序章　本論文の目的と方法

この章では、本論文の目的と方法を述べ、論文全体の概要を示す。本章は３節からなり、第１節では本論文の目的を、第２節では方法と成果を、そして第３節では論文の構成を述べる。

第１節　本論文の目的

本節では、本論文の研究主題を近年の研究動向に位置付けることにより、本論文の目的を定式化する。

１．問題の所在

１．１．研究主題の位置

本論文で筆者が取り組む研究主題は、「学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成」である。この主題の意味を説明するには、「一斉授業」、「数学的活動」、そして「社会的構成」という鍵概念の意味と、それらの相互関連性を示すことが必要である。本論文の研究主題は、数学教育論、数学論、認知発達論、そして授業研究法における近年の展開に位置付けられる。

第一に、今日の数学教育論において「数学的活動」という考えが重要であるという認識が高まっている。特に、数学的活動は、学校数学の目標と内容を再構成する上で鍵となる考えとして着目されている。こうした動向のもとで、学校数学における数学的活動の意義を明確にすると同時に、それを学校数学の目標と内容を組み立てる組織化原理として組み込むことが数学教育研究の重要な課題となってきている。

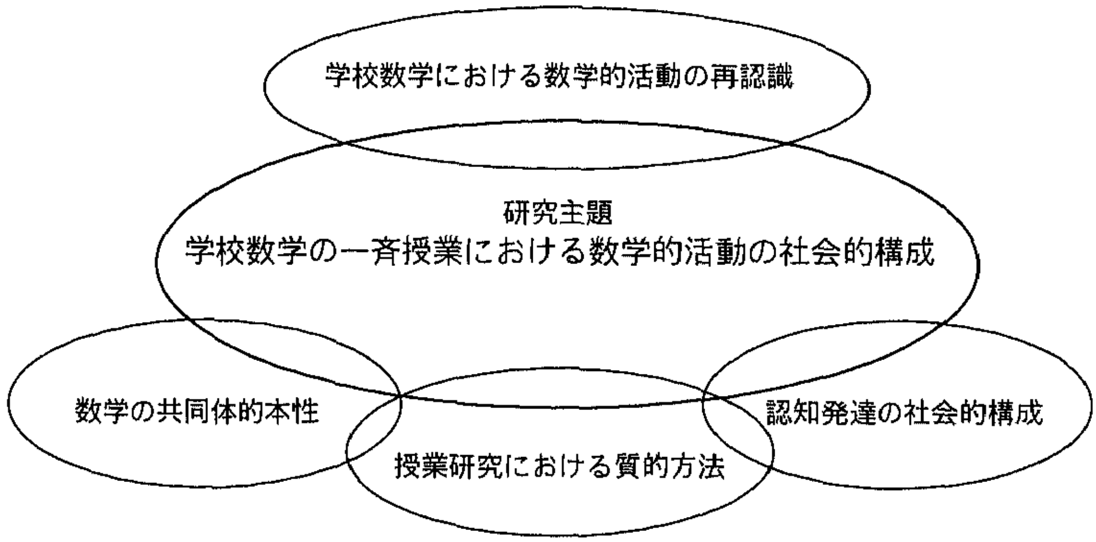
第二に、近年の数学論(数理哲学・知識社会学)において、数学的活動を個人の活動と見なす伝統的な立場から、数学者の学問共同体における実践活動と見なす立場が浸透している。このことに対応し、数学教育研究では、数学の教室を、一つの社会共同体的実践の場と見なすようになってきている。そして、教室共同体において組織される「一斉授業」を、一般的な授業形態の一種と見なすのみならず、真正な数学的活動が実現される社会的形態と見なそうとしている。

第三に、近年の認知発達論では、認知発達を、個人が抽象的で客観的な知識や技能を習得する過程というよりも、むしろ、具体的な社会共同体において歴史的に蓄積された固有の文化的道具の使用に堪能となり、もって当該の共同体の熟達した成員となっていく過程

であると理解する。さらに、認知発達を、社会共同体の有能な成員が、新参者を慣習的な文化的実践へと導く社会的営みに照らして理解する。このように、近年の認知発達論は、認知発達を、個人の内面的な過程というよりも、「社会的に構成される過程」と見なそうとしている。このことに対応して、数学教育研究は、教室共同体において教師と子どもの相互作用によって社会的に構成される数学の学びに一層の注意を向けようとしている。

第四に、授業の研究方法論においては、伝統的に、教授行動と学習成果の間の因果関係について統計的手法を用いて定量的に示す「量的方法」が主流をなしていたが、近年は、「質的方法」と呼ばれる研究方法論への関心が高まり、実際の授業の自然な状況下での教師と子どもの社会的相互作用のデータを収集し、それらを多角的に分析しつつ、当該の授業に関する仮説や理論を帰納的に生成してゆこうとしている。こうした展開のもとで、数学教育研究においても、実際の算数・数学の授業において、教師と子どもがどのような数学的実践共同体を構成し、そこにおいてどのように相互作用し、自他の行為や事象をどのように意味付け、解釈しているのか等の問題を具体的に検討することが重要な課題となっている。

本論文の主題は、これら四つの領域における新しい展開が集約された問題領域に位置する。このことを図式的に表現すると、次のようになる。



本研究主題の位置

以下では、これら四つの領域における理論的・方法論的発展を跡付けつつ、本論文の主題の意味を明確にしてゆくことにする。

１．２．学校数学における数学的活動の再認識

今日、わが国の数学教育論において「数学的活動」に関する議論が活発になってきている。その背景の一つには、わが国の学校数学では、伝統的に数学的活動を重視しようとしてきたが、実際には既成の数学を教えることに重点を置き、数学を作っていく活動を十分に展開してはこなかった、という反省があると思われる。

数学をする活動の重要性は、戦後のわが国の学校数学において伝統的に強調されてきたことであった。このことの最も明確な例は、塩野直道による「(教授)要目カス論」であると思われる。塩野は、「いわゆる要目として羅列してある数学的な話題は、いわば生徒が数学的な活動をして後に残った食べカスに過ぎない。活動の質自体が重要な教育的内容であるのに、それ自体を記さずに、そのカスを列挙することで要目としているのは、おかしな話だ」と述べたと言われている(島田, 1982: 265-266)[1]。このように、塩野は、数学教育の本来の対象は、出来上がった既成の数学的内容にではなく、人間が数学を作っていく活動それ自体に求められるものと考えた。こうした主張は、戦後のわが国の学校数学において基本的な考え方として採られており、数学の個々の話題を指導内容として取り上げる際に、それが数学的な活動を通して発展していくよう、話題と活動とを組にして検討しようとしてきた(島田, ibid: 267)。今日、数学的活動が重視されている背景には、数学的話題と活動とを組にして検討してきたわが国の学校数学の基本的立場を改めて確認しようとする気運があるように思われる。

こうした気運は、昨今告示された新しい教育課程の基準(文部省, 1998)[2]において、算数・数学科の教科の目標に、「数学的活動」(小学校では「算数的活動」)という用語が初めて盛り込まれることになり、いっそう高まっているように思われる。また、今回の改定では、中学校数学科の全指導項目を文章で表現するという刷新を行っており、数学の活動的な性質が一層強調されているように思われる[3]。しかしながら、数学の要領や要目に盛り込まれている個々の指導内容とは異なり、数学教育の教科の目標として「数学的活動」をどのように理解すればよいかに関しては、不明確な点も多いように思われる。例えば、中学校指導要領解説(数学編)では、「数学的活動」に関して、「事象を観察して法則を見つけて事柄の性質を明らかにしたり、具体的な操作や実験を試みることを通して数学的内容を帰納したりして、数学を創造し発展させる活動」 (文部省, 1999: 14)[4]と説明されているが、観察、実験、帰納などの用語を見るとき、その内容は科学全般に通用し、一般的すぎるように思わ

---

[1] 島田茂 (1982). 塩野先生の思い出. *随流導流* (pp. 265-267). 啓林館.
[2] 文部省 (1998). *学習指導要領*. http://www.monbu.go.jp/news/00000317/index.html
[3] 例えば、第２学年の図形領域で、従前は「平行線の性質」とされていた項目が、「平行線や角の性質を理解し、それに基づいて図形の性質を確かめることができること」と表現されている。
[4] 文部省 (1999). *中学校学習指導要領解説(数学編)*. 大阪書籍.

れる。こうした状況に鑑み、数学的活動それ自体の概念規定を明確にすると共に、学校数学の目標における位置付けや個別の指導内容との関連性について、さらに検討を進めてゆくことが必要となってきている。

１．３．数学の社会共同体的本性

ユークリッド『原論』(Euclidis Elementa)[5]が成立したギリシア時代以来、伝統的に、数学は永遠に無謬の真理体系と見なされてきた。実際、『原論』では、定義は事物の本質についての記述であり、公理や共通概念は当然のこととして受け入れられるべき幾何学や数学全般の真理を述べているものと理解された。こうして『原論』は、自明の真理から出発し、厳密な証明に従って演繹的に構成された真理の体系であり、確実で永遠に無謬のものであると理解されるようになった。ユークリッド『原論』に対するこうした理解は、数学において一つの方法論を形成した。すなわち、議論の余地のない絶対確実な基礎からすべての真理を導き出すべきであるというもので、「ユークリッド的方法論」(Euclidean methodology: Lakatos, 1976: 107)[6]と呼ばれた。

ユークリッド的方法論は、数学だけでなく、知識の本性についての哲学である認識論、ことに「プラトン主義」(Platonism)の認識論において大きな影響を与えてきた。何世紀もの間、数学や論理学の知識は、物理学や生物学をはじめとした自然科学の知識とは異なり、経験によって検証される必要のないものであり、それは、証明という合理的で客観的な手段を用いて、論理的に演繹されるものと考えられた。つまり、数学的知識は、人間の経験とは独立に「イデア」(idea)として客観的に存在し、それ自体絶対的で超越的性格を持ち、現象世界についての普遍的知識であるとされてきた。

しかしながら、今世紀の中頃から、数学を「社会的実践」(social practice)ないしは「共同体的実践」(communal practice)と見なす立場が現れてきた。その代表的な提唱者は、数理論理学者クワイン(Quine, 1961)、日常言語学派の哲学者ヴィトゲンシュタイン(Wittgenstein, 1978)、数理科学哲学者ラカトシュ(Lakatos, 1978b)、知識社会学者ブルア(Bloor, 1976)らであった[7]。それらは共に、数学は人間の経験とは独立に存在する静的な知識の体系ではなく、人間の営みであることを強調する。さらに、数学を個人の営みのみならず社会共同体的営みであることを強調する。

この新しい見方によれば、数学的活動は、客観的真理を「発見する」(discover)活動とい

---

[5] *Euclidis Elementa* , (1883). Lipsiae (中村幸四郎他(訳). (1971). *ユークリッド原論.* 共立出版)
[6] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge University Press.
[7] Quine, W. V. O. (1961). *From a logical point of view.* Harvard University Press. Wittgenstein, L. (1978). *Remarks on the foundations of mathematic.* MIT Press. Lakatos, I. (1978b). *Mathematics, science and epistemology.* Cambridge University Press. Bloor, D. (1976). *Knowledge and social imagery.* The University of Chicago Press.

