2006筑波大学附属駒場論集46集

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

―大学での学びにつながる数学教材（「集団の特徴をつかむ」「関数の微小な変化をとらえる」）の開発と普及―

（３年計画の２年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
牧下　英世・駒野　　誠・更科　元子
鈴木　清夫・深瀬　幹雄・町田多加志
松寄　昭雄

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

—大学での学びにつながる数学教材（「集団の特徴をつかむ」「関数の微小な変化をとらえる」）の開発と普及—

（３年計画の２年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
牧下　英世・駒野　　誠・更科　元子
鈴木　清夫・深瀬　幹雄・町田多加志
松嵜　昭雄

要約

ＳＳＨ研究で行った卒業生アンケートの結果から，大学での学びに『統計』と『微分方程式』の考えの重要性が改めてわかった。実際に大学では，『統計』の考えはどの分野に進んでも必要不可欠である。また，『微分方程式』の考えは，理系のほとんどの分野で当然のように用いられている。

しかしながら，学習指導要領の改訂により，『統計』は中学から高校の数学Ｂ，数学Ｃへ移行され，結果として卒業生の多くは統計を学んでいない現状がある。さらに，『微分方程式』は久しく削除されたままになっている。

このような問題意識を持ちながら本研究では，『統計』と『微分方程式』の２つの内容について，大学の学びにつながるような創造的な数学教材の開発と指導法について実証的な考察を試みてきた。また，筑波大学をはじめとする多くの研究者による「数学特別講座」の内容を，授業で使えるように教材化した。これらの教材は，本校数学科のカリキュラムの中でどのように位置づけていくことがよいのか，現在も実証的な研究の途上にある。

キーワード：統計，微分方程式，数学特別講座，高大連携

１　はじめに

ゆとり教育，学校週５日制などの実施とともに，生徒の学習意欲の減退，学力低下などが社会で問題になり，多くの大学で高校の学習内容を扱う補習授業が行われている。また一方で科学技術・理科、数学教育を重点的に行う高等学校を「スーパーサイエンスハイスクール」として指定し、理数系教育に関する教育課程の改善に資する研究開発を行っている。平成18年度は、全国の99校がＳＳＨの指定をうけている。

中学・高校での学習内容の削減や変更はその原因の一つであろうが，高校での授業も教科書の内容を教えることやそれを理解させる指導に追われて，学習内容の発展や大学で学ぶ内容とのつながりをあまり考えずに学習指導をしていた感は否めない。

そこで本校数学科では，スーパーサイエンスハイスクール(SSH)研究に連動して筑波大学の数学関係者及び他大学の数学関係者の協力を得ながら，大学や社会で必要となる数学の内容を探るアンケートを卒業生に実施した。その分析検討から，大学で学ぶ数学をスムーズに理解するには，高校までにある程度「統計」および「微分方程式」の指導が必要であるという結果を得た。

また，SSH 事業に関連して，魅力ある「数学特別講座」を大学の先生に実施していただいている。生徒の科学離れ・数学離れを防ぎ学習意欲を喚起するために，これらの内容を授業に取り込むような教材についても研究開発する必要があると考えている。

２　研究の流れ

「統計」および「微分方程式」の指導に関連して，昨年度は次のように項目を作り，具体的教材例をいくつか開発し実践した。

Ｓ：集団に潜む特徴をつかむ

- **S1－１　資料の整理**
- **S1－２　集団を特徴づける値**
- **S1－３　確率分布と推測の考え方**
- **S1－４　相関係数と回帰直線**

<Project research> Development of Teaching Materials, Method and Curriculum : Focus on Differential equation and Statistics connecting to the Learning in Upper Education

Ｓ2－１　推定・検定
Ｓ2－２　主成分分析

Ｄ：関数の微小な変化から微分方程式まで
Ｄ1－１　関数の微小な変化
Ｄ2－１　基本的な微分方程式

（注：統計 Statistics，微分方程式 Differrential equation，Ｓ1とＤ1は全員に学ばせたい内容で，Ｓ2とＤ2は発展的な内容と考えている。

上記の内容は指導要領に含まれているとは限らず，また，これらの指導時間を新たに増やすことは困難である。従って，実際の指導においては，現行の指導内容に絡めてこれらを扱っていく必要がある。

本年度より３年間をかけて，上記の項目についての教材例を充実させるとともに，現行のカリキュラムを踏まえた指導計画を開発する。

また，SSH 事業に関連して行った「数学特別講座」の内容の教材化も行った。

３　本年度の研究

３年計画の２年次である本年は，これまでに検討し作成した『統計』と『微分方程式』の指導事項・指導例，及び特別講座に関わる教材を開発した。

本論集では、紙面の都合上、ＳＳＨ研究と連動して行った『創造的な教材･指導法及びカリキュラムの開発―大学での学びにつながる数学教材（｢集団の特徴をつかむ｣、｢関数の微小な変化をとらえる｣）の完成と普及―』から、第 33 回教育研究会で配布した冊子から今年度に開発した教材を掲載した。そのため、番号が飛んでいることをご了承願いたい。

４　ＳＳＨ教材のカリキュラム上の位置づけ

次頁に，研究開発したＳＳＨ教材の本校の中・高数学科カリキュラムにおける位置づけを示した。

なお，これらの教材は現在実践途上にある。

数学科　中学校カリキュラム

中学：2002年度より実施

数学科の目標　：いろいろな現象や事柄に潜む法則や仕組みを数学的に解析し、その本質を捕まえ、そしてそれらを表現できるようになることを目標とする。

学年	中1	SSH開発教材	中2	SSH開発教材	中3	SSH開発教材
学年の目標	論証を中心に指導する。「答え」至上主義、結果至上主義からの脱却を目指す。生徒同士の『なぜ？』『どうして？』を大切にし、それらの説明を通して自分の考えを表現したり、他を説得したりする方法を身につける。		関数や図形の拡大縮小を題材にして、変化するものをとらえて表現し分析する力を身につける。		中学1、2年での学習の応用、総合として、より複雑な変化の解析を扱い，現実の事柄を数学の言葉で表現し、分析していく力を身につける。なお、総合学習（テーマ学習）では中学3年間の学習内容や分析手法を活用して、課題解決に挑戦する。	
分野　時間	週3時間＋年間15時間		週3時間＋年間20時間		週3時間＋年間20時間	
数と式・解析	整数の性質① 正負の数 文字と式 単・多項式の計算① 1次方程式 2元1次連立方程式		整数の性質② 平方根 単・多項式の計算② 展開、因数分解 2次方程式①		2次方程式②	
関数・解析	いろいろな関数 比例、反比例 1次関数①	6.1.1自然数の和、平方数の和、立法数の和 5.1.1（1）統計の基本	1次関数②	6.1.2（1）グラフや図形の移動・変形 5.1.2（1）標準偏差 5.1.2（2）近似曲線	2次関数	5.1.3（1）正規分布と標準化 6.1.2（1）2次関数の接線 6.1.3（2）錐体の体積，球の体積・表面積，放物線と面積 6.1.3（3）最大・最小
図形・幾何	平面図形の基礎 平行線の性質 三角形の合同 平行四辺形の性質		図形の拡大縮小 三角形の相似 平面図形の計量 三平方の定理		円 空間図形	
その他					課題学習 ※テーマ学習 ※チャレンジ学習	

数学科　高等学校カリキュラム

高校：2003年度より順次実施

数学科の目標　：いろいろな現象や事柄に潜む法則や仕組みを数学的に解析し、その本質を捕まえ、そしてそれらを表現できるようになることを目標とする。

学年	高1	SSH開発教材	高2	SSH開発教材	高3	SSH開発教材
学年の目標	中学で培ったものをベースにして、実数から複素数、三平方の定理から三角比・余弦定理、2次方程式から高次方程式など、発展や一般化として扱う。現実場面を意識した確率も合わせて扱う。これらを通して，将来必要となる数学の基礎的な知識を身につける。		より複雑な様々な関数についての考察を行う。また、図形の性質について、中学校で学んだ初等幾何的手法の他、解析的な手法や代数的な手法で考察する。これらを通して，事象を数学的に処理する能力を伸ばす。		『数学B』は数学Ⅰ、Ⅱ、A、Bの補充深化を行う。『数学Ⅲ』,『数学C1』は理科系への進学者を対象とした講座で,『数学Ⅲ』は微分積分を中心に,『数学C1』は行列及び式と曲線を扱う。『数学C2』は経済などの文科系進学者を意識して確率分布、統計処理を扱う。それぞれの進路に合わせた能力を伸ばす。	
分野＼時間	Ⅰ3＋A2＝週5時間		Ⅱ3＋B1＝週4時間		Ⅲ週3、B週2、C1週2、C2週2	※すべて選択
数と式・解析	実数と複素数 展開、因数分解 多項式の除法 高次方程式			6.2.2（1）恒等式	行列（C1）	
関数・解析	2次関数（2次不等式） 三角関数（弧度法）	5.2.1（1）回帰直線、相関係数 （2）離散分布の推定・検定 6.2.1（1）包絡線とは （2）直線群の包絡線 （3）媒介変数を用いた曲線群	いろいろな関数 整関数の微分積分 数列（二項定理）	6.2.2 （2）生徒の極限の困難点 （3）そもそも微分とは何か （4）導関数の定義の見直し （5）接触円 （6）導関数を作る （7）最大最小（極値問題） （8）導関数のグラフの描き方 （9）微分計算基本公式導出 （10）母関数と微分方程式 （11）オイラーの定理を導く （12）面積 （13）体積	極限（Ⅲ） 微分法（Ⅲ） 積分法（Ⅲ）	6.2.2 （2）曲線の長さ （3）極座標での面積 曲線の長さ （4）微分方程式の応用
図形・幾何	三角比		図形と方程式 ベクトル	5.2.2（1）残差分析によるデータ系列の関係分析	式と曲線（C1）	6.2.2（1）包絡線
確率・統計	確率				確率、確率分布(C2) 統計処理(C2)	5.2.3 （1）確率分布と推測の考え方 （2）推定検定 （3）主成分分析入門
論理	集合と論理					
					数Ⅰ・Ⅱ・A・Bの総合（B2）	

５．１．２　中学2年

散らばりの程度を表す数値である標準偏差、及び2つの変量間の直線的関係に注目した近似直線について取り上げる。標準偏差の代わりに分散を用いれば、平方根の学習の前に両者を扱うことができるが、分散は単位の不自然さがあり、また、近似直線では平方完成の式変形も既習である方がよいので、平方根及び2次方程式の学習を終えた後で取り扱う。
（本校では中学 2 年生でこれらを扱うことが多いが、場合によっては中学3年生で扱うことになる。）

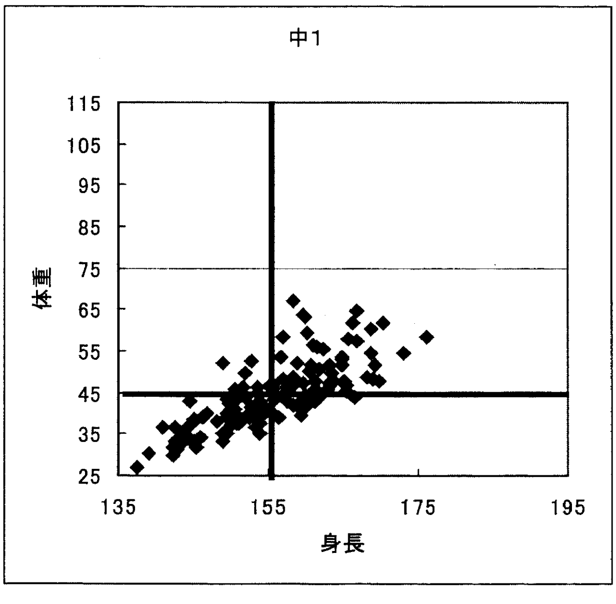
（1）　標準偏差

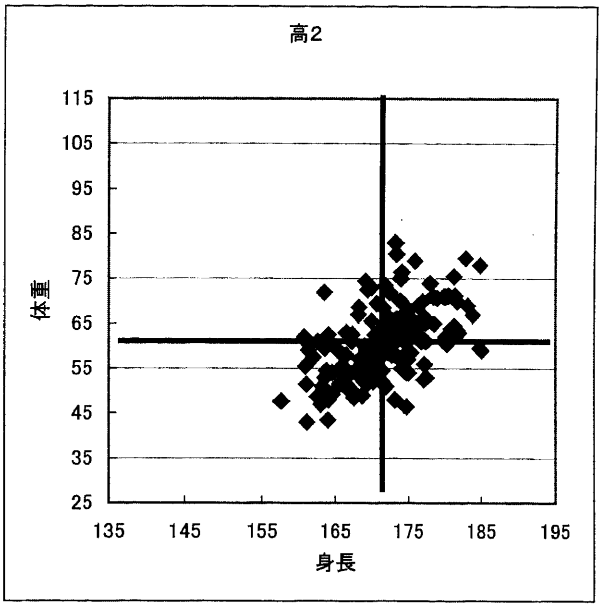
データの散らばりの程度を１つの数値で表すことを考えさせ、標準偏差の意味を知らせる。
個々のデータと平均値の差（偏差）に注目することになるが、ヒストグラムでは個々のデータが見えにくくなるので、２変量のデータの散布図も用いる。

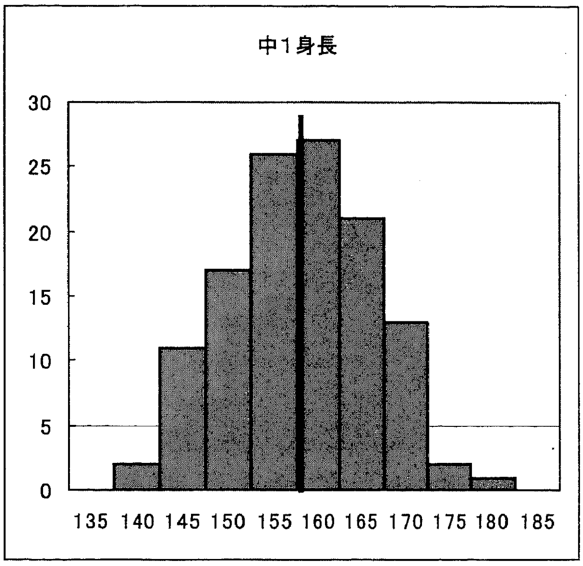
＜指導例＞
別紙（省略）はある年の本校中学１年生 120 名と高校２年生 156 名の身長と体重のデータであり、平均値は次のとおりであった。

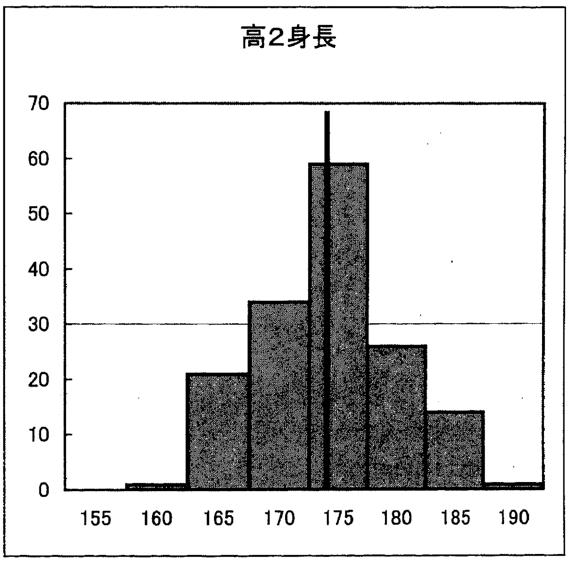
	身長	体重
中１（120 名）平均	155.8cm	44.8 kg
高２（156 名）平均	171.9cm	60.6kg

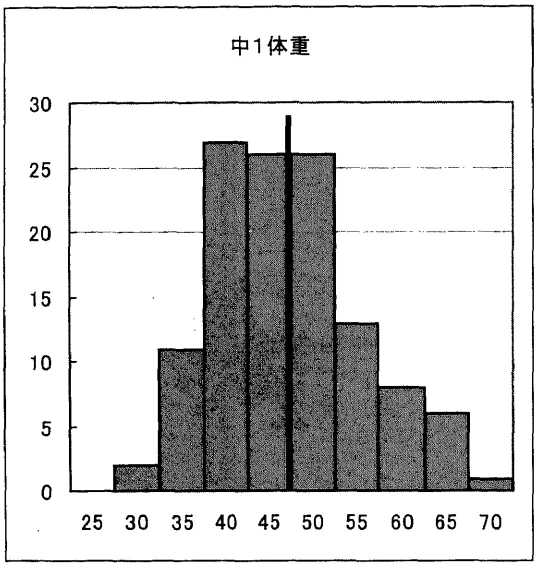
各データを散布図およびヒストグラムで表すと次のようであり、平均値を中心にそれぞれデータが散らばっている様子がわかる。
『散らばりの程度について、中１と高２を比較すると、体重に比べ、身長の方がより散らばっているように見える。この散らばりの程度を１つの数値で表すことを考えよう。』

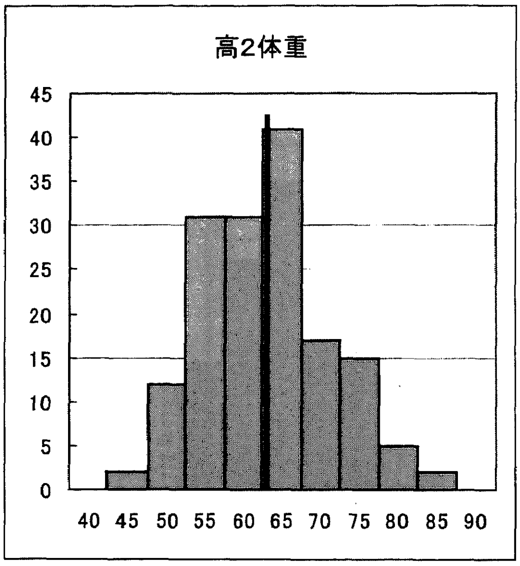












散らばりの程度を表すものとしては、最大値と最小値の差など、いろいろと考えられるが、標準偏差及び分散がよく利用される。

各データを x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 、平均値を m とすると、偏差 x_i-m はデータと平均値との離れ具合を表している。

