a, 1954b)[61]であった。ポリアの労作は、蓋然的推論と論証的数学の関係を明確にすることに向けられていた。実際、ポリアは、その最終章(XVI 章)「発明および指導における蓋然的推論」において、数学的事実の証明の発明における蓋然的推論の役割を、数学教育における指導のあり方に言及しつつ、位置づけている。

> 数学者は単に推測するだけではない。彼はまだ解決せねばならない問題を持っている。つまり、推測した事実を証明せねばならないのだ。解法を発見する際の、すなわち証明を発明する際の蓋然的推論の役割は何か。これが本章で論じようとする問題である。ちなみに、これが、主として問題解決の諸方法と取り組んでいて、結局本書の主題(数学と蓋然的推論)に導かれたところの筆者を引きつけた問題なのである。(Polya, 1954b: 142)[62]

ポリアによるその答えは、帰納に代表される蓋然的推論は、証明のアイデアを暗示するというものである。すなわち、完全な正当化は証明によって与えられるが、蓋然的推論は、証明を暗示する「発見的な正当化」(Heuristic justification: Polya, ibid: 148)、不完全な正当化、尤もらしい暫定的な根拠を提供するというものである。しかも、そうした蓋然的推論には、一定の合理的なパターンを抽出することができるというものであった(それが下巻(Polya, ibid)の主題であった)。かくして、ポリアの数学的発見学は、論証的数学の基礎となり、また、それと相補的な関係をもつ数学的活動であると理解される。

さらに、ポリアの発見法は、ユークリッド的方法論のもつ潜在的な問題点を克服する可能性を与える。ポリアは、数学の理論は、正確で完全なものでなければならないが、数学書や数学の講義で提示される命題と証明のスタイルは、その著者や教師にとっては完全で正確なものであろうが、読み手や生徒にとっては、退屈で意気消沈させる、もしくは失望させるようなものであり、そうしたスタイルを提示された場合に、読み手や生徒は次のように感ずるであろうと述べる。「それは帽子の中から引っ張りだされた兎のように見える。」、「それは、どこからともなくひょいと出てきた。それはまったく勝手気儘に見える。それには明白な動機や目的は何もありはしない。」、「おそらく、著者にはこの段階の目的はわかっているのだろう、が私にはわからない。だから、私は確信を持って彼についてゆくことはできない。」(Polya, ibid: 147-8)。このように、何の背景もわからないまま、唐突に提示される数学的命題と証明のスタイルを、ポリアは、「天降の神」(deus ex machina: Polya, ibid: 146)と呼んだのであった。こうしたユークリッド的

---

[61] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1. Induction and analogy in mathematics.* Princeton University Press. Polya, G. (1954b). Mathematics and plausible reasoning; vol.2. Patterns of plausible inference. Princeton University Press.
[62] Polya, G. (1954b). Mathematics and plausible reasoning; vol.2. Princeton University Press.

方法論の欠点を克服する方法として、ポリアは、込み入った命題の条件や証明のアイデアを見いだすための尤もらしい説明、すなわち「発見法的正当化」を与えることが重要であること、またそれが可能であることを様々な例で示したのであった。

次に、本章の主題であったラカトシュの可謬主義的数学論を取り上げる。その著作『証明と論駁』の補遺、「演繹主義的アプローチ 対 発見的アプローチ」(Lakatos, ibid: 142-154)を読むと、それが、演繹主義的アプローチを批判している点で、上で述べた「発明および指導における蓋然的推論」と一致している。但し、相違点もある。それは、ラカトシュが、ポリア以上に証明の役割、この場合は、厳密な論証ではなく、大凡の思考実験の役割を重視している点である。そして、そのことが、ポリアと同じく、数学教育におけるユークリッド的方法論のもつ潜在的問題点を克服する視点を与えるとしているのである。

「演繹主義的アプローチ対発見的アプローチ」という論文で、ラカトシュは、「ユークリッド的方法論」が、厳格で拘束された一定の構成スタイルを発展させている点を問題視する。