うよりも、むしろ、数学者が個性的に「発明・創案する」(invent)人間的な活動であると考える。そして、人間の活動によって創案された数学の理論は、必然的に個性的で相対的なものとなり、そのことが数学の社会共同体的本性を際立たせ、数学の発展にとって重要な契機となる。数学が発展してきたのは、疑いなく確立された定理の単調増加によるのではなく、理論が拠り所とする前提や定義の真理性が数学者集団において再検討の余地を持ち、検証や修正に対して開かれているためである(Lakatos, 1976: 5)[8]。ある数学者が何らかの推測と証明を打ち立てたとしても、それらの拠り所となっている定義や前提は、他の数学者にとって必ずしも自明ではなかったり、不自然であったり、受け入れ難かったりする。ここに、数学者共同体における合意形成が重要となってくる理由がある。こうした合意形成は、何が問題で、どのような解法や証明が解決と見なされるかに関しても当てはまる[9]。数理論理学者ユーリ・マーニンの言葉、「いずれの証明も、それを*証明として受け入れる*という社会的行為の後に証明となる。このことは、物理学、言語学、さらには生物学がそうであるように、数学においても当てはまる。」(Manin, 1977: 48)[10]は、証明に代表される数学的活動の社会共同体的本性を示唆している。このように、数学理論の正しさないし価値は、所与のものではなく、数学者どうしの議論の過程で、当該の共同体においていかに有用ないし有効であるかという基準に基づき相互に取り決められてゆく。この意味で、数学の理論は共同体における一種の「社会的協定物」(social convention)と見なされる。また、数学的活動の共同体的性格の別な側面として、数学の問題が、複数の数学者によって「協働的」(collaborative)に取り組まれる点があげられる。すなわち、重要な数学理論の多くは、長い歴史を持ち、多数の数学者が部分的に寄与しつつ発展してきたとも言える[11]。

さて、数学教育研究は、数理哲学や知識社会学からの影響を受けて、数学の授業および教室を、一つの社会共同体的実践の場と見なすようになってきている(例えば、Lampert, 1992)[12]。数学の授業を、既存の数学的知識を学び覚えるための伝達の場ではなく、数学者および数学者集団が行うような活動の場、すなわち自らが数学の知識を生み出し、他者と語り合いつつ意味を取り決めてゆく相互作用の場、さらには、何らかの問題を集団で協働的に解決する場と見なすようになっている(秋田, 1995: 236)[13]。このことは、教室共同体にお

[8] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge University Press.
[9] 例えば、コンピュータによるしらみ潰しの検証は証明と言えるかどうかなど。
[10] Manin, Y. I. (1977). *A course in mathematical logic.* Springer-Verlag.
[11] ギリシアのディオファンタス(紀元250年頃)に端を発し、アンドリュー・ワイルズ(A. Wiles)により1994年に成し遂げられた「フェルマーの最終定理」の解決は、このことの最も良い例であると思われる。
[12] Lampert, M. (1992). Practice and problems in teaching authentic mathematics. In Fritz K. Oser, et al., (Eds). *Effective and responsible teaching* (pp. 295-314). Jossey-Bass Publishers.
[13] 秋田喜代美 (1995). ランパートの研究にみる「語り合い、わかる授業」の創造. 佐伯, 藤田, 佐藤 (編), *学びへの誘い*(pp.234-240). 東京大学出版会.

いて組織される「一斉授業」(simultaneous instruction)[14]を、一般的な授業方法の形態としてのみならず、真正な数学的活動が構成される社会的で協働的な活動の形態として理解することへと視点を転換することを示唆する。しかしながら、数学教育の議論においては、そうした問題にアプローチする理論的な基礎付けが十分に展開されてはいないように思われる。なぜならば、近年の数学教育における授業の社会的側面の強調は、依然として個人の学習と発達を助長することを目的とした対人的相互作用に関心が向けられたり、「協働的」(collaborative)活動というよりもむしろ「協同的」(collective)学習に力点が置かれたりしているからである[15]。

１．４．認知発達の社会的構成

人間の認知発達を、知識を獲得し利用するプロセスに焦点を当てて研究する分野として認知心理学(あるいは認知科学)がある。認知心理学は、これまで、「認知革命」(cognitive revolution: Gardner, 1985)[16]と呼ばれるいくつかの節目となる大きな変化、いわば「波」を経験している(波多野・高橋, 1997: 13)[17]。認知革命の「第一の波」は1950年代に起こった。それは、コンピュータを鏡として人間の心を理解しようとするもので、そこでの基本的な考え方は、複雑な心理過程について明示的で実行可能な「モデル」を構成することが可能である、というものであった(Norman, 1983)[18]。

1980年代の半ば頃から次第に明確になってきた認知革命の「第二の波」は、社会的環境、感情といった概念を取り入れることに関心を向けた(波多野・高橋, ibid: 13)。ここでは、論理的に、認知過程を社会的相互作用の体系にまで拡張することが可能であると見なされた。しかしながら、こうした拡張に対して、認知科学者は一般的に消極的であった。その主たる理由は、認知システムの構成要素に対して膨大なコントロールを行わなくてはならず、そうすることは、かえって事態を複雑にするというものであった。こうした制約から、認知科学者は、いわば「閉じたシステム」(closed system: Newman et al., 1989: 4)[19]を研究対象としてきた。

しかしながら、近年は、認知科学に社会的な状況を取り入れることに関して事態が一変

---

[14] 一人の教師が、一定数の児童・生徒集団に対して、同一の教育内容を、同一時間で教える授業方法および形態。D. ハミルトン (安川哲夫訳), (1998). *学校教育の理論に向けて*(p.5). 世織書房.

[15] 本論文で、「協働」とは、複数の異なる視野をもつ人々が固有の役割分担のもとで課題に取り組むことを意味し、「協同」とは、目的を同じくする人々が互いに協調しつつ一緒に取り組むことを意味する。Damon, W. & Phelps, E. (1989). Critical distinctions among three approaches to peer education. *International Journal of Educational Research*, *13*(1), 9-19.

[16] Gardner, H. (1985). *The mind's new science*. Basic Books.

[17] 波多野誼余夫・高橋惠子(1997). *文化心理学入門*. 岩波書店.

[18] Norman, D. A. (1983). Some observations on mental models. In D. Gentner & A. L. Stevens (Eds.), *Mental models* (p. 10). Lawrence Erlbaum Associates.

[19] Newman, D., Geiffin, P., & Cole, M. (1989). *The construction zone*. Cambridge University Press.

しつつある。その主要な契機となったものは従来の認知理論と理論的前提を異にする「状況的認知論」(situated cognition theory: Lave & Wenger, 1991)[20]という学説の登場であった。この新しい理論的な視野は、個人的過程のモデル化に焦点を当ててきた従来の認知科学者との間で熾烈な論争を展開しており、この対立は一向に収束する兆しはみられないようである(Anderson, Reder, & Simon, 1996; Greeno, 1997)[21]。しかしながら、従来の認知心理学の分野において、社会的なシステムを含めようとする活力は次第に増大しているように思われる(例えば、上野, 1999)[22]。

さて、認知心理学が人間の心理機能の仕組みに光を当てていたのに対して、子どもの心理発達の基本的諸問題(発達の連続性、発達における生得的・環境的要因の相互作用、個人差の形成等)を研究する発達心理学においては、普遍性が強調されてきた。そこでは、様々な分野における発達段階が設定され、それらの段階の順序と年齢とが安定していることが強調されてきた。そうした理論構成の代表と言えるのがジャン・ピアジェ(J. Piaget)であった。ピアジェは、専ら論理・数学的操作に焦点を当て、一般的な発達段階を想定すると共に、こうした発達段階と同じ図式が対人行動や道徳的判断などをも規定すると主張した(波多野・高橋, 1997: 12)[23]。コールら(Cole & Cole, 1993)[24]は、こうした理論構成の立場を「普遍－構成主義的枠組み」(universal-constructivist framework: Cole & Cole, 1993: 16)と呼んでいる。この枠組みにおいては、社会・文化による発達の違いは、結局のところ、発達段階に到達する時間の違いに過ぎないと見なされてきた。

しかしながら、近年の発達心理学的研究は、社会的環境をできるだけ統制した実験室的な状況における被験者を、客観的測定尺度を用いて調査することに批判的になっている。というのも、これまでの理論で設定された発達段階が、実際には社会・文化が異なれば、ある段階が存在しなかったり、別の段階を設定しなければならなかったり、場合によっては二つの発達段階のどちらがより成熟したものであると考えるかが文化によって異なる、といったことが確認されてきているからである(波多野・高橋, 1997: 12)。こうした研究は、認知の文化的相対性を示唆すると共に、文化的に組織された実践に埋め込まれた活動において認知機能の仕組みや発達を検討する必要性も示唆している。1930 年頃の「文化-歴史

[20] Lave, J. and Wenger, E. (1991). *Situated learning*. Cambridge University Press.
[21] Anderson, J. R., Reder, L. M., & Simon, H. A. (1996). Situated learning and education. *Educational Researcher*, 25(4), 5-11. Greeno, J. G. (1997). On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, 26(1), 5-17.
[22] 上野直樹 (1999). *仕事の中での学習: 状況論的アプローチ*. 東京大学出版会. 上野の研究に代表されるように、わが国の状況的認知論は仕事場での実践に関心を向けているが、この学説は、認知的技能もふくめ、広く捉えられるものと考える。また、エスノメソドロジーとの理論的融和性に関しても、検討を要すると考える。
[23] 波多野誼余夫・高橋惠子(1997). *文化心理学入門*. 岩波書店.
[24] Cole, M. & Cole, S. (1993). *The development of children* (pp.16-17). Scientific American Books.

的心理学」(cultural-historical psychology)以来、今日再び興隆しつつある「文化心理学」(cultural psychology: Cole, 1996)[25]は、人の心理発達に一定の普遍性を認めつつも、それぞれの社会・文化の中で育つ過程で獲得されるより特殊な「心性」(mentalities: 波多野・高橋, ibid: 8)に光を当て、こういった心の特殊な側面の形成に文化がどのような制約を与えているかを明らかにしようとしている。

さて、数学教育は、状況的認知論や文化心理学の研究動向から影響を受けて、教室における数学の学習を、他者・道具・談話といった状況論的視点から(例えば、Cobb, 1995)[26]、さらには数学の文化的実践に固有な側面から(例えば、Seeger, et al., 1998)[27]再検討しようとしている。そこでは、数学の知識を、客観的で形式的な知識と見なすのではなく、むしろ数学者集団が営む実践において使用される文化的な道具と見なそうとする。そして、認知発達を、「形式的操作」(formal operation: Inhelder & Piaget, 1959: 16)[28]という普遍的な発達段階の達成とみるのではなく、数学的実践において使用される道具や談話の使用に堪能となり、もって数学者共同体において熟達した成員となっていくことであると理解する。このことに対応して、学校数学の授業は、数学文化における熟達者である教師が、新参者である子どもたちの個人的な発想を数学の慣習へと導く営みであると理解される(例えば、Lampert, 1990)[29]。

これまで見てきたように、今日の数学教育論は、子どもの数学における認知発達を、数学的実践への導かれた参加による「社会的構成過程」という視座から検討しようとしている。しかしながら、数学教育の議論においては、そうした問題にアプローチする理論的な基礎付けが十分には展開されていないように思われる。なぜならば、子どもの数学的認知発達に関する研究は、これまでの認知科学や心理学の影響から、子ども個人が予め想定された数学的知識を自力で獲得する過程に焦点を当て、社会的支援や相互作用という変数を、説明変数から意図的に排除する傾向にあったからである。

1．5．授業研究における質的研究法の発展

本論文の研究関心は、学校数学の一斉授業に向けられている。1960-70 年代における授業研究において主として用いられてきた方法は、統計的手法を用いた相関的研究ないし実験

---

[25] Cole, M. (1996). *Cultural psychology*. The Belknap Press.
[26] Cobb, P. (1995). Cultural tools and mathematical learning: a case study. *Journal for Research In Mathematics*, 26(4), 362-385.
[27] Seeger, F., Voigt, J., & Waschescio, U. (Eds.), (1998). *The culture of the mathematics classroom*. Cambridge University Press.
[28] Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. Basic Book.
[29] Lampert, M. (1990). Connecting inventions with conventions. In L. P. Steffe & T. Wood (eds.), *Transforming children's mathematics education* (pp.253-265). Lawrence Erlbaum Associates.