偏差の相加平均は0となるので、計算し易さから 2 乗し、$(x_i-m)^2$ の平均の正の平方根

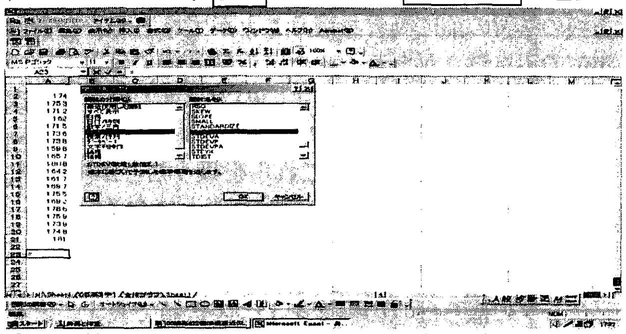
$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i-m)^2}$$

を考えると、これはもとのデータと同じ単位の数値で、散らばりの程度を表す１つの値である。これを標準偏差 (standard deviation) という。

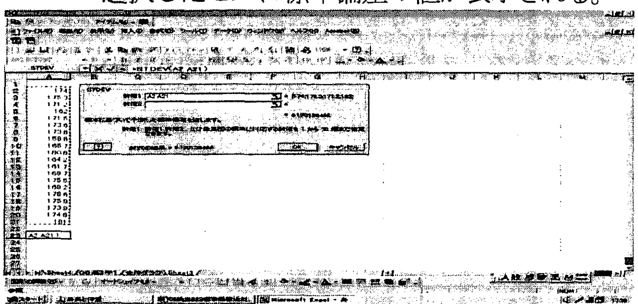
($\frac{1}{n}\sum(x_i-m)^2$ は分散 (variance) である。)

Excel で標準偏差の値を求めるには、次のようにおこなえばよい。(平均 AVERAGE) なども同様に求まる。)

① 値を記入するセルを選択し、挿入→関数
表示された窓で、統計の中にあるSTDEVPを選択



② 計算範囲を入力、またはドラッグして指定すると、
選択したセルに標準偏差の値が表示される。



注：関数をSTDEVにするとデータの個数 n でなく、$n-1$ で割った不偏標準偏差が求まる。

身長と、体重の標準偏差は次の値であり、散らばりの程度を表していることが分かる。

		身長	体重
中１ (120名)	標準偏差	8.02cm	8.30 kg
高２ (156名)	標準偏差	5.74cm	7.97kg

標準偏差の意味を定着させるため、次のような問で、標準偏差を手計算で求めさせる。

問. 次の各場合について、x_i, y_i の平均値 m_x, m_y 、標準偏差 σ_x, σ_y をそれぞれ求めよ。

(1) (x_i, y_i) : $(2,0),(3,2),(5,4),(6,6)$

(2) (x_i, y_i) : $(1,4),(2,5),(3,5),(4,4),(5,7)$

(答) (1) $m_x=4, m_y=3$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{4+1+1+4}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2},\ \sigma_y=\sqrt{\frac{9+1+1+9}{4}}=\sqrt{5}$$

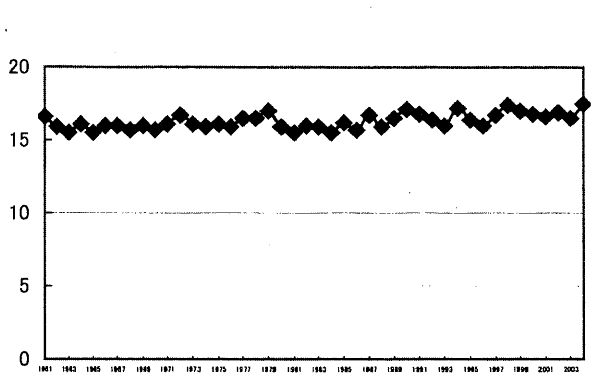
(2) $m_x=3, m_y=5$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{4+1+1+4}{5}}=\sqrt{2},\ \sigma_y=\sqrt{\frac{1+1+4}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$

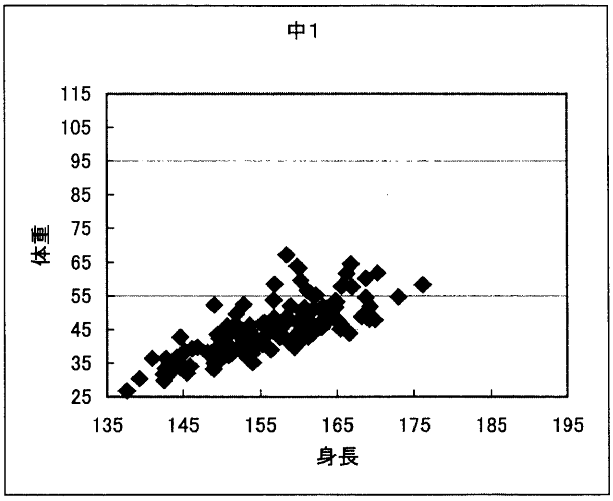
（2）近似直線

次のグラフは、静岡の年平均気温推移を表したものである。2100 年の気温は何度になるであろうか？

年ごと平均気温の推移(1961～2004　静岡)グラフ



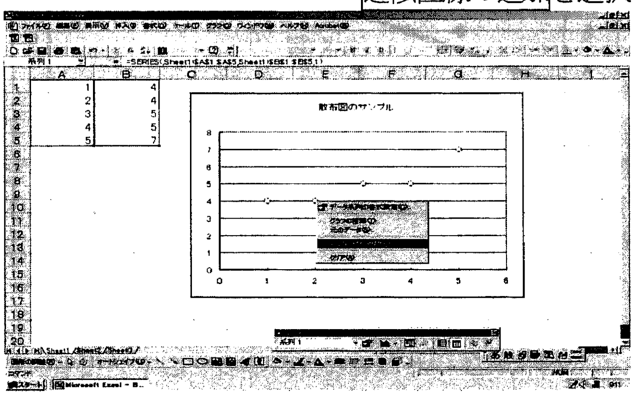
また、次は中学 1 年生 120 名の身長と体重の散布図である。身長 x から体重 y を近似的に求める 1 次式 $y = ax + b$ を作ってみよう。



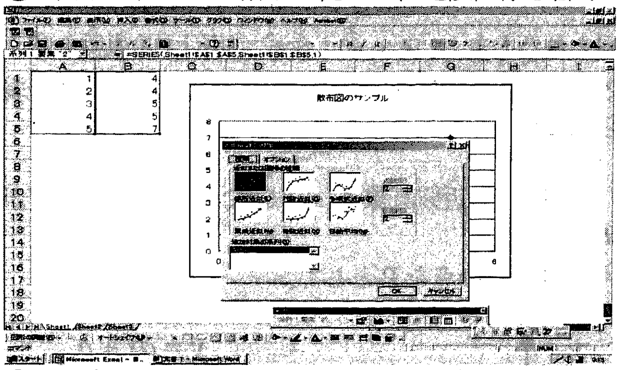
Excel で次のように操作すると、近似直線を表示させることができる。

① 散布図の点を選択し、右クリック、

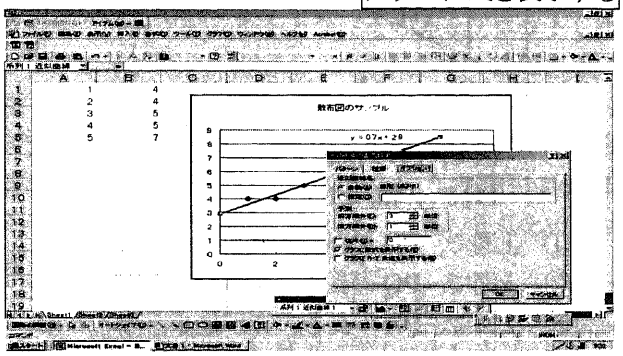
近似直線の追加を選択



② 表示された窓の指示に従って、近似直線を書く

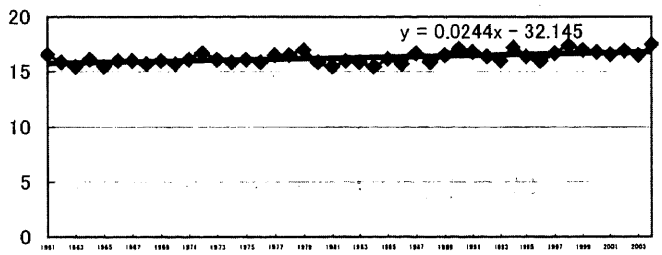


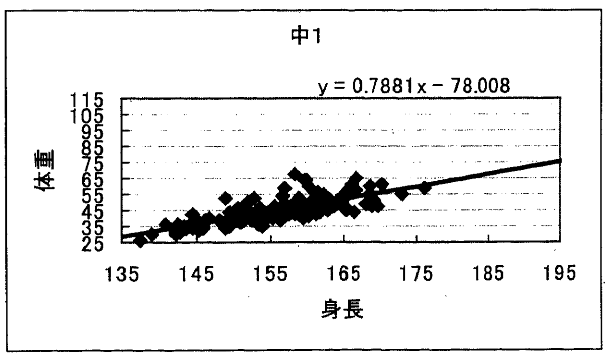
③ 直線の式を表示するには、近似直線を選択し、右クリック、近似直線の書式設定→オプション→グラフに式を表示する



Excel で、前のグラフの近似直線は次のようになる。

年ごと平均気温の推移(1961～2004静岡)

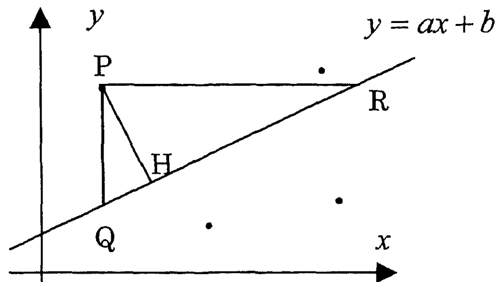




２変量のデータ(x_i, y_i)の散布図に、直線的な関係が見られるとき、y_iをx_iの１次式で近似する直線を考えることがある。Excel ではどのように直線を求め、表示しているのであろうか？

散布図での近似直線については、次の①～⑥などが考えられる。

散布図上の点をＰとして、



図で、PH⊥直線$y = ax + b$、

PQ// y 軸、PR// x 軸

① 上図で、PH の長さの和が最小となるもの
② 上図で、PQ の長さの和が最小となるもの
③ 上図で、PR の長さの和が最小となるもの
④ 上図で、PH の長さの２乗の和が最小となるもの
⑤ 上図で、PQ の長さの２乗の和が最小となるもの
⑥ 上図で、PR の長さの２乗の和が最小となるもの

これらのうち、求め易さ、y の値を x の１次式で近似すること、などを考えて、

⑤ PQ の長さの２乗の和が最小となるもの

が良く用いられる。

Excel でもこれを求め、表示している。

この近似直線が「**回帰直線**」である。

散布図上の点の、x 座標の平均をm_x、y 座標の平均をm_yとするとき、回帰直線が点（m_x, m_y）を通ることは、計算でも確認できるが、直感的に認められることであろう。

回帰直線の意味を定着させるため、次のような問いで、手計算で求めさせるとともに、Excel でもかかせて確認する。

問. $(x_i, y_i) : (1,4),(2,5),(3,5),(4,4),(5,7)$ のとき、y_iの値を近似するx_iの１次式$y = ax + b$を、$(y - y_i)^2$の和が最小となるように、求めよ。

解）平行移動しても$(y - y_i)^2$の和の最小性は変らない。

x_i, y_iの平均値をm_x, m_yとすると、$m_x = 3$, $m_y = 5$　であるから、平均が０となるように、x 軸方向へ-3、y 軸方向へ-5 平行移動すると、

$(x_i - m_x, y_i - m_y)$

$: (-2,-1),(-1,0),(0,0),(1,-1),(2,2)$

また、近似直線$y = ax + b$を平行移動したものは、原点を通るので、$y = ax$となる。

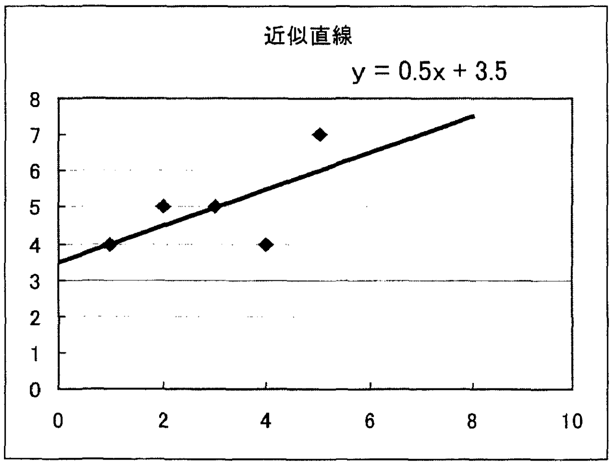
これらについて、$(y - y_i)^2$の和をＳとすると、

$$\begin{aligned} S &= (-2a+1)^2 + (-a)^2 + 0 + (a+1)^2 + (2a-2)^2 \\ &= 10a^2 - 10a + 6 \\ &= 10\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

この値は、$a = \dfrac{1}{2}$のとき最小となる。

したがって、平行移動した点の近似直線は$y = \dfrac{1}{2}x$であり、求める近似直線は、平均値からなる点$(3,5)$を通ることから、$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$

この近似直線を Excel で散布図上に表示させると、次のようになる。



5．2．2　高校2年

（1）残差分析によるデータ系列の関係分析

高校２年までに,「1 次関数」「2 次関数」「指数関数」「対数関数」といった関数を学習する。表計算ソフト(Excel)の利用を前提として，既習の関数の特徴を活かし，データの線形変換をおこない，元データの関係を探る統計教材を紹介する。

① データの近似

Excel の「グラフ」機能で作成することができる散布図のデータ系列を近似する方法として,「近似曲線の追加」コマンドが用意されている。

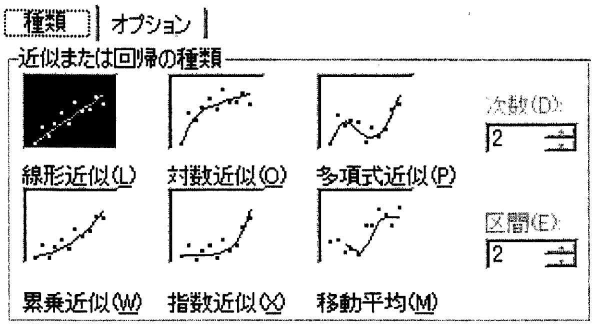


図 1.

「近似曲線の追加」コマンドには，図 1 のような関数の特徴に応じた「近似または回帰の種類」を選択できる「種類」と，図 2 のような近似または回帰した曲線について表示・補正する「オプション」も用意されている。

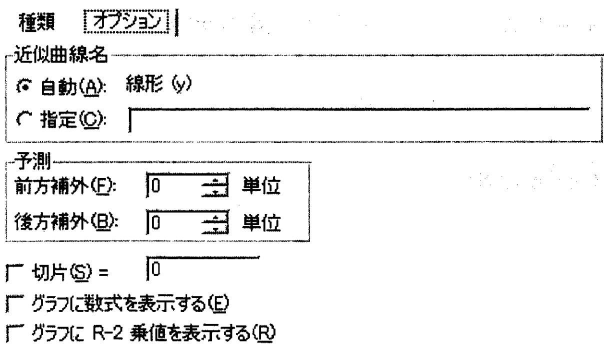


図 2.

Excel の機能を用いると，散布図のデータ系列に対する近似が容易である。データ系列から判断して，既習の関数の特徴に見合った近似を選択することもできるが，本教材では，データに対する近似として,「線形近似」を「種類」の中から選択し,「オプション」の中からは「近似曲線名」として「自動」で線形近似をおこなう。次に，線形近似により元データの特徴を把握する統計的手法である残差分析についてみていく。

② 残差分析

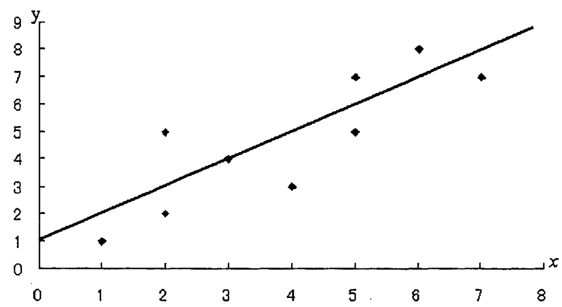


図 3.

残差分析(Rasidual Analysis)は，線形近似による回帰直線とデータ間の差をとり，その差をプロットした形状から元データの関係をつかむ統計的手法である。図 3 は散布図のデータ系列に対して回帰直線 $y=x+1$ をひいたものである。そして，散布図の各点が回帰直線からどれくらい離れているかという**残差**(Residual)についてまとめたものが表 4 で，残差の各点を示した図 5 は残差プロットと呼ばれる。

x	1	2	2	3	4	5	5	6	7
残差	−1	2	−1	0	−2	−1	1	1	−1

表 4.

