第１章　数学的活動論の諸相：先行研究の成果と課題

第１節　数学的活動論の成果：大局的視野と局所的視野

序章では、学校数学において数学的活動の重要性が再認識されていることが述べられた。そして、数学的活動それ自体の概念をより明確にしていくことが課題とされた。

この課題に取り組む方法として、本論文では、数学教育の個別・具体的研究を取り上げ、そこにおいて用いられている数学的活動論を比較・対照することにより、それらに共通する意味内容を定めていくことにする。ただし、そうした個別・具体的研究では、「数学的活動」という用語が広範囲かつ多様な文脈において用いられていることが予想される。そこで、本論文では、従来の数学的活動論を一定の観点から系統的に整理することにより、その特徴を明らかにする。実際には、数学的活動に関する個別的研究を二つの系統、すなわち、数学的活動を「数学の歴史的系統発生」や「学校数学のカリキュラム」という長期的視野から検討する系統と、「個別の単元」ないし「個人の問題解決過程」という短期的な視野から検討する系統に分けることにする。前者が様々な数学の領域(スコープ)についての長期にわたる展開(シークエンス)を対象とすることから、それを「大局的視野」と呼び、後者が個別的な問題に関する解決プロセスを対象とすることから、それを「局所的視野」と呼ぶ。

１．数学的活動論：大局的視野

１．１．数学的活動のモデル論

大局的視野からみた数学的活動の特徴を検討する手だてとして、本論文では、数学的活動のモデル論を取り上げることにする。大局的、したがって、長期的で複雑な数学的活動を検討するには、それを理想化・抽象化・簡単化した、一定のモデルで検討することが理にかなっている。実際、数学的活動を重要な構成部分とする研究の多くは、様々なモデルを提示している。それらのモデルは、力点の置きかたや、付与するラベルにおいて多様であるが、その意味する内容を検討するとき、お互いに共通点を持っていることが示される。以下では、このことを確認する。ここでは先ず、数学的活動(Mathematical Activity)という用語を数学教育に取り入れたオランダ著名な数学者・数学史家のハンス・フロイデンタール(H. Freudenthal)の議論から始めることが、歴史的にも、また今日的にも適切であると考える。

数学といった場合、通常は完成した理論体系を意味する。これに対して、フロイデンタールは、数学を人間の活動であると見なす。彼は、主として数学の歴史的発展過程を分析し、活動としての数学の本質的特徴を示している。それによると、数学的活動の本質は「数学化」

(mathematizing)[1]であるという。このことに関して、フロイデンタールは次のように述べている。

> 現実を数学的な手段によって組織化することは、今日、数学化と呼ばれている。……数学的経験が蓄積されると、今度は、それ自体が組織化されることになる。この目的に奉仕する手段は何か。もちろん、再び数学的な手段である。これが、数学それ自身の数学化の始まりとなる。(Freudenthal, 1973: 44)

ここから、数学化は、数学的な手段によって組織化する活動であることが分かる。こうした活動の具体的意味について、フロイデンタールは次のように述べている[2]。

> 算術と幾何は、現実を数学化したところから生まれたものである。しかし、時期がたつと(少なくとも古代ギリシア以降は)、数学それ自体が数学化の対象となった。数学的素材を整理したり、再編成したり、定義を定理に変えたり、定理を定義に変えたり、さらには、より一般的なアプローチを探究し、それによって複数の定理を一つのものに統合し、その後は特殊化することにより、すべての事柄が導き出せるようにすることが、数学者にとって最も実り多い活動であった。生徒たちも、この実を味わう資格を持っていることは疑いのないことである。(Freudenthal, 1968: 6)

この文言から、数学化には二つの意味が含まれていることが分かる。一つは「現実の数学化」(mathematizing of reality)、そしてもう一つは「数学自身の数学化」(mathematizing of mathematics itself)である。また、「数学の数学化」には、さらに二つの側面があることも示唆される。一つは「素材を整理、再編成し、定義を定理に変えたり、定理を定義に変えたり」することである。これは、数学の命題群、すなわち命題の集合の論理的な繋がりを再組織化する活動であるといえる。このことの例として、フロイデンタールは、円錐曲線論と方程式論の次のような関係を挙げる。

> ギリシア人は、ある種の二次方程式が平面曲線として解釈できることを知っていた。それは、メナイキュモスによって、円錐の平面による切断面であるとされた。しかし、アポロニウスは、円錐曲線論から出発し、それらの方程式へたどり着いた。現代では形勢が再び逆転し、二次方程式から始めている。(Freudenthal, 1973: 45)

「数学の数学化」のもう一つの側面は、先の引用において、「もっと一般的なアプローチを探し、それによって幾つかの定理を一つに統合して、そのあとは特殊化によって全てが導きだせるようにすること」と述べられている部分である。これは、新しい観点により統合する活動と言える。「数学の数学化」のこの側面に関して、フロイデンタールは、物理学における次のような例をあげる。

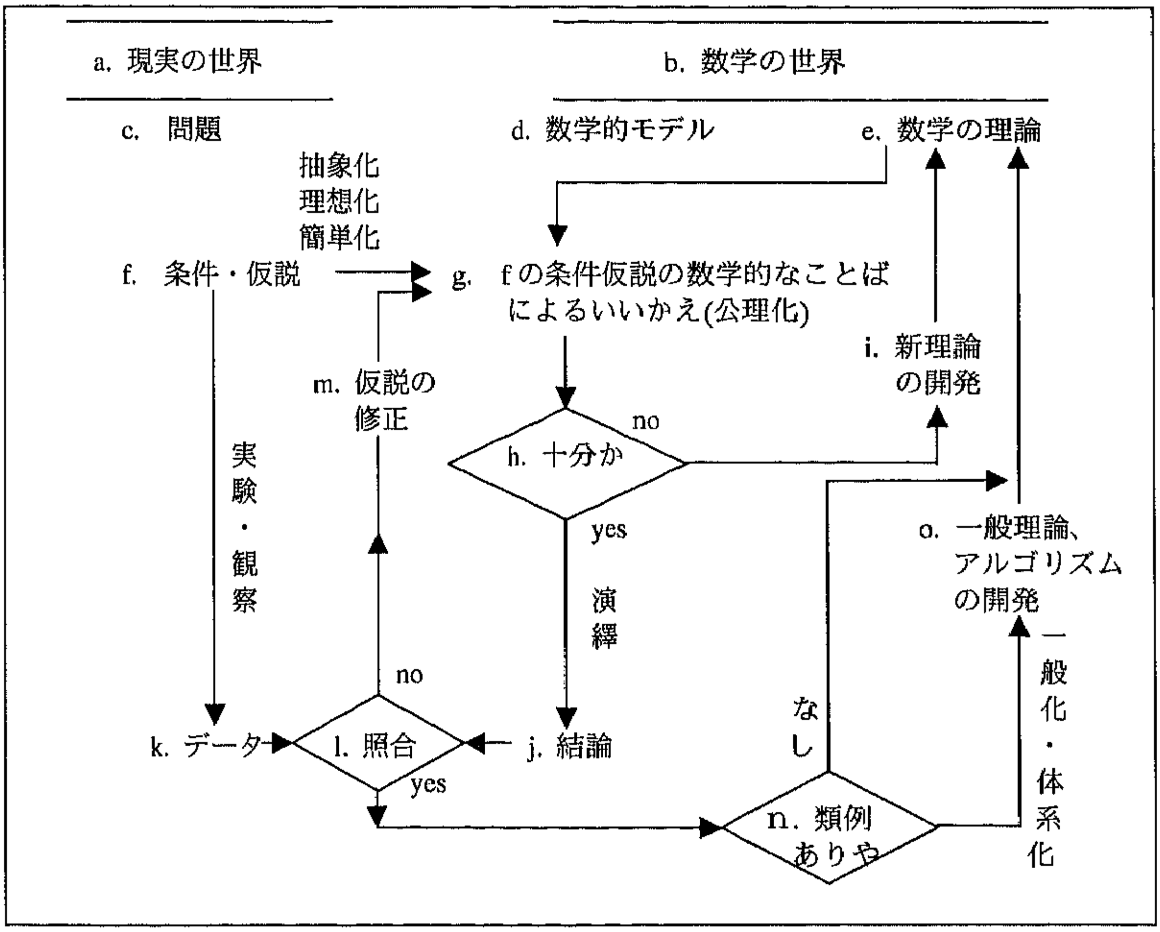
[1] Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel.
[2] Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics*, 1(1), 3-8.

力学の教科書を見ると、直行変換は固有値を用いないオイラー流のやり方で扱われているのに、対称変換は固有値を用いるラプラス流のやり方で扱われている。でも、これらは共に数学では邪魔者になって久しいのだ！(Freudenthal, 1973: 46)

こうした物理学における数学の応用例に見られるように、一度組織化された命題を、新しい統合概念によって再組織化することが、数学の特徴的な活動となっている。

これまでの議論から、数学的活動は二種類の数学化からなっていることが示された。それらは、数学的活動の本質的な側面、つまり数学的活動のモデルの主要な構成部分であると言えよう。以下では、数学的活動のこうした基本的側面を踏まえつつ、さらなる内部構造、その多様な側面を明らかにしてゆく。

本論では、数学的活動のより多様な側面を区別し、したがって、包括的な記述を与えているモデルを取り上げる。それは、島田(1977)により提出されたモデルである。島田は、数学的活動を次のようなモデル(この場合は、模式図)で表している[3]。



数学的活動の模式図 (島田, 1977: 15)

[3] 島田茂(編著), (1977). *算数・数学科のオープンエンド アプローチ*. みずうみ書房.

ここで、このモデルに関する島田の(記号と矢線に沿った)説明を取り上げ、その意味を検討することにしたい。

> まずはじめに、a. 現実の世界と b. 数学の世界とがあり、現実の世界には、何らかの意味で c. 問題があり、解決をせまっているとする。・・・c の問題に対しては、現実の世界の経験から、その f. 条件・仮説を設定し、さらに数学の理論が適用可能になるように、条件・仮説を抽象化、理想化あるいは簡単化して、数学のことばによってこれらを言い換える。・・・こうして、いわば活動者の得意の土俵に問題をひきずりこんで言い換えたのが、g. の公理化の段階である。(島田, 1977: 15)

この説明から、数学的活動の二つの特徴が示唆される。一つは、数学的活動は、現実世界の問題とそれに取り組む解決者とのセットとして捉えられることである。数学的活動では、次のような問題状況、すなわち「未解決の問題状況を、解決しなくてはならないという必要、あるいは、解決したいという希望はあるが、直ちに、そして、確実に解決を保証するような方法はもっていない人がいて、しかも解決への努力を払うという場面」(三輪, 1991a: 66)[4]が前提とされるのである。フロイデンタールの議論ではこうした点は明言されていないものの、数学的活動を人間の活動と見なすとき、それは必要不可欠な構成部分であると思われる。

島田の数学的活動のモデルのもう一つの特徴は、当面する問題状況において、そこで何が問題となるかを探り出し、適当な条件や仮説を設定し、問題を数学的に確定することである。現実世界の問題を解決しようとする際には、解決の鍵となる条件が曖昧であり、むしろ、そのほうが普通である。この意味で、解決のための必要かつ十分な条件が何であるかを決定することが重要となってくる。現実の問題を数学的に定式化する活動($f \rightarrow g$)、すなわち、現実の問題を数学の舞台にのせる活動は、その意味する内容を検討するとき、先のフロイデンタールの議論における「現実の数学化」に対応すると考えられる。島田のモデルは、現実の問題に、条件・仮説を設定し、それを理想化・抽象化・簡単化する活動を挙げている。したがって、それは、「現実の数学化」の具体的な構成要素を与えていると考えられる。

さて、現実の問題から条件・仮説を設定し、数学の問題が定式化されると、数学の世界の中で、次のような作業が続く。再び、島田の説明を引用する。

> g として公理的なものがまとまれば、それから、現実世界についての命題と対応する g の中の命題が作れる。この後者の命題の真偽は、g の公理系からの演繹によってのみ決定される。この演繹には g の公理系とともに、e の数学の理論が全面的に駆使される。しかし、それでもうまく演繹が進められない場合は、新理論の開発 i に進むことが必要である。・・・演繹によって導いた j. 結論は、これに対応して、a の現実の世界で経験的に収集した k. データと、l. 照合させられる。このとき、データと結論とが、f→g の際に認めた近似の範囲内で合えば、f の仮定は否定されず、一応そのまま保持される。もし、許される範囲を越えて食い違えば、f の仮定が誤りである

[4] 三輪辰郎 (1991a). 問題解決能力の育成. *数学教育の課題と展望* (pp.63-81). 金子書房.

として、m. 仮説の修正ということになる。 (島田, 1977: 16)

この説明から、数学的活動の二つの特徴が留意される。一つは、数学の世界と現実の世界の弁証法的関係、すなわち、両者が相互に依存し合うがゆえに、独自性を持っているという点である。一方の現実の世界では、実験や観察等により当該の問題に関する経験的データを収集し、他方の数学の世界では経験的な事実とは無関係に無定義用語と公理を出発点とする演繹論理で展開する。このように、現実の世界と数学の世界は固有の論理を持っている。しかしながら、二つの世界はそれぞれ固有の論理を持ちつつも、数学的活動において、相統一される。というのも、数学の世界における理論の演繹的構成は、現実世界との関わりにおいて本来の意味を持つからである。数学の理論を、経験的事実と無関係に無定義述語を用いて演繹論理で構成し、結論を導く過程を首尾一貫したものとするのは、演繹によって導いた数学的結論(理論値)と現実世界で経験的に収集したデータ(実験値)とが許容範囲を越えて食い違った場合に、設定した条件・仮説にのみ責任を追わせるためなのである。「数学の中での論証の重要な意味の一つはここにあるといってよい。」(島田, ibid: 16)とあるように、数学における演繹は、経験世界との関わりにおいて、適切に位置づけられる。こうしたことから、われわれは、フロイデンタールによる二種類の数学化の内的な、しかも、本来的な関連性を知るのである。

数学的活動のもう一つの特徴は、活動の継続性である。それは、一度条件・仮説を設定し、数学的に定式化した問題から一定の数学的結果を得たとしても、それで活動が終了するわけではないということである。すなわち、設定された条件や仮説は、あくまで仮のものであって、問題の重要性や事態の切迫度に照らして、再度定式化し直されるのである。ポパーがいうように、事柄の確実性は状況の問題であるといえる(Popper, 1979: 78)[5]。こうした再定式化は、数学的な結論と現実の問題との対照がなされ、数学的結論が現実の問題の解決として受け入れられるまで継続するのである。

しかしながら、数学的結論を受け入れた場合でも、活動はそれで停止するのではなく、さらなる発展的な活動が展開される。このことについて、島田は次のように述べている。

> このf. 条件、仮設→g. 公理化→j. 結論→l. 照合の過程で、最終段階が肯定的であれば、このgの公理系は、fに対する数学的モデルと呼ばれ、次の段階でn. 類例の有無が検討される。・・・類例がいくつもある場合、その共通な特徴をとらえて、一般化し、より基本的な命題と副次的、ないし、従属的な命題とを区別して体系化を図る。こうしてo. 一般理論およびその理論による処理のためのアルゴリズムの開発に進む。この段階では、一般理論に平行した記号法が開発され、演繹推理が、記号の配列の変形として進められるようアルゴリズムを開発する。ここだけを見れば、数学は一種の記号ゲームの外観を呈する。(島田, 1977: 16-17)

[5] Popper, K. R. (1979). *Objective knowledge*. Clarendon Press.