的デザインによる「量的研究」であった(関口, 1991)[30]。これらは、自然科学ないし行動主義心理学の方法論から強い影響を受けていた。相関的研究としては、「プロセス・プロダクト(過程－所産)研究」(process-product research, Dunkin & Biddle, 1974: 82)[31]と呼ばれるものが広く用いられていた。それは、教授行動(プロセス)と、学習成果(プロダクト)といった 2 変数間の法則的な因果関係を調べることを目指したものであった。このアプローチのもとでの典型的な研究では、教授行動は予め設定された行動の離散的カテゴリーを用いて客観的に記録され、各カテゴリーの出現頻度と児童・生徒の成績の関係が統計的手法によって分析され、教授効果が評価された(例えば、Flanders, 1970)[32]。他方、実験的研究としては、キャンベルら(Campbell & Stanley, 1966)[33]によって提唱された実験的ないし擬似実験的デザインが広く用いられていた。

しかし、70 年代の後半頃から量的研究に対して様々な疑問や批判が投げかけられた。そこでは、自然科学の方法、特に「論理実証主義」(logical positivism)を教育現象の研究に適用することへの疑問や、教育事象において自然科学におけるような時空を超えた普遍的法則を打ち立てる試みに対して批判が提起された。例えば、「過程-所産研究」に代表される相関的研究は、教授行動と学習成績との間の関係を数量的に打ち立てるけれども、両者の間を媒介する理論は希薄であり、なぜある教授行動がある学習成果に影響を及ぼしたのかについての説明はなく、学習指導過程に関する理解の助けにはならないとされた(例えば、Mehan, 1979)[34]。

こうした中で、一般に「質的研究」(LeCompte et al., 1992)[35]と呼ばれる新しい研究法が教育研究において提唱されるようになった。この研究法は、民族学、文化人類学、社会学などを背景としつつも、それらに共通する理論的前提、すなわち「記号的相互作用論」(Blumer, 1969)の考えに依拠していた[36]。それは、人間は常に解釈を媒介として出来事を経験し、また、自分たちの創り出した解釈を実在のものであるかのように捉え、それに基づいて自らの行動をとっていく。その一方で、個人の抱く解釈ないし意味は、他の人々との相互作用の中で変化し、また共有することが可能であるとされる。

さて、数学教育は、こうした教育研究における質的方法の影響を受け、算数・数学の授業の自然な状況下での質的データを多角的に分析しつつ、当該の授業に関する仮説や理論

---

[30] 関口靖広 (1991). 証明の教授・学習過程の研究への社会学的アプローチ. *第 24 回数学教育論文発表会論文集* (pp.127-132). 日本数学教育学会.
[31] Dunkin, M. & Biddle, J. (1974). *The study of teaching*. Holt, Reinhart & Winston.
[32] Flanders, N. A. (1970). *Analyzing teacher behavior*. Addison-Wesley.
[33] Campbell, D. T. & Stanley, J. C. (1966). *Experimental and quasi-experimental designs for research*. Rand McNally.
[34] Mehan, H. (1978). *Learning lessons*. Harvard University Press.
[35] LeCompte, M. et al., (Eds.), (1992). *The handbook of qualitative research in education*. Academic Press.
[36] Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism*. University of California Press.

を帰納的に生成しようとしている(例えば、熊谷, 1998: 日野, 1995b; 関口, 1993)[37]。また、こうした質的研究法を用いて、算数・数学の授業下において、教師と子どもがどのような数学的世界を構成し、どのように相互作用し、自他の行為や事象をどのように解釈しているかという問題が、具体的な単元で検討されている(例えば、関口(1994); 日野(1996))[38]。こうした研究は、記号的相互作用論に基づき、授業下での小グループないし対人的相互作用のもとでの個人の解釈作業に専ら焦点を当てるものとなっている。それ故に、一斉授業という学級共同体において構成される数学的活動の体系、すなわち教師と複数の子どもたちにより協働的に構成される活動のシステムについての質的研究は、記号的相互作用論に基づいては展開されにくく、むしろ、別種の理論に基づき組織されることが必要となってきている。

1．6．問題の所在：数学教育研究の理論的伝統の転換

数学的知識に対する「プラトン主義」的見解、子どもの発達に対する「普遍－構成主義」的見解、そして授業過程に対する「論理実証主義」的見解は、互いに手に手を携えて、数学教育研究を方向づけてきたように思われる。数学教育研究で重視されてきた子どもの認知プロセスは、専ら「個人」についてのものであり、しかも関連する諸要因が実験室的にコントロールされた状況において検討されているものが多数を占めていた。また、授業についての教授学的研究の多くは、統計的手法を用いた相関的研究ないし実験的デザインによるものであった。こうした実験室的・臨床的研究や授業研究の方法論の基礎には、子どもの論理・形式的思考の発達は、人間の生得的な能力が一定の成熟によって普遍的に発現するという前提、そして、論理・形式的な知識は客観的に存在し、測定し、評価することができるという前提が置かれている。こうした形式的・学術的知識構造が、人間の認知様式の実験研究を組み立てるいわば「鋳型」(template: Lave, 1988: 100)[39]と見なされ、実験を計画する際に、被験者の行動の何を測定し、何を評価するのかを決定する選択基準とされた。このように、数学教育研究は、隣接諸科学の伝統も相まって、普遍的・客観的な側面を強調するあまり、数学的知識、子どもの認知発達、そして授業過程のそれぞれが、社会・文化的要因によって制約される側面を軽視してきたと言わざるをえない。

隣接諸科学の方法論に対する反省は、数学教育研究の従来の理論的前提を変更し、社会・

---

[37] 熊谷光一 (1998). 小学校 5 年の算数の授業における正当化に関する研究. *日本数学教育学会数学教育学論究, 70*, 3-38. 日野圭子. (1995b). 数学教育における質的研究について. *日本数学教育学会誌数学教育, 77*(9), 142-152. 関口靖広 (1993). 数学教育における民族誌的研究のために. *筑波数学教育研究, 第 12 号* A, 1-9.

[38] 関口靖広 (1994). 証明指導で何が起こっているのか？ *筑波数学教育研究, 第 13 号*, 1-10. 日野圭子 (1996). 一人の児童を通して見た数学的表記の内化過程の分析. *日本数学教育学会誌算数教育, 46*(1), 2-10.

[39] Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge University Press.

文化的側面を加味する新しい理論枠組みを設定する必要性を示唆している。こうしたことは、80 年代末から明確に提起されている。そのうちで最も説得力のあるものは、全米数学教師協議会(National Council of Teachers of Mathematics)が編んだ「数学教育の研究目録」(*Research Agenda for Mathematics Education*)における、数学教育研究者アラン・シェーンフェルド(Alan Schoenfeld)の次の文言であろう。

> 数学の授業において生徒が実際に何を学んでいるのか、そして、彼らが学んだことを、学校の外で、いかに、そしてなぜ使用するのか(あるいは使用しないのか)を説明できるために、われわれは、哲学および現象学のレベルで、文化的現象と認知的現象、そしてそれらの間の弁証法をも包括する理論と方法論を開発することが必要である。(Schoenfeld, 1988a: 83)[40]

こうした指摘を踏まえ、数学教育研究では、社会・文化的側面を取り入れた授業研究が組織されてきている。しかしながら、「社会的」(social)と目される多くの研究は、その目的と内容を検討するとき、専ら「対人的」(interpersonal)相互作用における個人の認知過程に焦点を当てている[41]。さらに、対人的相互作用は、認知的分析に対して二次的であったり、時には、認知的側面を明らかにすることにいわば「奉仕」(service)するものとして機能するきらいがあった(Wertsch & Rupert, 1993: 229)[42]。すなわち、社会・文化的側面が重要であるとされつつも、実際には、一定の数学的知識についての子どもの認知発達を明らかにすることが重視され、結果として、社会・文化的側面を取り入れた研究は認知的側面へと還元されてしまっているのである。上で引用したシェーンフェルドは、1997 年に全米教育研究学会(AERA: American Educational Research Association)会長に選出され、その任期を終える際の会長講演「21 世紀を見据えて：教育理論と実践の挑戦」[43]において、次世紀に探究されるべき 6 つの理論的研究課題を列挙し、第一に「認知的なものと社会的なものの統合」を挙げていることを知るとき、この課題が今日においても最重要の課題であることが示唆される。

この意味で、本論の研究主題「一斉授業における数学的活動の社会的構成」は、重要な課題であると認識されていながら、従来の研究枠組みにおける諸制約から、組織的で分析的な研究対象とは見なされにくかった。それ故、一斉授業において社会・文化的に構成される数学的活動を理解するための明確な理論的基盤を打ち立てることが必要であるといえる。

---

[40] Schoenfeld, A. (1988a). Problem solving in context(s). In R. Charles & E. Silver (Eds.), *Research agenda for mathematics education, Vol. 3* (pp. 82-92). NCTM, LEA.
[41]このことは、長洲南海男教授からの示唆である。
[42] Wertsch, J. V. & Rupert, L. J. (1993). The authority of cultural tools in a sociocultural approach to mediated agency. *Cognition and Instruction, 11*(3&4), 227-239.
[43] Schoenfeld, A. (1999). Looking toward the 21st century: Challenges of educational theory and practice. *Educational Researcher, 28* (7), 4-14.

２．本論文の目的

本論文の目的は、

> 学校数学の鍵概念である数学的活動を、一斉授業という社会・文化的文脈において理解する理論的・方法論的枠組みを構築すること

である。これは、数学教育論、数学論、認知発達論、授業研究方法論が交差する問題領域において一つの整合的な理論を構築することを意味する。

新しい理論を構築するためには、いくつかの作業課題に取り組むことが必要となる。これは本論文の方法に関わることなので、節を改めて議論することにしたい。

第2節　本論文の方法

1．本論文における研究の方法

本論文の目的に接近するためには、何よりも先ず、数学的活動についての先行研究を概観し、これまでの主要な成果を踏まえた上で、本論文の具体的な研究課題を定式化することが必要であると考える。また、数学教育研究において、数学的活動の概念とそのモデルが、様々な形で、しかも広範な文脈において提示されていることに鑑み、それらを一定の観点から系統的に吟味することが適切であると考える。本論文では、その方法として、数学が創造される全体的な過程の多様な様相が描きだされていると思われる島田茂によるモデル(島田, 1977)[44]を準拠枠として採用し、それとの対比のもとで、種々の数学的活動のモデルを検討する[45]。

島田のモデルを準拠枠とした比較・検討作業の結果、種々の数学的活動のモデルは、それに付与するラベルの名称や力点の置き方に違いはあるものの、その意味内容を検討するとき、実質的に、島田のモデルの一部ないしはそれらの組み合わせとして含まれることが示される(大谷, 1987a)[46]。このことは、種々の数学的活動のモデルが、島田のそれに比べて不十分もしくは不完全であるのではなく、むしろ、数学教育における文脈(カリキュラム論や問題解決過程論)に照らしてモデル化されたものであると理解される。こうした理解に基づき、本論文では、数学的活動のモデルに関する個別的研究を、カリキュラム論という長期的な視野と、問題解決過程論という短期的な視野に区別し、検討してゆくことにする。本論文では、前者が様々な数学の領域(スコープ)についての長期にわたる展開(シークエンス)を対象とすることから、それを「大局的視野」と呼び、後者が個別的な問題に関する解決プロセスを対象とすることから、それを「局所的視野」と呼ぶ。

数学的活動の大局的視野に関しては、オランダのユトレヒト大学附属「フロイデンタール研究所」(Freudenthal Institute)で開発されているカリキュラム論を取り上げる。というのも、「数学的活動」(mathematical activity)というアイデアを数学教育に明確に持ち込んだ最初の人が、数学者・数学史家ハンス・フロイデンタール(Hans Freudenthal)であったと思われるからである。フロイデンタールは、より抽象度の高い数学的手段によって事象を組織化する

---

44 島田茂 (編著), (1977). *算数・数学科のオープンエンド アプローチ*. みずうみ書房.