> ユークリッド的方法論は、一定の拘束的な表現のスタイルを発展させてきた。わたしは、これを「演繹主義的アプローチ」と呼ぶ。このスタイルでは、苦心の末に取り出された公理、補題、定義のリストから始められる。公理と定義はしばしば不自然に見え、煙にまかれてしまうほど込み入っている。これらがどうして込み入っているかは決して語られることがない。公理と定義のリストの後には注意深く表現された定理が続く。これらの定理にはたくさんの条件がつく。誰かがそれらの定理を推量したことがかつてあったなどとはとても思われない。そして、定理の後には証明が出てくる。(Lakatos, 1976: 142)。

ラカトシュは、こうした理論の構成スタイルを、「演繹主義的スタイル」(deductive style: Lakatos, ibid: 142)と名づけ、それに対して、厳しい評価を下す。

> 現在の数学・科学教育が権威主義の温床であり、自立した批判的思考の最悪の敵であることはいまだに十分に認識されていない。この権威主義は、数学では演繹主義的スタイルをとり、科学では帰納主義的スタイルを通して現れる。(Lakatos, ibid: 142-143)

次のようなラカトシュの文言は、数学教育におけるユークリッド的方法論に基づく命題と証明の提示スタイルを批判するものであるが、それは、上で述べたポリアの文言と多くの点で共通している。

> 数学を学ぶものは、ユークリッド的儀式に従い、背景とかその手品のやり方について疑問をいだくことなく、この手品めいた行為に参加しなければならないものだ。もし、学生たちが、これらの定義や補題や定理がどうして証明に先立ちうるのかを

単純にいぶかしく思ったりすると、手品師はこの学生を数学的に未熟練であるというかどで追放してしまうだろう。(Lakatos, ibid: 142)

このように、ユークリッド的方法論に彩られた演繹主義的アプローチは、数学を永遠不易の真理の常に増大する集合として表示することで、反例や論駁や批判を通して、命題が定式化され定義が構成される全体的な過程を背後に押しやり、その結果「天降の神」と称されるような不自然で、時には権威主義なスタイルをとるのである。

ラカトシュは、ポリアと同じように、こうしたユークリッド的方法論が抱える問題を克服する方策を提示する。ポリアは、蓋然的推論を通した「発見法的正当化」によって、証明のアイデアを示唆するよう数学を提示することを提案した。ラカトシュは、命題に含まれる込み入った条件や、複雑な概念が、論駁に照らした証明分析を通じて、すなわち「証明と論駁法」によって生成される過程を丁寧に補うことで数学を提示するよう提案する。特に、成長中の理論の発展期は、「歴史的観点から最も興味深く、教育的観点から見ても最も重要な時期と見られるべきである」(Lakatos, 1976: 140)という主張は、学校数学を「証明と論駁法」という可謬論的アプローチによって展開することの重要性を示唆する。このように、ラカトシュは、ユークリッド的方法論に基づく証明の提示に対して、新しい観点、すなわち、可謬主義的な証明の提示を提案している。

さて、ユークリッド的証明と可謬主義的証明の特徴を対比するためには、彼の「擬似経験的」(quasi-empirical: Lakatos, 1978b: 28)[63]数学観を説明する必要がある。数学の擬似経験的見解とは、数学の理論が、科学理論一般と同じく、みな推測から成り立っていると見なすものである。こうした立場は、演繹体系における真偽値の流れによって区別される。ラカトシュは、演繹体系における真理値の流れのパターンに関して、それを二種類、すなわち、「真」のパターンと「偽」のパターンに区別する(Lakatos, ibid: 29)。前者は、上(有限個の公理の結合)から下へと、妥当な推論を用いて演繹システムの経路全体を満たしていく「真」なる流れのパターンである。後者は基底(特定の「基礎言明」(basic statement)、つまり経験的事実を述べる「単称命題」)から頂上へと、演繹的経路を「偽」、すなわち「虚偽性」が逆上ってゆくパターンである。彼は、これら二種類の理論を、それぞれ「ユークリッド的」と「擬似-経験的」と形容した。ここで、「擬似経験的」とは、演繹体系内での真理値の移動の仕方についてのみ言及しているもので、真理値の内容には関係しない。従って、「経験的」という言葉の通常の意味と区別されるべきものである。実際、ラカトシュ自身、このことを明確に述べている。

[63] Lakatos, I. (1978b). *Mathematics, science and epistemology.* Cambridge University Press.