このように、数学的な結論が当初の問題の解決として受け入れられた際には、解決の際の方法、あるいは解決の結果を吟味することを通して、一般化が図られる。すなわち、当初の問題を足場として、豊かな内容へ高まり、問題の本質へ深まることは、数学にとって特徴的で教訓的な活動である。問題の解決において成功に導いたアイデアや解法を一般化したり、体系化したりする活動は、先のフロイデンタールの「数学の数学化」の一つの側面にあたる。さらに、島田は、「このように豊かになった b. 数学の世界も、ある場合には、その内部の統一、向上を求めて a の世界の役割を果たすこともあり得る」(島田, 1977 :17, 強調は筆者)と述べているが、それは「数学の数学化」のもう一つの側面に対応している。

これまで見てきたように、島田による数学的活動のモデル(模式図)は、数学が創造される全体的過程の多様な側面が描きだされている。さらに、このモデルは、フロイデンタールの「数学化」の内的構造を理解する視点を与えるものであった。

さて、数学的活動のモデル論は、フロイデンタールや島田の他にも、多数見受けられる(例えば、Hiatt, 1987; Крыговская, 1988; Столяр, 1987; Walther, 1984)[6]。それらのモデルは、数学的活動に付与するラベルの名称や力点の置き方に違いはあるものの、その内容を検討するとき、実質的に島田のモデルの一部ないしは、その組み合わせとして含まれることが示される(大谷, 1987)[7]。しかし、このことは、他の数学的活動のモデル論が不十分であったり不完全であったりすることを意味するものではないと考える。というのも、ストリャール(А. Столяр)が指摘しているように、数学的活動論は、数学として何を重視するか、また教育-心理学的基礎としてどのような理論を採用するかに依って、様々なモデルが採用されるからである(Столяр, 1987: 53-55)[8]。従って、数学的活動論の検討において、単に数学的活動のモデルそれ自体を比較・検討するだけでは不十分であり、それらのモデル構成の背後にある教授論や心理学の理論的視野に照らして理解することが必要となってくる。以下では、数学的活動のモデル論を、教授論や心理学との関連性において検討を行う。

１．２．数学化に基づく数学教育の類型化

ここでは、オランダの「フロイデンタール研究所」において議論されている、数学化を視点とした数学教育の類型論を取り上げる。先に取り上げたフロイデンタールに師事した数

---

6 Hiatt, A. (1987). Discovering mathematics. *Mathematics teacher*, 80(6), 476-478.　Крыговская, С. (1988). Роль определения в математической деятельность учащихся.Математика в школе, 6, 66-70. Столяр, А. А. (1987). *Педагогика Математики*.Вышэиш. Школа.　Walther, G. (1984). Mathematical activity in an educational context. In R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education* (Vol.3, pp. 69-88). Unesco.

7 大谷実 (1987). *数学的活動に基づく教授・学習の基礎的研究*. 博士課程中間論文・筑波大学教育学研究科(未公刊).

8 Столяр, А. А. (1987). *Педагогика Математики*. Вышэиш. Школа.

学教育研究者トレファースとゴーフリー(Treffers & Goffree)は、数学教育論を構築する際の組織化原理として数学化に着目している[9]。トレファースらは、二種類の数学化を基底として、数学教育論を比較・検討している。ここで、二種類の数学化とは、「水平的数学化」(horizontal mathematization)と「垂直的数学化」(vertical mathematization)と呼ばれるものである(Treffers, 1986: 70)[10]。ちなみに、「水平的数学化」と「垂直的数学化」は教育的な構成概念であり、数学的なものではない。実際、トレファースらがこうした数学化の区分を提唱した際に、フロイデンタールは、そのアイデアを受け入れることに抵抗を覚えたと述べている。というのも、フロイデンタールは、「水平的数学化」と「垂直的数学化」は明確に区別できないものであると考えたからであった。しかる後に、彼は、こうした区分が数学教育のスタイルを特徴づけるという意味において、それらを受け入れるようになったとされる(Freudenthal, 1991: 41-42)[11]。

トレファースらに従えば、「水平的数学化」は、「経験的方法・観察・実験・帰納的推論を通して、問題を、厳密な数学的な手段によってアプローチできるように変形すること」(Treffers, ibid: 71)を意味する。他方、「垂直的数学化」は、「水平的な数学化に続く数学的処理、問題の解決、解決の一般化、そしてさらなる形式化に関連する活動」(Treffers, ibid: 71)を意味する。これら二種類の数学化を厳密に峻別することができないとしつつも、トレファースらは、条件付きで、各々に含まれる活動項目を列挙している。

水平的数学化
- 帰納を通して規則性を発見すること。
- 問題を既知のモデルに変形すること。
- 一般的文脈の中から数学的要素を同定すること。

垂直的数学化
- 記号を用いること。
- 解法を一般化すること。
- 一般化されたものを形式化すること。
- 概念を正確に定義すること。
- アルゴリズムを構成すること。

これらの項目を、先に取り上げた島田のモデルに照らして検討するとき、明らかに、「水平的数学化」は、現実の世界から数学の世界へ変換する「公理化」($f \to g$)の過程に対応し、「垂直的数学化」は、「数学の世界」内部における一連の過程に対応していると考えられる。

さて、トレファースらは、こうした二種類の数学化を視点として、様々な数学教育論を四

[9] Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education. In *Proceedings of PME 9* (Vol.2, pp. 97-123). Utrecht.
[10] Treffers, A. (1987). *Three dimensions*. D. Reidel. ここで、vertical は、「鉛直」と訳されるが、ここでは物理的な意味合いを持っていないので、「垂直」と訳している。
[11] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

つの様式(現実的(realistic), 構造主義的(structuralist), 経験主義的(empiricist), そして機械論的(mechanistic))に分類する。それを図式的に表現すると下の表になる。

	水平的数学化	垂直的数学化
現実的	＋	＋
構造主義的	－	＋
経験主義的	＋	－
機械論的	－	－

この表で、記号＋(－)は、数学化の成分が強調される(されない)ことを意味する。

「現実的」数学教育論は、現実の状況を数学的な記述に変換する「水平的数学化」と、数学の体系内で処理し、一般的図式を構成する「垂直的数学化」の両方を含んでいる。ここでは、現実の状況は、数学的概念が生まれる源泉であり、かつそれが応用される領域でもあり、二重の役割を果たしている。

「構造主義的」数学教育論は、学問の構造あるいは体系を志向するもので、数学的活動は専ら「垂直的数学化」からなる。すなわち、数学の理論体系の構築や形式化が数学的活動の主目的となる。従って、「水平的数学化」は、既に形式化・体系化された理論を事後的に応用する際に現れる。すなわち、現実の状況は、数学の理論体系に具体的意味を与えるモデルとして機能するのみである。構造主義的数学教育論の典型的な例は、数学教育現代化期に脚光を浴びたツォルタン・ディーンズ(Z. Dienes)の数学教育論である[12]。

「経験主義的」数学教育論は、構造的数学教育論と正反対で、数学的活動として「水平的数学化」を強調するが、数学内部での理論的・体系的構造化を導く「垂直的数学化」を重視しないものである。これは、経験主義的・生活単元的な数学教育論である。

最後の「機械論的」数学教育論は、「水平的数学化」も「垂直的数学化」も十分には展開しないものである。数学的概念の源泉としての具体的現象を扱うことは稀であり、また、学んだ事柄の実際的応用にも関心が向けられない。むしろ、この立場は、数的事実や手続きの盲目的な記憶や自動化に多くの注意を払う。機械論的数学教育の例は、行動主義原理に基づく「個別処方教授」(Individually Prescribed Instruction)に見られる。そこでは、個々の孤立的で断片化されたステップを累積的に習得(マスター)することに主眼がおかれている[13]。

ここで、四つ数学教育論の特色と相違点を、「モデル」という観点から意味付けることにより、先に取り上げた島田による数学的活動の模式図と関連づけることにしたい。一般に、数学的活動において、「モデル」という用語は二つの意味を持つ。一つは、現実世界の問題に関して設定した条件や仮説を数学の命題に翻訳したものであり、もう一つは、抽象的な理

[12] Dienes, Z. P. (1963). *An experimental study of mathematics-learning.* Hutchinson.
[13] Erlwanger, S. H. (1974). *Case studies of children's conceptions of mathematics.* UMI.

論を一段下の具体的な次元で表現したものである(島田, 1995: 17-18)[14]。

現実的数学教育論は、現実の場面から探り出した条件や仮説を数学の舞台にのせる「水平的数学化」と、構成された数学的モデルを数学の世界の内部で系統化する「垂直的数学化」の両方を含んでいる。この場合のモデルは、現実の世界から数学の世界へ進む過程で構成されており、前者の意味となる。経験主義的数学教育論もまた、現実の問題から出発し、それを具体的に分析することを通して数学的表現と結びつけられる。しかし、数学内部での体系化や形式化がおろそかにされるため、構成されたモデルが数学の世界において何らかの「決定可能性」(島田, 1990: 44)を持っているかどうかの認識が希薄となってしまう[15]。

他方、構造主義的数学教育論は、既成の数学的概念や関係をモデル化した具体的教具を用いるが、その際のモデルは「経験世界の事物による表現」であり、後者の意味にあたるものである。さらに、機械論的数学教育論は、予め想定された理論を擬似経験的に表現した問題から出発し、それに対する知識や手続きを示し、それらを定着するために練習問題による鍛練を行うものである。この立場は、構造主義と同じく、既に数学的に言い換えられた段階から始まり、得られた結果を現実と照合せず、類例を通して予定された一般化理論やアルゴリズムを図式化するものである。従って、ここで用いられるモデルは、後者の意味での「擬似モデル」となる。

四つの数学教育論の相違は、扱われる数学的モデルの相違、したがって、現実の世界と数学の世界の間の関係の相違であると考えられる。現実的数学教育論では、モデルが現実と理論の橋渡しの役割を果たしている。しかしながら、構造主義と経験主義は、現実と理論の関係が曖昧となり、閉じた自己充足的な性格を帯びることとなる。かくして、経験主義と構造主義においては、活動の目的と手段が表裏一体化し、何らかの問題をその問題が埋め込まれている世界とは異なる世界のモデルを介して間接的に考察しているという意識が欠如してしまう。このことに関して、三輪(Miwa, 1987)は、与えられた文章題に対して正しい答えを導くことができる生徒でも、得られた答えは何ら現実的な意味を持たないと考えていることを明らかにしている[16]。このことは、問題を数学的に解決することが、現実の場面を理想化・単純化して、条件や仮説を設定した上で一定の判断をしていること、すなわち数学的モデルを用いて解決していることの認識が低いことを意味している。

これまでの議論から、二種類の数学化、すなわち「水平的数学化」と「垂直的数学化」

[14] 島田茂 (編著), (1995). *算数・数学科のオープンエンド アプローチ*. 東洋館. 後者はさらに三タイプに分類される。それらは、(1)抽象的な公理系の無定義用語に解釈を与えて作った「表現モデル」、(2)現実についてのことばに抽象的な理論での意味を付した「擬似数学モデル」、(3)数学的な概念や関係と部分的に同型と見られる「経験世界の事物による表現」である(p. 18)。
[15] 島田 茂 (1990). *教師のための問題集*. 共立出版.
[16] Miwa, T. (1986). Mathematical model-making in problem solving. In J. P. Becker & T. Miwa (Eds.), *Proceedings of the U.S.-Japan seminar on mathematical problem solving* (pp.401-418). Southern Illinois University.

は、数学教育論を類型化する大局的視点を与えていることが示された。また、数学教育論の諸類型の相違は、数学的活動においてモデルが果たす役割の相違であることも示された。ここで、数学教育の類型論から議論をさらに進め、教授・学習論もしくは学習指導論のレベルで数学的活動を検討している研究を取り上げ、その特徴を明らかにしていく。

1．3．数学的活動に基づく教授・学習論

数学的活動に基づく教授・学習論を、数学、教授学、そして心理学の組み合わせにおいて理論化する試みは、実のところ、そう多くはない[17]。ここでは、こうした意図が明確であるアブラム・ストリャール(A. A. Столяр)の研究を取り上げる。

ストリャールは、児童・生徒に数学的活動という一定の思考活動を発達させることを学校数学の目的であると見なし、数学的活動に基づく教授・学習論を構築する。先ず、彼は、数学的活動のモデル論を比較・検討し、実際の数学的活動の主要な側面を反映し、かつ、学校数学での学習指導に適用可能なものとして、三つの側面からなるモデルを採用する(Столяр, 1987: 55)[18]。

1) 具体的状況の数学的記述、もしくは「経験的素材の数学化」(Математизации Эмпирического Материала)。略してМЭМ。
2) 「数学的題材の論理的組織化」(Логическая Организация Математического Материала)。これは、1) の活動から得られたモデルを検討したり、理論(局所的・大局的)を構築したりすること。略してЛОММ。
3) 「数学的理論の応用」(Применение Математической Теории)。これは、2) の活動より得られた数学的モデルや理論を応用すること。略してПМТ。

このモデルは、その意味する内容を検討するとき、先の数学教育類型論における二種類の数学化、すなわち「水平的数学化」と「垂直的数学化」に対応することが分かる。実際、経験的素材の数学化(МЭМ)と数学的理論の応用(ПМТ)は「水平的数学化」に、そして、数学的題材の論理的組織化(ЛОММ)は「垂直的数学化」に、それぞれ対応している。これまで見てきたように、数学的活動のモデル論は、その付与するラベルこそ異なるものの、基本的に、数学的活動の同じ側面を含んでいることが分かる。

しかしながら、ストリャールの研究がそれまでの数学的活動論と異なる点は、数学的活動のモデルを、教授・学習の一般論である教授学の理論、さらには心理学理論と組み合わせている点にある。教授学の理論としては、ミハイル・マフムートフによる「問題解決的教授・

---

[17] わが国におけるそうした研究として、例えば、次のものが挙げられる。杉山吉茂 (1986). *公理的方法に基づく算数・数学の学習指導*. 東洋館. 中原忠男 (1995). *算数・数学教育における構成的アプローチの研究*. 聖文社. 能田伸彦 (1991). *算数・数学科オープン アプローチによる指導の研究ー授業の構成と評価*(改訂版). 東洋館. 平林一栄 (1987). *数学教育の活動主義的展開*. 東洋館.
[18] Столяр, А. А. (1987). *Педагогика математики*. Вышэиш. Школа.