45 ここで、島田による数学的活動とは、現実世界における未解決の問題状況に対して、適宜条件や仮説を設定することにより数学の問題として定式化し、数学の理論を用いて演繹処理し、得られた数学的結果を当初の問題の解決に資すると共に、解決の方法や結果をふり返ることで問題の本質を見定め、より一般的で発展性のある理論図式や教訓を得ようとする一連の営みとして理解される。

46 大谷実 (1987a). *数学的活動に基づく教授・学習の基礎的研究*. 博士課程中間論文・筑波大学教育学研究科(未公刊).

活動を数学的活動の本質と見なし、それを「数学化」(mathematizing, Freudenthal, 1991:30)[47]と名づけている。フロイデンタール研究所は、この考えを膨らませ、数学化を2種類のもの(「水平的」(horizontal)と「垂直的」(vertical))に類別し、それらの有無により、大局的な数学教育論を、論理的に4つのものに類型化している。さらに、同研究所は、これら4類型の中で、2種類の数学化を共に含むものを推奨し、それを「現実的数学教育論」(Realistic Mathematics Education)と呼んでいる。

本論文では、この現実的数学教育論について検討を加え、その特徴を明らかにする。先ずは、現実的数学教育論にみられる数学的活動(すなわち数学化)が、島田の提示するモデルと整合していることを示す。また、現実的数学教育論における数学的活動のさらなる特徴を示すために、それを支える教授・心理学的基礎を検討する。それは、「思考水準論」(level of thinking: van Hiele, 1986)[48]と呼ばれるゲシュタルト心理学に依拠する理論であり、それに従えば、数学的活動は、長期的なスパンで子どもの思考水準が上昇する(すなわち新しい構造を洞察する)ことであると見なされる。思考水準は、実際には5つあり、それらは初等教育段階から高等教育段階にまで関わり、数学的活動の大局的本性を示唆している。

今日、フロイデンタール研究所は、現実的数学教育論を発展させる上で、思考水準論を大枠として受け入れながらも、その理論的な粗さを修正し、より局所的なレベル、すなわち小規模な単元を扱う授業レベルに適合するよう改良を試みている(Gravemeijer, 1994; Treffers, 1987)[49]。その際に鍵となる観点が、社会・文化的側面である。そこでは、数学としての真正な文脈(現象学的に分析された状況: Gravemeijer, ibid: 90)に子どもを招き入れると共に、豊かな発想をもつ子どもの意味の構成と、数学文化の代表者である教師の提供する範例(paradigm)、図的、モデル、そして記号という「文化的増幅装置」(cultural amplifier: Treffers, ibid: 251)が相互作用することを通じて、思考水準が徐々に上昇していくよう、単元計画を行っている。こうした検討から、数学的活動の大局的な視野は、次第に局所的な方向へと論を展開していることが示唆される。

次の、数学的活動の局所的視野では、ジョージ・ポリア(George Polya)による数学的問題解決論(Polya, 1957)[50]を取り上げる。先に述べたように、局所的視野は、数学の個別的な問題に関する解決プロセスを対象としているので、数学的問題解決論を取り上げることが理にかなっている。そして、数学教育でのこの分野の論説はポリアの研究を端緒とし、したがって、多くのことを負っていると思われる。

---

[47] Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer.
[48] Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. Academic Press.
[49] Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. CD-β Press. Treffers, A. (1987). *Three dimensions*. D. Reidel.
[50] Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press.

ポリアによる数学的問題解決論の検討の後に、本論文では、それが島田の数学的活動のモデル論とも整合していることを示す。さらに、先の大局的視野と同じように、数学的問題解決過程論を支える心理学的基礎、ここでは認知心理学的研究を取り上げる。近年の認知心理学および認知科学の進歩はめざましく、数学教育研究にも深く浸透してきている。80 年代に発展した数学的問題解決に関する新しい認知心理学的枠組み、ことに米国のシェーンフェルドによる研究(Schoenfeld, 1985)[51]は、数学教育の研究と実践に新しい扉を開くものであったと思われる。本論文では、こうした認知心理学的な問題解決論の新しい枠組みを取り上げると共に、この枠組みにおいて、「社会的認知」(social cognition)や「信念システム」(belief system)といった、いわば「純粋に認知的なものを超えた」(Beyond the purely cognitive: Schoenfeld, 1983)[52]視点が新しく取り込まれたことを指摘する。

こうした新しい構成概念を含む理論的枠組みのもとで、数学的問題解決研究は、実験室的場面における個別の数学的知識やスキルの獲得といった認知的な側面から、それらを含めた一段高いレベルを視野に入れた研究へと進展していく。このことに関連して、数学的問題解決過程は、数学という文化的実践の文脈に埋め込まれた状況において、また、熟練した教師の支援のもとでの徒弟的な学習形態において、さらには、実際の教室における授業過程において検討されるようになってきたことが示される。

これまでの議論から、数学的活動論は、一方で大局的なカリキュラム論からより局所的な単元へ、他方で個人の問題解決過程論から社会共同体における文化的実践論へと展開していき、「授業」もしくは「教室」という社会・文化的な空間において出会うことになる。このことに対応して、数学的活動は、一定の社会共同体において慣習・制度化されている文化的実践で、一定の動機と目的、技法(テクノロジー)、知識システムを用いるひとまとまりの行為(Cole, 1995: 110)[53]と定義され、数学的活動の発達は、そうした文化的実践への導かれた参加を通じた文化変容の過程であると定式化される。こうした新しい理解のもとで、数学教育研究では、学級共同体における数学的活動論を組み立てることが重要な研究課題とみなされるようになってくる。しかしながら、数学的活動に関する大局的研究と局所的研究は、共に、こうした課題を解決するための基礎を欠いている。実際、大局的視野はゲシュタルト心理学を基礎としており、局所的視野は(コンピュータを鏡として)認知の働きをモデル化する認知心理学を基礎としているため、教室における社会・文化的側面を分析する概念と方法を持ち合わせておらず、結果として、教師と子どもの相互作用を取り上げる際に、実際の発話等を例示することで臨場感を持たせることが主たる方法となっている(例

[51] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
[52] Schoenfeld, A. (1983). Beyond the purely cognitive. *Cognitive Science, 7*, 329-363.
[53] Cole, M. (1995). The supra-individual envelope of development. In J. J. Goodnow, P. J. Miller, & F. Kessel (eds.), *Cultural practices as context for development* (pp.105-118). Jossey-Bass Publishers.

えば、Schoenfeld, 1988b)[54]。さらに、先に述べたように、数学、心理学、そして授業研究に関する理論的前提は、授業における社会的視野を取り込んだ数学的活動論の構築にとって基本的な障害ともなっている。

このような問題状況において、今日、こうした研究課題への接近法が提唱されてはじめている。その立場は、数学的活動を教室のレベルで分析する「社会学的視野」(sociological perspective)と、個人のレベルで分析する「心理学的視野」(psychological perspective)の両方を「適宜取り合わせる」(coordinate; Cobb, 1996: 87)[55]ものである。一方の社会学的視野は「記号的相互作用論」と「エスノメソドロジー」(ethnomethodology: Garfinkel, 1967)[56]に依拠し、他方の心理学的視野は「構成主義」(constructivism: von Glasersfeld, 1984)[57]に依拠している。これらは共に、主体の能動的な意味構成や、その場その時の解釈作業を前提とする点で、先の異質な理論の衝突による困難を緩和する手だてであるとみなされる。その主唱者は米国のポール・コブ(Paul Cobb)であり、彼に従うと、教室における数学的活動への接近法は次のような図式となる。

教室における数学的活動	
社会学的視野	心理学的視野
数学的活動に関して教室で共有されていると見なされる規範や役割[58]	数学的活動に関して個人が構成している信念や知識

教室における数学的活動への接近法(Cobb, 1996 に基づく)

しかしながら、今日優勢となっているこうした立場は、学際的で総合的な理論とは言えても、決して整合的で一体化した理論とは言えないという批判が起きている(例えば、Waschescio, 1998)[59]。その主たる問題は、教室における社会学的側面と心理学的側面を、個人の解釈作業に還元しつつ個別に記述するのみで、両者の関連性を説明しない点にある。従って、この問題を克服するためには、教室における数学的活動を、教室と個人という要素に区別し、単に寄せ集めるのではなく、むしろ両者の結びつきを説明し、「教室において数学をする人々」それ自体を一つの単位として分析する理論枠組みを提示することが必要となってくる。数学的活動に関するこうした先行研究の問題点を踏まえ、本論文では、

---

54 Schoenfeld, A. (1988b). When good teaching leads to bad results. *Educational Psychologist*, 23(3),145-166.
55 Cobb, P. (1996). Accounting for mathematical learning in the social context of classroom. In C. Alsia et al., (Eds.), *8th international congress on mathematical education* (pp. 85-99). S.A.E.M. Thales.
56 Garfinkel, H. (1967). *Studies in ethnomethodology*. Prentice Hall.
57 von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.), *The invented reality* (pp. 17-40). Norton.
58 ここで「共有されていると見なされる」とは、taken-as-shared のことである。
59 Waschescio, U. (1998). The missing link. In F. Seeger et al., (eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 221-241). Cambridge University Press.

数学教育論ならびに隣接する学問分野において主流となっている理論的前提を転換し、「教室共同体において数学的活動に従事する教師と子どもたち」を一つの単位と見なし、その特徴を分析・説明する理論を構築する

という研究課題を設定する。

掲げられた研究課題に取り組むには、先ずもって、社会と個人の不可分な結びつきを前提とする数学論と認知発達論を検討すること、さらに、それらに依拠して一つの整合的な理論を構成することが必要である。このために、本論文では、次のような四つの作業課題を設定する。第一に、数学を共同体的な実践活動と見なす理論的立場を検討し、もって、教室を真正な数学的活動が実現される場として捉え直す枠組みを提示すること。第二に、教室における子どもの学びを、共同体的実践を通じた社会的構成過程と見なす理論的視野を検討すること。第三に、第一の課題と第二の課題から得られた知見に依拠し、一斉授業における数学的活動が社会的に構成される過程を説明する理論を構築すること。そして、第四に、構築された理論の有用性を、実際の授業の質的データに照らして検討することである。

第一の課題に関しては、主としてラカトシュ論を、第二の課題に関しては、主としてヴィゴツキー論を、それぞれ取り上げる。本論文は、ラカトシュ論やヴィゴツキー論に関して、何らかの新しい事実や解釈を提示することに本意があるわけではない(但し、それは筆者なりのヴィゴツキー論の復原であり、ラカトシュ論の合理的再構成であると思われる)[60]。しかしながら、本論文にとって、両理論を検討することは、いくつかの理由で必要であると考える。一つは、数学の活動的側面と社会的側面を共に強調する数学論にはいくつもの立場があるが、それらの中でラカトシュ論が本論文の研究課題に関して当を得たものであることを確認することは重要であると思われる。同じように、社会的側面を重視する発達論は多数見られるが、それらの中で、ヴィゴツキーの発達論が、本論文の研究課題にとって重要な示唆を含んでいることを示すことも必要である。さらに、これら２つの理論に依拠し、一斉授業における数学的活動論を構築するには、両理論が整合的に組み合わされる可能性も示さなくてはならないと考える。

第一の課題は、数学に活動性と社会性を与えることである。本論文では、先ず、活動性を検討し、次いで社会性を検討する。活動性を検討する方法として、本論文では、ユークリッド的伝統に対し批判的議論を展開してきた数理哲学の諸学派を検討する。実際、数学

[60] 思想の復原がヴィゴツキーの方法であり、歴史の合理的再構成がラカトシュの方法であると思われる。前者に関しては、茂呂雄二 (1999). *具体性のヴィゴツキー*. 金子書房、後者に関しては、Yuxin, Z. (1990). From the logic of mathematical discovery to the methodology of scientific research programmes. ***British Journal for the Philosophy of Science, 41***, 377-399.から示唆を得た。