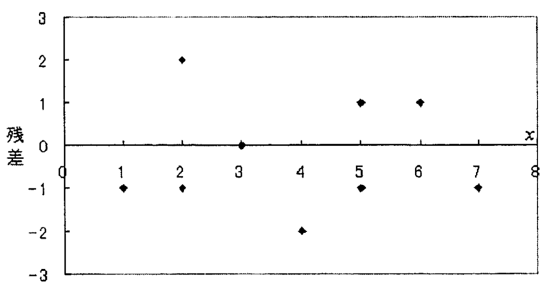


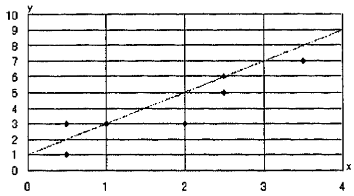
図 5.

線形近似が妥当であるとき，データ系列は線形関係にあると言われる。一方，線形関係にないデータ系列は非線形関係にあると言われる。データ系列は必ずしも線形関係にあるとは限らない。非線形関係にあるデータについて検討する場合でも，回帰直線に対する残差をとることで，新たな関係を見出す方法として残差分析を用いることがある。

データ系列が線形関係の場合や非線形関係の場合によって残差プロットの形状は異なる。この残差プロットの形状により，元データの関係を見出すことができる。次に，データ系列が正の相関の場合と負の相関の場合によって分類したものである。

(i) **ランダム形（Random Pattern）**

元データと回帰直線	残差プロット



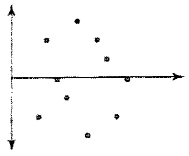
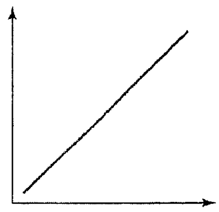


図 6.　**図 7.**

残差プロットが，図 7 のように，ある程度均等に散らばっている場合をランダム形と呼ぶ。このとき，元データが正の相関であっても負の相関であっても線形関係にあり，線形近似が適当である。

正の相関	負の相関
線形関係 $y=ax+b$	線形関係　$y=-ax+b$



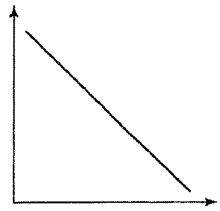
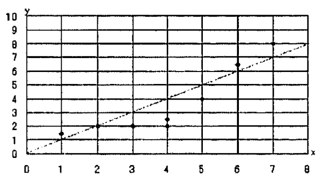


図 8.　**図 9.**

(ii) **谷形（Valley Pattern）**

元データと回帰直線	残差プロット



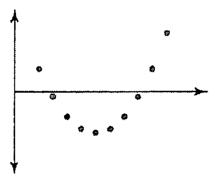
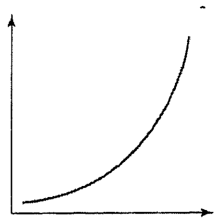


図 10.　**図 11.**

残差プロットが，図 11 のように，谷形に並ぶとき，元データが正の相関にある場合は指数関係であり，負の相関にある場合は反比例関係になっている。

正の相関	負の相関
指数関係 $y=kx^n+c$	反比例関係　$y=\dfrac{k}{x}+c$



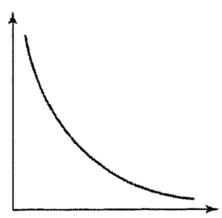
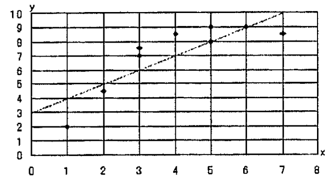


図 12.　**図 13.**

(iii) **山形（Crest Pattern）**

元データと回帰直線	残差プロット



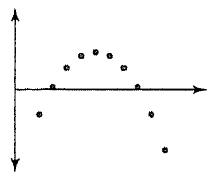
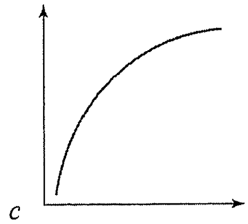


図 14.　**図 15.**

残差プロットが，図 15 のように，山形に並ぶとき，元データが正の相関にある場合は対数関係であり，負の相関にある場合は指数関係になっている。

正の相関	負の相関
対数関係 $y=k\log_{10}x+c$	指数関係 $y=-kx^n+c$



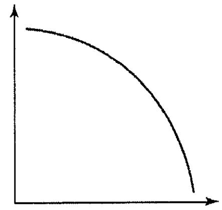


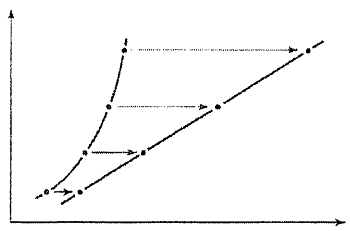
図 16.　**図 17.**

このように，残差プロットの形状によって，元データに対する回帰直線の妥当性をみたり，データの関係についての見通しを立てることができる。次に，(ii)や(iii)のように非線形関係にあるデータ系列を，線形関係に変換する方法についてみていく。

③ 非線形関係のデータ系列の線形変換

線形関係に変換することで，データの取り扱いが容易になる。以下では，線形変換の方法について，具体例と合わせてみていくことにする。

(i) **伸ばす変換**



データが指数関係にある場合，伸ばす(stretch)ことで，線形関係に変換することができる。

図 18.

例えば，半径 r cm の円の面積 y cm² は $y=\pi r^2$ と表され，指数関係になっている。

r	1	2	3	4	5
r^2	1	4	9	16	25
y	3.14	12.56	28.26	50.24	78.50

表 19.

面積 y は r の 2 乗に比例しているので，r^2 に対する y の値をとってみる。

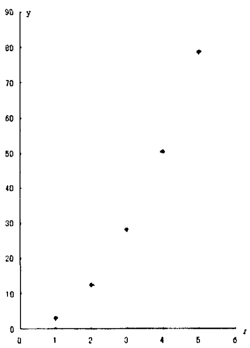


図 20.

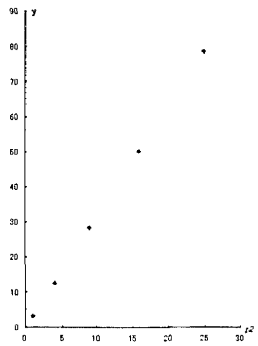
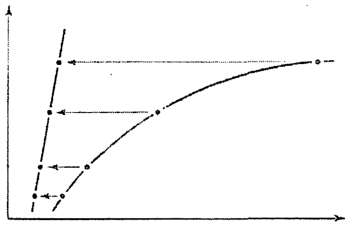


図 21.

伸ばす変換では，独立変数を累乗することで，図 21 のように，線形関係に変換することができる。

(ii) 縮める変換



データが対数関係にある場合，縮める (compress)ことで，線形関係に変換することができる。

図 22.

例えば，数学の勉強時間と数学テストの結果をまとめたものが，次の表 23 である。

時間 t (h)	2	5	7	3	8
点数 r (点)	43	51	54	47	55

表 23.

散布図で表すと，図 25 のような対数関係になっていることが分かる。t の常用対数に対する r の値をとってみる。

時間 t (h)	2	5	7	3	8
$\log_{10} t$	0.3010	0.6990	0.8451	0.4771	0.9031
点数 r (点)	43	51	54	47	55

表 24.

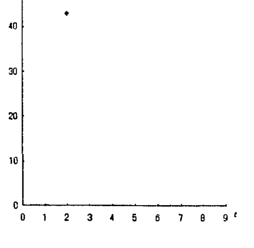


図 25.

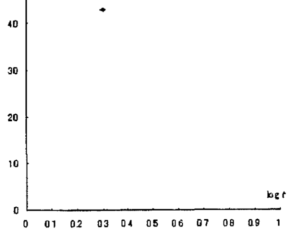
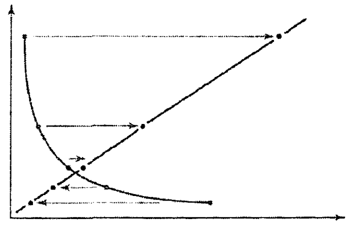


図 26.

縮める変換では，独立変数の常用対数をとることで，図 26 のように，線形関係に変換することができる。

(iii) ねじる変換



データが対数関係にある場合，ねじる (twist)ことで，線形関係に変換することができる。

図 27.

例えば，100 km の旅行をする際の，行動種別に要する速さと時間の関係についてまとめたものが，次の表 28 である。

行　動	車	自転車	ﾗﾝﾆﾝｸﾞ	ｳｫｰｷﾝｸﾞ
時速 v (km/h)	100	50	20	10
時間 t (h)	1	2	5	10
距離 $v\times t$ (km)	100	100	100	100

表 28.

時速 v と時間 t は $v=100/t$ と表され，反比例関係になっている。時間 t について，逆数 $1/t$ をとり，$1/t$ に対する v の値をとってみる。

行　動	車	自転車	ﾗﾝﾆﾝｸﾞ	ｳｫｰｷﾝｸﾞ
時間 t (h)	1	2	5	10
$1/t$	1	0.5	0.2	0.1
時速 v (km/h)	100	100	100	100

表 29.

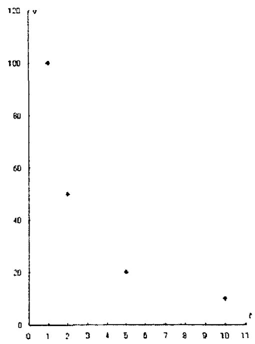


図 30.

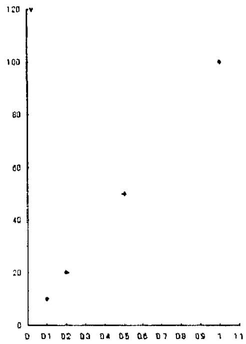


図 31.

ねじる変換では，独立変数の逆数をとることで，図 31 のように，線形関係に変換することができる。

④ 非線形関係のデータ系列を線形変換する手続き

残差分析により，データの関係について見通しを立て，また，独立変数を操作することで，非線形関係にあるデータ系列を線形関係へ変換して考察することができる。ここでは，与えられたデータに対して，散布図をつくり，残差分析をおこない，線形変換するために必要なデータ変換をおこない，そして，変数の関係を探るまでの手続きを問いの形式でたどっていく。

物理の実験で，放射性金属の欠片に放射能計測器で測定するように言われました。測定記録の結果は表 32 のようになりました。ここで，x は時間(分)，y は放射能測定器の数値を表している：

x	5.0	10	15	20	25	30	35	40	45
y	100.0	78.0	53.0	40.0	30.0	25.0	16.0	13.0	9.0

表 32.

a. 散布図をつくりなさい。

b. 散布図はどんな関係(線形関係，指数関係，対数関係，反比例関係)になっていますか。直線に変換する必要はありますか。

c. 直線に変換しなさい。

Step1: 表 33 の網掛け部分を埋めなさい。

x	5.0	10	15	20	25	30	35	40	45
y	100.0	78.0	53.0	40.0	30.0	25.0	16.0	13.0	9.0

表 33.

Step2: 表 33 を参考にして，直線のグラフをかきなさい。

d. 変数 x と変数 y の間の関係はどうなっていますか。

《解答》

a.

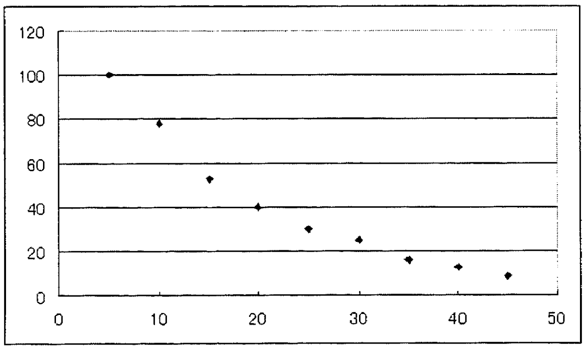


図 34.

b. 図 34 の散布図に対して回帰直線をひくと，図 35 のように，直線の方程式は $y=-2.16x+94.444$ となる。次に，独立変数 x に対して，回帰直線上の点の数値を計算し，従属変数 y との残差を求める。表 36 では，第 2 段目に，「直線上」として，独立変数 x に対する回帰直線上の点の数値を示し，第 4 段目に，「残差」として，従属変数 y と第 2 段目の数値との差を計算した数値を示している。表 36 の結果をもとに作成した，残差プロットが図 37 である。

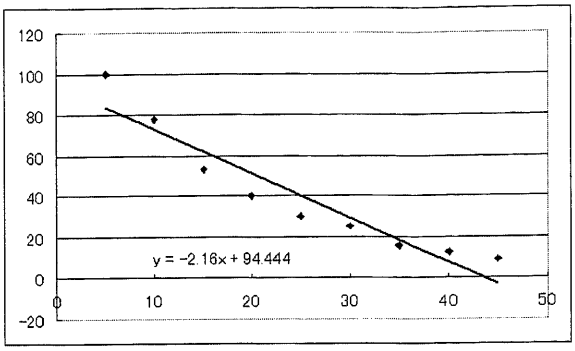


図 35.

x	5.0	10	15	20	25	30	35	40	45
直線上	83.64	72.84	62.04	51.24	40.44	29.64	18.84	8.044	−2.76
y	100.0	78.0	53.0	40.0	30.0	25.0	16.0	13.0	9.0
残差	16.356	5.156	−9.044	−11.24	−10.44	−4.644	−2.844	4.956	11.756

表 36.

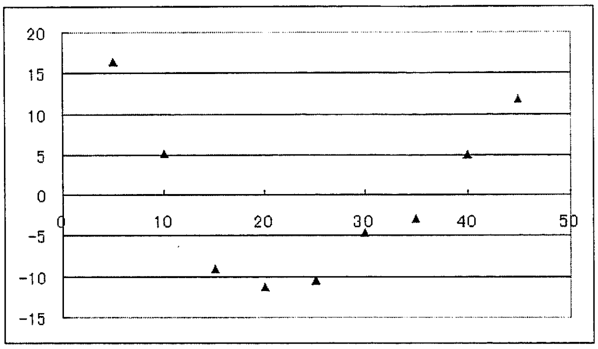


図 37.

図 34 よりデータは負の相関があり，図 37 より残差プロットは谷形になっていることから，図 13 のように元データは反比例関係になっていると推測できる。したがって，元データは線形関係にはない。

c. 独立変数 x の逆数 $1/x$ をとり，表を作成する。

Step1:

x	5.0	10	15	20	25	30	35	40	45
$1/x$	0.2	0.1	0.067	0.05	0.04	0.033	0.029	0.025	0.022
y	100.0	78.0	53.0	40.0	30.0	25.0	16.0	13.0	9.0

表 38.

Step2: 表 38 の結果をもとに，$1/x$ と y との関係を散布図にすると，図 39 のようになる。線形変換できたデータ系列もあるが，線形になっていないものもある。そこで，改めて変数間の関係を見直してみる。

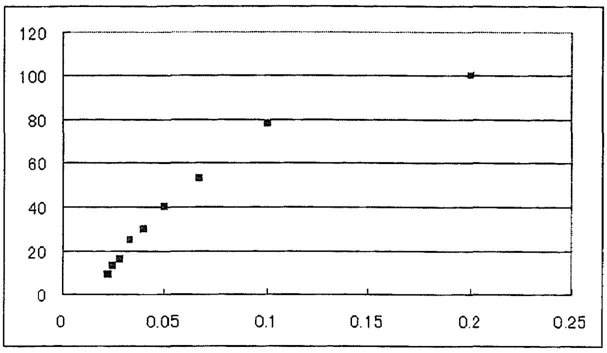


図 39.

b.の結果より，残差プロットは谷形を示している。これから，もし元データに正の相関があれば指数関係となるが，元データは負の相関を示している。そこで，指数関係 $y = kx^n + c$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称な位置にある対数関係 $y = k \log_{10} x + c$ のグラフを用いて線形変換をおこなう。

c. 独立変数xの常用対数$\log_{10} x$をとり，表を作成する。

Step1:

x	5.0	10	15	20	25	30	35	40	45
$\log_{10} x$	0.699	1.000	1.176	1.301	1.398	1.477	1.544	1.602	1.653
y	100.0	78.0	53.0	40.0	30.0	25.0	16.0	13.0	9.0

表 40.

Step2: $\log_{10} x$ と y との関係を散布図で表すと，図 41 のようになる。

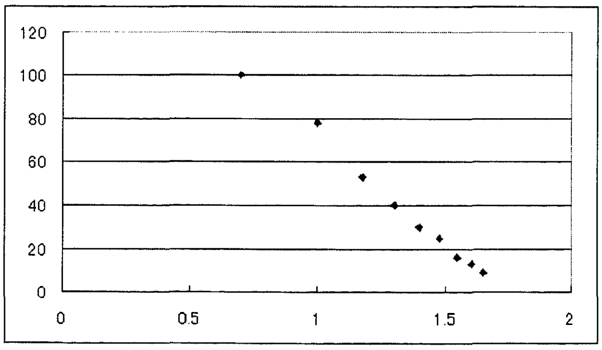


図 41.

図 41 のデータ系列に回帰直線をひくと，図 42 のように，直線の方程式 $y = -99.587\,x + 171.57$ が求める。ただし，図 2 の「オプション」の中に備わっている「グラフの数式を表示する」機能によって得られた上記の「x」と「y」に関する方程式は，実際には $\log_{10} x$ と y の間の関係であることに注意する必要がある。したがって，元データの x と y の関係式は次のようになる。

$$y = -99.587 \log_{10} x + 171.57$$

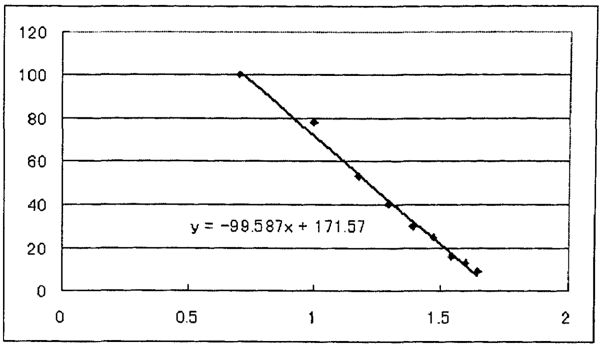


図 42.