学習論」(Проблемное Обучение: Махмутов, 1975)[19]が採用される。「問題解決的教授・学習論」は、教授・学習過程を問題状況の生起と克服の過程と見なすもので、実際には、三つの観点、すなわち「学習目的」、「既知の事柄と未知の事柄の関係」、そして「解決結果」によって特徴付けられる。かくして、先にあげた数学的活動の三つの側面に対応する問題状況は、次のようになる(表 1)。

数学的活動の基本的側面	問題状況の基本的タイプ			
	目的	既知	未知	結果
経験的素材の数学化(МЭМ)	新しい概念の導入、理論的知識の拡張	数学的記述に該当する経験的素材	経験的素材の記述に必要な数学的言語と道具	新しい数学的知識
数学的素材の論理的組織化(ЛОММ)	知識の体系化	数学的素材	数学的素材の論理的組織化やモデル探究の方法	数学的知識の体系
数学的理論の応用(ПМТ)	新しい場面における知識の応用	経験的素材、数学的理論	新しい経験的素材への数学的理論の応用方法	数学的知識の転移

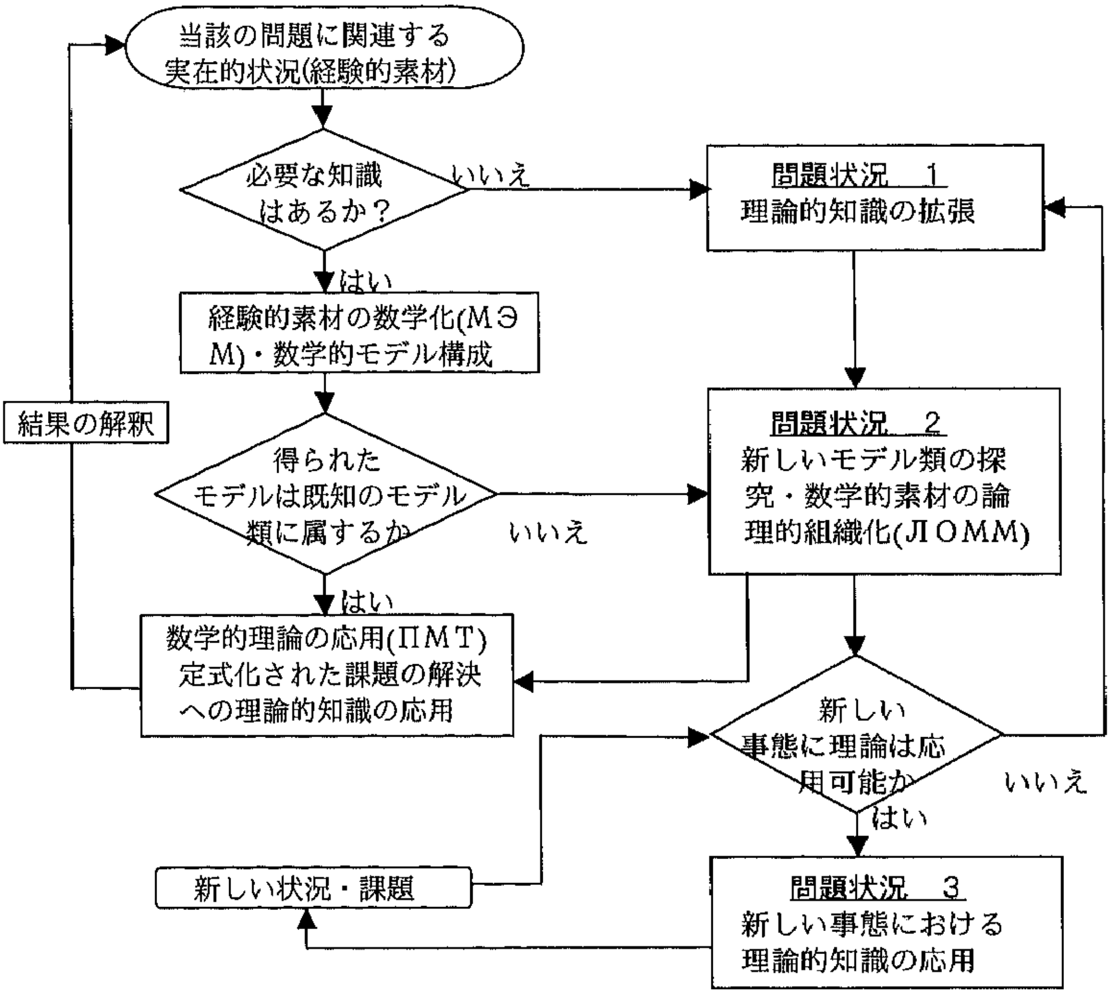
(表 1) 問題解決的教授・学習論に基づく数学的活動の側面 (Столяр, ibid: 63)

さらに、問題状況に基づく数学的活動の教授・学習の一般的展開は、次頁のような模式図に示される流れをたどるものとなる。

ここで、ストリャールによる模式図の構成を検討すると、島田による模式図との関係が、二点示唆される。一つは、ストリャールの模式図は、島田の模式図を、単純化・簡略化することで、数学的活動に含まれる三つの側面(経験的素材の数学化、数学的素材の論理的組織化、数学的理論の応用)を際立たせ、焦点化している点である。もう一つは、ストリャールの模式図は、島田の模式図における「判断ボックス」を、教授学的に意味づけることにより、学習指導の問題、すなわち、「数学的活動に基づく教授・学習」(обучение математической деятельность, Столяр, ibid: 63)の問題に発展させていることである。

これまでみてきたように、ストリャールの研究の特徴は、数学的活動論と教授・学習理論を組み合わせ、「数学的活動に基づく教授・学習」の一般的図式を提示している点にみられる。さらに、ストリャールは、数学論と教授論からなる「数学的活動に基づく教授・学習論」に、発達心理学の理論を組み込み、児童・生徒の発達水準に照らした数学的活動論を定式化しようとしている。そこで、次に、「数学的活動に基づく教授・学習論」の心理学的基礎を取り上げ、その特徴を検討する。

[19] Махмутов, М. И. (1975). Проблемное обучение. М. Педагогика.



数学的活動の問題解決的教授・学習の一般的な模式図(Столяр, ibid: 62)

１．４．数学的活動に基づく教授・学習の心理学的基礎

数学的活動に基づく教授・学習を支える心理学理論として、ストリャールは、当時まだ広く知られていなかったオランダの数学教育者ファン・ヒーレ夫妻(van Hiele, P. M. & van Hiele-Geldof)の「思考水準論」(Theory of level of thinking: van Hiele, 1986)に着目する[20]。それは、ゲシュタルト心理学に依拠する理論であり、それに従えば、数学的活動は、長期的なスパンで子どもの思考水準が上昇する(すなわち新しい構造を洞察する)ことであると見なされる。思考水準は、実際には5つあり、それらは初等教育段階から高等教育段階にまで関わり、数学的活動の大局的本性を示唆している。

[20] ヒーレ夫妻の思考水準論は、旧ソ連の数学教育研究者によって注目され、この理論に照らした大規模な調査研究が組織され、それに基づき、幾何カリキュラムの一部(初等中等教育の前期)が改革された。この成果が後に欧米に広まり、結果として世界的な注目を集める理論となった。Пышкало, A. M. (1965). *Геометрия в I–IV класса.* Просвещение. Wirszup, I. (1976, August). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. Papers from a research workshop (pp.75-97).

思考水準は、学習される内容の一般性、抽象性および論理的構造をも含む複合的概念である。ファン・ヒーレ夫妻は、中等学校における幾何教授の経験を通じて、幾何の認識には5つの思考水準(第０～第４水準)があることを発見した[21]。

第０水準(基底水準, 視覚的水準) 最も低いこの水準では、図形は「全体として」(as a whole)認識され、その外形によって認識される。この水準にいる子どもは、図形の名前を知っており、視覚に基づいて、それらの弁別を誤りなく行うことができる。しかし、この水準では、ひし形を平行四辺形として、また正方形を長方形として見なすことはできない。

第１水準(記述的水準) この水準では、それまで全体として知覚されていた形の分析が行われ、図形に潜んでいる性質が認識される、すなわち、新しい構造が洞察される。この水準において、図形は性質を運搬するものとして機能し、性質によって図形の識別がなされる。しかし、図形の性質は経験的な方法によって確立されており、まだ論理的に整理されてはいない。実際、図形は単に性質を用いて記述されているだけで、定義されてはいないからである。

第２水準(局所的演繹の水準) この水準では、図形の性質間の、そして図形間の論理的関係が打ち立てられる。その際には、図形がもつ諸性質の中から特定のものが、その図形を定義する性質として採用され、残りのものは論理的方法により確立される。この水準では、局所的な範囲において、未分化ながら演繹推論(例えば、正方形はひし形で、ひし形は平行四辺形だから、正方形は平行四辺形である)を行うことができる。しかし、ここでの演繹的推論は未分化であるが故に、それ自体は意識の対象にはならない。

第３水準(形式論理の水準) この水準では、演繹法の意味が大域的に理解される。すなわち、理論全体を構成し、発展させる方法として演繹法を理解する。ここでは、経験的事実とは無関係に、無定義用語と公理を出発点とする演繹論理により理論全体が構成されること、そして、その数学的方法としての「論証」の意味(例えば「間接証明法」)が理解できる。ただし、この水準での公理化は、いわゆる「意味内容のある」もの、すなわち、一定の具体的解釈に基づく公理化である。

第４水準(論理法則の本性の水準) 最も高いこの水準では、論理の本性が認識される。ここでは、対象の具体的性質や対象間の関係の具体的な意味を捨象して、理論を展開することができる。これは、数学者の認識の水準であり、学校数学ではほとんど達成されない。

ここで、思考水準論の基本的な特徴を挙げる。先ず、より高い思考水準への発達は、生物学的な成熟としてではなく学習過程として進行する(van Hiele, 1959: 50)[22]。すなわち、適切

---

[21] van Hiele, P. M. (1984). Child's thought and geometry. In *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierr M.van Hiele*(pp.243-252). Brooklyn College.

[22] van Hiele, P. M. (1959). *Development and learning process*. Groningen.

な教育により、ある水準から次の水準への移行を促進することが可能となる。但し、ある水準から他の水準へ、中間の水準を飛び越して移行することはできない。というのも、思考水準論は、より高い水準の要素が一つ下の水準で未分化ながら含まれており、それが顕在化(洞察)されることで高い水準へと移行するよう構成されているからである。さらに、各思考水準には、専門的な、そして論理的な用語からなる固有の言語があり、水準の移行の際にはその言語が拡大する。従って、異なる水準にある人は実質的に異なった言語を運用するため、お互いに理解し合うことはできない。以上が、思考水準論の基本的な特徴である。

さて、ファン・ヒーレの思考水準論は、ストリャールの数学的活動論とどのように関係しているだろうか。ストリャールによれば、思考水準論は、子どもの現下の数学的活動の水準を示すとともに、潜在的に発達可能な数学的活動の水準、すなわち学習指導によって子どもが移行可能な水準を示すものであるとする(Столяр, 1986: 56-57)。かくして、数学的活動に基づく学習指導は、ある思考水準から次の思考水準への移行を促進することであると位置付けられる。両者の関係は、次のような図式により表される。

第4水準：論理法則の本性の水準
↑ 数学的理論の形式論理的組織化
第3水準：形式論理の水準
↑ 数学的命題の大域的論理的組織化
第2水準：局所的演繹の水準
↑ 数学的素材の局所的論理的組織化
第1水準：記述的水準
↑ 経験的素材の数学的記述
第0水準：視覚的水準

思考水準と数学的活動に基づく学習指導との関係

こうした図式の具体的意味を示すために、次に、ストリャールによる事例(Столяр, 1985)[23]を取り上げる。

図1の図形(経験的素材)が与えられている。観察や測定に基づき、その図形に見いだされる性質を記述するという課題が提起される。生徒は、見いだされた性質を、数学の言語を用いて表現する。

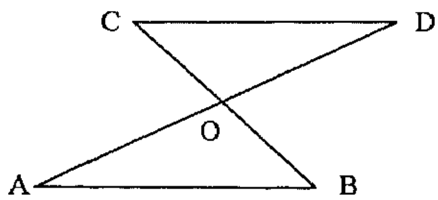


図1

$$p_1 : AD \cap BC = O \,,\; p_2 : BO = OC \,,\; p_3 : AO = OD \,,\; p_4 : AB = CD$$

[23] Столяр, А. А. (1985). Вопросы теории в курсе методики преподавания математики. *Современные проблемы методики преподавания математики.* Просвещение.

p_5 : $\triangle AOB = \triangle COD$, p_6 : $\angle ABC = \angle BCD$,
p_7 : $\angle ABC$ と $\angle BCD$ は錯角をなす， p_8 : $CD \parallel AB$

数学的言語によって表現された図形の性質(p_1 から p_8)は、数学的素材であり、それらは、性質の集合であるので、集合の表記を用いて、次のように表される。

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_8\}$$

ここで、P は、単なる性質の列挙であり、まだ構造を持ってはいない。そこで、次のような問題が提起される。「これらの命題の正しさは、すべて経験的あるいは実験的な方法によって検証される必要があるだろうか」(Столяр, ibid: 62)。もし、そうした必要がなければ、われわれは、経験的に検証する無駄をできる限り省くことができる。これは、経験的方法により確立された性質の集合 P の中から、いくつかの性質(しかも必要最小限の数)を取り出し、残りのすべての性質を論理的に導くという問題である。

この問題の解決には、命題の集合 P に含まれる命題間の論理的な関連を探究することが必要となる。ストリャールは、こうした探究を「論理的実験」(логические эксперимент, Столяр, 1985: 62)と呼ぶ。こうした「論理的実験」は、反例の可能性を検討することによって行われる。試みに、命題 p_1 を取り上げる。このとき、 p_2 は p_1 から導かれないことがわかる。実際、 p_1 は正しい(真である)が p_2 は正しくない(偽である)モデル、すなわち、反例を構成できる(図 2)。

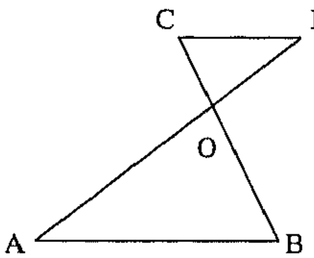


図 2

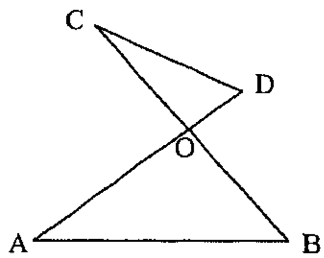


図 3

このような反例から、 p_2 は p_1 から導かれないことが分かったので、出発的となる(根元的)命題として、両方が採用される。こうした「論理的実験」をさらに進めると、 p_1 と p_2 から p_3 は導かれないことがわかる。実際、 p_1 と p_2 は真だが p_3 は偽であるモデルを構成できるからである(図 3)。しかしながら、 p_1, p_2, p_3 は共に成り立つが、他の性質は成り立たないようなモデルは構成できない。このことは、 p_1 ， p_2 ， p_3 が成り立てば、他の性質は必然的に成り立つことを意味する。そこで、これら三つの命題を出発点(根元)とした場合に、他の命題が実際にどのように導かれるかを検討すると、命題の集合 P に関して、次のような

構造(図 4)が得られる。

こうした「論理的実験」に関連して、異なる性質の組み合わせを出発点として採用することが出来ないかという問題も生ずる。いろいろと実験を行った結果、(p_1, p_4, p_8)、(p_1, p_5)の 2 組みが出発点となることがわかる。これらに対応する命題の構造は、図 5、図 6 にそれぞれ示される。

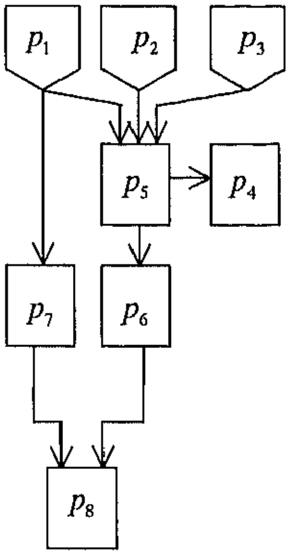


図 4

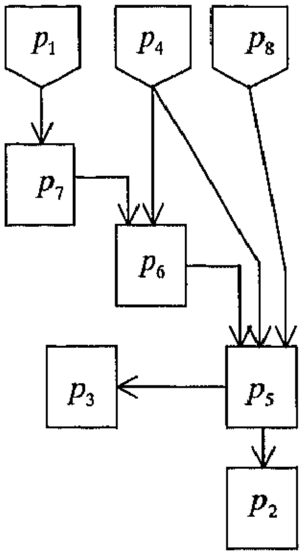


図 5

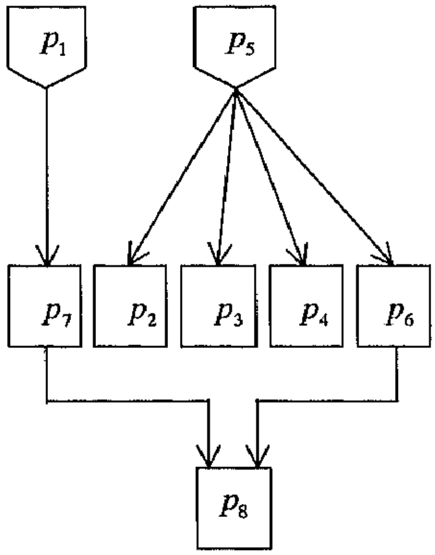


図 6

命題の集合 P に複数の論理的構造が得られた後、次のような活動が展開される。それは、図 1 において頂点 A と頂点 C を結び、新たに辺 AC が付け加えられる(図 7)。そして、この拡張された図形において見いだされる性質(例えば、同側内角とその和の値)が加えられ、結果として集合 P も拡張される(それを P' とする)。この拡張された集合 P' において、再び「論理的実験」が行われる。その際には、既に P において得られた理論構造に基づき、P' の論理的組織化がなされる。こうした活動はさらに展開し、最終的には、平行四辺形(ABCD)が構成され(図 8)、その性質の集合が論理的に組織化され、出発点となる複数の命題の組に応じて、平行四辺形の定義が定められる(Столяр, 1985: 65)。