的活動論は、数学におけるユークリッド的伝統の意義を認めつつも、それが抱える問題点を克服することを意図して提起されているように思われる。これら諸学派は、それぞれ立場を異にするが、一つの点で共通する特徴を持っている。それは、何れも「発見法」(heuristics)と呼ばれるもの、すなわち、活動の進歩を評価する基準、もしくは活動を展開する際の規範的指針を提示していることである。本論文のように、数学的活動を科学(ことに数理)哲学における発見法の系譜に着目して検討することは、新しい方法であると思われる。ここでは、発見法の諸学派として、ルドルフ・カルナップ(Rudolf Carnap)を代表とする「帰納論理学」(inductive logic: Carnap, 1945, 1953)[61]、カール・ポパー(Karl Popper)による「(方法論的)反証主義」((methodological) falsificationism: Popper, 1965)[62]、イムレ・ラカトシュ(Imre Lakatos)による「可謬主義」(falibilism)もしくは「科学的研究プログラムの方法論」(methodology of scientific research programmes: Lakatos, 1978a)[63]を取り上げる。ポリアやラカトシュの著作は、これまで数学教育の文脈に埋め込まれ過ぎていたように思われる。しかし、後述する(2章1節)ように、ポリアらの著作は、科学哲学の文脈において、よりよく理解されるものと考える。ただし、科学哲学の文脈のみでは数学の色彩が失せてしまうので、本論文では、各学派の発見法的活動を反映していると思われる数学の事例を、ポリアの著作(Polya, 1954)[64]に見いだし、適宜取り上げる。

次に、本論文では、ラカトシュによる「証明と論駁法」(method of proofs and refutations: Lakatos, 1976)[65]に注目する。というのは、それが他の発見法と比較して、数学固有の発見法を描き出しているとともに、数学的活動の社会性をも際立たせていると思われるからである。ここでも、ラカトシュやポリアの著作から具体的な数学的活動の事例を参照する。その一つの理由は、本論の第5章で、高等学校における教授実験を組織する際の教材としてそれを採用するからである。本論文では、単に「証明と論駁法」を具体的に例示するだけでなく、上と同じように、それを科学哲学の議論と対照させ、数学と自然科学の共通点と相違点とを明確にしようとする。その理由は、次のことによる。一方で、ラカトシュは「科学的研究プログラムの方法論」を提唱しており、科学哲学の分野で著名である。他方で、論文集の編纂者は、「彼は本来自分を数学の哲学の研究者と考えていた」(Lakatos, 1978a: v)[66]と述べている。この意味で、「証明と論駁法」と「研究プログラム論」の異同を検討することは、数学における発見法の特徴を、具体例をこえたレベルで明確にすると考えるのであ

[61] Carnap, R. (1945). On inductive logic. *Philosophy of science, 12*, 72-97. Carnap, R (1953). Inductive logic and science. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, 80*, 189-197.
[62] Popper, K. R. (1965). *Conjectures and refutations*. Haper Torchbooks.
[63] Lakatos, I. (1978a). *The methodology of scientific research programmes*. Cambridge University Press.
[64] Polya, G. (1954a, b). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1 & 2*. Princeton University Press.
[65] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press. Lakatos, I. (1978b). *Mathematics, science and epistemology*. Cambridge University Press.
[66] Lakatos, I. (1978a). *The methodology of scientific research programmes*. Cambridge University Press.

る。

こうした可謬主義的数学論の検討を通じて、数学的活動が、個人的側面と社会的側面を併せ持っていることが示される。可謬主義は、数学的活動を、数学者が理論を個性的に創案する活動と見なす。このことから、数学の真理の相対性、そして数学の社会共同体的本性が含意される。それはこうである。数学者が理論を個性的に創案するとき、同一の問題に関して複数の理論的視野が競合することになる。そうした競合は、同じ研究関心をもつ数学者集団に、各理論の拠り所となる前提を再検討することを促す。こうした可謬主義的数学論から示唆を得て、本論文では、教室を数学者集団が行うような活動の場、すなわち、自らが数学の知識を生み出し、他者と語り合いつつ意味を取り決めてゆく相互交渉の場、さらには、複数の人々が理論を協働的に構築する場と見なしていく。

可謬主義的数学論の検討から、教室を真正な数学的活動が展開される社会共同体と見なすことが示唆された。しかし、この段階では、まだ学校数学に対する示唆にはなっていない。なぜなら、可謬主義から得られる示唆は数学に関するものであり、教育に関する視点を欠いているからである。そこで、教室を社会共同体と見なす可謬主義的数学論の示唆を踏まえつつ、さらに教育的な観点を取り込んでゆくことが必要となる。本論文では、その観点として、教室の共同体的本性と教育的本性が共に明確に現れている「一斉授業」に着目する。一斉授業では、数学の文化を代表する教師が、発達途上の児童・生徒集団の学習活動を組織化する。この意味で、一斉授業では、単に複数の理論的視野が競合し相互作用するだけではなく、それらを組織化し、また合理的に再構成する人、つまり教師が本質的に重要な役割を演ずる。このことに関して新しい問題が提起される。すなわち、社会共同体において、能力に長けた先達者の導きのもとで、新参者が知的に発達する過程を説明する理論を検討することである。それが、本論文の第二の作業課題となる。

第二の作業課題は、個人の心理発達と社会的相互作用が密接に絡み合うとする学説を検討することである。本論文では、レフ・ヴィゴツキー(Лев Выготский)を中心とした学派による「精神発達の文化-歴史理論」(Культурно-историческая теория развития психики: Выготский, 1982a: 19)[67]を取り上げる。

ヴィゴツキーの発達論の特徴は、「精神」(психика, mind)[68]という語を用いる点に現れているように思われる。それは、社会・文化的諸関係のもとで発達する心性を問題とし、

[67] Выготский Л. (1982a). *Вопросы теории и истории психологии.* Педагогика.
[68] 「心理発達」(psychological development)ではなく「精神発達」(психическое развитие, mental development)という語を用いる点に、個人のプロセスが他者との社会的関係のもとで理解されるというヴィゴツキーの特徴的な思想が現れている。多くの研究は、психикаを「心理」と訳しているが、本論文では「精神」と訳し、社会・集団的な心性という含みをもたせる。

個人の内面的な心理のみを問題としない。また、ヴィゴツキーの発達論が「文化－歴史的」と形容されるのは、人間の精神発達は、歴史的に形成された文化共同体の実践活動と、そこで使用される文化的道具から切り離して理解することはできないからである。ヴィゴツキーは、精神発達を、個人を取り巻く他者および道具の体系と相互交渉することにより、そこに集約されている過去の人々の問題解決の経験を取り込んでゆくことと見なす。そして、精神発達の過程は、一定の文化的実践共同体において、未熟な成員が、熟達者の導きのもとで文化的道具の使用を伴う問題解決に周辺的かつ部分的に参加しつつ、次第に独力で問題解決が可能となり、有能な実践者として自立していく過程と理解される。ここでの問題解決活動は、個人単独のものではなく、他者との「協働」(в сотрудничестве, collaborative: Выготский, 1982b: 247)[69]もしくは道具を介した活動という意味合いを持つ。また、そうした協働的活動は、個人で可能な水準よりも高いレベルの問題を解決する可能性、すなわち「発達の最近接領域」(зона ближайщего развития, Выготский, 1935: 12)[70]を開くことになる。こうした検討を踏まえ、本論文では、学校数学の一斉授業における数学的活動の特徴を、次のように定式化する。すなわち、子どもが、教室共同体における数学的実践活動へ、教師による導きのもとで周辺的に参加し、数学的道具の使用に堪能になるとともに、教室共同体の自立した成員となっていくことである。

ここまでは、ヴィゴツキーの精神発達論に照らして、学校数学の一斉授業における数学的活動の特徴を述べてきた。しかしながら、それはまだ、基本的な特徴付けであって、分析的なものにはなっていない。そこで、本論文では、ヴィゴツキーの発達論が拠って立つ基本原理や方法論的命題を検討し、先に定式化された特徴を、操作的視点に基づき分析可能なものにする。ヴィゴツキー論に言及する数学教育の諸研究と本論文の相違点は、こうした分析的な理論枠組みを構築する点にあると考える。

ヴィゴツキーの発達論の根底にある基本原理や方法論的命題として、次の三点を挙げることができる。(1) 精神発達を「記述」(описательная)する理論ではなく「説明」(объяснительная)する理論を構築すること(Выготский, 1983a: 95-96)[71]、(2) 精神発達を、「機能システム」(функционая система, 1984: 80)[72]の構造的変化と見なすこと、そして、(3) 精神発達を説明する際に、機能のシステムを人為的に「要素」(элемент)に分解し、還元主義的に研究するのではなく、複数の機能に共通する「単位」

---

[69]Выготский Л. (1982b). *Проблемы общей психологии.* М. Педагогика. なお、сотрудничествиоという語は、文字通り「一緒に働くこと」と訳されるので、本論文では「協働」という語を用いる。
[70] Выготский Л. С. (1935). *Умственное развитие детей в процессе обучения.* М. Г. У-П. Изд.
[71]Выготский, Л. (1983a). *Проблемы Развития Психики.* Педагогика.
[72]Выготский, Л. С. (1984). *Научное Наследство.* М. Педагогика.

(единица)を設定し、その変化を追跡することである(Выготский, 1982b: 15)[73]。

基本原理の(1)は、先の「社会学的視野」と「心理学的視野」を適宜取り合わせることが抱える問題、すなわち、個人と社会を要素に分けて記述はするが、両者の間の関連性は説明しない、という問題を克服することである。基本原理の(2)は、「内化」(овнутривание, Выготский, 1984: 71)と呼ばれるもので、精神機能の発達を、個人の内面の変化のみならず、個人を取り巻く他者や道具との相互交渉のパターン(関係)の変化と見なすことである。(3)は方法論的な命題で、個人とそれを取り巻く社会的なもの(他者や道具)の両方に関係する「単位」を設定し、その機能的変化を追跡することで、個人の内的変化と社会的相互交渉の変化を、共に分析することである。この例として、ヴィゴツキーが思考と言語の関係を分析する単位として「ことばの意味」(значение слова, Выготский, 1982b: 16)を設定したことが挙げられる。それが分析の単位となる理由は、ことばの使用が、「一般化」という個人の思考作用に関わるとともに、他者との「コミュニケーション」にも関わるからである。そして、ことばの意味の機能的変化を追跡することで、個人の思考の発達と他者との相互交渉のパターンの変化とを、同時に分析できると考えたのであった[74]。

こうしたヴィゴツキーの発達論の基本原理や方法論的命題は、先に定式化した一斉授業における数学的活動に関して、三つの問題を提起する。

(ア) ヴィゴツキー論は、活動を、人と彼らを取り巻く他者や道具からなる機能システムとして捉える。では、数学的活動を考える場合、機能システムはどのようなものか。また、機能システムの構成部分である教師がどのような役割を果たすのか。
(イ) 機能システムの関係が変化すること、つまり、当人・他者・道具の相互交渉のパターンが変化するとはどういう意味か。
(ウ) 分析の単位として何を設定するか。

これらの問題の解答は、ヴィゴツキー論自体からは得られない。というのは、これらの問題は、数学の特徴に照らして検討されるものと思われるからである。本論文では、こうした問題の解決の糸口を、ラカトシュの数学論に求める。そのためには、ヴィゴツキー論とラカトシュ論とを、何らかの接点で結び合わせていくことが必要である。それが、第三の作業課題となる。

これまでの二つの作業課題により得られた知見は、一方が数学論であり、他方が発達論である。第三の課題は、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの精神発達論に依拠し、一斉