この真理値の流れのパターンに関する境界設定(demarcation)は、真理値を基礎言明に付与する慣習的な仕方とは無関係である。私の意味合いで擬似経験的とみなす理論は、通常の意味合いで経験的であったり非経験的であったりする。(Lakatos, ibidb: 29)

このように、「擬似経験的」とは、経験科学をさすものではなく、数学のような時空を超えた理論にも当てはまり、この意味で、ラカトシュの概念規定は特殊である。「ユークリッド的」理論では、真理値の判断を、自明なる公理に委ねるのに対して、擬似経験的理論の特質は、真理値の判断をその「基礎言明」(経験的に検証される単称命題)に求める。前者の意味は、数学的体系そのものであり、理解やすい。したがって、ここで説明を用すると思われるのは、「擬似経験的」な数学的体系である。「擬似経験的」理論では、決定的な真理値は基底、すなわち「基礎言明」にある。そして、上へ移行するのは真なる値ではなく、偽なる値(虚偽性)である。このことを、ラカトシュは、この原理を「虚偽性の再移行原理」と呼んだ(このことは、先の 119 頁で述べた)。これに従うと、ある単一の「基礎言明」が偽であるとされたときは、その元になっている「仮説」が偽とみなされるのである。この場合、証明、すなわちおおよその思考実験や議論は、批判や論駁を生み出すための「酵素」である。このことは、下のような図で表される。

ユークリッド的体系	擬似経験的体系
公理が真理ならば	仮説は反証される
証明 ↓ 真理値の流れ	証明(思考実験) 批判と論駁の酵素 ↓ ↑ 虚偽性の流れ
結論も真である	基礎言明が偽であれば

ラカトシュにとって重要であったことは、擬似経験的科学は、真理ではなく、せいぜい「よく験証される」(well corroborated)ということである。「ユークリッド的」理論が正しいのは、前提(公理)が正しいがゆえに結論も当然正しいと考えるからであり、「擬似経験的」理論、すなわち仮説が正しいのは、理論の個別的命題、すなわち経験的な基礎言明が暫定的に験証されているからである。先に取り上げた、「デカルト・オイラー予想」の例では、コーシーによる証明が首尾一貫しているから正しいのではなく、それを覆す具体的な反例がないからであり、いざ、反例(虚偽性)が見いだされたならば、それを証明、すなわち大凡の議論に照らして分析し、有罪補題を見いだし、それを条件として仮説に組み込むことで、より洗練された仮説と証明が得られる。

「ユークリッド的方法論」では、前提が真である限り、それから論理的推論によって導かれた結論もまた真であるという考えに基づき、理論を構築する。これは、理論的に成熟した数学の姿について当てはまるものであり、また、そうした論理的な構築の意義

が理解できるには、ファン・ヒーレの水準で、0を出発点とした場合の第3水準に対応する。これに対して、ラカトシュの可謬論的数学論は、こうした完成しつつある理論ではなく、むしろ、発展途上の、過渡的な段階における数学の営みの姿を与えているように思われる。

> 成長中の理論においては、直観は未経験であり、躓き、誤りをおかす。このような成長期を通らない理論は存在せず、さらに、この時期は、歴史的観点から最も興味深く、教育的観点からも最も重要な時期と見られるべきである。これらの時期は、証明と論駁の方法を理解することなくして、可謬論的アプローチを採用することなくして、正当に理解することはできない。これが、ユークリッドが殊に数学史と数学教育にとって、初等的および創造的水準の両方の観点から有害な精神であった理由である。(Lakatos, 1976: 140)