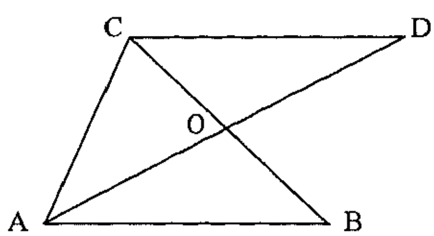


図 7

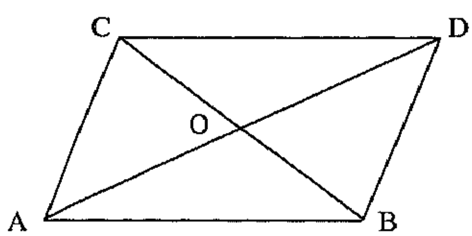


図 8

先の理論的図式とここでの事例より、「数学的活動に基づく教授・学習」は、次のように定式化される。先ず、与えられた経験的題材(上の事例では視覚的図形)を、観察・実験・測定という経験的方法によって検討し、見いだされた性質を数学の言語で記述することで、数学的素材の有限集合$P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$が得られる。こうした経験的素材の数学的記述(MЭM)は、ファン・ヒーレの第0水準(視覚的水準)から第1水準(記述的水準)への移行を意味する。この命題の集合Pは、まだ構造を持っていない、つまり、論理的に整理(系統化)されていないものであった。そこで、この集合Pの最小の部分集合Aで、$\Gamma, A \rightarrow p_i, 1 \le i \le n$なるものを選び出すという問題が提起される。ここで$\Gamma$は、すでに真であると見なされた命題の体系[24]である。この問題は、ΓとAから、Pの残りすべての命題が導かれるように、Aを決定することである。ここで、Aは、Pの集合の根元的性質であり、いわゆる公理に相等する。この問題を解決することで、命題の集合Pは構造$(P, \Rightarrow)$、すなわち命題のネットワークを構成することになり、Pは小さな理論、つまり局所的理論としてΓに組み込まれる。こうした数学的命題の論理的組織化を続けることによって、命題の体系Γは次第に拡大し、一つの理論体系となる。こうした活動、すなわち、命題の集合に論理的構造を入れ、命題間の関係網を構成する活動(ЛОMM)は、ファン・ヒーレの第1水準(記述的水準)から第2水準(局所的演繹の水準)へと上昇する活動を意味する。これまで見てきたように、ストリャールの「数学的活動に基づく教授・学習論」は、ファン・ヒーレの思考水準の移行を促進しようとするための理論枠組みであると言える。

ここで、これまでの議論を整理する。本小節では、大局的視野からみた数学的活動論を検討した。大局的な数学的活動の特徴を検討する手だてとして、本論文では、数学的活動のモデル論を取り上げた。まず、「数学的活動」という用語を数学教育に取り入れたハンス・フロイデンタールのモデルを検討し、数学的活動の本質が「数学化」、すなわち、数学的な手段によって組織化する活動であること、そして、「数学化」は、「現実の数学化」と「数学自身の数学化」という二つの側面からなっていることが示された。

こうした数学的活動の基本的な側面を踏まえつつも、その内部構造をさらに明らかにするために、本論文では、数学的活動のより多様な側面を区別し、包括的な記述を与えている島田のモデルを取り上げ、その特徴を検討した。その結果、数学的活動は、数学的モデル構成による現実世界と数学の世界の相互作用として定式化された。すなわち、数学的活動とは、現実世界における未解決の問題状況に対して、適宜条件や仮説を設定し、簡潔で御しやすい数学の問題として定式化することにより数学の舞台にのせ、数学的方法を用いて演繹処理し、得られた数学的結果を当該の問題の解決に資することであると見なされた。

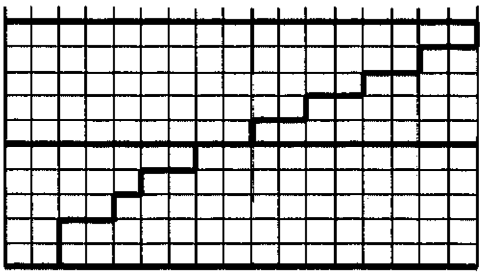
[24] ここでは、公理、既に証明された定理、定義により真である命題。

次に、本論文では、数学的活動を実際の教育の文脈において具体化する研究を取り上げた。ここでは、数学教育の大局的な類型論から次第に局所的な学習指導論へと議論を展開していった。

前者の類型論では、「フロイデンタール研究所」で進められている研究を取り上げた。そこでは、「水平的数学化」と「垂直的数学化」という二種類の数学化を視点とした四つの数学教育論の類型が比較検討され、それらの中で、「現実的数学教育論」と呼ばれる類型が、数学的活動を実現する上で、模範的なものとして推奨されていた。しかし、「現実的数学教育論」の具体的な姿、すなわち、実際のカリキュラムの領域や系統を二つの数学化を視点として、どのように組み立てるかという問題となると、まだ大雑把な枠組みに止まっているように思われる。というのも、「現実的数学教育論」は、上で取り上げたファン・ヒーレの「思考水準論」を基礎としており、初等教育段階から高等教育段階にまで関わり、従って、数学的活動の大局的本性を反映しているが故に、上記のような問題を抱えることになる。

後者の学習指導論では、ストリャールの「数学的活動に基づく教授・学習論」を取り上げた。そこでは、数学的活動のモデルを、教授学の理論と心理学の理論に組み入れる試みがなされていた。しかしながら、ストリャールの理論枠組みも、「思考水準論」に依拠しているため、具体的な学習指導の展開を示唆するような議論は、なされないままとなっている。実際、上で提示した事例は、その内容を検討するとき、二つの思考水準を上昇することを意味しており、実際の学習指導過程の記述とは、到底考えられない。すなわち、その事例は、凡そ数カ月にわたる長期的な学習指導の過程を、合理的に再構成したものであると思われる。

今日、「フロイデンタール研究所」は、「現実的数学教育論」を発展させる上で、「思考水準論」を大枠として受け入れながらも、その理論的な粗さを修正し、より局所的なレベル、すなわち小規模な単元を扱う授業レベルに適合するよう改良を試みている(Gravemeijer, 1994; Treffers, 1987)[25]。そのことは、次のような図により表現されている。



大局的な思考水準を埋める局所的水準での数学化の網目(Treffers, 1987: 248)[26]

---

[25] Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. CD-β Press.　Treffers, A. (1987). *Three dimensions*. D. Reidel.

[26] 原図では、思考水準は、水準 1、2、3 となっている。尚、三つの水準が挙げられているのは、これが、初等教育段階を視野にいれているからである。

この図式において、次の二点が留意される。一つは、「現実的数学教育論」は、大局的で巨視的な水準(macro-level)、すなわちヒアン・ヒーレの思考水準の間に、局所的で微視的な水準(micro-level)での数学化の網目を組み入れていこうとしていることである。ここで、網目の横糸は「水平的数学化」を意味し、縦糸は「垂直的数学化」を意味する。こうした二種類の数学化を連続的に展開することを通して、巨視的な思考水準間の隔たりを埋め合わせようとする。トレファースは、微氏的な数学化の連続を、「漸進的数学化」(progressive mathematising: Treffers, ibid: 248)と呼ぶ。

大局的な思考水準を埋め合わせるもう一つの鍵となる観点は、社会・文化的側面である。そこでは、数学としての真正な文脈(現象学的に分析された状況: Gravemeijer, ibid: 90)に子どもを招き入れると共に、豊かな発想をもつ子どもの意味の構成と、数学文化の代表者である教師の提供する範例(paradigm)、図的、モデル、そして記号という「文化的増幅装置」(cultural amplifier: Treffers, ibid: 251)が相互作用することを通じて、思考水準が徐々に上昇していくよう、単元計画を試みている。「現実的数学教育論」は、こうした文化的増幅装置を、学習の初期の時点から積極的に取り入れることを推奨する。その理由は、こうした文化的増幅装置は、「垂直的数学化」に関わる構成部分であり、それを積極的に導入することにより、思考水準の隔たりを橋渡しする(bridging the level difference by vertical instruments: Treffers, ibid: 248)、つまり、基底水準での直観的で、インフォーマルで、具体的文脈に根ざした操作と、第二水準での形式的で、体系的な思考水準との隔たりを埋め合わせる手助けになると考えるからである。

これまで見てきたように、数学的活動の大局的な視野は、次第に局所的な方向へと論を展開しようとしていることが示唆される。しかしながら、ゲシュタルト心理学に基づく大局的な枠組みが、いかにして局所的なものへと展開されうるかについては、今のところ、明確で整合的な説明が与えられていない。その説明とは、「文化的増幅装置」が、構造の洞察とどのように関連するか、という問題に対する説明である。この問題は、今後の課題であると思われる。

2．数学的活動論：局所的視野

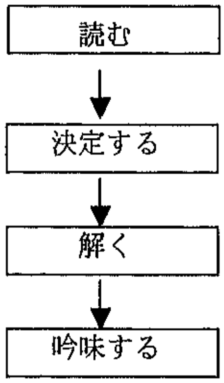
2．1．数学的問題解決過程

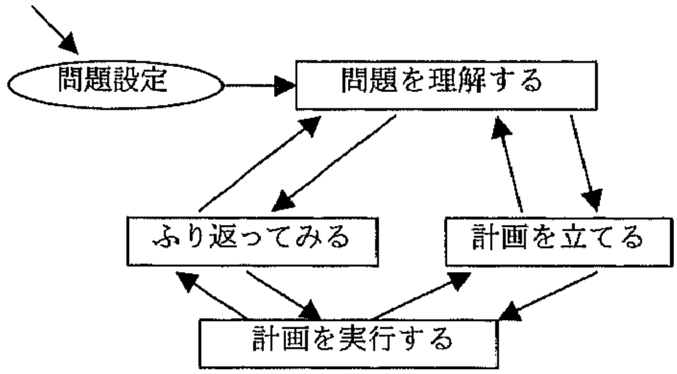
ここでは、数学的活動論の局所的な視野として、個人が数学的問題を解決する活動を検討する。数学的問題解決を論ずる際には、先ず、ジョージ・ポリアによる問題解決論(Polya, 1957)[27]から始めるのが適切であると考える。

[27] Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press.

ポリアは、問題解決の際に解決者が行うことを「四つの相」(four phases)として区別している。それらは、「問題を理解する」(understand the problem)、「計画を立てる」(make a plan)、「計画を実行する」(carry out the plan)、「ふり返ってみる」(look back)というものである(Polya, ibid: 5-6)。

このことに関して、ウイルソンら(Wilson, Fernandez, Hadaway, 1993: 61)は、問題解決過程として、アメリカ合衆国の教科書では、次のような線型のモデル(A)が採用され、あわせて、練習課題のような狭い問題が取り扱われていると指摘する[28]。





A. 問題題解決の線型的枠組み　B. 問題解決の力動的で周期的な本性を強調する枠組み

こうした線型モデルは、問題解決に関して、生徒に次のような理解をもたらすとしている(Wilson et al., ibid: 60)。

・問題解決を線型的過程と見なす。
・問題解決を連続する手順(ステップ)として提示する。
・問題を解決することは、記憶し、鍛練し、慣れるための手続きであると見なす。
・答えを得ることを強調する。

これに対して、ウイルソンらは、問題解決の力動的で周期的な本性を強調する枠組みを提示する(Wilson et al., ibid: 62)。この枠組みは、ポリアによる問題解決の「相」という考えを明確に打ち出しているものと理解される。

ポリアが示した四つの相は、一見してシンプルであり妥当でもあるが、実際には意味深長であり、多くの教訓的な内容を含んでいる。

人が未解決の問いに対して十分な直接的方法を持っていない状況、すなわち、ある程度問題意識は持っているが、解決のためにどのような条件が必要かつ十分であるかが分からない状況では、適当な条件を設定し、問題を確定することが必要となる。問題の理解には、解決

[28] Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hardaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57-78). NCTM.

者が持ち合わせている問題状況に関連する現実世界の知識や、数学的知識や言語の豊かさが問題となる。このことに関して、問題の定式化の過程は、当初の問題を機械的に数学の言語に置き換えるという単純なものではなく、現実の世界と数学の世界との間の複雑で弁証法的な相互作用となる。問題が確定され、解決を図るために計画を練るところでも、理解の不十分さ、あるいは誤解に気づき、改めて問題の理解というスタートラインに立ち返らなくてはならないかもしれない。また、実行についても、問題が難しければそれだけ、計画を立てて実行したがうまくゆかず、改めて計画の練り直しが必要になり、もう一度、計画一実行をし直すことが必要とされる。また、実行の際には、自分の持ち合わせている概念的知識や手続き的知識が不十分、不完全であることに気づき、改めて確認することもある。解決が複雑に入り組んでいる場合には、その一部分を下位問題として別途解決し、再び本題に戻ることもある。さらに、一旦解決が得られたら、その解が本当の意味で当初の問題の解決となっているかをふり返り、検討しなくてはならないであろう。

ところで、問題解決における「ふり返りの相」は、反省的で発展的な契機を含んでいる。このことに関して、三輪(1991a)[29]は次のように述べている。

> まず、解決過程そのもののふり返りがあるであろう。…… それによって、最も短い、最も能率の良い仕方、手順を探すことができるであろう。また、その検討から、全く別の解決の道が得られるかもしれない。…… また、こうした、ふり返りは、おのずから、問題自身の発展につながる。解決の方法や解決そのものを検討してみることは、問題自身の中のどの部分が解決の際の最も重要な鍵となっているかを見抜くことにつながる。それから、問題の本質的な部分とそうでない部分との区別ができることになろう。このことは、その問題の意味が十分に分かることで、この本質的部分だけに着目することで、問題の発展を図ることができるのである。(三輪, 1991a: 68)

このように、ふり返りの相には、見逃すことのできない教育的教訓が含まれている。

ここで、問題解決の相の内容を検討するとき、文言は同一ではなくても、それは島田による数学的活動の模式図と合致しているといえる。つまり、問題解決の過程は、数学的活動の全体的過程と実質的に重なり合っているのである。問題解決過程、そして数学的活動も、いわば「うねり」のある力動的過程で、弁証法的・可逆的な生業であって、決して、一方向的で、線形的なものではない。こうした理解を可能にしているのが、問題解決の「相」という見方にあると思われる。

2．2．問題解決過程の認知心理学的枠組み

先に、数学的活動の心理学的基礎として、発達心理学的な思考水準論が検討された。これ

[29] 三輪辰郎 (1991a). 問題解決能力の育成. *数学教育の課題と展望* (pp.63-81). 金子書房.