---

[73] Выготский Л.(1982b). *Проблемы общей психологии*. Педагогика.
[74] これは、数学における「関数の考え」に類比的である。これは、伴って変わる変量(x, y)の関係を、変化する数量の中から不変なもの(例えば、比例関係 $y = ax$ の場合は比例定数 a)を見いだし、それに着目することで、変量間の依存関係を間接的に予測したり、制御することである。

授業における数学的活動を基礎づける理論枠組みを構成することである。その方法として、本論文では、先ず、ラカトシュ論と、ヴィゴツキー論とが思想的基盤において類似性を持っていることを示す。このことに関して、本論文では、両理論が「歴史－発生的アプローチ」、「質的変革と弁証法的発展」、「個人と社会の相互作用」を共通の特徴として持っていることを主張する。

「歴史－発生的アプローチ」とは、何らかの対象を研究する際に、それが発生し、形を成していく変化と運動の中で、その誕生から死滅までを研究することである。ラカトシュは、形式化された理論のみが数学の真の研究対象であると見なす「形式主義(超数学)」の立場を批判し、数学の歴史的発展を強調する。また、ヴィゴツキーも、従来の心理学的研究が既に出来上がり化石化した心理機能に関心を向けていることを批判し、生まれつつある、形成されつつある精神機能を研究すべきだとする。このように、両者とも、歴史的・発生的過程を重視していることが示される。

「質的変革と弁証法的発展」とは、物事の発達を、単調な量的増大の過程としてではなく、何からの矛盾形態のもとで進展する質的変革の過程と見なすことである。質的変革に関しては、ヴィゴツキーは人間の精神発達の過程を、そしてラカトシュは数学理論の発展の過程を、それらが単一の説明原理によって説明される単調な量的増大ではなく、根本的な質的変革による再体制化の過程であると見なす。また、弁証法に関しては、ラカトシュは、証明と論駁の弁証法によって数学の質的転換がなされるとし、ヴィゴツキーは、思考と言語という相対立する本性の止揚として言語的思考を説明しようとする。さらに、ラカトシュ論もヴィゴツキー論も、共に、個人の内面的な「思考」と社会的な「ことば行為」の相互啓発的関係を重視する。このように、両者とも、相対立する関係の弁証法的統一という観点から理論を組み立てていることが確認される。

「個人と社会の相互作用」とは、個人の内面と社会的諸関係とがいわば不即不離の関係にあること、ここでは、子どもの精神発達および数学者の理論構築が、彼らを取り巻く社会共同体と分かちがたく結びついていることを意味する。これは、主知主義的な個人と、それとは独立に存在する固定的な社会構造との間にある裂け目、いわゆる「デカルト的切断」を克服し、主体の能動性と社会の多様性の相互啓発的関係を強調することである。ヴィゴツキーは、人間が社会的環境に能動的に働きかける人工的道具を創案するとともに、そうした道具が自分自身の精神機能を随意的にコントロールする手段となることを強調する。ラカトシュもまた、数学者が新しい数学の理論を創案するとともに、そうした新しい理論が数学者共同体において制度化されている他の理論と激しく競合することを契機として成長発展することを強調する。このように、ヴィゴツキーは精神機能に関して、ラカトシュは数学理論に関して、個と社会が、一致もしないが乖離もしない関係にあるものとし

て理論を展開していることが示される。

これまで見てきたように、ラカトシュの可謬主義的数学論とヴィゴツキーの文化ー歴史的発達論とは、内容こそ異なるものの、その理論的・方法論的前提を検討するとき、いくつもの共通点を持つことが示される。かくして、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの発達論に依拠して、一つの整合的な数学教育の理論を構築する前提が確認される。

こうした基本的な作業を踏まえ、本論文では、両理論に依拠し、一斉授業における数学的活動を理解する理論枠組みを構築し、それを「社会数学的活動論」(Sociomathematical Activity Theory)と呼ぶ。「社会数学的活動」とは、教室共同体で展開される一斉授業において社会的に構成される数学的活動を簡潔に表現したものである。「社会数学的活動論」の理論枠組みに関しては、次の小節「本論文で導かれる事柄」において述べるが、それは基本的に、研究対象と研究方法から構成されている。「社会数学的活動論」の研究対象は二つあり、本論文では、それらを「大局的数学的活動への局所的参加」、「社会的相互作用による数学的意味の発達」と呼ぶ。これは、先に掲げた問題(ア)と(イ)、すなわち機能システムとしての数学的活動の構造と、その機能的変化の問題に答えるものである。また、これらの研究対象を分析する方法論的視点、つまり「分析の単位」として、本論文では「数学的条件と定義の機能的変化」を提唱する。これが、問題(ウ)に対する答えとなっている。

こうして提示された理論枠組みは、数学論と発達論の理論的な検討を通じて構築された。しかしながら、それは本来、学校数学の一斉授業において、教師と子どもが社会的に構成する数学的活動の実際的態様を説明したり、規範的な授業を構想したりするためのものであった。提示された理論の実際的検討を行うこと、これが、第四の課題である。本論文では、「社会数学的活動論」を記述枠組みとした場合に、一斉授業における数学的活動の実際の態様はどのように分析され、理解されるか、さらに、「社会数学的活動論」を規範的視点とした場合に、学校数学における一斉授業はどのように組織化されるかを示す。前者の記述的研究として、小学校第 4 学年の算数の授業について「非参与観察」(non-participant observation)を組織し、後者の規範的研究として、高等学校第 2 学年で少人数での「教授実験」(teaching experiment)を組織する。本論文を構想する過程で、筆者は、小学校から高等学校までの一斉授業の観察をおこなったが、その特徴は、学校段階によって異なっているように思われた。基本的に、小学校の一斉授業では、教師と児童の社会的相互交渉が濃厚であるが、数学的側面(特に、発見法的側面)が希薄であった。逆に、高等学校では、数学的側面(この場合は、ユークリッド的側面)が強く、社会的側面が弱いように受け止められた。また、中学校は、どちらの側面に関しても、過渡的で、扱い難いものであった。そこで、本論文では、小学校と高等学校での実際的な検討を取り上げることにした。小学校では、社会的相互作用に数学的な特徴が反映されているものを取り上げ、高等学校では、数学的活

動に社会的側面を反映させることを試みた。つまり、小学校で記述的研究を、高等学校で規範的研究を行うこととした。なぜならば、活発な授業研究が展開されている小学校の現状から、「社会数学的」と目されるような授業実践を見いだすことは可能であり、逆に、授業研究が比較的少ない高等学校の現状では、難しいと考えたからである。このことを図式的に表すと、次のようになる(表中の＋は、その側面が本来的に強いことを示している)。

	社会的側面	数学的側面
小学校	＋	記述的研究
高等学校	(規範的研究)	＋

「社会数学的活動論」に基づく実際的検討

この表において、高等学校での規範的研究は括弧に入れられている。このことの意味は、本研究では、実際には、高等学校の一斉授業において社会的側面を反映させるような規範的研究を組織する可能性に対して慎重となり、結果として、少人数での教授実験を組織したことである。というのも、高等学校で実際に授業を担当する教師と協議する過程で、本研究が意図しているような社会数学的活動の形態を現下の高等学校で実現することは多くの困難を伴うと判断したからであった。この意味で、高等学校における実際的研究は、本論文が対象とする「一斉授業」それ自体に関する考察とはなっていない。しかしながら、こうした擬似実験的設定は、実際の一斉授業における規範的研究を組織する上での第一次近似を与えるものと考えられる。

2．本論文で導かれる事柄

本論文では、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの発達論に依拠し、一斉授業において数学的活動が社会的に構成される過程を説明する「社会数学的活動論」なる理論枠組みを提示する。

「社会数学的活動論」を定式化するための準備として、先に、両理論の共通性を検討してきた。そうした共通性を前提としつつ、本論文では、ラカトシュ論とヴィゴツキー論における力点の置き方の相違に着目する。それは、二つの点で見いだされる。一つはラカトシュ論における「大局的発見法である研究プログラム」とヴィゴツキー論における「局所的で周辺的な参加」という力点の置き方の相違であり、もう一つは、ラカトシュ論における新しい知識の「個人的創案」(personal invention)とヴィゴツキー論による「社会的慣習」(social convention)の相違である。「社会数学的活動論」の構築は、両理論のこうした力点の置き方の相違点を統合することによりなされる。

前者の統合は、次のようにしてなされる。一方で、ヴィゴツキー論は、数学文化におい

て歴史的に蓄積されてきた文化的道具の正統な使用方法を、文化的実践への局所的参加を通して習得してゆき、もって実践全体の遂行が可能となっていく過程を検討する。他方で、ラカトシュ論は、数学的道具がそこから発展し、精緻化される、長期的な活動の綱領(プログラム)を示している。それは、大局的で未分化な推測から局所的で分節化された理論へ前進させるための、合理的で規範的な発見法的指針であった。このように、ラカトシュ論における数学は大局から局所へと展開し、ヴィゴツキー論における精神発達は局所的参加から全体的遂行へ移行する。こうした対照性を利用し、本論文では、大局的な数学的発見法に子どもたちを局所的に参加させるという観点により、両者の統合を行う。この場合、一斉授業における数学的活動は、教師の方向づけのもとで、子どもたちを大局的な数学的活動に部分的に参加させつつも、彼らが独力で活動に参加できるよう、徐々に支援の手を緩めてゆくことと理解される。数学的活動のこうした側面を、本論文では、「大局的数学的活動への局所的参加」と呼ぶ。

後者の統合の意味は次のことである。一方で、ラカトシュ論とヴィゴツキー論は、共に内面的な「思考」と社会的な「ことば行為」の相互啓発的関係を重視する。しかし、他方で、ラカトシュの可謬主義は、新しい知識や理論を発明することを強調し、その際に証明や反例という社会的機能を積極的に利用することを論じている。また、ヴィゴツキーの文化－歴史理論は、個人の思考が社会的慣習(道具およびそれに習熟している他者)によって制約される点を強調する。こうした両理論の共通点と相違点とを踏まえつつ、本論文では、「社会数学的活動」を、子どもの側の直観的な知識や既に知っているインフォーマルな方法と、社会的慣習とが相互作用する過程であると理解する。本論文では、社会的慣習として、より経験を積んでいる他者や、公的で形式的に使用されている数学固有の道具(ことに、数学的言語)を想定している。本論文では、数学的活動のこうした側面を、「社会的相互作用による数学的意味の発達」と呼ぶ。

以上の議論から、「社会数学的活動論」の研究対象は、次の表のようになる。

社会数学的活動論の対象 / 分析の視点	大局的数学的活動への局所的参加	社会的相互作用による数学的意味の発達
協働的活動から個人の活動への責任性の移行、数学的道具の内面化	数学的発見法に基づく大局的な活動への導かれた参加を通じた子どもの側での責任性の増大	熟練者や数学的道具を介した社会的相互作用のもとでの子どもの数学的意味の発達