このように、成長期の理論は、擬似経験的な姿としてよりよく特徴づけられ、また、発達途上の児童・生徒にとっても、適切であるように思われる。本論文が、ラカトシュの可謬主義的数学論を学校数学における数学的活動として取り上げるのは、それが、発達途上の、過渡的段階における数学的活動の姿を描いており、また、発達途上の子どもが新しい数学的内容を活動を通じて知っていくときの姿でもあると考えるからである。

最後に、数学的活動への可謬論的アプローチの意味を、第1章で検討してきた数学的活動論(特に島田による図式)との関わりで検討する。島田による数学的活動論は、大凡次のような活動からなっていた。現実世界の問題に対して、条件・仮説を設定して、数学的な命題に翻訳する。その後は、数学的演繹によって数学的結果を得る。そして、求めた結果を現実と照らしてチェックし、もし不適合であれば、条件・仮説に戻り、それを修正するというものであった。島田の図式では、数学の世界は、「ユークリッド的方法論」に基づいていた。すなわち、数学の世界は、経験的な事実とは無関係に、無定義用語と公理を出発点とする演繹論理で構成されるものであった。ここでは、条件・仮説が正しい限り、演繹的な過程で論理の運びに誤りがなければ、得られた結論は必ず正しい。従って、得られた結論と実際の経験的データとが食い違った場合に、その原因を数学の世界の条件・仮説のみに帰することになる。しかしながら、学校数学における数学的活動として、こうした数学理論の首尾一貫性を前提とすることは、先の議論と同じように、児童・生徒の論理的発達の観点から見て、現実的ではないように思われる。こうしたことに鑑みて、可謬主義的数学論、すなわち、擬似経験的数学論は、島田の数学的活動の図式を、過渡的で成長中の数学的知識に照らして見直す必要性と可能性を示唆する。それは、数学的結論と経験的データの不一致は、思考実験としての議論の展開の妥当性や、条件・仮説の新たな意味づけ、さらには、経験的データそれ自体を意味付ける枠組みに差し向けられることになる。こうした可謬主義的な数学論の立場、は、島田の図式をよ

り柔軟なものにし、もって、学校数学における数学的活動の図式を、児童・生徒の論理的発達に合った水準で展開する方向性を与えるように思われる。

本章のまとめ

本章では、活動的で社会的な数学論を検討してきた。ここでは、ユークリッド的伝統に対し批判的議論を展開してきた数理哲学の諸学派(「帰納論理学」、「反証主義」、そして「可謬主義」)を取り上げ、理論構築のための規範的指針である「発見法」の観点から比較・検討してきた。その際に、各学派の立場から見た数学的活動を具体的に理解することを試み、数学史における事例を適宜取り上げた。

こうした検討の結果、これらの諸学派の中で、可謬主義的数学論が、数学的活動の本性を最もよく反映し、かつ社会的側面をも際立たせていることが示された。可謬主義においては、数学的活動は、客観的真理を発見する活動というよりも、むしろ数学者が個性的に創る活動であるとされる。そして、数学の理論は必然的に相対的なものとなり、そのことが数学の発展の重要な契機となり、ひいては数学の社会共同体的本性を際立たせることになる。数学の理論が発展してきたのは、複数の理論が競合する中で、理論が拠り所とする前提の真理性が数学者集団において再検討されつつ合意形成がなされてきたからである。かくして、可謬主義的数学論は、教室を一つの社会共同体的実践の場と見なす可能性をも与えるという結論に至った。さらに、可謬主義的数学論は、ユークリッドによる論証的数学へと成長発展する過渡的な視点を与えるとともに、本論文で検討してきた数学的活動の基本的図式を新たに意味付ける観点を与えている。

これで、本論文の第一の課題を終え、第二の課題へと進む。次の章では、社会的側面と個人的側面の関連性の問題に対し、ヴィゴツキー派の「文化－歴史理論」の視野からアプローチすることにしたい。