に対して、個人による問題解決過程は、より局所的な数学的活動であり、それを基礎づける心理学理論としては、思考活動の仕組みをモデル化する認知心理学が応用される。

認知心理学は、問題解決過程の思考活動を分析し、その主要な構成要素を提示している。数学教育における問題解決過程の認知心理学的研究として最も説得力のある枠組みは、米国の数学教育研究者アラン・シェーンフエルド(Schoenfeld, 1985)[30]によるものであろう。数学者としての経験、そして、カレッジやハイスクールでの種々の教授実験や調査研究を通じて、彼は、数学的問題解決活動の進展(成功もしくは失敗等)を説明するには、四つの知識および行動のカテゴリー(それらはある程度重複し、また相互作用する)の全てを考慮する必要があるという(Schoenfeld, 1985: 15)。

1) リソース (Resources)
2) 発見法 (Heuristics)
3) コントロール (Control)
4) 信念システム (Belief Systems)

これらは、問題解決において解決者がそれに依拠して活動を進めているものであり、数学的問題解決、すなわち局所的な数学的活動の主要な構成要素と言える。

「リソース」とは、個人が持っている数学的知識で、手中の問題に対して発揮することができるものである。これには、その領域に関連する直観やインフォーマルな知識、事実、アルゴリズム的手続き、「決まりきった」(routine)非アルゴリズム的手続き、そして、その領域において作業するための規則(例えば、概念・原理・法則等)の理解などが含まれる(Schoenfeld, ibid: 15)。ここで重要なことは、「発揮する・生かすことができる」(capable to bring to bear)知識という点である(Schoenfeld, ibid: 44)。すなわち、問題解決においては、問題解決者が自分の身についている豊富で利用可能な数学的知識、しかも一つのシステムとして有機的に組織化されている知識が必要不可欠となる。

発見法とは、なじみのない、もしくは標準的でない問題で進歩をするための方略(strategies)と技法のことである。数学的知識が十分にあっても、それだけでは問題を数学的に解決するには十分ではなく、解決のための方略や技法が必要とされるのである。それらは、効果的な問題解決のためのいわば「経験則」(rules of thumb)であり、問題に直面したとき、どう行動するかの手とも言うべきものである。それには、図を画く、適当な記号を持ちこむ、類推を利用する、問題を再定式化する、問題が解けたとして逆向きに作業する(working backwards)、えられた結果の妥当性を検証したり確証すること等が含まれる。

---

30 Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press. なお、ここでのシェーンフエルドの理論枠組みについての議論の多くは、三輪辰郎 (1991a). 問題解決能力の育成. *数学教育の課題と展望* (pp.63-81). 金子書房.に拠っている。

コントロールとは、問題解決の計画の際のリソースと方略の選択と実行に関する大局的な決定であり、また、実行における監視(monitoring)や評価(assessment)を意味する。良いコントロールをする問題解決者は、リソースや方略を有効に使用し、難しい問題であってもある程度効率よく解決することができるが、逆にコントロールが欠如していると、リソースを浪費し、容易に手の届く範囲にある問題であっても、その解決に失敗するのである。従って、問題解決の正否は、知識や発見法の有無のみならず、管理の善し悪しでもあると言える。

また、コントロールは、問題解決の実行途中における進捗状況がどの程度であるかの監視と評価の働きをする。よくできる問題解決者は、解決が線に乗っている(on-line)かどうかを評価し、それに従って活動することを可能にするよう、仕事から距離をおいて、仕事のしかたをコントロールするのである。これは、問題に取り組んでいるまさに活動中の自分をあたかももう一人の自分がいるかのように監視し、コントロールすることである(三輪, 1991a: 75)。こうしたコントロールの側面を「メタ認知」(metacognition)と呼ぶことも多い。「メタ」という接頭辞が用いられるのは、それが認知的活動についての認知であり、通常の認知より一段上にあると考えられるからである。

信念システム　これは、人の持っている“数学的世界観”(mathematical world view)であり、個人の行動の決定因子(必ずしも意識的とは限らない)の集まりで、自身について、環境について、問題やトピックについて、数学について等に関するものである。問題解決に取り組む自分がどういうものであるか、数学についてどのように考えているか、問題自身について、あるいは、自分を取り巻く環境についてどのように捉えているかといったことの全体が信念システムを形成する。例えば、「数学は特別の人だけがやれるのであって、大抵の人はできなくてよい。」(数学について)、「数学の問題は、解けるなら 10 分程度で解けるはずだ。」(問題について)、「文字式を使うのは苦手だ。」(トピックについて)、「数学はとてもできない。」(自分について)などの信念がある。こうした信念のシステムが、実は、問題解決者活動を根底から揺り動かす大きな力となっているのである。上のような信念を持っている生徒は、10 分程度考えて解けなければ解決を断念するかも知れないし、文字式を利用することをできるだけ避けようともするだろう。このように、信念システムは、問題解決者が問題にどれだけ長くまた熱心に取り組むか、そして、問題にどのようにアプローチするかなど、上で挙げた 3 つのカテゴリー(リソース、発見法、コントロール)が機能する文脈を定めるものであり、文字通り問題解決における解決者の行動の「決定因子」(determinants)であるといえる。

これまでみてきたように、数学的問題解決研究において、解決者がそれに依拠して活動を進めている問題解決の主要な構成要素が同定されてきている。それらは、数学的知識や発見法という認知的なもの、「メタ認知」と呼ばれる認知過程を統御し監視する一段高い認知、そして、情意的な性格をもつ「信念システム」と呼ばれるものであった。数学的問題解決に

ついての従来の研究は、専ら、知識や技能および発見法といった認知的な側面に光をあてていたのに対して、近年の研究は、いわば「純粋に認知的なものを越えた」(Beyond the purely cognitive)[31]側面も無視しえない重要な構成部分であり、それらが問題解決の営みをいわば「大所高所」から揺り動かしていることを強調している。そこで、次に、こうした研究をいくつか取り上げて検討する。

2．3．純粋に認知的・論理的なものを超えて

ここでは、先ず、フランスの数学教育者・人工知能研究者のニコラ・バラシェフの研究(Balacheff, 1991)[32]を取り上げる。バラシェフは、子どもの数学的問題解決活動の分析には、次の三つの次元が含まれるとしている。

1) 問題それ自体に関する分析
2) 数学とは何かという大局的なコンセプションに関する分析
3) 状況に関する分析　(Balacheff, 1991: 107)

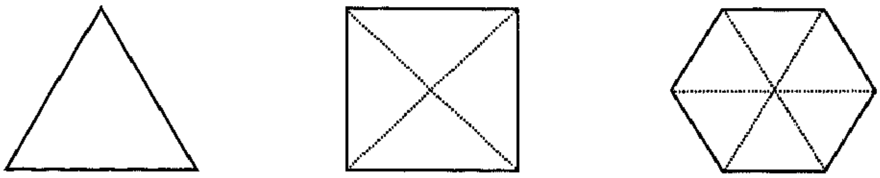
これら三つの次元は、その内容を検討するとき、先のシェーンフェルドによる構成要素と共通点を持っている。実際、1)は「リソース」に、2)は「信念システム」にそれぞれ対応している。また、3)は状況に関する判断であり「コントロール」に関連するが、これに関しては、実行におけるコントロール以上の広い要素を含んでいる。実際、バラシェフは、問題解決の際の自分自身の行動の反省というよりも、問題解決者が置かれている(教室や実験室などの)状況判断を取り上げる。以下では、これらの次元について、具体的調査研究のデータを取り上げて検討する。

バラシェフは、コレージュ(前期中等段階)の 13-14 才の生徒のペアに、次の問題、すなわち、「多角形の頂点の数が与えられたとき、対角線の本数を求める方法を示しなさい。」(Balacheff, 1991: 93)を提示し、協同で解決するように求めた。問題は二つのことを問うている。一つは、対角線は何本かであり、もう一つはそれを求める方法である。この問題に協同で取り組む生徒の活動の分析から、上の三つの次元に関して興味ある事柄が観察された。

問題それ自体に関する分析　生徒が構成した推測は多様であった。n 角形の対角線の本数をここで関数記号 $f(n)$ で表すと、それらの中には、$f(n)=n$，$f(n)=\frac{n}{2}$ という推測も含まれていた。バラシェフは、生徒が構成する推測の多様性は、彼らの持っている知識と「合理性」(rationality)の多様性と関わっているとしている。知識の多様性は、問題文に含まれる

[31] Schoenfeld, A. (1983). Beyond the purely cognitive. *Cognitive Science, 7*, 329-363.
[32] Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp.89-110). Kluwer.

「多角形」(polygon)や「対角線」(diagonal)の多様な定義として現れた。例えば、$f(n)=\dfrac{n}{2}$であるとした生徒は、「多角形は、偶数の辺をもつ正多角形」、「対角線は、頂点を結ぶ線分で、多角形を二分するもの」と意味付けていた。そして、正三角形は対角線を持たず($f(3)=0$)、正方形は2本($f(4)=2$)という特定の例が、一般的な推測を構成する上で重要な役割を果たしていた。特に、正方形が「典型例(ﾌﾟﾛﾄﾀｲﾌﾟ)」(Balacheff, ibid: 94)として推測を強化する働きをしたとされる。こうした典型例に基づき、生徒は、正六角形の対角線の本数を$f(6)=3$としたのであった。



$f(3)=0$　　$f(4)=2$ 典型例(ﾌﾟﾛﾄﾀｲﾌﾟ)　　$f(6)=3$

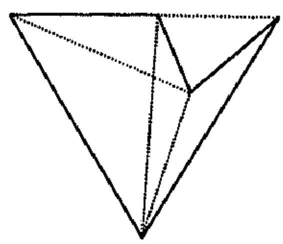
次に、多様な合理性に関しては、生徒が推測を正当化する多様な方法として現れた。このことに関して、バラシェフは、「素朴な経験主義」(naive empiricism)、「決定的実験」(crucial experiment)、「総称的な例」(generic example)、「思考実験」(thought experiment)を区別している(Balacheff, 1991: 94)。「素朴な経験主義」とは、若干の事例を観察するだけで一般的な推測を導き出すことである[33]。例えば、五角形の対角線は5本であることを知って(記号で$P_5=5$と表す)$f(n)=n$であるとしたり、七角形で$P_7=14$であることから、一般的に$f(n)=2n$とするのがこれにあたる。「決定的な実験」[34]とは、その結果にもとづいて、テストされるべき推測か験証されるか反証されるかを決定する実験であり、勝手気ままに選んだのではない事例によってテストしてみることである。これは、推測が立てられた際に、例えば十角形を選び、それにおいて推測をテストすることである。そして、十角形についての結果がうまくゆけば、推測は一般的に成り立つだろうし、逆にうまくゆかなければ全く成り立たないと判断するのである。こうした合理性に基づく確証の方法には、一般性についての認識の芽生えが見てとれる。次の「総称的な例」による説明とは、「準一一般的」(quasi-allgemein)方法(中村, 1962: 120)[35]とも呼ばれるものであるが、それは、一つの特定の場合(particular case)において一般性を示そうとすることである(Balacheff, 1991: 109)。つまり、

[33] もちろん、これは不安定で脆いものである。
[34] 「決定的実験」は、ポパー(1979: 15-15)に拠っていると思われる。Popper, K. (1979). *Objective knowledge.* Oxford: Clarendon Press.
[35] 中村幸四郎 (1962). *数学史.* 啓林館.

説明は、一つの具体的対象(例えばP_6)についての具体的行為(例えば、$f(6)=3+3+2+1$)によって示されるが、それは、特定の対象について説明するのではなく、それを通して一般的な仕組みを説明しようとするものである。最後の「思考実験」は、特定の具体的表現から離れて、念頭において、すなわち、内面において概念の仕組みに基づき実験を行うことである。

大局的なコンセプションに関する分析　生徒の推測は、知識や合理性の水準だけではなく、数学についての全般的な観念によって制約されている。例えば、「数学では例外はあってはならない」というものや、「答えは必ず一つの公式にならなくてはいけない」、という考えなどがそれである。これとは逆に、「数学には例外があってもかまわないし、答えは必ずしも唯一の式に表現される必要はない」、という考えもある。バラシェフは、数学についての大局的なコンセプションを調べる際に、被験者の生徒に反例を提示し、それに対して彼らがどのように対処するかを見ようとする。こうした方法に基づく調査の結果、生徒の中には反例を例外と見なす者が多いことが明らかにされた。この傾向は、特に三角形を扱う仕方において現れた。生徒たちは、自分たちの推測は「4 から妥当である。・・・なぜなら三角形は特殊なケースであるから」と述べたり、「三角形は多角形ではない」ときっぱりと却下する生徒もいたという(Balacheff, 1991: 100)。

また、正しい推測$f(n)=\dfrac{n(n-3)}{2}$を立てている生徒に対し、実験者が右図のように三頂点が同一直線上にある多角形P_5を提示すると、彼らは、それもまた特殊なケースであるとしたり、凸多角形に対する最初の推論を保ち、そうしたケースに対する特異解$f(n)=(n(n-3)/2)-1$を定めようとした。



反例P_5(Balacheff, 1991: 98)

このように、反例が提示されても推測は必ずしも却下されないという興味深い結果が、この調査から得られたのであった。

状況に関する分析　生徒の問題解決活動は、実験室的に統制された状況に照らして意味をなす。バラシェフは、実験室状況が問題解決活動に与える制約を「実験室的契約」(experimental contract: Balacheff, 1991: 107)と呼んでいる。こうした「実験室的契約」の例として、この実験では、次のような行動が見いだされている。生徒の中には、課題解決の過程で、多角形の条件を検討しようとする者がいた。特に、偶数個の頂点を持つ多角形に対して$f(n)=2n$と推測した生徒はそうであった。しかしながら、彼らは、結局、条件を導入することを諦めてしまった。というのも、与えられた問題文には多角形の条件については何ら書

かれていなかったからである。すなわち、生徒たちは、実験に参加する被験者として、教師から課された問題文に対して、勝手に手を加えてはならないと判断したのであった。

生徒の問題解決行為や能力がその場の状況に左右されるという指摘は意味深長である。というのは、生徒の問題解決活動は、単に、生徒と問題との対峙という図式だけではなく、課された問題を解いているその場の状況とのセットで意味をなすからである。カール・ポパーが、「事柄の確からしさ(certainty)の強さは、事実の強さの問題ではなく状況の問題である」(Popper, 1979: 78)[36]と述べるとき、それは、このことを言い当てているように思われる。数学は、その本性から、事柄の正当化あるいは論証を行う活動を重視し、生徒にそうした活動を期待している。しかし、正当化や論証という行為が誘われるのは、非常に重大な結果が招来するような状況、微妙の判断を必要とされる状況においてであろう。したがって、ある生徒が、推測に対して何ら根拠を与えず、ただ結果だけを述べたとしても、そのことによって、その生徒に証明の能力が欠如しているとは、簡単に言えないのである(Balacheff, 1988: 3)[37]。

これまで見てきたように、バラシェフの調査研究は、シェーンフェルドと同じく、局所的な数学的活動、すなわち数学的問題解決が、質的に異なる構成要素の複雑な関わり合いのもとで成り立っていることを示している。数学的問題解決に関するこうした見解は、80 年代の中盤より基本的な立場となってきたように思われる。以下では、他の研究を補完し、このことを確認したい。

ここではポール・コブ(P. Cobb)による研究枠組みを取り上げる。コブは、問題解決活動を三つのレベルの予想(anticipation)として捉えている。それらは、「数学についての動機と信念」、「発見法」、そして「問題の表象」である(Cobb, 1985)[38]。この枠組みでは、最も大局的なレベルである「動機や信念」が、数学的活動が展開される文脈(何が問題となり、どういう解法が受け入れられるか)を定める。次のレベルの「発見法」は、一定の動機や信念の方向づけのもとで、問題を解決する文脈を定める役割を果たす。そして、最も特殊な「問題の表象」は、発見法により定められた文脈において概念的な組み立てをするものである。コブは、小学校二年の教授実験を通して、児童が計算問題を解決する過程を、この階層に照らして分析している。分析されたある児童の活動は、「自我関与」(ego-involvement: Nicolls, 1989: 84)[39]的な動機に拠っており、そうした動機が、発見法や問題表象を制約しているのであった。実際、この児童は、正答が得られればその理由はさして重要ではないと考えており、問題解決の際には、問題文に与えられている数詞の表面的な規則性を手がかりとして、答えを出そ

[36] Popper, K. R. (1972). *Objective knowledge*. Oxford: Clarendon Press.
[37] Balacheff, N. (1988). A study of pupil's proving processes at the junior high school level, *Invited conference to the joint international conference 66th NCTM and UCSMP Project*. Chicago.
[38] Cobb, P.(1985). Two children's anticipations, beliefs, and motivations. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 111-126.
[39] Nicolls, J. G. (1989). *The competitive ethos and democratic education*. Harvard University Press.