⑤ 線形変換の可能性

④では，反比例関係による線形変換よりも精度の良い対数関係による線形変換を例示した。②(i)～(iii)までで見てきた，残差プロットの形状によるパターンにしたがって変換するだけでは，非線形関係にあるデータ系列に対して必ずしも満足のいく線形変換ができるわけではないので，様々な工夫が必要である。

例えば，図 39 の残差プロットのうち，$(1/x, y)=(0.2, 100)$の点をはずれ値として除外してみると，反比例関係のままでも線形変換して満足のいく結果が得られる。

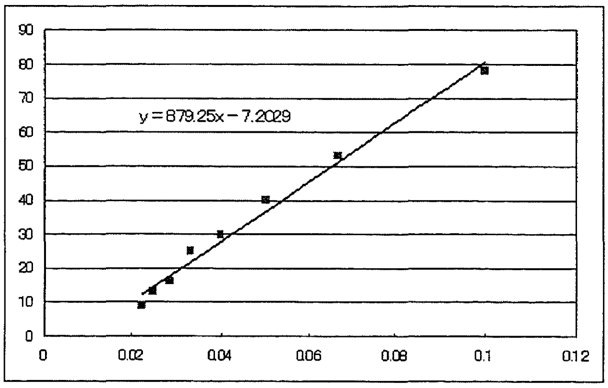


図 43.

ここまで，データ自体を線形変換についてみてきたが，この後に，座標軸を変換して線形変換をおこなう対数目盛りについても取り上げ，大学の理工系分野の実験で頻繁に用いられる片対数グラフや両対数グラフについても取り上げた。本教材を用いた授業を，本校 56 期高校 2 年生を対象として，単元「指数関数・対数関数」の内容に位置づけて実践した。授業実践の詳細については稿を改めて報告したい。

【参考文献】

Sharrock,H., Hutchins, C., and Flitman, E. (eds.) (2000) Chapter8: Analysing a Relationship: Residual Analysis (pp. 114-125), "*Further Maths for the Real World: Units 3 & 4*". Australia; Longman.

6　『微分方程式』〜微小な変化をとらえる〜

6．1　中学での「微分方程式」の指導

中学校での関数の学習は、１年で比例と反比例、２年で１次関数、３年で２次関数である。これらの学習の中に、「微分方程式」の考えにつながるものとして微小な変化に注目させることを意識した指導を実践する。この微小な変化に注目し、関数の性質を知ろうとする考え方は近代的であり、応用範囲が広い。基本的な関数概念の獲得から始めて、関数の微小な変化に注目することの良さにつながる教材例を学年別に示す。

6．1．1　中学１年

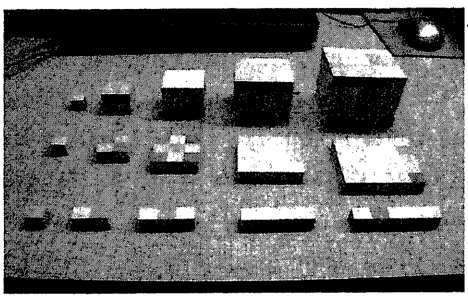
関数において変化をとらえる感覚は大切である。その変化のとらえ方として、２つのものの間の変化の差を注目する場合と、変化を比で表して注目する場合が考えられる。生徒たちは２数を比べる場合に、差をとって大小を考えることは、不等式などの学習でよく計算することがあるが、比をとって変化を考えることはあまり計算では行わない。しかし、社会では大きなものを比べるために比をとって表現することがある。たとえば、土地の広さを比べるために「東京ドームの何倍」などの表現がある。そこで、数列を用いた数の変化をとりあげ、その変化を調べるために２つの比をとって比べることを体験させ、その中の規則性を探し出してみる。その過程で比べやすいように表や文字や関数表示を導入していく。

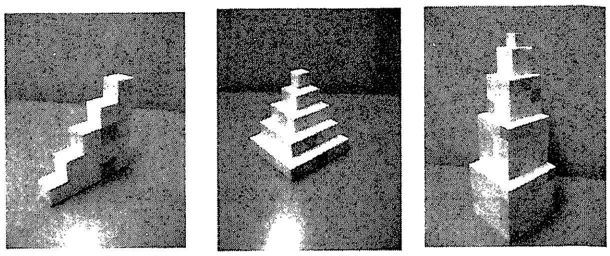
（1）自然数の和，平方数の和，立方数の和

木のブロック（立方体）を、横のみ一方向(ａ)，横と縦の二方向(ｂ)，横と縦と垂直(上)の三方向(ｃ)の３通りに重ねたブロックを見せ、それぞれ一段，二段，三段，四段，五段、……と重ねていくのに、１万個ある木のブロックで何段まで重ねていくことが出来るかを求めさせる。

下から一方向のａ，二方向のｂ，三方向のｃ

c
b
a





a　　　　　　b　　　　　　c

５段まで積み重ねた模型

それぞれ必要な木のブロックの数値を計算して、見やすい（比較しやすい）ようにする方法を考えさせる。

段	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	1+2 3	3+3 6	6+4 10	10+5 15	15+6 21	21+7 28	28+8 36
b	1^2 1	$1+2^2$ 5	$5+3^2$ 14	$14+4^2$ 30	$30+5^2$ 55	$55+6^2$ 91	$91+7^2$ 140	$140+8^2$ 204
c	1^3 1	$1+2^3$ 9 $=3^2$	$9+3^3$ 36 $=6^2$	$36+4^3$ 100 $=10^2$	$100+5^3$ 225 $=15^2$	$225+6^3$ 441 $=21^2$	$441+7^3$ 784 $=28^2$	$784+8^3$ 1296 $=36^2$

この数値の中から、ａの数値だけを取り出して、ｎ段までに必要なブロック数 1+2+3+4+5+…+n を考えてみさせてみる。　同様に、ｂとｃの数値だけを取り出して、必要なブロック数を考えさせてみる。

○単独な数列で変化をとらえる。
………ａの場合

$$（ a　の式 ）= 1+2+3+4+5+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

８段までのブロック総数は、ｎ＝８を当てはめて

$$\frac{8(8+1)}{2}=\frac{8\times 9}{2}=36$$

$$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$$　と表すと、

$$a_{140}=\frac{140(140+1)}{2}=9870$$

$$a_{141}=\frac{141(141+1)}{2}=10011$$

より　１万個のブロックでａは140段まで積める。

○２つの数列を比べることで変化をとらえる。

………　ケース１　ａとｃ

ケース２　ａとｂ

ケース１　ａとｃの比較

比較してみるために比をとると

ａ：ｃ

１：１，

$\underline{3}:9 \quad =1:\underline{3}$,

$\underline{6}:36 \quad =1:\underline{6}$,

$\underline{10}:100 \quad =1:\underline{10}$,

$\underline{15}:225 \quad =1:\underline{15}$,

$\underline{21}:441 \quad =1:\underline{21}$,

$\underline{28}:784 \quad =1:\underline{28}$,

$\underline{36}:1296=1:\underline{36}$,

………

これらのことより、ａの２乗の数値がｃの数値である。

（ｃ の式） ＝ （ａ の式）の２乗

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

ケース２　ａとｂの比較

比較してみるために比をとると

ａ：ｂ

$1:1 \quad =1:\boxed{\frac{3}{3}}$,

$3:5 \quad =1:\boxed{\frac{5}{3}}$,

$6:14 \quad =1:\frac{14}{6} \quad =1:\boxed{\frac{7}{3}}$,

$10:30 \quad =1:3=1:\boxed{\frac{9}{3}}$,

$15:55 \quad =1:\frac{55}{15} \quad =1:\boxed{\frac{11}{3}}$,

$21:91 \quad =1:\frac{91}{21} \quad =1:\boxed{\frac{13}{3}}$,

$28:140=1:\frac{140}{28} \quad =1:5 \quad =1:\boxed{\frac{15}{3}}$,

$36:204=1:\frac{204}{36} \quad =1:\boxed{\frac{17}{3}}$,

………

以上の変化から、ａの数値の$\frac{2n+1}{3}$倍が　ｂの数値とみることができることに気付くだろう。

よって、

$$(\text{b の式})=(\text{a の式})\times\frac{2n+1}{3}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2n+1}{3}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

そこで、ａと同様に

$$b_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ と表すと

$$b_{30}=\frac{30(30+1)(2\times30+1)}{6}=\frac{30\times31\times61}{6}=9455$$

$$b_{31}=\frac{31(31+1)(2\times31+1)}{6}=\frac{31\times32\times63}{6}=10416$$

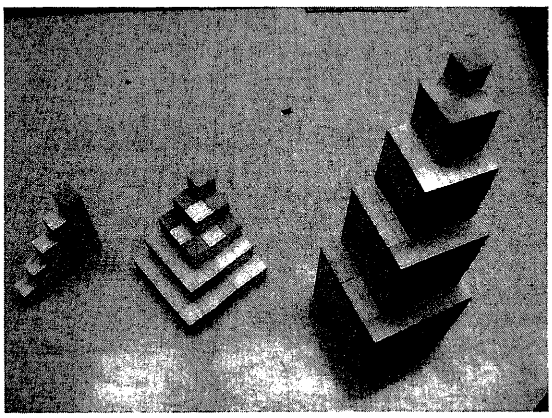
より　ｂは３０段まで積める。

同様に　$$c_n=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$ と表すと

$$c_{13}=\left\{\frac{13(13+1)}{2}\right\}^2=\left\{\frac{13\times14}{2}\right\}^2=(91)^2=8281$$

$$c_{14}=\left\{\frac{14(14+1)}{2}\right\}^2=\left\{\frac{14\times15}{2}\right\}^2=(105)^2=11025$$

より　ｃは１３段まで積める。



６．１．３　中学３年

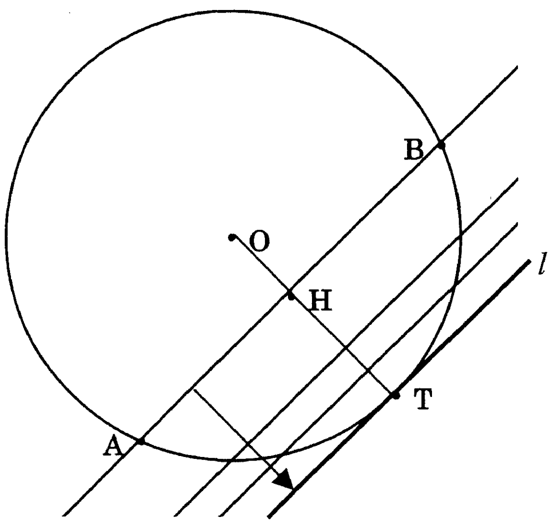
２次関数の学習を終えた後に、微小な変化に注目する題材として接線と面積・体積を取り上げる。また、関数の最大最小についても追求する。

（１）　２次関数の接線

円の接線は既習である。その発展として、変化する中で不変なものに注目し、放物線 $y=ax^2$ の接線を求める。

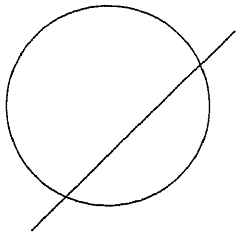
<既習事項>

図の様に、直線 AB を平行移動すると、円に点 T で接する直線 l となる。このとき、OT⊥l　であり、OT と直線 l の交点を H とすると、AH=BH である。



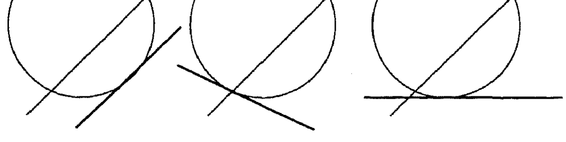
<導入例>

右の図に、
円の接線を１本
書き加えよ。



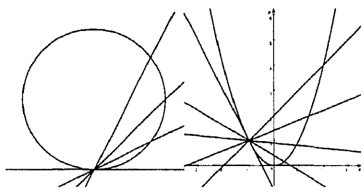
{解答例}

下図のような接線を引くことが予想される。



ここでは①（平行な接線）に注目し、<既習事項>の性質を放物線に発展させる。

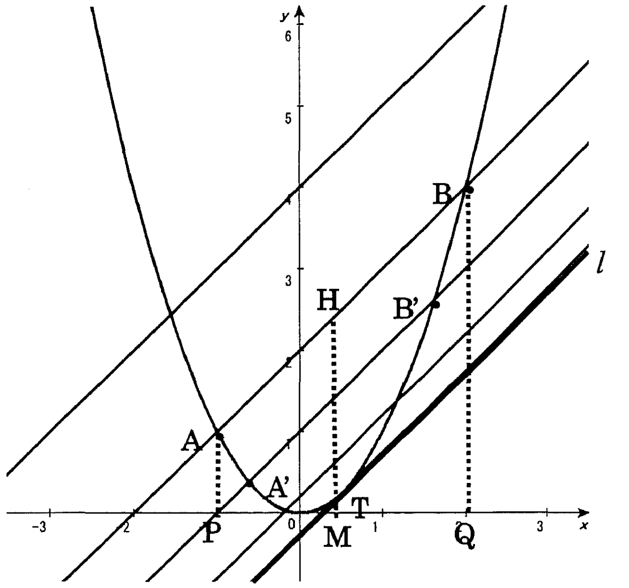
なお、②③（１点固定型）の発展として放物線の接線を考えることも可能である。



<放物線の接線の性質>

放物線 $y=ax^2$ について、直線 AB を平行移動すると、放物線に点 T で接する直線 l となる。

このとき、T を通る y 軸に平行な直線と直線 AB の交点を H とすると、　AH=BH　である。



証明）　直線 AB を平行移動していくときに、交点の x 座標の相加平均が一定の値（接点の x 座標の値）になっていることを示せばよい。

直線 A'B' // 直線 AB、A, B, A',B' の x 座標を $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ とし、$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ を示す。

直線 AB を $y=mx+n$ とすると、

$$ax^2-mx-n=a(x-\alpha)(x-\beta)\quad \text{より、}$$

$$a(\alpha+\beta)=m \cdots\cdots ①$$

また、直線 AB // 直線 A'B'　より、直線 A'B' は、$y=mx+n'$ とおけ、同様に、

$$ax^2-mx-n=a(x-\alpha')(x-\beta')\quad \text{より、}$$

$$a(\alpha'+\beta')=m \cdots\cdots ②$$

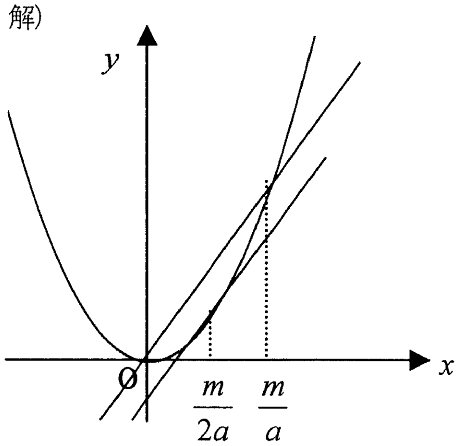
①、②より、　$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$　　（証明終り）

この性質は放物線特有のものであるが、これを用いて様々な放物線の接線を簡単に求めることができる。

前ページの図で、A,B,T から x 軸に引いた垂線をそれぞれ AP、BQ、TM とすると、PM=QM　であり、これを応用する。

例1． $y=ax^2$ の傾き m の接線

解）



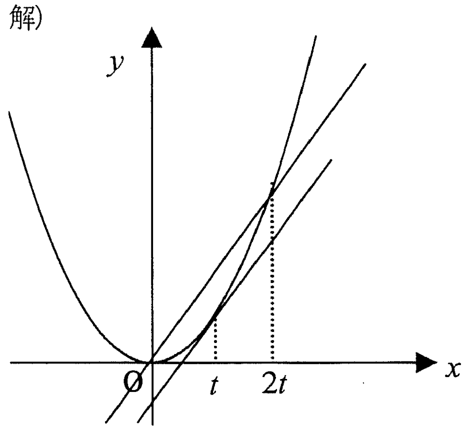
$y=ax^2$ と $y=mx$ の交点の x 座標は、 $x=0,\dfrac{m}{a}$

よって、$x=\dfrac{m}{2a}$ での接線は、$y=mx$ に平行である。

したがって求める接線は、傾き m で点 $(\dfrac{m}{2a},\dfrac{m^2}{4a})$　を通る直線で、 $y=mx-\dfrac{m^2}{4a}$