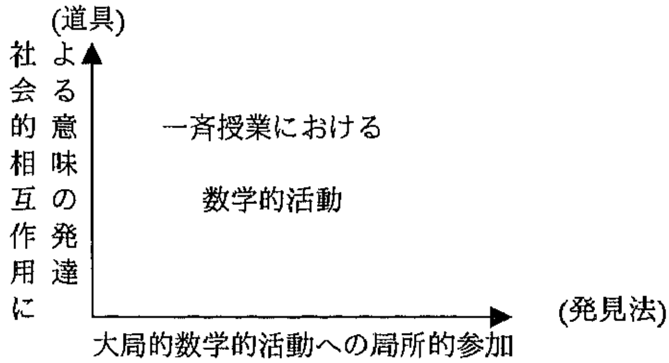
「社会数学的活動論」の研究対象

かくして、「社会数学的活動論」では、数学的活動を、数学的発見法と数学的道具により定

義し、一斉授業における社会的構成を、教師と子どもの協働的活動のもとでの子ども個人の責任性の増大と意味の発達により定義する。

こうした理論枠組みは、先に提起した問題(ア)と(イ)に答えるものである。先ず、(ア)の問題に対しては、「社会数学的活動」の二つの側面が、この場合、機能システムを成すことになる。「大局的数学的活動への局所的参加」では、数学的発見法を媒介とする教師と子どもの関係(教師－数学的発見法－子ども)が機能システムであり、「社会的相互作用による数学的意味の発達」では、数学的道具を媒介とする教師と子どもの関係(教師－数学的道具－子ども)が機能システムである。かくして、「社会数学的活動」の二つの側面は、その媒介項によって区別されるものと言える。次に、(イ) 機能システムの関係が変化する問題に関しては、前者は、数学的活動に参加する上での子どもの責任性の増大に光を当て、後者は社会的慣習に媒介された数学的活動に参加する子どもの数学的意味の発達(すなわち一般化の発達)に光を当てている。前者は、数学的発見法に参加する上での個人の「責任性」が増大し、後者は、数学的道具に個人が付与する「意味」が発達するということになる[75]。より客観的な指標として、前者は、教師から提供される支援が減少すること、後者は、数学的道具が有効性を発揮する課題の範囲が広がることが挙げられる。

「社会数学的活動」の二つの側面は、何れも学級共同体における数学的活動を基盤としており、この意味で、同じ対象の異なる側面に目を向けており、一斉授業における数学的活動のいわば「基底」と言うことができる。



「社会数学的活動」の２つの基底

これまでの議論は、「社会数学的活動」の内容についての記述であって、それらの分析の方法については言及していない。従って、先の問題(ウ)に対する答え、すなわち、分析の単

[75] 前者を、子どもの側での発見法に関する「意味」の発達と表現し、後者を、数学的道具を操作する「責任性」の増大と見なすこともできるが、本論文では、それぞれの特徴を浮き彫りにするために、一方の語を用いている。

位と分析の方法を述べなくてはならない。本論文では、「社会数学的活動」をなす二つの側面を分析する単位として「数学的条件と定義」という視点を提案する。というのは、数学的条件と定義は、数学的活動の重要な構成要素であることは論を待たないが、それは個人の思考を支える認知的機能のみならず、他者の活動を制約し組織化する社会的機能をも併せ持つからである。

「大局的数学的活動への局所的参加」は、数学的発見法を指針とした活動に参加する責任が、教師の側から子どもの側へと徐々に移譲してゆく過程を、教師と子どもが取り交わす「数学的条件や定義」の機能を視点として分析する。ここで、数学的発見法と数学的条件・定義の関連性が問題となる。「社会数学的活動論」は、ラカトシュの数学論に基づき、この関連性を次のように理解する。ラカトシュが提唱した数学的発見法である「証明と論駁法」は、大雑把な思考実験や議論から出発し、それに対して反例が見いだされたなら、反例に照らして証明分析を行い、隠された条件や仮説を明らかにし、新しい概念[76]とその定義を創案し、それを推測に組み込むことを通して、次第に理論を発展させてゆくものであった。かくして、数学的条件や定義は、大局的な数学的活動の重要な構成部分であると言える。

ここで、「数学的条件・定義」を単位として「大局的数学的活動への局所的参加」を分析するとは、次の意味である。多数の子どもたちから構成される学級共同体では、複数の理論的視野が競合することが自然であると思われる。その際には、子どもたちは、各理論の前提条件や概念の定義を意識的に比較・検討することが必要となる。「社会数学的活動論」では、一斉授業において、こうした条件や定義を比較・検討する活動は、無統制になされるというよりも、むしろ理論発展の大局的展望を視野に入れた熟達者である教師の導きによってなされると考える。その際に、教師は、数学的条件や定義を検討・修正・改良する模範を示しつつ、次第にそうした活動が子ども自身の手によって遂行可能となるように、支援の手を緩めてゆくのである。かくして、本論文では、「大局的数学的活動への局所的参加」を「数学的条件・定義」を視点として分析することの意味を、数学的知識を長期的視野のもとで発展させる方法として数学的条件や定義を検討する活動に、子どもたちを徐々に参加させる過程を分析することであると理解する。

次に、「社会的相互作用による数学的意味の発達」は、子どもが個人的に構成しているインフォーマルな意味と、教師が提示する数学的道具のフォーマルで慣習的な使用法とが相互作用する過程を、教師と子どもによって運用される「数学的条件と定義」の機能を視点として分析する。ここでも、数学における慣習的道具と数学的条件・定義との関連性が問題とな

[76] ラカトシュの用語では、「証明生成概念」(proof-generated concepts)、「論駁生成概念」(refutation-generated concepts)である。Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations. Cambridge University Press.

る。「社会数学的活動論」は、その関連性を次のように理解する。すなわち、数学的道具は、過去に繰り返し取り組まれた数学的問題解決のアイデアを、概念として一般的に固定化したものであるが、それが子どもの個人的な意味を洗練し、さらには他者とのコミュニケーションの質を高める原動力になると考える。

数学的アイデアを道具として固定化する際には、過去の理論的・実践的問題解決において繰り返し用いられた事柄や手続きの実質的な側面を捨象し、その根底にある一般的な構造を取り出し、概念として定式化する。概念の一般的構造、すなわちその内包(概念の特徴的性質)は、定義を用いて明らかにされる。このように、概念は、ある集合と一定の特徴的性質(条項・条件)の言語的定式化によって示される[77]。

さて、数学的概念に基づく判断は、言語的に与えられた諸特徴に照らした必然的判断であって、日常生活での具体的経験と結びついた典型例との類似性に基づく判断とは異なる(波多野・稲垣, 1984: 110-112)[78]。数学的概念は一般的で、しかも簡潔な定式化である。すなわち、それは、個々の特定の対象についてではなく、ある範囲のものすべてについて適用可能であり、また、それらに共通する特徴的性質は明快で無駄がない。こうした数学的概念、すなわち数学的道具の一般性と簡潔性ゆえに、人は、それを用いて無数の問題、しかも現前にない抽象的な問題に対しても、必然性をもって、したがって、確信をもって解を導くことができる。逆に、現実の問題解決に数学的道具を用いる際には、それが使いやすいように問題を捉え直すこと、すなわち、現実の問題場面に対して条件・仮説を設定し、それを抽象化・理想化・単純化し、一般的に捉え直すことが必要となる。このように、数学的道具の使用は、数学的条件・定義の運用と本来的に結びついている。

ここで、「数学的条件・定義」を単位として、「社会的相互作用による数学的意味の発達」を分析するとは、次の意味である。学校数学の一斉授業は、数学文化において慣習的に使用される道具の指導を目指す。上で述べたように、数学的道具の使用は、数学的条件・定義の言語による明示化と意識的な運用を伴う。「社会数学的活動論」は、ヴィゴツキー論に拠り、教師から言語的に提示される数学的条件や定義は、子どもの直感的知識や方法と緊張関係にあると考える。というのも、両者は相対立する本性を持っているからである。実際、子どものインフォーマルな知識や方法は、言語化されにくく、また、言語化されたとしても、それは、その子どもによく分かる文脈に基づくものであって、一般性に欠ける。他方で、それ自体が観念的な対象や原理を表現する数学的条件や定義は一般性を有している。このような相対立する本性は、ヴィゴツキーによる「科学的概念」と「生活的概念」の関係と同じである。学校教育において、教師からその特徴が言語的に明示化される科学的概念は、子どもが既に

[77] 例えば、長方形は、「直角を持つ平行四辺形」と定義される。
[78] 波多野誼余夫・稲垣佳世子 (1984). *知力と学力：学校でいかに学ぶか*. 岩波書店.

獲得している生活的概念を一般的なものに引き上げ、再体制化すると、ヴィゴツキーは主張する。また、子どもの側の一般化の発達は、他者との社会的相互作用の発達でもあった。従って、授業における数学的条件・定義の運用、すなわち、数学的道具の運用は、子どもの経験的な意味を再体制化し、教室共同体での他者と相互交渉の質を高める上での推進力となる。かくして、「社会的相互作用による数学的意味の発達」は、一斉授業において、子どもが公的な数学的道具を意識的に使用し、その使い方を知ってゆく過程で、数学的条件・定義が明示的に取り扱われ、そのことで、子どもの側でそれまで暗黙的で未分化であった意味が自覚化され、より一般的なものに再体制化される過程であると理解する。

以上の議論から、「社会数学的活動論」の分析方法を整理すると、次の図式となる。

社会数学的活動論の側面 ／ 分析の単位	大局的数学的活動への局所的参加	社会的相互作用による数学的意味の発達
数学的条件・定義の機能的変化	数学的知識を発展させる方法として数学的条件や定義を検討することへの子どもの側の責任性(関与)の増大	教師により明確に定義され条件付けられた数学的道具の使用に基づく子どもの側の意味(一般化)の発達

「社会数学的活動論」の分析方法

この表で、「数学的条件・定義の機能的変化」とあるが、それは、ヴィゴツキーの「文化的発達の一般法則」に依拠し、数学的条件・定義の機能が社会的機能から個人的機能へと移行するものと考える。「社会数学的活動論」は、一斉授業において教師から提供される数学的条件・定義が、その初期の使用段階において、子どものインフォーマルな知識や方法と共存すると考える。このように、子どもの側で複数の知識が共存可能となる理由は、ヴィゴツキー論(「機能的多元性」(функциональной многообразие: Выготский, 1982b: 304))[79]に基づき、それらの知識が果たす機能が異なるためであると考える。すなわち、子どもの既存の知識は子ども自身の思考の道具として機能し、教師から提示される数学的条件・定義は、他者との社会的関係を取り持ち、維持するための社会的手段として機能すると考えるのである[80]。ヴィゴツキーの発達論に従えば、こうした異種機能の共存は、数学的条件・定義が個人的機能へと「内化」する際の過渡的段階と見なされる。すなわち、数学的条件・定義の機能は、やがて社会的機能から個人的機能へと「転回」(вр-

[79] Выготский Л. (1982b). *Проблемы общей психологии*. Педагогика.

[80] 例として、問題を解決する際には自分の知っている方法を用い、それを記録したり他者に説明したりする際には教師により提示された形式を用いることが挙げられる。こうしたことの明確な例は、日野の研究に見られる。日野圭子 (1996). 一人の児童を通して見た数学的表記の内化過程の分析. *日本数学教育学会誌算数教育*, 46(1), 2-10.

ащивание: Выготский, 1984: 71)[81]し、自分自身の行為や思考を数学的道具を用いて統御する手段となっていくと考えるのである。

以上が、本論文で構築する「社会数学的活動論」の理論枠組みである。

次に、本論文では、「社会数学的活動論」を視点として組織された記述的・規範的研究を分析する。前者の記述的研究としては、小学校の算数の授業過程の非参与観察から得られた結果を検討する。小学校での調査は、平成6年12月から平成7年3月までの第3学期において、国立大学附属小学校第4学年の1クラスを対象として設定し、週3回の割合で、非参与観察がなされた。この調査研究から得られた実際の授業過程のデータは、「社会数学的活動論」の視点から記述され、分析される。「大局的数学的活動への局所的参加」に関しては、当該のクラスの一斉授業における数学的参加構造の特徴、すなわち、問題の定式化・解法の計画や策定・解決の制度化といった大局的な数学的活動に参加する上で教師と子どもに配分されている責任のパターンが社会的に構成される過程や、そうした責任が教師の側から子どもの側に移行してゆく過程が記述され、分析される。また、「社会的相互作用による数学的意味の発達」に関しては、一斉授業に参加する個々の児童の構成する数学的な意味が、異なる視野をもつ他者との相互作用のもとで発達していく実際の態様が記述され、分析される。

後者の規範的研究では、高等学校において、反証主義的・可謬主義的数学に基づく教授実験を検討する。この教授実験は、平成8年8月21日から23日の3日間にわたり、石川県立の高等学校において、2年生4名を対象として実施された。この教授実験は、筆者により構想され、2名の大学院生の協力のもとで行われた。本論文では、「大局的数学的活動への局所的参加」に関しては、ポリア・ラカトシュ的な数学的探究活動への導かれた参加の過程が分析される。また、「社会的相互作用における数学的意味の発達」に関しては、教師から明示的に提示される証明や反例を道具として、数学的知識を発展させる過程が分析される。

本論文で得られる成果の新しさは、一斉授業における数学的活動を理解する理論枠組み、すなわち「社会数学的活動論」を、ラカトシュの研究プログラム論(大局的発見法)とヴィゴツキーの方法論(分析単位による機能システムの変化)に依拠して構築すること、そして、構築された理論の有用性を、実際の授業の記述的・規範的研究を通して示すことである。

数学教育研究において、ラカトシュの数学論やヴィゴツキーの発達論に依拠する研究は多数見られる。前者の代表的研究として、バラシェフ(Balacheff, 1991)[82]、ランパート(Lampet,

---

[81] Выготский, Л. С. (1984). *Научное Наследство.* М. Педагогика.