うとする。また複数の問題(例えば、7+3=　，7+4=　，7+5=　)に対して、他の解法とは関係なく一つずつ解いているという素振りを見せていたのであった。この児童が、なぜ、そうした素振りを見せたかというと、彼は、「問題を関連づけることは正直ではなく、ずるいことであると先生が思うであろう」と考えたからであった。このように、この児童の問題解決行為は、問題それ自体を解決したいという知的な動機、すなわち「課題関与的」(task-involvement: Nicolls, ibid: 89)動機に拠ってではなく、むしろ、自分に対する他者の評価を良くしたいという動機、すなわち「自我関与的」動機に拠っていたのであった(Cobb, ibid: 117)。

これまで取り上げてきた一連の研究から、数学的問題解決活動に関して、次のような階層的な構成要素を設定することができると考える。

1) 大局的な動機・信念
2) 局所的コントロール(状況に関する監視や発見法等の意思決定)
3) 発見法
4) 問題に関する知識や表象

従来の研究が、知識や発見法といった認知的な側面に光をあてていたのに対して、近年の研究は、いわば「純粋に認知的なものを越えた」側面をも視野に入れた総合的な枠組みを構想している。特に、数学的問題解決活動をその根底において揺り動かしている大局的な動機や信念が重要な構成要素であるという認識が高まっている。ここでは、そうした問題意識の火付け役となった幾つかの発達心理学的研究を取り上げる。

一つは、アラディスとギンスバーグ(Allardice, & Ginsburg, 1983)[40]の研究である。彼らは、アメリカ合衆国の小学校で、学業成績が悪く学習困難児と見なされていた一人の黒人の子どもの日々の活動を調査していった。その結果分かってきたことは、その子は、自分を含めた黒人は、現在も、そして将来も知的な活動に従事することは期待されておらず、従って、算数や科学といった学術的教科を真剣に学ぶことは無駄であると考えているということであった。そのために、その子は、算数の授業では無関心を装い、授業の進行に迷惑をかけないように、黙って座っていることが自分の役割であると考えていたのであった。その子は、教室での算数の成績は、当然のことながら、まったく惨めなものであったが、放課後や学校外の生活場面においては、実に豊かな数量や空間の処理能力を発揮しており、創意工夫した問題解決を行っていたのであった。こうした研究は、数学的問題解決において、動機や信念が、きわめて根源的で致命的な役割を果たしていることを示唆している。

もう一つの対照的な研究は、発達心理学者ロイセルによる算数の文章題に関するもので

---

[40] Allardice, B. & Ginsburg, H. (1983). Children's psychological difficulties in mathematics. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. Academic Press.

ある。これは、学校の算数において首尾良い成果を修めている子どもたちが、実際には、風変わりな信念を発達させていることを示唆している(Reusser, 1988)[41]。ロイセルは、スイスの小学校の 4, 5 年生に次のような文章題を提示した。

> 125 匹の羊と 5 匹の犬が群れをなしている。羊飼いは何才でしょう?

この問題は一見してナンセンスなもであるが、子どもたちはこの問題を解こうとしたのであった。そして、ある 4 年生の児童は、次のように述べたという。

> 125+5=130、・・・これでは大き過ぎる。だから、125−5=120、これでもまだ大き過ぎる。・・・だったら 125÷5=25。これはいい、羊飼いは 25 才だと思う。(Reusser, 1988: 325)

こうした奇妙な行動は、特異で稀な出来事ではなかった。実際、ロイセルの調査では、多くの子どもたちがこの問題に対して何らかの数値解を与えようとしたのであった。彼らは、一定の数学的な知識や技能を持ち合わせており、学校で課される通常の問題を首尾よく解決することができる。すなわち、表面的には算数・数学教育は成功裏に行なわれているように見える。しかし、その背後の根深いレベルにおいて、子どもたちは算数・数学をすることについて不適切な信念(例えば、「数学の問題は現実世界とは無関係であり、数学の問題の解決は問題文中に与えらた数値に対して適当に演算を施せばよい」、という信念)を発達させているのである。かくして、ロイセルは、数学的問題解決が単に知識と手続きの論理以上のものであることを示したのであった[42]。

ここで、本小節のまとめをしたい。本小節では、数学的活動論の局所的視野として、数学的問題解決過程論について検討してきた。認知心理学の発展により、数学的問題解決過程が、幾つかの相互に関連する構成要素から成る理論枠組みにおいて検討されていることが示された。こうした理論枠組みは、その構成要素の名称こそ異なっているが、その内容を検討するとき、一定の共通性を持っていることが示唆された。それは、最も大局的なレベルである「動機と信念」から最も局所的な「問題に関する知識や表象」までの階層的な構造を成すものであった。

従来の研究が、専ら局所的で認知的なレベルに光をあてていたのに対して、近年の研究は、純粋に認知的なものを越えた大局的なレベルをも視野に入れた総合的な枠組みにおいて数学的問題解決活動を検討していこうとしている。そして、そうした研究枠組みのもとで、

---

[41] Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things. *Instructional Science, 17*, 309-338.

[42] これと似よりの結果がわが国でも報告されている。上野直樹 (1992). 状況的認知と学校の言語ゲーム. *教育学研究,* 59(1), 40-45. 佐伯 胖, 大村彰道, 藤岡信勝, 汐見稔幸 (1989). *すぐれた授業とはなにか: 授業の認知科学.* 東京大学出版会.

幾つかの興味深い知見も提出されてきている。特に、問題解決活動を根底で揺り動かしている大局的な動機や信念の研究や状況的認知に関する研究は、研究空間を実験室における臨床的な観察研究から教室という社会的・文化的な環境へと移しつつある。このように、数学的問題解決の今日的な研究は、問題解決活動が組織される社会-制度的環境や、活動が埋め込まれている具体的状況に照らして検討することを必要としていることが示唆される。

第２節　数学的活動論の課題：授業論の諸問題

１．授業における数学的活動への着目

前節では、数学的活動論の大局的視野と局所的視野に関して、これまでの研究成果と課題を検討してきた。一方の大局的視野は、数学的活動のマクロな水準を前提としつつも、その粗さを埋め合わせ、よりミクロな学習指導の水準において数学的活動が展開できるよう、研究を進めていくことが課題とされた。他方の局所的視野は、実験室的・臨床的研究から、実際の教室や学校という社会的環境へと視野を広げ、検討することが必要となってきた。かくして、数学的活動論の大局的視野は次第に局所的視野へと具体化を試み、そして、局所的視野は大局的視野へと広がりを見せている。かくして、両者は、教室もしくは授業という社会的・文化的空間において出会うことになる。

本節では、学校数学の授業における数学的活動論を取り上げ、そこでの研究成果と課題を検討する。この分野の研究としては、発達心理学に基づく大局的視野からのアプローチに比べて、認知心理学に基づく局所的視野からのアプローチが豊かな成果を与えていると思われるので、以下では、後者の研究を取り上げることにする。ここでは、先ず、数学的信念と教室での数学の授業過程との相互反映性を示す、シェーンフェルドの研究(Schoenfeld, 1988b)[43]を取り上げる。

１．１．数学の授業における信念システムの社会的構成

数学教育研究において「信念システム」(belief system)という考えの重要性を強調したのはシェーンフェルドであった(Schoenfeld, 1983)[44]。彼がそうした構成概念を数学的問題解決論に持ち込んだ背景は次のものであった。彼は、ハイスクールで論証幾何を一年間履修した経験のあるカレッジの学生に対して、幾何の理解、特に証明と作図の相互関係の理解について調べていた。その一環として、1983年に、ロチェスター(Rochester)大学の数学と科学の分野の優秀生(15名)に幾何の証明問題を課したところ、彼らはそれを3分以内で解決した。その後、作図問題が課された。それは、先の証明問題を参照すれば容易に解決できるものであった。しかし、学生たちは、作図問題に対して10分以上も試行錯誤的に取り組んだのであった。証明問題に対して、手際よく、演繹的に議論を構成する同じ学生が、作図問題に対しては、無統制に予想を立て、目測等による経験的方法を用いるのであった。「証明に基づく知

[43] Schoenfeld, A. (1988b). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*(3),145-166.
[44] Schoenfeld, A. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognition, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science, 7*, 329-363.

識」と「作図の知識」の間に、何ら関連性を見いだそうとしない学生の観察から、シェーンフェルドは、「形式的な数学(証明)は、リアルな思考や問題解決とは無縁である。」(Schoenfeld, 1985: 43)という信念を見いだしたのであった。かくして、シェーンフェルドは、学生の問題解決活動の分析を通して、様々な信念のシステムを明らかにしていった。

シェーンフェルドの次なる研究関心は、そうした信念システムの発達の源泉を検討することであった。そこで、彼は、カレッジの学生が経験した第10学年の幾何授業の組織化形態を分析する。その一環として、ニューヨーク州立のあるハイスクールの幾何授業を、一年間(1983-1984学年度)にわたり観察を行っている。この観察を通じて、シェーンフェルドは、これまで見いだしてきた学生の信念の発達には、彼らが参加した幾何の授業における特徴的な数学的活動の経験が、深く関与しているという結論に至ったのであった。

先ず、シェーンフェルドは、学校数学の授業がより広い社会・制度的な制約、ここでは「州統一試験」の影響下にあることを指摘する。授業は、州統一試験を考慮し、カリキュラムと教科書に忠実に進められた。州統一試験では、配点の上では証明が重視されているが、逆に、作図は強調されなかった。試験において、作図問題は、その正確さが要求され、その手続き上の根拠の説明は、一切要求されてはいなかった。統一試験の影響から、作図の単元は、技能の習熟を目指して、学年末(試験間際)に集中的して指導された。授業では、作図を正確に描くことが指導の焦点となり、生徒は知的スキルというよりも、むしろ、技術的スキルの訓練をうけたのであった。すなわち、作図の指導では、作図法の正しさを説明することではなく、各手順を記憶することが重要な課題とされたのであった。もし、作図指導が、その根拠を議論するように扱われていたならば、生徒たちは、証明という形式的な数学と、経験的で構成的な数学との間の結びつきをつけることに役立ったであろう。しかし、実際には、作図に関する知識は、証明とは一切関連しないものとして、学習されてきたのであった。こうした学習では、必然的に、「証明の知識」と「作図の知識」は無縁のものとなってしまうのである。この幾何の授業は、一方で、教師が意図したようにスムーズに進み、カリキュラムの内容はカバーされ、生徒の州統一テストにおいても満足のゆく成績を修めていたが、他方で、生徒は数学(幾何)についての有害で誤った信念を形成してしまったのであった。

シェーンフェルドによるこうした研究は、生徒や学生に発達している信念システムが、彼らが参加する授業における数学的活動の質と密接に関連していることを示唆している。これは、信念の発達に対する授業過程の影響に関する研究であった。そこで、次には、数学的知識や発見法の発達に対する授業過程の影響を取り上げ、検討する。

１．２．数学的知識・発見法に対する授業過程の影響

数学的知識の構成に対する授業過程の影響に関する研究として、ここでは、ポール・コ

ブによるケース・スタディ(Cobb, 1987)[45]を取り上げる。彼は、小学校１年生の式と計算の理解に関する調査を行い、次のような結果を得ている。それは、多くの児童が、等号の記号、すなわち＝を、数の間の相等関係ではなく、「何かをする行為」と解釈しているということである。したがって、児童は、「7+3=　」という表現を受け入れるが、「10=7+3」や「7+3=3+7」は受け入れないのである。児童にとって、等号記号は、一種の「行為の掟」(code for action: Cobb, ibid: 121)として理解されているのである。

そこで、コブは、こうした児童の等号に関する意味の発達の源泉を検討しようとする。そのために、彼は、被験者の児童を受け持っている５人の教師に、アンケートならびにインタビュー調査を行っている。その項目には、算数の教育内容、教科書の利用法、そして、授業の方法が含まれている。こうした調査を通じて、コブは、概ね次のような傾向を見いだしている。算数の教育内容に関しては、個々の断片的な事実とスキルからなるものとして理解されていること、教科書の利用法に関しては、にある典型的な課題に対して正答を与えるよう鍛練すること、そして、授業の方法に関しては、先ず教師が問題の解法を明示的に説明し、後にワークシートを中心として反復練習をすること、である(Cobb, ibid: 118-190)。こうした調査結果から、コブは、児童の等号に関する意味の発達が、平素の算数の授業の組織化形態と不可分に結びついていると結論付けている。

次に、発見法に関する研究を取り上げる。この研究の知見は、算数の授業において、児童が、風変わりな問題解決の方略(ストラテジー)を習得しているというものである(Schoenfeld, 1991)[46]。児童が、算数の文章題を解く際に、文章題が記述している場面に照らして解法を計画し、実行するのではなく、むしろ、与えられた数値を何らかの手掛かりに基づき適当に組み合わせようとする傾向が見られる。そうしたことの典型的例は、「キーワード法」(keyword method: Schoenfeld, ibid: 323)である。これは、文章題が与えられた際に、問題文の中からどの演算を選ぶかの「キーワード」を見つけだすための方略である。例えば,

> ジョンはリンゴを７こ もっています。かれはメアリーに ５こ あげました。
> ジョンにはなんこのこっているでしょうか。

という問題では、キーワードが「のこっている」(left)で、それは引き算を示していることになる。実際に、子どもは、問題文が与えられると、そこに書かれている数字をチェックし、問題文を最後の方から逆に追ってゆく。というのは、キーワードは、通常は、問題文の最後の方にあるからである。こうした「キーワード法」を使用する子どもにとって、この文章題

45 Cobb, P. (1987). An investigation of young children's academic arithmetic contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 109-124.
46 Schoenfeld, A. (1991). On Mathematics as sense-making. In James F. Voss et al., (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp.311-343). LEA.