例2． $y=ax^2$ 上の点 (t,at^2) における接線

解）

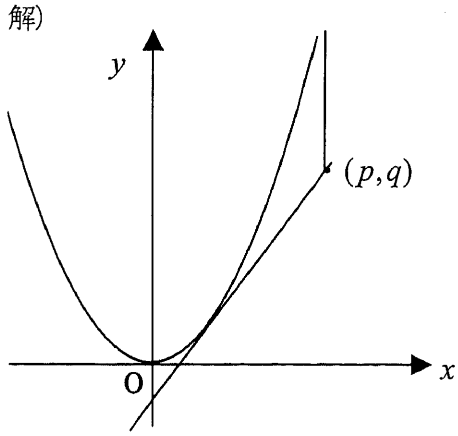


$A(2t,4at^2)$ とすると、直線 OA は求める接線に平行であり、直線 OA の傾きは $2at$ 。

したがって求める接線は、点 (t,at^2) を通り傾き $2at$ の直線で、 $y=2atx-at^2$

例3． $y=ax^2$ に接し、点 (p,q) を通る接線

解）



接線の傾きを m、又は接点を (t,at^2) とすると、

例1、又は例2より、接線は、

$y=mx-\dfrac{m^2}{4a}$　①、または、 $y=2atx-at^2$　②

①又は②を導き、これらが点 (p,q) を通るので、代入して得られる m 又は t の２次方程式を解く。

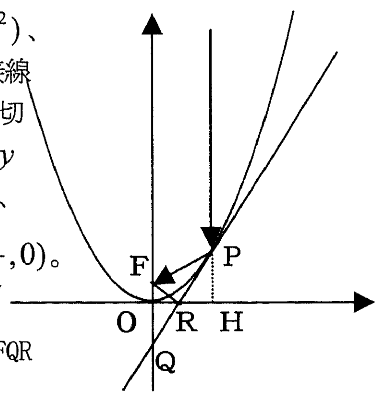
接線の応用として放物線の焦点を取り上げる。

例4．放物線（parabola）は、軸に平行な光を（接線について対称に）反射して１点に集める、という性質をもつ。（この点を放物線の**焦点**と呼ぶ。）

$y=ax^2$ について、上の性質を確認し、焦点の座標を求めよ。

解答例）右図で、$P(t,at^2)$、$H(t,0)$、P での接線の y 切片を Q、x 切片を R、反射光の y 切片を F とすると、

$Q(0,-at^2)$、$R(\dfrac{t}{2},0)$。



また、

∠FPR＝∠HPR＝∠FQR

などより

FQ=FP、△ORQ≡△HRP、△FRP∽△RHP

よって、

$$\mathrm{FQ}=\mathrm{FP}=\frac{\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PR}}{\mathrm{PH}}=\frac{\left(\frac{t}{2}\right)^2+\left(at^2\right)^2}{at^2}=\frac{1}{4a}+at^2$$

したがって、$F(0,\dfrac{1}{4a})$ ：定点

（2） 錐体の体積、球の体積・表面積、放物線と面積

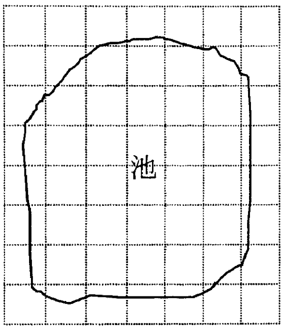
求積の基本は、**(単位量に) 細分してその和を考える**ことである。小学校時に経験したであろう「池の面積」や長方形の面積、直方体の体積などでこのことを確認し、まず円の面積公式を導く。

次に、カバリエリの原理を確認した後、錐体の体積、球の体積・表面積を求める。

また発展として、放物線と直線で囲まれた部分の求積を扱う。

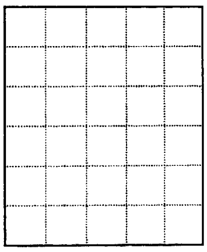
＜求積の基本＞

図形の面積や体積は、それに含まれる単位量の正方形や立方体の個数であり、求積の基本は「**(単位量に) 細分してその和を考える**」ことである。

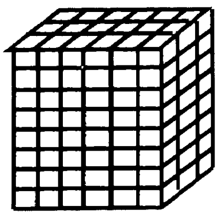


池の面積
≒正方形の個数

さらに細分すれば、より正確な値が求まることになる。



2辺の長さがa,bの長方形の面積公式abは、細分した正方形の個数を求めるものである。



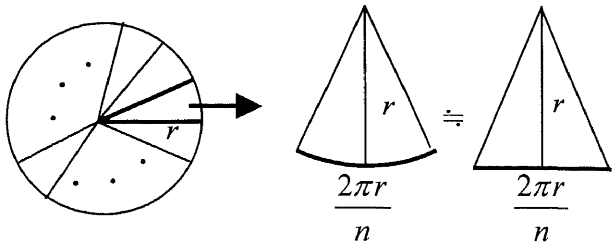
3 辺の長さがa,b,cの直方体の体積公式abcは、細分した立方体の個数を求めるものである。

＜半径rの円の面積＞

円周率πの定義より、半径rの円周の長さは$2\pi r$。

円を半径でn等分し、図のように、nが大きいとき円弧を線分、各扇形を三角形とみなして、加えると、

円の面積は、$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi r}{n}\cdot r\right)\cdot n=\pi r^2$

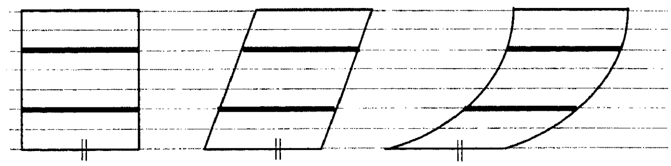


＜カバリエリの原理＞

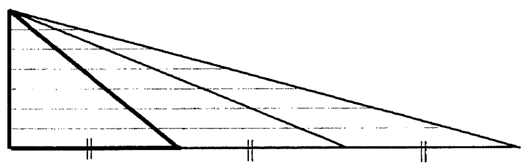
図形を平行な線で細分し、各部分を長方形とみなして加えることにより、次のことがいえる。

> **カバリエリの原理**
> ２つの図形を平行な直線で切断したとき、どこで切っても、切断した線の長さの比が一定ならば、２つの図形の面積の比もそれに等しい。

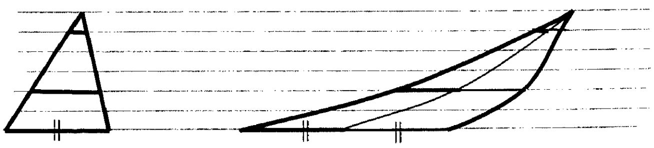
例１．次の３つの図形の面積は等しい



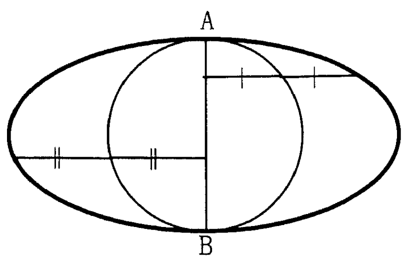
例２．次の各三角形の面積は等しい



例３．次の２つの図形の面積比は１：２



例４．円を、直径ABに垂直な方向へ２倍して作った図形（楕円）の面積は、$2\pi r^2$

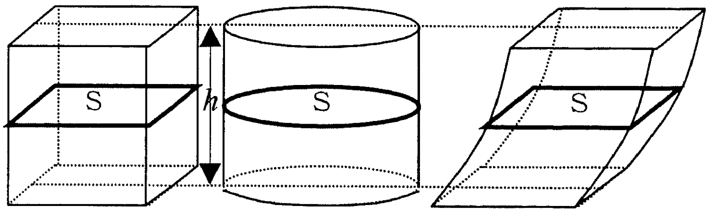


また、立体の体積についても切断面の面積に注目すれば、同様の事が成り立つ。

＜柱体の体積＞

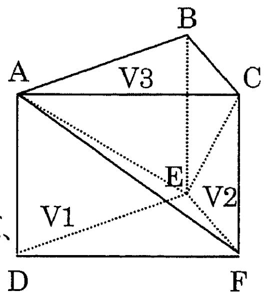
底面積S、高さhの直方体の体積Vは、V=Sh である。一般の柱体において、底面に平行な平面での切断面の面積はすべて底面積に等しいので、カバリエリの原理により、次のことが成り立つ。

底面積S、高さhの柱体の体積Vは、　V=Sh



＜錐体の体積＞

底面積S、高さhの三角柱ABC-DEFを、平面AEF、ACEで切断し、3つの四面体ADEF、ACEF、ABCEに分割し、それぞれの体積をV1、V2、V3とする。



四面体ADEFと四面体ACEFは、△ADF、△ACFを底面とする三角柱と考えれば、高さが等しいので、カバリエリの原理により、V1＝V2

同様に、四面体ACEFと四面体ABCEについても、△CEF、△CBEを底面とする三角柱と考えれば、

V2＝V3。よって、V1＝V2＝V3＝$\frac{1}{3}Sh$

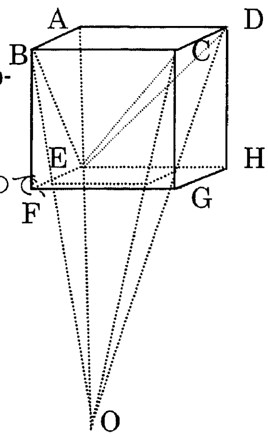
したがって一般の錐体について、カバリエリの原理より、次のことがいえる。

底面積S、高さhの錐体の体積Vは、　V=$\frac{1}{3}$Sh

（参考）生徒による別証

別証　①

一辺の長さaの立方体ABCD-EFGHは、3つの四角錐E-ABCD,E-BCGF,E-CGHDに分割でき、これらは合同なので、



四角錐E-ABCD

$=\frac{1}{3}$（立方体ABCD-EFG）

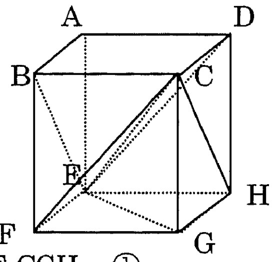
$=\frac{1}{3}a^3$

一方、線分AEのEを越える延長上に、AO=hとなる点Oをとり、四角錐O-ABCDを作ると、これは、四角錐E-ABCDを、面ABCDに垂直な方向に$\frac{h}{a}$倍したものであるから、カバリエリの原理より、

四角錐O-ABCD＝（四角錐E-ABCD）$\times\frac{h}{a}=\frac{1}{3}a^2h$

したがって、カバリエリの原理より、底面積S、高さhの錐体の体積は　$\frac{1}{3}$Sh

別証　②



直方体ABCD-EFGHを、2つの合同な四角錐E-ABCD, C-EFGHと、2つの合同な三角錐E-CDH, E-BCFに分割する。

△CHD=△CGHであるから

カバリエリの原理より、

三角錐E-CDH＝三角錐E-CGH----①

同様に、△BCF =△CFG およびカバリエリの原理より、　三角錐E-BCF ＝三角錐E- CFG----②

一方、△EFG =EGHおよびカバリエリの原理より、

三角錐C- EFG＝三角錐C-EGH

三角錐C- EFGと三角錐E- CFG、三角錐C-EGHと三角錐E-BCFは、それぞれ、同じものなので、①②より、三角錐E-CDH＋三角錐E-BCF

＝三角錐C-EGH＋三角錐C- EFG

＝四角錐C-EFGH　（＝四角錐E-ABCD）

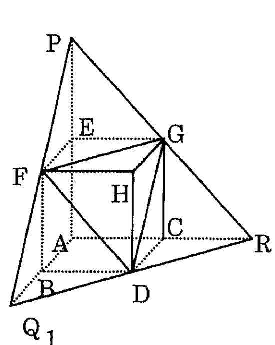
よって、長方形ABCDの面積をS、辺AEの長さを高さをhとすると

四角錐E-ABCD＝$\frac{1}{3}$（直方体ABCD-EFGH）＝$\frac{1}{3}Sh$

したがって、カバリエリの原理より、底面積S、高さhの錐体の体積は　$\frac{1}{3}$Sh

別証　③

図で、ABDC-EFHGは直方体、E,B,CはAP,AQ,ARの中点。図の三角錐PFGE、FQDB、GDRC、DGFHは合同だから



（直方体ABDC-EFHG）

=(PQRA)－2×(PFGE)

またカバリエリの原理より、

(PQRA)= 8×(PFGE)

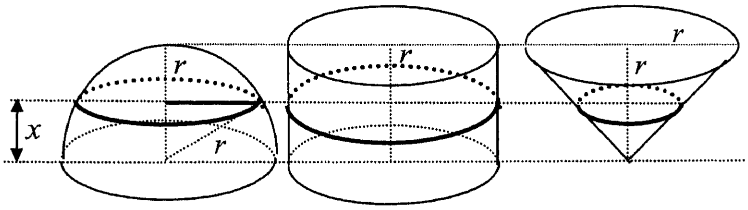
∴　(PFGE)＝$\frac{1}{6}$(ABDC-EFHG)＝$\frac{1}{3}$(ABC-EFG)

したがって、カバリエリの原理より、底面積S、高さhの錐体の体積は、$\frac{1}{3}Sh$

<球の体積・表面積>

図の様に、半径rの半球を底面に平行な平面で切断したときの切断面の面積はπr^2とπx^2の差であることから、対応する円柱と円錐を考えると、

断面積：$\pi(r^2 - x^2) = \quad \pi r^2 \quad - \quad \pi x^2$



よって、カバリエリの原理により、

（半球の体積）＝（円柱の体積）－（円錐の体積）

$$= \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

したがって、半径rの球の体積は、$\frac{4}{3}\pi r^3$

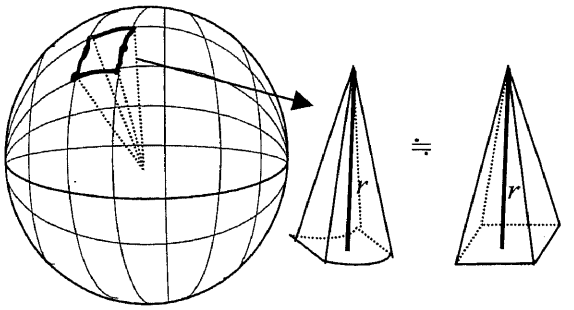
また球の表面積Sを求めるために、球の表面を面積$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n$ （$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n = S$）の$n$個の部分に分割する。そして球を、表面の各部分を底面とし中心を頂点とする立体に分割する。

nが大きいとき球面上の各部分を多角形、分割してできた各立体を錐体とみなして、加えると、

$\frac{1}{3} \times r \times$ （$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n$）＝球の体積

よって、　$\frac{1}{3} rS = \frac{4}{3}\pi r^3$

したがって、球の表面積Sは、$4\pi r^2$

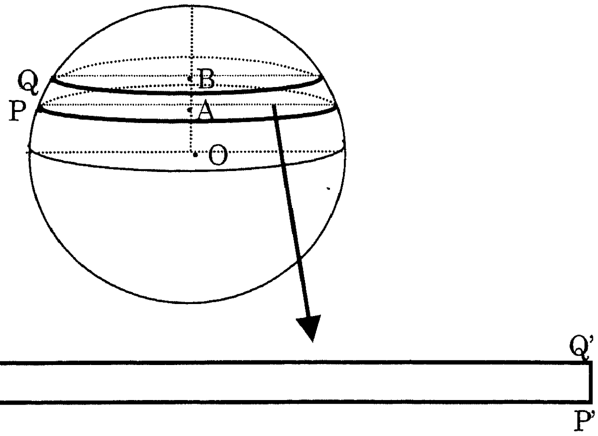


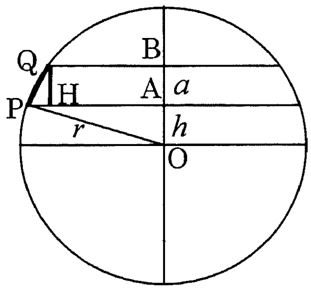
（参考）球の表面積の生徒による別証

半径rの球面で、中心からの距離が$h, h+a$である平行な２平面の間にある部分の面積Sは、$a \fallingdotseq 0$のとき、切り広げたものを長方形PQQ'P'とみなすと、

S≒PP'×PQ

である。





上の図で、$AP = \sqrt{r^2 - h^2}$ より $PP' = 2\pi\sqrt{r^2 - h^2}$

また、PQ⊥OPと見なして、△PQH∽△OPAより

$$PQ \fallingdotseq r \times \frac{a}{\sqrt{r^2 - h^2}} = \frac{ra}{\sqrt{r^2 - h^2}}$$

よって、$S \fallingdotseq 2\pi\sqrt{r^2 - h^2} \times \frac{ra}{\sqrt{r^2 - h^2}} = 2\pi ra$

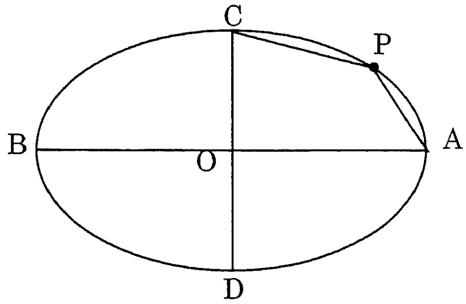
これは２辺の長さが$2\pi r, a$の長方形の面積と等しいので、カバリエリの原理より、球の表面積は

$$2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$$

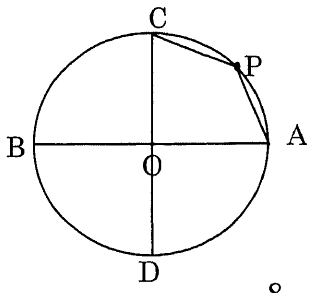
<カバリエリの定理のいろいろな応用問題>

問題１　図のような楕円があり，AB＝8は長軸，CD＝5は短軸，ABとCDの交点をOとする。

点Pが楕円の周AC（のうち短い方）の上にあるとき、四角形OAPCの面積の最大値を求めよ。



解)



楕円を直線ABの上下へ$\frac{8}{5}$倍に引き延ばすと、CD＝8となり曲線は円となる。△OACは二等辺三角形でその面積はPによらないので，△ACPの面積を最大にすればよい。最大のとき、点Pは線分ACから最も離れる位置にあるから，PO⊥弦ACである。

よって最大のときの四角形OAPCの面積は

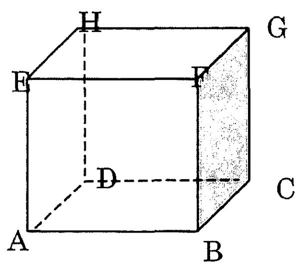
△OAC＋△ACP＝2△AOP

$$=2\times\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

もとの図はこの図形を縦に$\frac{5}{8}$倍に縮小したものであるから，求める面積は　$8\sqrt{2}\times\frac{5}{8}=5\sqrt{2}$