[82] Balacheff, N. (1991). Treatment of Refutations. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp.89-110). Kluwer.

1990)[83]、布川(Nunokawa, 1996)[84]、関口(Sekiguci, 1991)[85]、そして清水(2000)[86]の研究を挙げることができる。これらの主要な研究は、その内容を検討するとき、それらは授業研究(Lampert, 1990; Sekiguchi, 1991)もしくは臨床的調査・教授実験(Balacheff, 1991; Nunokawa, 1996; 清水, 2000)に分けられる。本研究は、前者、すなわち授業研究に位置するが。それらの研究との相違点は、本研究がラカトシュ論を「研究プログラム論」として位置付け、「大局的数学的活動への局所的参加」として授業論の重要な構成部分に組み入れる点にある。これと同じ議論を、ヴィゴツキー論に関して行うこともできるが、ここでは、ラカトシュ論を前提とした議論で十分である。ラカトシュ論に基づく従前の研究は、専ら「(社会的)構成主義」もしくは「記号的相互作用論」に依拠している。一部の研究(その代表は、Lampert, 1990)は、ヴィゴツキー論を取り入れているものの、それらは、明確な方法論に基づく分析枠組みを提示するものではない。かくして、数学教育における先行研究との対比に基づき、本研究は、ラカトシュ論とヴィゴツキー論に依拠した一斉授業における数学的活動論として、一つの新しい視点を提示していることが含意される。

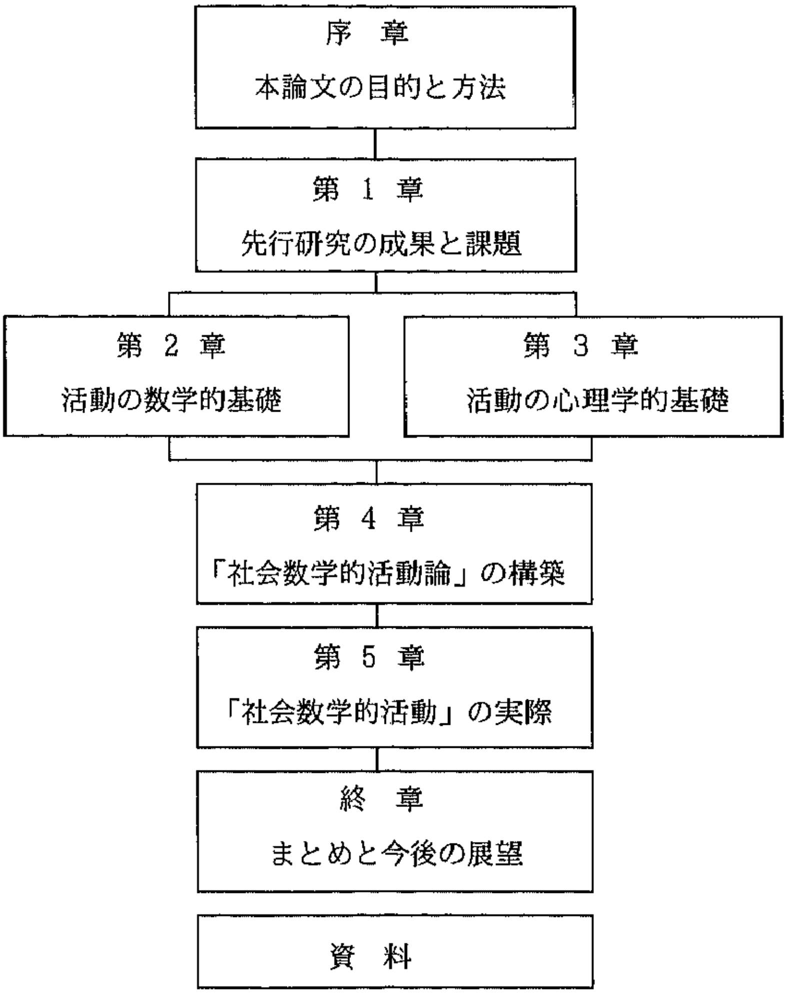
---

[83] Lampert, M. (1990). When the problem Is not the question and the solution Is not the answer. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
[84] Nunokawa, K. (1996). Applying Lakatos' theory to the theory of mathematical problem solving. *Educational Studies in mathematics, vol. 31*(3), 269-93.
[85] Sekiguch, Y. (1991). *An investigation on proofs and refutations in the mathematics classroom*. Unpublished Dissertation, The University of Georgia.
[86] 清水美憲 (2000). 数学的定義の構成活動による定義の役割の理解に関する研究：教授実験を通して. *日本数学教育学会数学教育論究, vol. 73-74.*

第３節　本論文の構成と用語の説明

１．本論文の構成

本論文は、序章、第１章～第５章、終章の７つの章および資料から構成されている。第１章は、数学的活動論に関する先行研究の検討を行い、本論文の研究課題を定式化する。第２章から第４章は、設定された研究課題を解決するための理論「社会数学的活動論」を構築する。また、第５章では、構築した理論に照らして、実際の授業を記述し、分析する。そして、終章では、本論文で得られた成果が数学教育研究と実践に対して持つ意義を述べ、併せて残された課題を示す。本論文の章構成と内容は次のようになっている。



第１章「数学的活動論の諸相：先行研究の成果と課題」は、数学教育研究における数学的活動論に関する主要な先行研究を一定の観点(大局的視野と局所的視野)から系統的に吟味し、本論文の目的を定め、研究課題を定式化する。

第２章「活動の数学的基礎：可謬主義的数学論」では、数学に活動性と社会性を与えるために、ユークリッド的伝統に対し批判的議論を展開してきた数理哲学の諸派を検討する。ここでは、数理哲学における「発見学」の諸派を取り上げ、それらの特徴を確認すると共に、ラカトシュによる「証明と論駁法」を真正な数学的活動として位置付ける。

第３章「活動の心理学的基礎：文化ー歴史理論」では、認知発達を個人的過程と社会的過程が完全に絡み合ったものと考えるための理論的基礎を定める。ここでは、ヴィゴツキーを中心とした学派による「精神発達の文化ー歴史理論」の基本原理と方法論を明確化する。

第４章「社会数学的活動論の構築」では、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの精神発達論に依拠して、一斉授業における数学的活動を基礎づける理論、すなわち「社会数学的活動論」を構築する。

第５章「一斉授業における数学的活動の社会的構成」では、これまでの理論的・方法論的検討を踏まえた「社会数学的活動」の観察研究と教授実験を行なう。

終章「本研究のまとめと今後の展望」では、本論文において得られた理論的示唆と実践的示唆を述べると共に、本論文において十分に展開されなかった問題や、扱うことができなかった問題を示し、それに対する今後の取り組みの方向性を示す。

巻末には、小学校と高等学校において組織された調査研究の資料を添付する。

２．用語の説明

ここで、本論文で用いる基本的な用語の意味を定める。

一斉授業(Simultaneous Instruction)：一人の教師が、一定数の児童・生徒集団に対して、同一の教育内容を、同一時間で教える授業形態および方法であるが、本論文では、授業形態として、文化の代表者である一人の教師と発達途上の複数の子どもによって社会的に構成される協働的なシステムという点を強調し、授業方法として、システムを構成する教師と子どもの機能的関係が変化するという点を強調する。

協働(Collaboration)：協働とは、与えられた課題を解決する際に、複数のメンバーが異なる役割を担うことが前提とされており、各人が当該の課題の一定の部分についての責任を請け負っていることを意味する。この場合、個々人は単独で作業することもあり、時には、競争をすることもある。これに対して、同一の目的を持つ人々が、同じ課題に一緒に取り組むことを「協同」(Cooperation)と呼び、これと区別する。

活動(Деятельность, Activity)：一定の社会共同体において慣習化・制度化されている文化的実践で、一定の動機・目的のもとで、一定の技法と知識システムを用いる一まとまりの行為のシステム。

数学的活動(Mathematical Activity)：〔動機・目的〕現実の問題を、数学的な視点から意味付けること。すなわち、現実世界における未解決の状況に対して条件や仮説を設定し、簡潔で御しやすい数学の問題としてモデル化し、数学の理論や合理的攻略法を駆使して処理を進め、得られた数学的結果に照らして当該の問題の解決に資すると共に、解決の際の方法や結果を吟味することによって問題の本質を見定めつつ、より一般性・発展性のある理論図式や教訓を得ようとすること。〔技法(テクノロジー)〕正当化の方法として演繹的証明を利用すること。合理的に推論を進めるための発見法(方程式による解析的思考等)を持っていること。人工言語(記号法)を開発しその形式的変形により一般的に推論を行うこと。〔知識システム〕 数量、式、図形等の実質を捨象した一般的で理想的なパターンを用いること。また、それらのパターンのもつ性質、構造、関係等が簡単な原理や法則に従うように構成し、具体的事象を形式的に統御すること。

活動の社会的構成(Social Constitution of Activity)：活動が社会的なもの(他者・道具・談話等)を介して分かち合われていること、すなわち社会的システムとして活動が構成されていることを意味する。従って、活動の社会的構成という場合、それは何らかの課題が複数の人々の応分な責任分担により協働的に遂行されることを意味する。活動の社会的構成は、必然的に、個々人で可能になるよりもより高いレベルの遂行能力を実現すると共に、個人の自律性の漸次的増大を含んでいる。すなわち、他者との協働的なシステムにおける導かれた参加から、次第に独力で遂行可能となる過程を含んでいる。

可謬主義(Fallibilism)：カール・ポパーとイムレ・ラカトシュが主唱した、理論の科学性の規準に関する一つの立場。科学理論は、すべて同じように証明不可能(unprovable)であり、確からしくもなく(improvable)、また、否定証明も不可能である(undisprovable)と見なす。その上で、理論が科学的であるという規準を、その理論が先行する理論が提出していない新しい事実を予言し、その一部が験証(corroborate)されることに置くもの。

文化－歴史的発達論(Культурно-историческая теория развития)：レフ・ヴィゴツキーにより提案された精神発達に関する学説で、人間に固有の高次精神機能の発生と発達を、人間が歴史的、社会的に創造した文化的道具による被媒介性を視点として、系統発生、個体発生、そして微小発生的に跡づけ、説明するもの。

社会数学的活動(Sociomathematical Activity)：筆者による用語で、「大局的数学的活動への局所的参加」と「社会的相互作用による数学的意味の発達」の二つの内容を含んでいる。前者は、未分化な推測を明確で一般的な命題に仕上げていく大局的な研究指針に、子どもたちが局所的・周辺的に参加する過程を意味する。後者は、公的な数学文化の一部となっている数学的道具のフォーマルな使い方と、個人のインフォーマルな意味が相互啓発的に発展する過程を意味する。