は、次のようなものにしかすぎないことになる(Schoenfeld, ibid: 323)。

・・・・7・・・・・・・・・4・・・・・・・・・・のこっている

教師は、本来この方略が、子どもにとって手助けになると期待して、彼らに手ほどきするのであるが、その意図とは裏腹に、子どもは、問題文を読まなくても、そして問題が記述する状況を理解しなくても問題を解けると思いこんでしまうのである。以上が、授業を通して子どもが発達させている発見法に関する典型的な研究であった。

1．3．教室における数学文化への着目

ここまで概観してきた諸研究は、子どもたちの数学の信念、発見法(方略)、そして知識が、日々の算数・数学の授業の経験を通じて社会的に構成されることを示唆している。80 年代半頃から、こうした研究が数学教育の一つのテーマとなり、教室もしくは授業における社会・文化環境における子どもの算数・数学学習に一層の関心が向けられてきた。

このことに関して、数学教育研究は、実践共同体の文化的構造を研究する文化人類学や、社会集団における成員間の相互作用の構造を研究する社会学の視野を取り入れ、教室という社会共同体において実践される授業の相互作用を、こうした学問分野の方法を用いて検討するようになってきた。90 年代の前後には、数学教育研究において、「教室の数学文化」(culture of mathematics classroom)や「数学授業の伝統」(classroom mathematics tradition) [47]という用語が登場し、教室や授業において社会的に共有されている行動規範、価値、信念体系に関心が向けられていった。以下では、こうした研究をいくつかを取り上げ、検討する。

先ずは、教室や授業において社会的に共有されている行動規範について取り上げる。算数・数学の授業は、それに参加する教師と子どもが互いに取り結んでいる社会的契約によって成立していることを、ギュイ・ブロソーは「教授学的契約」(didactical contract: Brousseau, 1997: 31)[48]と呼ぶ。授業では、教師と生徒とが守るべき義務、あるいは受け持つ明示的・暗黙的な役割があり、そうした義務や役割との兼ね合いで児童・生徒の数学的な活動を理解しなくてはならないのである。例えば、マグダリン・ランパート(M. Lampert, 1988)[49]は、合衆国での算数の授業において社会的に構成されている教師と子どもの「役割分担」の特徴的構造を次のように指摘している。

教室では「知る」、「考える」、「修正する」、「説明する」、「問題」、「答え」といった言

[47] Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classroom. In D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.101-114). Macmillan. Cobb P., Yackel, E, Wood, T, & McNeal, B. (1991). Characteristics of classroom mathematics traditions. *American Educational Research Journal*, 29(3), 573-604.
[48] Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
[49] Lampert, M. (1988, December). The teacher's role in reinventing the meaning of mathematical knowing in the classroom. *Techincal report*. (ERIC ED 305 237).

葉は、ある特定の活動に関連づけることにより意味を持つ。・・・通常の授業では、教師と児童は次のことに同意している。「説明する」のは教師の責任であり、「答え」を出すことは児童の責任である。「問題」は発問であり、その発問に対して正しい答えを出すことが数学を「知っている」ことの証である。・・・教師が児童に「考える」ようにいうことは、静かにするようにいうことである。考えることは児童どうし(あるいは教師と児童が)一緒に取り組むことではない。(Lampert, 1988: 8)

数学の授業に参加する成員(ここでは教師と児童)間のこうした役割分担の構造を、ランパートは「参加構造」(participation structure, Lampert, ibid: 7)と呼ぶ。教室の数学文化の特徴は、こうした役割分担のみならず、子どもたちの実際の行動においても現れる。例えば、算数・数学の授業においては、教師や信頼できる権威ある子どもに承認を求めたり、規則や公式・事実を論拠のように扱ったり、考えを黙っていたり、仲間に対して身体的政治的権力を行使して異議を唱えたり、強情さと面子を保とうとしたりする行動が見られると、ランパートは述べている(Lampert, ibid: 34-39)。こうした児童の行動は、算数・数学教育がそのねらいとする、「帰納的態度」(inductive attitudes, Polya, 1954a: 7-8)[50]と正反対のものとなっている。

上で見てきたように、教室文化に関する初期の研究では、平素の授業において構成されている「数学的ではない」文化を指摘するものが多く見られた。しかしながら、一部では、数学的活動の本性を反映した真正な数学的文化を検討し、授業実践を、そうした真正な実践共同体への「文化変容」(enculturation)の過程と見なす研究もなされている。その一つは、シェーンフェルド(Schoenfeld, 1988a)によるもので、そこでは次のような文言がある[51]。

数学的に思考することを学ぶことには文化的な要素が含まれている。数学者になることは、文化変容の過程を含んでいる。そこでは、ある特定の共同体の一員になることや、価値を受け入れることが伝授されるのである。(Schoenfeld, ibid: 86-87)

ここで、数学者共同体における文化変容を通じて伝授される価値は、「数学者の美学」(mathematician's aesthetic)もしくは「センス・メイキング」(sense-making)であるとされる(Schoenfeld, ibid: 87)。

その核心において、数学をすることは、センス・メイキングの活動である。それは、事象を(数学的に)分析し、その事象がなぜそのようにふるまうのか、その仕組みを洞察することである。・・・数学者になることは数学者の美学を発達させる(内面化する)ことであり、この美学を発達させることが、数学的に思考することを学習する根本的な側面である。・・・それを発達させることは、日々の数学の文化的実践において適切な価値が正しく反映されているような文化の中に住むことなのである。(Schoenfeld, ibid: 87)

---

[50] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1*. Princeton University Press.
[51] Schoenfeld, A. (1988a). Problem solving in context(s). In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.82-92). NCTM, LEA.

このように、数学の実践共同体における文化変容を通じて、数学者の美学、すなわち、数学的視点から意味付け、数学的な視点から構造を洞察するようになることが強調される。しかしながら、「数学者の美学」、「センス・メイキング」、そして「数学的実践共同体における文化変容」の意味は無定義のままであり、教室の数学文化はどのように構成され、教室における文化変容の過程はいかになされ、そして文化変容と数学的認知発達はいかに関連するか、という一連の問題に関しても、理論的・方法論的な視野は提示されていないままとなっている。実際、シェーンフェルドは、このことの不備を認めており、教室における数学的文化の構成に関して次のように述べている。

> 数学教育にとっての問題は、文化的なものである。真正な数学文化の小宇宙であるような教室環境をいかにして構成することができるのか、ということである。この問いに答えることは容易ではない。ここでは、この先取り組むべき挑戦としておきたい。(Schoenfeld, ibid: 88)

このように、シェーンフェルドは、教室における数学文化の構成を今後の課題としつつも、真正な数学的な文化の具体例であると思われる幾つかの授業実践を列挙する(それらは、ニコラ・バラシェフ(N. Balacheff)による第 7 学年の幾何の授業、ハロルド・フォセット(H. Fawcett)によるシニア・ハイスクールでの平面幾何の実験授業、マクダリン・ランパート(M. Lampert)による第 4 学年のかけ算の授業、そして、シェーンフェルド自身のカレッジの学生に対する問題解決の授業、である。)[52]。しかしながら、こうした個別的事例が、なぜ数学的文化を反映しているのかに関しては、言及されないままとなっている。

また、数学的文化変容と数学的認知発達の関連性の問題も、一定の理論的視野が提出されておらず、今後の数学教育の重要な研究課題とされている。「全米数学教師協議会」(National Council of Teachers Mathematics)が編んだ「数学教育の研究計画目録」(*Research Agenda for Mathematics Education*)では、この課題が明確に定式化されている。

> 数学の授業において生徒が実際に何を学んでいるのか、そして、彼らが学んだことを、学校の外で、いかに、そしてなぜ使用する(あるいは使用しない)のかを説明できるために、われわれは、哲学および現象学のレベルで、文化的現象と認知的現象、そしてそれらの間の弁証法をも包括する理論と方法論を開発することが必要である。(Schoenfeld, ibid: 83)

---

[52] Balacheff, N. (1986, September). Construction and observation of a didactical situation: the sum of the angles of a triangle. *Proceedings of Classroom Observation Methods*. Nottingham. Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof*. Columbia University Teachers College. Lampert, M. (1987). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, 3(4), 305-342. また、わが国では、岡本光司・静岡大学教育学部附属静岡中学校(1998). *生徒が「数学する」数学の授業*. 明治図書.が代表的研究と思われる。

ここで、本小節のまとめをしたい。本小節では、授業における数学的活動論に関する若干の先行研究を検討してきた。そこで明らかになったことは、学校数学の授業における文化的現象と認知的現象の相互関係を包括的に検討する理論枠組みを構築することが、数学教育研究のきわめて重要な課題とされているということであった。そこで、次の小節では、授業における社会・文化的現象と子どもの認知発達を研究する理論的・方法論的立場を取り上げ、それらの特徴を検討することを通して、上の問題に具体的にアプローチする方法を定めていくことにする。

2．授業における数学的活動への接近法

2．1．社会・文化に対する種々の接近法

学校数学の授業における社会・文化的現象と子どもの認知発達の関連性を研究するためには、それを支える理論的視野を検討しなければならない。このことに関して、波多野と高橋(1997)は、文化と認知をどう定義するか、両者をいかに関連付けるかにより、少なくとも三つの異なる接近法があるとしている[53]。

第一の接近法は、文化人類学的な認知心理学におけるものであり、文化を「ある程度、自覚的・永続的な集団の習慣、伝統、実践、さらに共有された意味や視点」(波多野・高橋, ibid: 14)と捉え、それとその集団に属する人々の特徴的な心の側面との対応関係を明らかにしようとするものである。これは、数学教育研究において、認知的構成主義者が採用している立場である。そこでは、数学的知識は、数学者共同体において共有されている信念や規範と「相互反映的」(reflexive)に構成されると考える。このアプローチは、「構成主義ー相互作用論的アプローチ」(Cobb & Bauersfeld, 1995; Wood, Cobb, Yackel, & Dillon, 1993)[54]と呼ばれる。

第二の接近法は、ヴィゴツキー派の「文化ー歴史的発達論」におけるものであり、心の形成において歴史的に形成されてきた社会・文化的状況の果たす役割を重視するものである。この接近法における「文化」は、個人を取り巻き、彼らと絶えず相互交渉する他者及び「人工物」(artifacts)の全体として捉えられる(波多野・高橋, ibid: 15)[55]。この立場は、個々人の経験がこうした人工物の体系として蓄積され、次世代の成員がそれを取り込んで発達してゆく点に、文化と認知の関わり合いを据えている。文化は個人の内部に取り込まれることによってのみ次の世代へと伝達されるのだから、個人の内部に生ずる発達が、同時に文化を維持する過程でもある。

---

[53] 波多野誼余夫・高橋惠子(1997). *文化心理学入門*. 岩波書店.

[54] Cobb, P. & Bauersfeld, H. (eds.), (1995). *The emergence of mathematical meaning*. Lawrence Erlbaum Associates.
Wood, T., Cobb, P., Yackel, E., & Dillon, D. (eds.),(1993). *Rethinking elementary school mathematic*. National Council of Teachers of Mathematics.

[55] 「人工物」というのは、物理的な道具や設備ばかりではなく、社会的組織や制度、文書などの形で貯蔵された情報、さらには常識なども含む広い概念で、過去の多数の人々の経験を集約したものとみなされる。

この立場の変種として、心の発達を、個人とそれを取り巻く他者および人工物との相互交渉のパターンの変化として捉えるものがある(波多野・高橋, ibid: 15-16)。これは、人工物の体系、すなわち外界の状況が人々の認知作用ないし有能さを外的に支えていることに着目するものである。これは「状況的認知論」(Situated Cognition Theory)とも呼ばれる[56]。これは、人を取り巻く状況が、分散された知識システムの一部分になりうると考えるもので、主として、仕事場における人々が、周囲や外界に配置されている人工物をうまく利用して、仕事を有能にこなしていることに目を向けるものである。

第三の接近法は、文化を、人々にある見方を強制し、外界に関する認知を歪めるものとして捉える。元来、どの集団にも行動の仕方や信念の多様性がある程度存在するが、それらが等しく次世代へと受け継がれるわけではなく、その一部だけが「増幅」されることがむしろ普通である(波多野・高橋, ibid: 16)。これは、欧米において当然とされる「西欧的な数学」が、他の非西欧諸国において優勢化されていることなどにも見られる。例えば、パプアニューギニアの小学生にディーンズ(Z. P. Dienes)の教具を利用した算数指導が行われていることは、こうした文化的増幅の様相の現れである。

上で取り上げた三つの接近法に関して、数学教育研究では、第一の接近法が主流をなしており、第二の接近法はまだ発展途上で、第三のものは、「民族数学」(ethnomathematics)[57]と呼ばれる分野において展開されている。本論文は、学校数学における授業過程に関心を向けているので、以下では、社会・文化に対する第一と第二の接近法を、主として取り上げ、その特徴を検討することにしたい。

２．２．構成主義的－相互作用論的接近法

初期の構成主義者は、「認知的構成主義」(cognitive constructivist: Cobb, et al., 1993: 21)[58]と呼ばれ、学習を専ら心理学的な視野から検討してきた。そこでは、一人ひとりの子どもは、それぞれの目標に到達しようとする過程で、彼らなりの問題を解決しようと、自らの経験を再組織化することで、知る方法を構成すると見なすのであった。こうした学習観を支えてきた理論的な柱は、知識についての「根本的構成主義」(radical constructivism: von Glasersfeld, 1995)であった[59]。この立場は、客観的知識の総体として数学を特徴付ける伝統的な見方や、「吸収理論」(absorption theory: Romberg & Carpenter, 1986: 26)[60] と呼ばれる知識伝達モデル

[56] Lave, J. and Wenger, E. (1991). *Situated learning*. Cambridge University Press.
[57] D'Ambbrosio, U. (1985). Ethnomathematics and Its place In the history and pedagogy mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
[58] Cobb, P. et al., (1993). Theoretical orientation. In Wood, T. et al., (eds.). *Rethinking elementary school*(pp. 21-32). NCTM.
[59] von Glasersfeld, E. (1995). Sensory experience, abstraction, and teaching. In L. P. Steffe & J. Gale (eds.), *Constructivism in education*. Hilsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
[60] Romberg, T. & Carpenter, (1986). Research on teaching and learning mathematics. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on*. Macmillan.