問題2　1辺がaの立方体ABCD－EFGHがある。側面の対角線AF, BG, CH, DEを考える。4つの動点P，Q，R，SがそれぞれA, B, C, Dを同時に出発して、対角線に沿って同じ速さでそれぞれF, G, H, Eに向かって動く。

この立体の中にあって正方形PQRSが通過する部分の体積を求めよ。

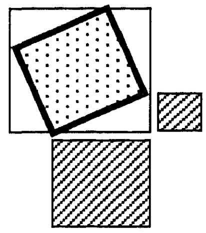


解1)（2つに分ける方法)

面ABCDに平行な面で切ると，どこで切っても正方形である。この正方形の面積を，三平方の定理を用いて，2つの正方形に分ける。

分けた方の図形を重ねると,それぞれ四角錐になる。したがってこの立体の体積は

$$a^2\times a\times\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}a^3$$



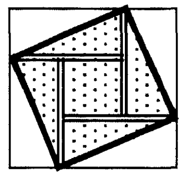
解2)（生徒からの解法)

真ん中の四角形は明らかに正方形で，それらを積んでいくと，ねじれのない正四角錐である。その体積はもとの立方体の3分の1である。残りの部分の半分を切り落としていくと考える。

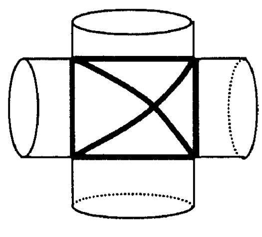
したがってこの立体の体積は

$$a^3\left\{1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}a^3$$



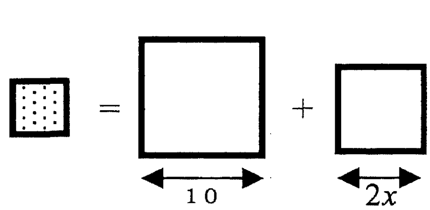
問題3　直径10の2つの円柱の中心線が垂直に交わり互いに突き抜けている。共通部分の立体の体積は？



解）山で使うテントのような立体になる。

ふたつの円柱の軸を含む平面αに平行で，αからxの距離にある平面でこの立体を切ると，どこで切っても断面は正方形であり，面積は

$$\left(2\sqrt{5^2-x^2}\right)^2=100-4x^2$$



1辺10の正方形を高さ10重ねると1辺10の立方体になり，1辺$2x$の正方形を重ねると四角錐になるので，元の立体の体積は

$$10^3-\frac{10^3}{3}=\frac{2000}{3}$$

＜放物線が囲む面積＞

放物線 $y=x^2$（$0 \leqq x \leqq 1$）と x 軸の間にある部分を、y 軸に平行な直線 $x=\dfrac{k}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ で分割する。n が大きいとき、各部分を長方形とみなして、加えると、

$$\frac{1}{n}\times\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{k}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\times\left(1^2+2^2+\cdots+k^2+\cdots+n^2\right)$$

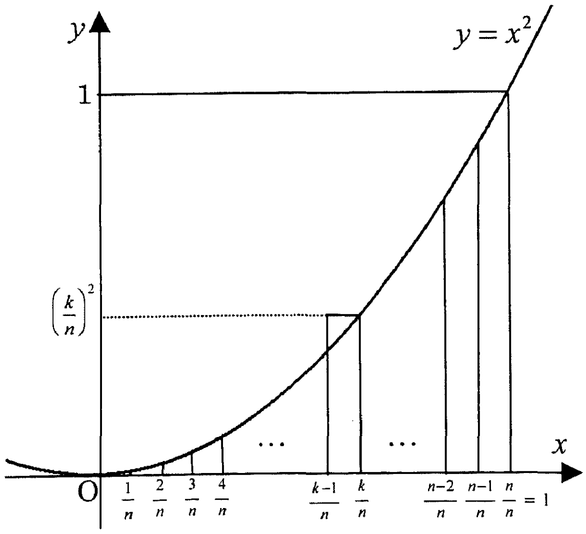
$$=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (\because 6.\ 1.\ 1\ \ 参照)$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

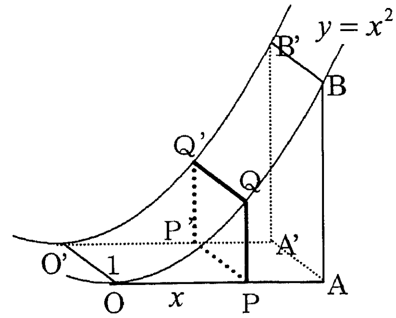
これより、n が大きくなればなるほど、上の式の値は、$\dfrac{1}{3}$ に近づくことがわかる。

（ $n\to\infty$ のとき、$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{6n^2}\to\dfrac{1}{3}$ ）

したがって、放物線 $y=x^2$（$0 \leqq x \leqq 1$）と x 軸の間にある部分の面積は $\dfrac{1}{3}$ である。



（生徒による別解）



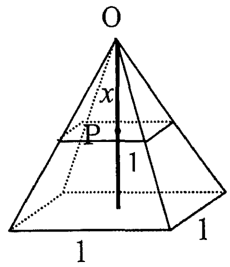
放物線 $y=x^2$（$0\leqq x \leqq 1$）と軸に平行な線分 OA、OB で囲まれた図形 OAB の面積を S とする。

図のように、図形 OAB を平行に移動して作った底面積が S で高さが 1 の柱体 OAB-O’A’B’の体積は S。

この柱体を OA に垂直な平面で切ったときの切り口 PQQ’P’の面積は、OP＝x のとき、

PP’×PQ＝$1\times x^2=x^2$

一方、底面が一辺 1 の正方形で高さが 1 の四角錐の体積は $\dfrac{1}{3}$ であるが、この四角錐を底面に平行な平面で切ったときの切り口の面積は、図のように OP＝x のとき、x^2 である。

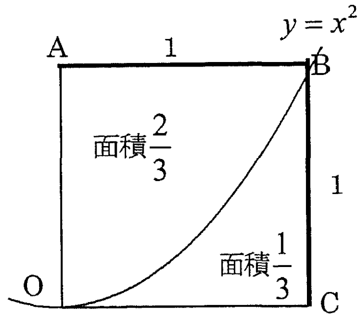


よって、カバリエリの原理より、

柱体 OAB-O’A’B’の体積 S＝$\dfrac{1}{3}$

したがって、放物線 $y=x^2$（$0 \leqq x \leqq 1$）と x 軸の間にある部分の面積は $\dfrac{1}{3}$ である。

一辺の長さが 1 の正方形 OABC は、O が頂点で B を通る放物線によって、右図のように分割される。

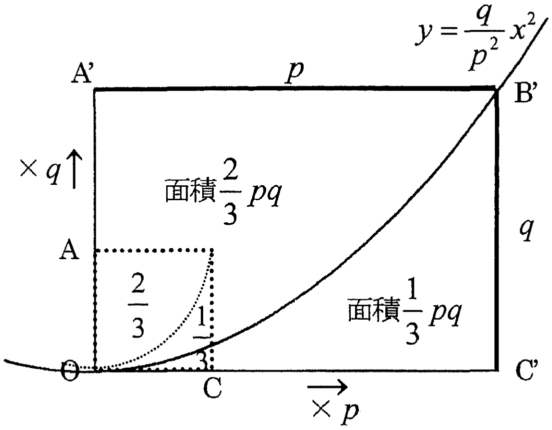


放物線 $y=x^2$ を、x 軸および y 軸を基準に、その垂直方向へ引き延ばしたものも放物線である。

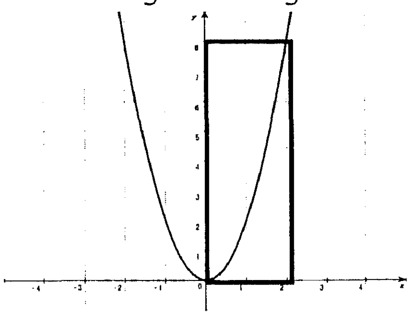
（6．1．2．発展　参照）

したがって、前ページの図で、直線OAを基準に p 倍、直線OCを基準に q 倍したものを考えれば、カバリエリの原理により、次のことが成り立つ。

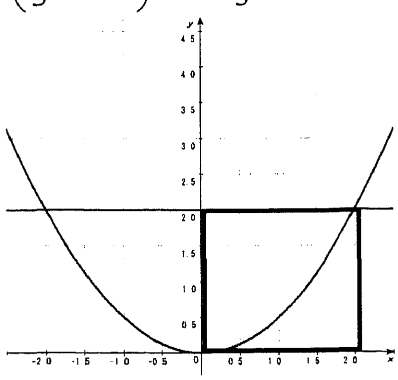
2辺の長さが p,q の長方形OA'B'C'は、Oが頂点でB'を通る放物線によって、下図のように分割される。



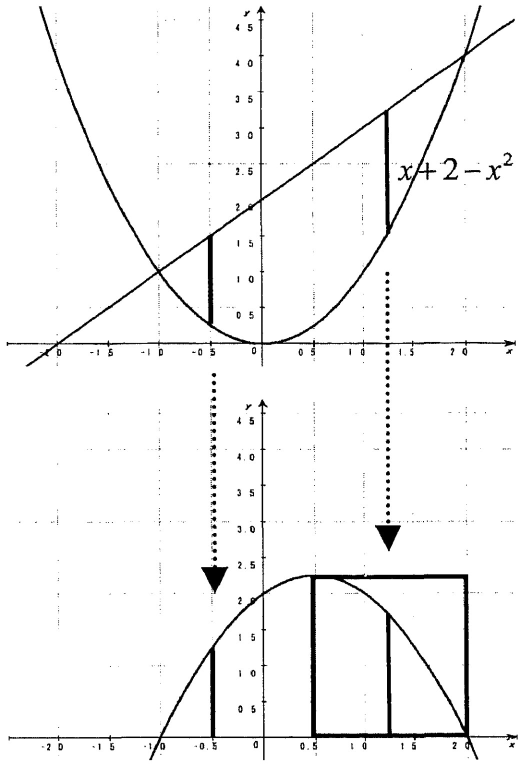
例1．放物線 $y=2x^2$（$0 \leqq x \leqq 2$）と x 軸の間にある部分の面積は、$\frac{1}{3}\times 2\times 8=\frac{16}{3}$



例2．放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた部分の面積は、$\left(\frac{2}{3}\times 2\times 2\right)\times 2=\frac{16}{3}$



例3．放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた部分を平行移動すると、$y=-x^2+x+2$ と x 軸で囲まれた部分となり、カバリエリの原理より、これらの部分の面積は等しい。



交点の x 座標は、$x^2=x+2$　より、

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0,\quad x=-1,2$

軸は、直線 $x=\frac{1}{2}$

$y=-x^2+x+2$ で、$x=\frac{1}{2}$ のとき、$y=\frac{9}{4}$

図の長方形の2辺の長さは、$\frac{3}{2},\frac{9}{4}$

したがって、放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた部分の面積は、

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}\cdot 2=\frac{9}{2}$$

（3）　最大最小

関数を取り扱うとき、増加・減少などの変化のようすは重大な関心事であり、当然、最大・最小は最も注目する事柄である。増減の切り替わり、即ち極大極小がどのようなときに起きるかが、微小な変化に注目すると見えてくる。

関数$S(k)$について、kの微小な増加量Δkに対する$S(k)$の変化量をΔSとすると、

$\Delta S>0$のとき$S(k)$は増加し、

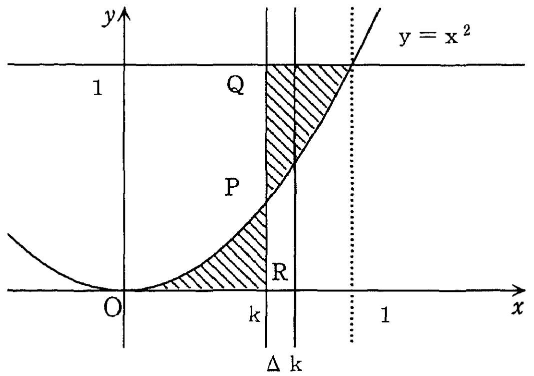
$\Delta S<0$のとき$S(k)$は減少する。

したがって、$S(k)$が極大・極小となるとき、$S(k)$が連続であるならば、$\Delta S=0$である。このことやΔSを近似的に求めることについては直感的に納得させ、最大・最小となる場合を、$\Delta S=0$から考える。

$S(k)$として様々な関数を取り上げることができるが、面積や体積を表す場合の例を以下に示す。

＜教材例１＞

$y=x^2$及び直線$y=0,\ \ y=1,\ \ x=k$　（kは定数で、$0\leqq k\leqq 1$）で囲まれる２つの部分の面積の和をS(k)とする。S(k)を最小にするkの値は？



解）　kを０から１まで変化させてみると、初めは減少し、また最後の方は増加するので、最小となる場合があることがわかる。

$\Delta k\fallingdotseq 0$で、直線が$x=k$から$x=k+\Delta k$に変化したとき、$S(k)$の増加する部分と減少する部分の面積が等しくなるときが最小である。

$\Delta k\fallingdotseq 0$であることから、増減する部分をそれぞれ長方形と考えて、最小となるのは

PQ×Δk=PR×Δk、即ち、PQ=PR のときである。

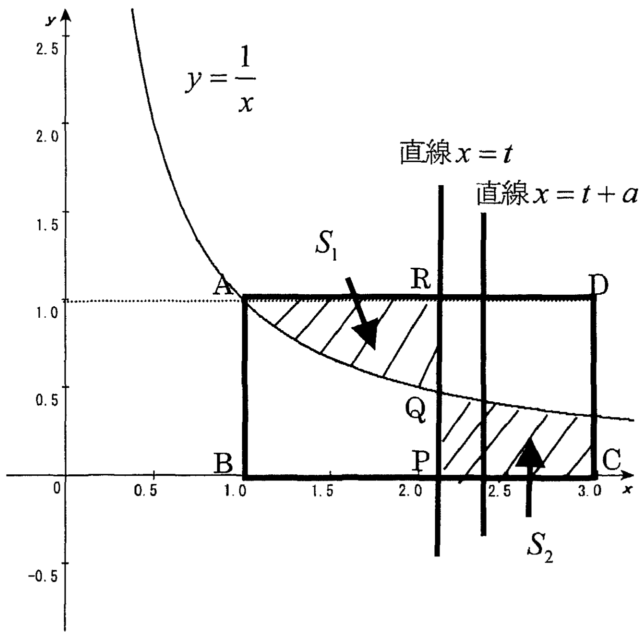
このとき、　$k^2=1-k^2, 2k^2=1$

$k>0$　であるから、$k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

＜教材例２＞

$A(1,1)$、$B(1,0)$、$C(3,0)$、$D(3,1)$を頂点とする長方形 ABCD がある。長方形 ABCD を、関数$y=\dfrac{1}{x}$のグラフと直線$x=t$で４つの部分に区切り、図のように、そのうちの２つの部分の面積をS_1、S_2とする。

$1\leqq t\leqq 3$ でtが変化するとき、S_1+S_2　を最小にするtの値は？



解）　tを０から１まで変化させてみると、初めは減少し、また最後の方は増加するので、最小となる場合があることがわかる。

$a\fallingdotseq 0$で、直線が$x=t$から$x=t+a$　に動いたとき、S_1の増加部分と、S_2の減少部分を、それぞれ長方形とみなすと、最小となるのは、図のようにP，Q，Rをとると、

$$PQ\times a=QR\times a$$

即ち、　　PQ＝QR　　のときである。

このとき、

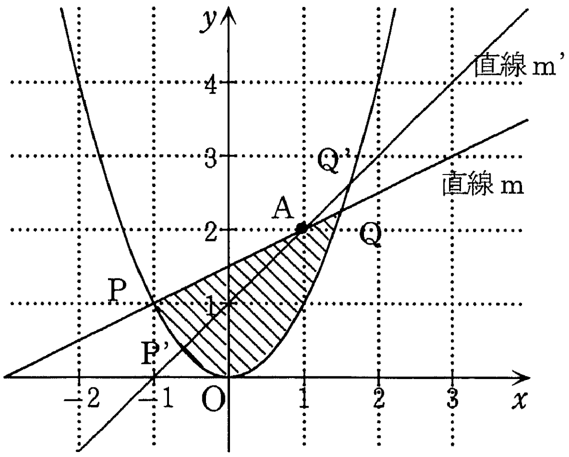
$$\frac{1}{t}=1-\frac{1}{t}$$

$$\frac{2}{t}=1$$

したがって、$t=2$

＜教材例３＞

$y=x^2$ と点A(１，２)を通る直線mで囲まれる部分の面積が、最小となるような直線mは？



解)　直線の傾きを変化させてみると、最小となる場合があることがわかる。

直線mを少し動かしたものを直線m’とし、これらと $y=x^2$ の交点を、図のようにP、Q、P’、Q’とする。

このとき、直線の変化が微小であるから、

ＡＰ≒ＡＰ’、ＡＱ≒ＡＱ’