に基づく学習指導を拒否するものであった。構成主義は、子どもが、彼らにとっての障害や矛盾を呼び起こす状況を解消しようとする過程で、自分自身の感覚運動的活動や概念的活動について反省し、彼らが持っている既存の解釈枠組み(シェマ)を再構成することにより、学習が進展すると見なす。

さて、構成主義者が授業を考察の対象とするとき、彼らは、他者との社会的相互作用の過程で派生する矛盾や葛藤が、様々な概念発達の水準の子どもたちの知識の発達を促進する点に着目する(例えば，Doise & Mugny, 1984)[61]。こうした立場から、算数・数学の授業では、数学的課題を協同で作業することや、子どもたちが一人ひとりの数学的な解釈、解法、そして答えをお互いに議論するように奨励することが、一人ひとりの数学的知識構成を促進すると見なす。このように、初期の認知的構成主義者は、授業研究において、一人ひとりの子どもの数学的知識の構成を主たる考察の対象としており、社会的相互作用は副次的なものと見なしていた。

その後、認知的構成主義者は、それまでの心理中心主義を修正し、社会学的視野を取り込み、「社会的構成主義」(social constructivism: Cobb et al., ibid: 21)と呼ばれる一つの折衷理論を提案する。そうした理論的修正を余儀なくされたのは、実際の授業における社会的側面が、当初予期していた以上に複雑であることによる。実際、ウッドら(Wood et al., 1993)[62]は、クラス全体の議論で、子どもたちに自分の数学的な解釈や解法を言葉に表すよう奨励したが、実際の授業過程ではこうしたことは期待通りにはならなかった。というのも、子どもたちが経験してきた授業での談話のパターンは、そうしたものではなかったからであった。伝統的な授業における談話の形態は、ミアン(Mehan, 1979)が指摘しているように、「教師が質問をし」、「子どもがそれに応答し」、また「教師がその応答を評価する」という単純な系列によって特徴付けられているものであった[63]。こうした談話の形態は、児童が自分の考えを表明することを助長するのではなく、むしろ教師が公認する解法へと舵取りし、あたかも「漏斗」(funnel)のように狭めていく機能を持っていたとされる(Bauersfeld, 1995)[64]。

こうした実践的教訓から、社会的構成主義者たちは、教室において新しい「社会的規範」(social norms: Cobb & Bauersfeld, 1995: 22)[65]、すなわち、他者とどのように関与するかについての慣習や義務を意図的に構成し、子どもと教師の役割、そして数学的な活動の一般的な本性についての信念に影響を与えようとした(例えば Yackel et al., 1996)[66]。教室における社会

---

[61] Doise, W. & Mugny, G. (1984). *The social development of the intellect.* Pergamon.
[62] Wood, T. et al., (eds.),(1993). *Rethinking elementary school mathematics.* NCTM.
[63] Mehan, H. (1978). *Learning lessons.* Harvard University Press.
[64] Bauersfeld, H. (1995). The structuring of the structures. In In L. P. Steffe, & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education*(pp.137-158). Lawrence Erlbaum Associates.
[65] Cobb, P. & Bauersfeld, H. (eds.), (1995). *The emergence of mathematical meaning.* Lawrence Erlbaum Associates
[66] Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and the autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

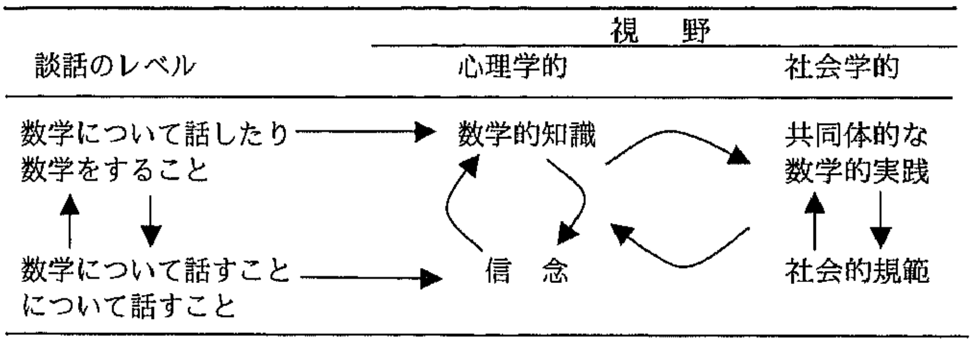
的規範が構成される過程を検討する方法として、社会的構成主義者は、クラス全体の談話を二つのレベルに区別する。一つは「数学を行ない、数学について話すこと」であり、もう一つは「数学について話すことについて話すこと」である(Wood et al., 1993: 23)。最初のレベルの談話は、教師と子どもたちが、自分の考えを説明し、他者と数学的意味をすり合わせる(ネゴシエートする)ことである。もう一つのレベルは、数学をすることに関して、子どもたちが自分らの義務を果たしていなかったり、社会的規範に背いていたりする場合に、それを明示的(ときには、暗黙的)に語ろうとすることである。こうした談話のレベルは、論理的には別個なものであるが、それらは「相互反映的」(reflexive: Leiter, 1980: 138)関係、すなわち、互いに規定し形成する関係にあるとされる[67]。すわなち、一方で、数学について話すことは、お互いの義務を暗黙的に示す範例的状況であり、他方で、数学的規範を明示的に表明することは、その後の授業において、子どもが数学を行い、話す活動に影響を及ぼすとする(Wood et al., 1993: 24)。このように、社会的構成主義者は、「数学を行い、話すこと」と「それ自体について話すこと」がお互いに創りつくられる関係にあるという前提に立つ。ただし、これら二つのレベルの相互作用の大部分が、当事者の意識の外にあり、社会的相互作用の過程で繰り返し再構成される中で暗黙裏に進行することを強調する(Bauersfeld, 1980)[68]。実際、個々人の構成する信念は必ずしも一致しないが、社会的相互作用がスムーズに進行している際には、彼ら一人ひとりの信念が「適合」(fit)しているだけだとする(von Glasersfeld, 1984)[69]。これは、社会的相互作用に参加するめいめいの参加者の解釈は一致する必要はなく、むしろ、彼らの解釈が、各人の当面する目的に照らして矛盾しないだけであるとする。このように、教室での社会的規範は、教師と子どもによって「共有されたとされる」(taken-as-shared: Wood et al., 1993: 26)ものとみなす。この意味で、社会的規範が明示的に交渉される状況は、相互作用にある参加者どうしの間で不適合が明白になるとき、すなわち、教師の期待、もしくは子どもの期待のどちらかが満たされないときになされる。こうした理解は、社会的相互作用に参加している者は、絶えず互いの活動を方向づけ、調整し、意味の交渉を行っているとする「記号的相互作用論者」(symbolic interactionist: Blumer, 1969)[70]の立場に基づいている。

社会的構成主義者は、社会的規範と個々人の信念の相互反映的関係を論じるが、これと同じことが、教室において制度化されている「数学的伝統」(mathematics tradition)と、児童の「数学的に知る方法」(mathematical ways of knowing)の間にも成り立つとする(Wood et al., 1993: 28)。社会的構成主義は、教室共同体において構成された数学的伝統は、その教室にお

[67] Leiter, K. (1980). *A primer on ethnomethodology*. Oxford University Press.
[68] Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimension in the so-colled reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 23-41.
[69] von Glasersfeld, E. (1984). An introducation to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.), *The invented reality* (pp. 17-40). Norton.
[70] Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism*. University of California Press.

ける問題、解法、説明、正当化の意味を制約するという意味で、一人ひとりの児童の数学について考え、知る方法を制約するとする。というのも、認知的構成主義に基づく初期の授業への接近法では、一人ひとりの構成された経験に専ら焦点を当てていたが、次第に、そうした一人ひとりの数学的知識が、教室共同体における数学的伝統なしには有効に進展しないと考えるようになった。すなわち、教室において制度化された知り方は、個人の数学的な問題解決活動を制約し、それと同時に、子どもたちの知識の進歩は、共有されたとされる数学的伝統を発展させると見なすのである。

これまで議論してきた心理学的視野と社会学的視野との相互反映的関係は、次の図のようにまとめられる。



心理学的視野・社会学的視野・談話のレベルの関係(Wood, et al., 1993: 32)

社会的構成主義は、教室文化という社会学的視野と子どもの数学的認知という心理学的視野が表裏一体をなしているとする。そして、これら二つの視野は、一方の視野を分析する際には、他方は背後に退く関係であるとされる。しかしながら、こうした社会的構成主義者の接近法は、還元主義的問題をはらんでいると思われる。というのも、この立場では、「社会的規範」や「数学的実践」という社会学的視野は、すべて個人による解釈と意味付けに基づいているからである。

2．3．文化－歴史的接近法

文化－歴史理論、すなわち「精神の文化-歴史的発達論」は、ロシアの心理学者レフ・ヴィゴツキー(Л. С. Выготский)に由来している。ヴィゴツキーは、この学説を専ら学校教育の文脈で議論してきた。しかし、今日では、この理論は「学校外」の状況において再評価され、応用されている。とりわけ、文化人類学的な認知心理学者による「日常的認知」の研究（Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D., 1985）[71]、仕立職人などの「徒弟制

[71] Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the street and in school. *British Journal of Developmental Psychology*, 3,21-29.

度」の研究(Lave, 1977, Rogoff, 1990)[72]、そして未開民族に関する交差文化的研究(Saxe, 1981)[73]は、複雑な社会・文化的実践に埋め込まれた活動における認知的機能を分析し、記述しようとしている。こうした文化－歴史的研究は、巡り巡って、再び学校教育の研究に影響を及ぼそうとしている。とはいえ、学校数学の授業に対する文化－歴史論的接近法については、先の社会的構成主義に比べてわずかである(むしろそれを構想し、提案することを本論文は意図している)。そこで、以下では文化－歴史理論における基本的前提を議論し、社会的構成主義のそれと比較・検討することにする。

「精神の文化－歴史的発達理論」は、次の三点を前提としている。(1)人の精神機能は、彼らを取り巻く文化的道具(人工物)に媒介されていること。(2)人が文化－歴史的に作りだした社会的実践活動を強調すること。(3)人は、文化的道具を活動に組み入れることにより、それなしで行なう以上の課題遂行能力を発揮すること。

(1) に関して、文化－歴史論者は、人間の精神機能は自然なものではなく、文化・歴史的な人工物(artifact)であるとする(Newman, Griffin, & Cole, 1989: 3)[74]。これは、精神機能それ自体が人工物からなる外的環境と切り離して考えられないことを意味する。このことを、ジーン・レイヴ(J. Lave)は、次のように述べている[75]。

> 重要なのは、頭の中にある知識の構成が、頭の外である社会的世界と複雑な関わり方をしているということではなくて、どうにも分けることの不可能なあり方で社会的に組織されているということにある。(Lave, 1988: 1)

文化－歴史理論は、社会的構成主義が客観的実在を否定し、個人の側の意味や解釈を重視するのに対して、文化－歴史的に形成された社会的環境を認め、個人と環境との相互作用を検討するのである。

(2) に関しては、文化－歴史理論は、人々の精神活動を、人間が歴史的に作り上げてきた文化的実践に位置づけようとする。この点で、抽象的で人為的に統制された実験室的状況での心理学的実験から得られる知見を一般化しない。数学教育に対する文化－歴史的接近法は、歴史的に発展し制度化されてきた数学者共同体の実践の存在を認め、そうした数学的実践への導かれた参加として学習や発達を理解しようとする。

社会的構成主義の立場では、主体は環境との相互作用を通じて彼らの知識を能動的に構成するという考えに立つ。その際の構成のメカニズムは、ピアジェによる「同化」(assimilation)と「調節」(accomodation)という生物的有機体をモデルとして理解されている(Cole & Cole,

---

[72] Lave, J. (1977). Cognitive consequences of traditional apprenticeship training in West Africa. *Anthropology and Education Quarterly, 8* (3), 177-180. Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking.* Oxford University Press.
[73] Saxe, G. B. (1981). Body parts as numerals. *Child Development*, 52, 306-316.
[74] Newman, D., Geiffin, P., & Cole, M. (1989). *The construction zone.* Cambridge University Press.
[75] Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge University Press.

1993)[76]。こうした理解に基づき、「根本的構成主義者」(radical constructivist)のフォン・グレーサースフェルド(von Glasersfeld, 1995)は、木槌の性質に関する知識が構成される過程を説明する。

> ある人が壁に釘を打とうと思ったが、手近に金槌がない。辺りを見回したところ、木槌が目に止まり、それを使った。しかし、釘は壁に入ってゆかずに木槌に食い込んでしまった。(cited in Cobb, 1994: 16)

グレーサースフェルドはこのエピソードを次のように説明する。

> この人は、木槌を金槌のシェマに「同化」した。しかし、期待したように事が進まないので、攪乱が経験され、そのシェマを「調整」しようとした。この調整作業は、木槌の新しい性質を構成することにつながり、もって「経験的抽象化」に至った。(cited in Cobb, 1994: 16)

ここで、シェマとは「似よりの状況において有機体に対して行為のモデルを提供することができる心的構造」(Piajet & Inhelder, 1965)のことを指している[77]。このように、社会的構成主義者は、物理的環境との相互作用により、物理的対象の性質を能動的に構成していくと考えている。

これに対して、文化－歴史理論は、生物学的モデルを「収奪」(присвоение)[78]という考えに置き替える(Леонтьев, 1965)[79]。物理的対象はすべて社会的な歴史と機能を持っており、それらの性質や機能は自発的な探究によって発見されるものではないと考えるのである。例えば、金槌の機能は、文化的に組織化された実践活動、そこにおいてその道具が本来の機能を果たす固有の活動、つまり大工仕事などの実践に参加することを通して理解されるとする。かくして、文化－歴史理論が「活動」(деятельность, Леонтьев, 1977)[80]という概念を重視するのは、文化的実践に埋め込まれた活動に大人の導きによって参加する過程で、道具に媒介された能力の一環として、道具に関する知識を獲得していくと考えるからである。

(3) に関しては、人は、文化－歴史的に蓄積された人工物を活動に組み入れることにより、それなしで行なう以上の課題を解決する能力を獲得する。ここで、一般に「能力」と言われているものを、「パフォーマンス」(performance)と「コンピテンス」(competence)に区別して

---

[76] M. Cole & S. Cole (1993). The development of children. Scientific American Books.
[77] Piajet, J. & Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child.* Basic Book.
[78] これは、字義からすると、私物化すること、すなわち、自分の方に寄せて(при)自分のものにする(своение)という意味に取れる。
[79] Леонтьев, А. Н. (1965). *Проблемы развития психики.* Мысль.
[80] Леонтьев, А. Н. (1977). *Деятельность, сознание, личность.* Издание второе. М. Политической литературы.

考えることがよいと思われる。ここで、「パフォーマンス」とは、他者や道具の支援のもとで遂行可能なレベルを意味し、「コンピテンス」は個人が独力で遂行できる能力水準を指している。文化－歴史理論が主張することは、人は、人工物を組み入れることにより、独力でできること以上の「パフォーマンス」を発揮することができるとともに、やがては「コンピテンス」として独力で遂行可能になることである。このように考えると、文化－歴史理論と社会的構成主義は、能力について異なる側面に光を当てていると言うことができる。すなわち、社会的構成主義は、個人の「コンピテンス」を分析し、文化歴史理論は「パフォォマンス」と「コンピテンス」の両方の相互作用的変化を分析するのである。

さて、ここで、数学の授業を分析する文化－歴史的アプローチの可能性を考えてみたい。構成主義的－相互作用論的立場は、数学的知識の獲得過程を、子どもが内的に構成する意味に光を当てて分析してきた。しかしながら、学校数学で扱われる数学的知識は、人類の長い問題解決の歴史的過程において発明され改良され固定化されたものである。それゆえ、金槌の使用法を大工作業という真正な実践活動において習得するように、子どもたちは、文化－歴史的な道具(ツール)の使用方法を、真正な数学的実践において、有能な先達者の導きのもとで参加しつつ学ぶ過程を分析することが必要ではないだろうか。算数・数学の授業は、発達途上の子どもと数学文化の代表者である教師が相互作用する場であると考えた場合に、それを分析する立場として、文化－歴史論の視野を取り入れることが有望であるように思われる。

本章のまとめ

本論文では、数学的活動の先行研究を、大局的視野と局所的視野という二つの観点から系統的に概観することにより、この分野における今日の研究課題を検討してきた。その結果、教室ないしは授業という社会・文化的状況において数学的活動を理解し分析する理論的・方法論的視野を開発することが課題とされた。より具体的には、(1)教室という社会共同体における数学的活動の意味を明確にすること、そして、(2)教室共同体における数学的活動と、個々の子どもの数学的発達を媒介する理論と方法論を構築することである。第一の課題は、第二の課題に含まれ、従って、第二の課題が本論文で解決する基本的な問題となる。

第二の課題、すなわち、社会的側面と個人的側面の関連性の問題に対しては、今日、社会的構成主義の接近法が優勢となっている。しかしながら、このアプローチは、社会・文化的側面を個人の認知的側面に還元してしまうという問題点を抱えていると筆者は考える。これに対して、本論文では、学校数学の研究においてあまり取り上げられてこなかった、ヴィゴツキー派の「文化－歴史的発達論」に着目し、その理論的視野からこの課題に一定の解決を与えようとする。

次の章では、先ず、第一の課題、すなわち社会共同体における数学的活動について検討することとしたい。その方法として、本論文では、静的で無謬な知識体系を強調するユークリッド的伝統に批判的な数理哲学の諸学派を検討する。各々の学派は互いに立場を異にしているが、一つの点で共通する特徴を持っている。それは、「発見学」と呼ばれる、理論を合理的に発展させていく規範的指針を重視していることである。そこで、次の章では、数学的活動の社会的側面を、こうした発見学の諸学派の立場を視点として、検討を進めていくことにしたい。