であり、増減する部分をそれぞれ扇形とみなすと、最小となるのは、ＰＡ＝ＡＱ　のときである。

よって、$\mathrm{P}(p,p^2),\mathrm{Q}(q,q^2)$　$p<q$ とすると、

$$\frac{p+q}{2}=1 \quad ①, \quad \frac{p^2+q^2}{2}=2 \quad ②$$

①より、$q=2-p$、②に代入して、

$$p^2+(2-p)^2=4$$
$$p^2-2p=0$$
$$p(p-2)=0$$

$p<q$　　だから、$p=0,q=2$

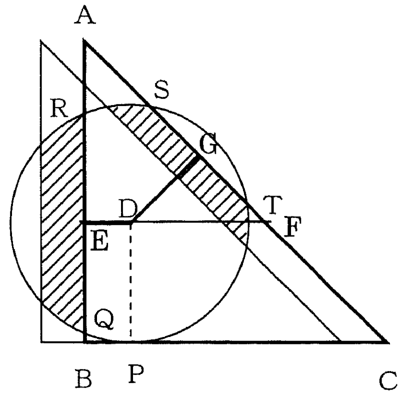
よって、$\mathrm{P}(0,0),\mathrm{Q}(2,4)$

したがって、直線mは、$y=2x$

＜教材例４＞

ＡＢ＝ＢＣ＝３，∠ＡＢＣ＝９０°の△ＡＢＣと、半径１の円Ｄがあり、辺ＢＣ上の点Ｐで、円Ｄが辺ＢＣに接している。

△ＡＢＣと円Ｄの共通部分の面積が最大となるようなＰの位置は？



解)　P を動かして考えると、最大となる場合があることがわかる。(最小は BP=３のとき)

BP=t とし、図のように、△ABC と円の交点を Q,R,S,T、D を通り BC に平行な線と AB,AC の交点を E,F、D から AC へ引いた垂線を DG とする。

a ≒０のとき、△ABC を左へ a だけ平行移動したものを△A'B'C'とし、円との交点を Q',R',S',T' とする。

このとき、共通部分で増減した部分 QRR'Q'、STT'S'を、それぞれ長方形とみなして、最大となるのは、　$\mathrm{QR}\times a=\mathrm{ST}\times\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

すなわち、$\mathrm{QR}\times\sqrt{2}=\mathrm{ST}$ …①　のときである。

ここで、DE=t,DQ=1 だから、QE=$\sqrt{1-t^2}$ 、また、EF=AE=2 より DF=$2-t$、DG=$\dfrac{2-t}{\sqrt{2}}$ より、SG=$\sqrt{1-\left(\dfrac{2-t}{\sqrt{2}}\right)^2}$　であるから①より、

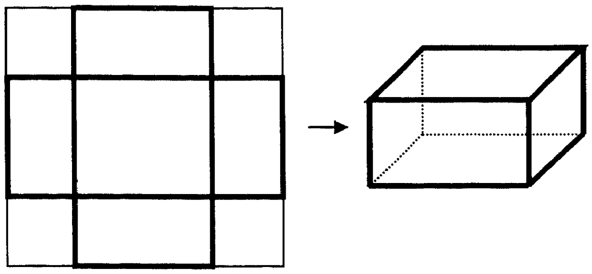
$$2\sqrt{1-t^2}\times\sqrt{2}=2\sqrt{1-\left(\frac{2-t}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$2(1-t^2)=1-\frac{(2-t)^2}{2},3t^2+4t-6=0$$

$t>0$ であるから、$t=\dfrac{-2+\sqrt{22}}{3}$

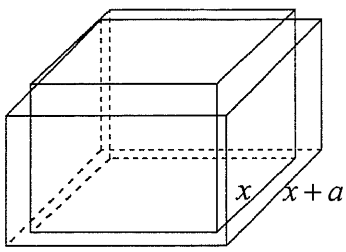
＜教材例５＞

一辺の長さが１の正方形の四隅から、同じ大きさの正方形を切り取り、残りを折り曲げてふたのない箱をつくる。この箱の容積が最大となるとき、箱の底面の一辺の長さは？



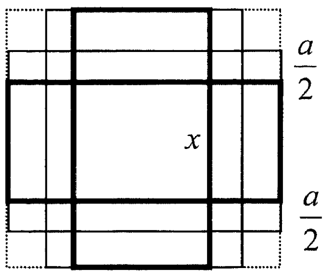
解）箱の底面の一辺の長さをxとすると、$0<x<1$であり、この範囲で変化させたときのことを考えると、最大となる場合があることがわかる。

$a\fallingdotseq 0$として、底面の一辺をxから$x+a$に増加させたとき、増減する部分の体積が等しいときに最大となる。



一辺がxのときの高さは、$\dfrac{1-x}{2}$

$x+a$のときの高さは、$\dfrac{1-x-a}{2}$



したがって、底面の一辺の長さがa増加したとき、高さは$\dfrac{a}{2}$減少し、底面積は

$(x+a)^2-x^2=a(2x+a)$　増加する。

増減する部分の体積を考えて、

$$a(2x+a)\times\frac{1-x-a}{2}=x^2\times\frac{a}{2}$$

即ち、　$(2x+a)(1-x-a)=x^2$　のとき最大。

このとき、$a\fallingdotseq 0$であるから、$2x(1-x)=x^2$

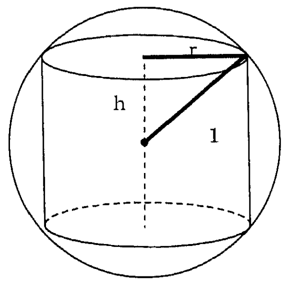
$x\neq 0$だから、　$2(1-x)=x$

したがって、体積が最大である箱の底面の一辺は

$$x=\frac{2}{3}$$

＜教材例６＞

半径１の球に内接する直円柱について、体積が最大となるときの高さは？



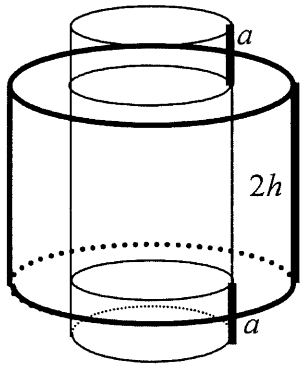
解）直円柱の高さを$2h$とすると、$0<h<1$であり、この範囲で変化させたときのことを考えると、最大となる場合があることがわかる。

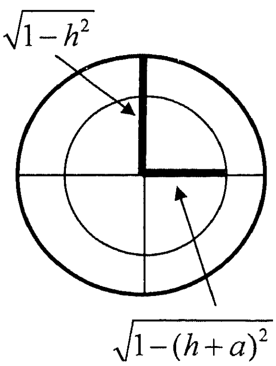
$a\fallingdotseq 0$として、高さを$2h$から$2h+2a$に増加させたとき増減する部分の体積が等しいときに最大となる。

直円柱の底面の半径は、高さが$2h$のとき$\sqrt{1-h^2}$、

$2h+2a$のとき$\sqrt{1-(h+a)^2}$であるから、高さを$2a$だけ増加したときの、底面積の減少量は、

$$2\pi\left\{\left(1-h^2\right)-\left(1-(h+a)^2\right)\right\}=2\pi a(2h+a)$$





よって、増減する部分の体積を考えて、

$2\pi\left(1-(h+a)^2\right)\times 2a=2\pi a(2h+a)\times 2h$

即ち、$1-(h+a)^2=h(2h+a)$　のとき最大。

このとき、$a\fallingdotseq 0$であるから、$1-h^2=2h^2$

よって、$h>0$より、　$h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

最大の円柱の高さは$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　（底面の半径は$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$）

６．２．２　高校２年

高校２年では、２次関数・３次関数の微積を学習する。高２で初めて極限の考えが出現するが、易しくはない。そこで、まず、微積を用いずに導関数を見いだす方法を学習し、その後に「微小な変化」を用いた教材でその捉え方を学ぶ。

(1)　恒等式

多項式の恒等式とは、式の変形でいろいろな式が生み出されることを意味している。まず、２次式のいろいろな変形を試みる。

式変形すると、それまで見えなかったものが見えてくる。これは代数的な手法で接線を考える方法である。

$y=f(x)=ax^2+bx+c$ 上の点 $P(p,f(p))$ での接線を求めてみよう。

$$y=f(x)=a(x-p)^2+(2ap+b)(x-p)+f(p)\cdots①$$

と変形できる（$x=p$ でのテーラー展開）から、
これに対して、$y=(2ap+b)(x-p)+f(p)$　$\cdots②$
を考えると、①，②の連立より、$x=p$(重解) であることから、②は①の接線であることが分かる。

つまり、接線を求めるだけなら、多少面倒な恒等式の変形ではあるが、いわゆるテーラー展開の式を作り出せばすむことである。 同様にして、３次関数についても、接線を代数的に求められる。

さて、高校２年では、極限の定義が初出であり、理解が難しいところである。

(2)　生徒の極限の困難点

生徒にとって、微分の定義に含む極限の概念はこれまでの学習では出現していない。過去の学習指導要領では数列の学習の際に極限を学び、その後に微分を学習した。ところが、現行学習指導要領では、いきなり極限が入る。微分の難しさのひとつはこの極限にあると言っても過言でないだろう。極限とは何かの説明が少ないと思われる。

高１で、極限概念をつかませる必要がある。

○　極限値とは何なのか？

○　限りなく近づくとはどういうことなのか？
　　表現方法に工夫が入る余地がある。

数列とは独立に極限を学習できないか。

数列の極限 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$　を「$n\to\infty$ のとき、a_n は限りなく α に近づく」では、生徒は「実際に α になるのか、ならないのか分からない」という。これを例えば、『$n\to\infty$ のとき、a_n は α を目標値として変化する。この目標とする値を極限値という。』としてはどうだろうか。　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ と

$0.\dot{9}=1$　つまり　$\lim_{n\to\infty}\frac{0.9\{1-(0.1)^n\}}{1-0.1}=1$

とでは、後者は無限循環小数の分数化であり、生徒にとって前者とは異なると感じるようである。
そこで、共通に、$\lim_{n\to\infty}|\ a_n-\alpha\ |=0$　という「差が 0 に近づくこと」の表現の方を提案したい。
微分（導関数）の定義では、さらに $\Delta x\neq 0$ として０に近づけ、さらに比を考えるのである。素直に理解する方が不思議なくらいである。$\Delta x\neq 0$ だから微小／微小を考えなければならないのである。

(3)　そもそも微分とは何か？

‘微分’そのものの定義は高等学校の教科書にはない。‘微分係数’とか‘導関数’とかの名詞はある。また、‘微分する’という動詞もある。しかし、微分 dy は高校教科書には登場しない。そこで、ここでは‘微分’という名詞を使わず、‘微分する’という動詞を採用し、「微分するとは何か？」を考えることにする。
ところで、光には２つの顔{波動性と粒子性}がある。
また、複素数には２つの顔｛点の位置と回転拡大｝がある。微分法にもいくつかの顔があるはずだ。

定義や公式だけでは‘微分する’とは何をすることかはわからない。
‘微分する’に関する見方・考え方として、

Ａ：接線の傾き…主として微分係数
Ｂ：１次近似…最小自乗法、局所座標系
Ｃ：微小な変化で生まれること
　…導関数を求める，極値問題（導関数を作る）
Ｄ：瞬間変化率…瞬間速度，円の面積とその円周，球の体積とその表面積など
が考えられる。

(4)　導関数の定義の見直し

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad\cdots★$$

この定義式の代数化と近似化（デジタル化）を考える。極限を含む解析的理解の一歩手前の代数化、つまり近似化を考える。微小な正の数 Δx をここでは、$\Delta x=h$ とおき、近似を考えることにする。

以降、‘微分する’ことのいくつかのアイデアを紹介する。

瞬間速度を求めることを考える際、すなわち接線の傾きを考えるとき、まず天下りに割線を与え、その極限を考えさせるのは動機付けとして不十分である。
多項式関数ならば式変形で代数的に求められるものを何故に、２点を用意するかを天下りでなく持ち出すことが鍵である。
これこそが、微分する重要性の中核である

C：微小な変化で生まれること

それまで見えなかったものが見えてくるために、独特の考え方があることを学ぶ。
曲線上の１点Ｐでの接線（の傾き）を考えることは難しい。生徒は、曲線にあてがうような適当な直線を描けると考えている。
接線の定義：接線とは、曲線上の接点の近傍で接点以外に曲線との共有点がない直線のことである。
これを否定して、共有点があったとすると考えることになる。（素数と合成数との関係に似ている）そこで、ダミーとして、ちょっとずれた他の１点や２点を考えることの必要性を理解させたい。

(5)　接触円

生徒にとって曲線に接する直線とは中学のときに学習した円の接線（円の中心と接点を結ぶ直線に垂直）が基本である。ここでは、２次関数のグラフである放物線上の点で接する円を考えてみる。
ところで、次の曲率の公式が知られているが、高校生には難しい。
「曲率の公式：関数 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ で接する円の半径を r とすると、曲率は、$\frac{1}{r}$ であり、

$$\frac{1}{r}=\frac{f''(a)}{\left\{(f'(a))^2+1\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

である。」

これは、接触円の半径は分かるが中心は不明である。

ここで、中学生の知識である「一部が破損した皿の土器が出土したとき、その円の半径を求めるときに、３点でできる三角形の外接円を作るために、垂直２等分線２本の交点としての中心」を求めたことを思い出させる。
微分の捉え方Ｃの微小な変化によって見えないものが見えてくることを経験させる。
‘接する点Ｐからちょっとずらした別の２点を考える’ことで、この３点を通る円が作れることになる。
ここに微分することの幾何学的な側面がある。

微小な変化に伴って新たなものが生まれるひとこまである。

<教材例>　放物線 $y=x^2$ 上の点を接点とする円の中心と半径を求めよ。

解）放物線上に３点をとる：

$$A(p-\frac{1}{n},\ (p-\frac{1}{n})^2),\quad P(p,\ p^2),\quad B(p+\frac{1}{n},(p+\frac{1}{n})^2)$$

次のように、線分ＡＰの垂直二等分線①と線分ＢＰの垂直二等分線②を作り、その交点を求める。接触円の中心を求める。

$$\text{AP}: y=-\frac{n}{2pn-1}(x-\frac{2pn-1}{2n})+(\frac{2pn-1}{2n})^2 \quad ①$$

$$\text{BP}: y=-\frac{n}{2pn+1}(x-\frac{2pn+1}{2n})+(\frac{2pn+1}{2n})^2 \quad ②$$

交点の x 座標は、$x=-4p^3+\frac{p}{n^2}$　であり、

極限は、$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ などによって、円の中心は、$(-4p^3, 3p^2+\frac{1}{2})$ であり、半径 r は、$\frac{(4p^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2}$ であることがわかる。
これは、曲率 $\frac{1}{r}=\frac{2}{((2p)^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ から正しいことが確認できる。
接触円：

$$(x+4p^3)^2+(y-(3p^2+\frac{1}{2}))^2=\left\{\frac{(4p^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2}\right\}^2$$

特に、$p=1$ の場合、接触円の中心は $(-4,\frac{7}{2})$ である。

接点は、$(1,1)$ であり、接触円の半径は $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ である。
念のため、曲率半径の公式からは、$y'=2x$, $y''=2$ であるから、

$$\frac{1}{r}=\frac{2}{(2^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$　より、$r=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ と一致する。

接触円をシュミレーションしてみたのが図１である。
接触円の中心の軌跡は、

$$\begin{cases} x = -4p^3 \\ y = 3p^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ によって、$y = \dfrac{1}{2} + \sqrt[3]{\dfrac{27x^2}{16}}$ である。

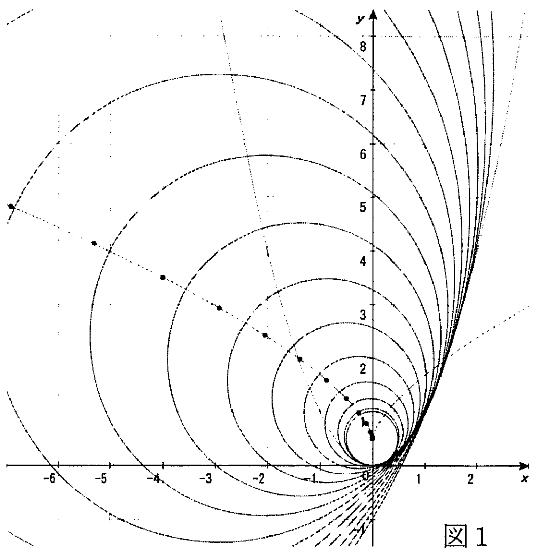


図1

(6) 導関数を作る

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \cdots ★$$

この★の式は、

$h \to 0$ のとき、$|f(x+h) - (f(x) + f'(x)h)| \to 0$

と同値である。

一次近似である：$dy = f'(x)dx$

このイメージは距離＝速さ×時間　に過ぎない。これは「正負の数の乗法」の高校版である。

近似化することで見えてくること：

$f'(x) \cong \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$　を考えてみよう。

定義式を、$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$　と近似式を考える。$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$

ここでの関数は、

$y = f(x)$　・・・①　　$y = f(x+h)$　・・・②

$y = f(x+h) - f(x)$　・・・③

$y = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$　・・・④

$y = f'(x)$　・・・⑤

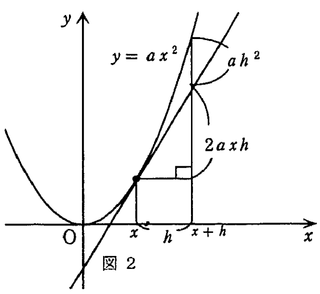


図2

④は③を y 軸方向に拡大したものである。

近似で正確さを心配する生徒には、

$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$

ここで、誤差 $o(h)$ は、$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ であると説明する。たとえば、図２において、h が極めて０に近いときには、誤差 ah^2 が０に極めて近い。図２の場合は、h が極めて小さい正の数のとき、誤差を無視できる。よって、これは h が極めて小さいとき、

$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

つまり、$f(x+h) - f(x) = f'(x)h$

この式の新しい見方：

<1>　左辺は「(微小な変化で引き起こされる）差」であり、右辺の‘導関数’は「比（と微小な変化の積)」である。

<2>　「比」を考える代わりに「差」を考えることを示唆している。

これは、難しい「比」を近似化し、見えるものに変えることでもある。

(7) 最大最小（極値問題）

＜教材例１＞　$y = -x(x-6)$ と、定点 $A(4,5)$ を通る直線 ℓ とで囲まれた図形の面積が最小となるのは、ℓ がどのようなときか？

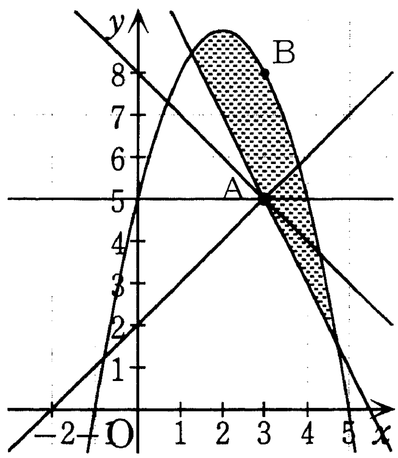


図3

解）積分計算せずに、直接、導関数を計算する；

$$\Delta S = \frac{1}{2}a^2 \sin\Delta\theta - \frac{1}{2}b^2 \sin\Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2}(a-b)(a+b)\sin\Delta\theta$$
$$= \frac{1}{2}(a-b)(a+b)\Delta\theta$$

$a=b$ のとき、最小である。これは、定点Aと x 座標が同じグラフ上の点(4,8)での接線と平行な直線のときである。図3とカバリエリの原理で描いた図4を比較するとよい。

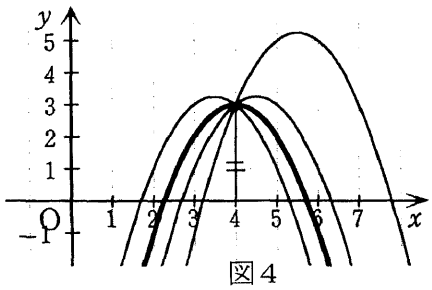


図4

(8) 導関数のグラフの描き方

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)\cdot h$$

左辺は差、右辺は比（とずれの積）を表している。

左辺は導関数、右辺は任意の点での微分係数とも読める。大胆な表現をすれば、導関数とは“ちょっとのずれ”を y 軸方向無限に拡大したものと言える。導関数の重要なことは、正負、0となる変数の区間等であって、グラフの大ざっぱな概形を描くときは、微分係数の大小は重要であるが、個々の値そのものについてはあまり関心がない。

左辺の差のグラフ $y=f(x+h)-f(x)$ を

描くことで、右辺の比のグラフ $y=f'(x)$ を描くことが可能になる。

<導関数のグラフの描き方>

元になる基本的な関数のグラフがすでに描けている場合に、その導関数（それらの加減乗除の関数の導関数）のグラフがどうなるか、微分計算を用いず（関数の式がない場合も含め）にグラフの概形を描いてみる。

「比べる」とは、‘比’と‘差’

1）各点での接線の傾き（微分係数）の大きさを調べながら描く。
2）関数の微小な変化を利用した導関数の定義による方法

1）を連続的に実行するために2）を付け加えた学習をする。

「$y=f(x+h)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向 $-h$ だけ平行移動したものである。」

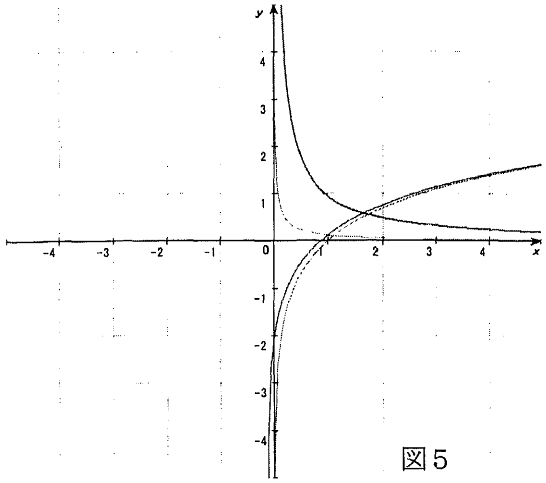


図5

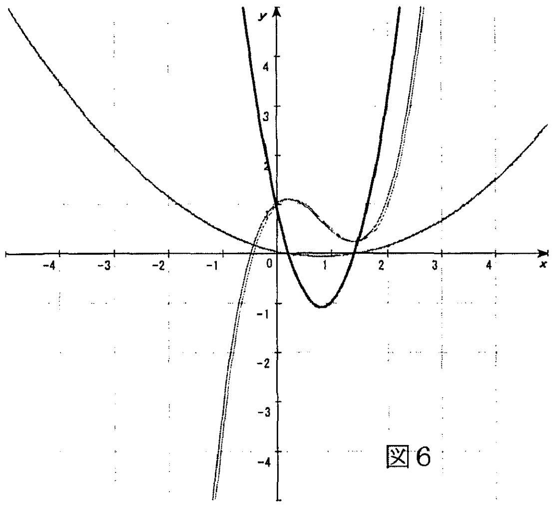


図6

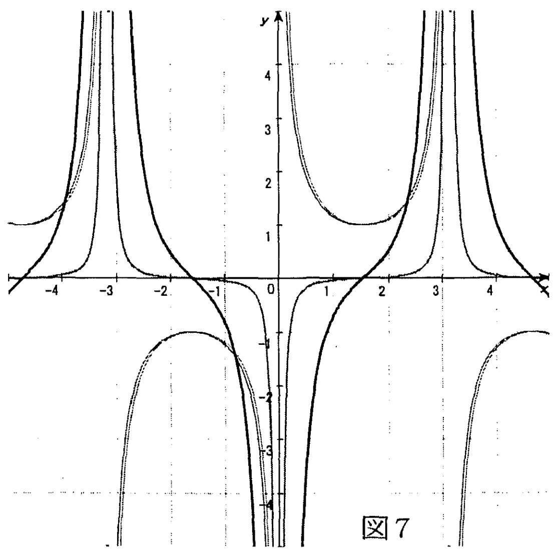


図7

この発見によって、事態は急展開する。グラフを描いて、その差およびそれを拡大したグラフを描いてみ

たのが図５〜図７である。描く際の要領は、平行移動によって、２つのグラフが x 軸に平行に近いほど差は小さく、y 軸に平行に近いほどその差は大きいことである。これによって、導関数が未知の関数である指数関数 $y=2^x$，対数関数 $y=\log x$，三角関数 $y=\sin x$ 、分数関数などの導関数を簡単にチェックできるところが優れている。$f(x)$ のグラフを与えて $f'(x)$ のグラフを描いたり、$f'(x)$ のグラフを与えて $f(x)$ のグラフを描いたりすることを授業で扱い期末考査にも出題した：生徒は工夫してグラフを描くことに興味を持った。後者はまさに微分方程式を解いていることになる。

$y=f'(x)$ のグラフから、$f(x)=\int f'(x)dx$（初期条件付き）のグラフを考えさせる。こちらの方が描きにくさがある。

(9)　微分計算の基本公式導出

ｎ次多項式関数について

①単項の微分　$f(x)=x^n$ の微分

$$f(x+h)=(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+(h^2\text{を含む項})$$
$$=f(x)+nx^{n-1}h+(h^2\text{を含む項})$$

よって、$f'(x)=nx^{n-1}$

②合成関数 $f(x)=(ax+b)^n$ の微分

$$f(x+h)=(a(x+h)+b)^n=((ax+b)+ah)^n$$
$$=(ax+b)^n+n(ax+b)^{n-1}ah+(h^2\text{を含む項})$$
$$=f(x)+n(ax+b)^{n-1}ah+(h^2\text{を含む項})$$

よって、$f'(x)=na(ax+b)^{n-1}$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+(h^2\text{を含む項})$$
$$g(x+k)=g(x)+g'(x)k+(k^2\text{を含む項})$$
$$f(g(x+k))=f(g(x)+g'(x)k+k^2\text{を含む項})$$
$$=f(g(x))+f'(g(x))(g'(x)k+(k^2\text{を含む項}))+(k^2\text{を含む項}$$
$$=f(g(x))+f'(g(x))g'(x)k+(k^2\text{以上を含む項})$$

微分の線形性に関して

③項別微分

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$
$$f(x+h)=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n)$$
$$+h(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1})+(h^2\text{を含む項})$$
$$\therefore f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1}$$

④テーラー展開（マクローリン展開）

$$f''(x)=2a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$$
$$f'''(x)=3\cdot2\cdot1a_3+4\cdot3\cdot2a_4x+5\cdot4\cdot3a_5x^2+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $f(0)=a_0$　，　$f'(0)=a_1$，

$f''(0)=2a_2$，$f'''(0)=3\cdot2\cdot1a_3$，$\cdots$，$f^{(n)}(0)=n!a_n$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

⑤近似式を作る　　③，④より、

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

例）$(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$

$$=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+h^3$$

⑥数列（差分）とのリンク（近似式と誤差）

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)\quad,\quad f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(x)dx$$

分点を $x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n$ と決め、

$x_k+h=x_{k+1}$

$f(x_k)=a_k$，$f(x_{k+1})=a_{k+1}$ $(k=0,1,2,3,\cdots)$　とおく。

$\dfrac{dy}{dx}\cong\dfrac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}=\dfrac{a_{k+1}-a_k}{h}$ とおくと、微分（連続）から差分（離散）へと近似できる。

$a_{n+1}=a_n+h\cdot f'(x)$，　$a_{k+1}=a_k+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)$

と近似式で表現でき、

$$a_{n+1}=a_n+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=a_0+\sum_{k=0}^{n}f'(x_k)(t_{k+1}-t_k)$$

ここで、$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$＝定数 ならば、$\{a_n\}$ は等差数列、$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=ra_n$ ならば、$\{a_n\}$ は公比 $1+r$ の等比数列である。

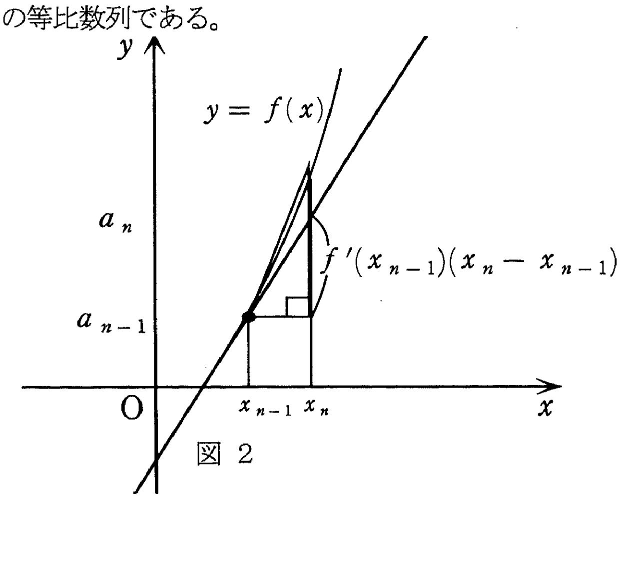


図 2

(10)　母関数と微分方程式

微分方程式を解く際に、変数分離法や積分、$x=e^{rt}$（rは複素数）　と仮定する置換やラプラス変換などがある。これらで解けないときは、含まれる関数をテーラー級数で近似するか、解となる関数$x=f(t)$がテーラー級数

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

（収束を考えない級数を母関数とよぶ）に展開されると仮定して解く方法である。それでも解けない場合は、コンピュータを利用たて数値解析（ルンゲ・クッタ法など）を用いて解く。

ここでは、母関数の多項式関数の係数に着目して、係数の漸化式を作成し、その解を求めて、関数を決定する方法である。
原理：xを従属変数、tを独立変数とする微分方程式の未だ分かっていない解を

$$x=f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

・・・①と仮定する。

微分方程式に含まれる、$\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を①で計算し、元の微分方程式に代入する。

このとき、係数の数列$\{a_k\}$に関する漸化式が得られる。

この漸化式が解ければ級数が決定される。この級数に相当する関数を探し出せれば、これが求める解（関数）である。
<教材例>バネの振動を表す微分方程式：

$\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dx}{dt})+cx=0$　つまり、　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+cx=0$

初期条件は、$t=0$のとき、$x=x_0, \dfrac{dx}{dt}=0$とする。

[これは、質量M（kg）のおもりを、長さ（m）のひもでぶら下げた振り子の運動方程式を考えると、ひもの張力T（kg・m／s²）と重力Mg（kg・m／s²）
接線方向の重力成分は、$\mathrm{Mg}\sin\theta$であるから、接線方向の移動量をx（m）とすると、

運動方程式は、$M\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{Mg}\sin\theta$　で、角θが小さい場合は、$\sin\theta\fallingdotseq\theta$であり、$x=\ell\theta$とするとき、

$\ell\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{g}\theta$を書き換えた式である]

解法）
$x=f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$
とおく、

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)=2a_2+3\cdot2a_3t+4\cdot3a_4t^2+\cdots+(n+1)na_{n+1}t^{n-1}+\cdots$$

ここで、初期条件を考えて、$a_0=x_0$，$a_1=0$

$$x=x_0+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

$$cx=cx_0+ca_2t^2+ca_3t^3+\cdots+ca_{n-1}t^{n-1}+\cdots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+cx=(2a_2+cx_0)+(3\cdot2a_3)t+(4\cdot3a_4+ca_2)t^2+\cdots+((n+1)na_{n+1}+ca_{n-1})t^{n-1}+\cdots$$

$$2a_2+ca_0=0,$$

$$3\cdot2a_3=0$$

$$4\cdot3a_4+ca_2=0$$

・・・・・・・・・・・

これより、漸化式は、

$$(n+1)na_{n+1}+ca_{n-1}=0$$

奇数項は０で、偶数項は、

$$a_2=-\frac{1}{2}cx_0,$$

$$a_4=-\frac{1}{4\cdot3}ca_2=\frac{1}{4!}c^2x_0,$$

$$a_6=-\frac{1}{6\cdot5}ca_4=-\frac{1}{6!}c^3x_0,\ \cdots$$

これより、

$$x=x_0(1-\frac{1}{2!}ct^2+\frac{1}{4!}c^2t^4-\frac{1}{6!}c^3t^6+\cdots)$$

ここで、$z=\sqrt{c}t$とおくと、

$x=x_0(1-\dfrac{1}{2!}z^2+\dfrac{1}{4!}z^4-\dfrac{1}{6!}z^6+\cdots)$　　これは、$\cos z$のテーラー級数展開であるから、

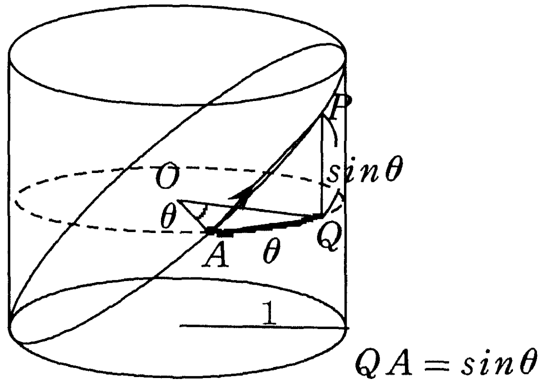
$x=x_0\cos z=x_0\cos\sqrt{c}t$　これが求める解である。

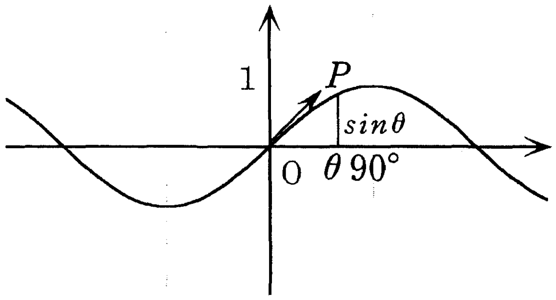
生徒には、単振動 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-x$　（物理でも出てくる形）を考えさせるのがよい。

(11)　オイラーの定理を導く

(1) $y = f(x) = \sin x$ の導関数

半径1、高さ2の円柱を図のように45°で切断すると、$PQ = \sin\theta$ だから、切り口を展開すると、そのグラフはサインカーブとなる。
また、点Aでの接線の傾きは切断角度から1であることと、導関数の描き方によって、$\sin x$ の導関数が $\cos x$ とわかる。

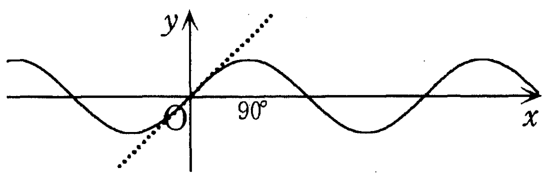


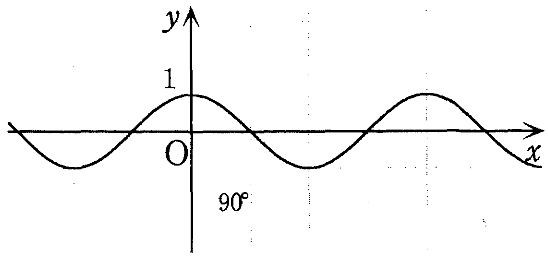


さらに、$\cos x$ の導関数が $-\sin x$ であることも確認できる。
<教材例1>微分方程式 $f''(x) = -f(x)$，$f(0) = 0$ の母関数を決定しよう。
解)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$





$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

これより、$2a_2 = -a_0$，$3\cdot 2a_3 = -a_1$，

$4\cdot 3a_4 = -a_2$，$5\cdot 4a_5 = -a_3$，$\cdots$，

$n(n-1)a_n = -a_{n-2}$，$\cdots$

よって、

$$f(x) = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$f'(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

微分方程式 $f'(x) = f(x)$ について「導関数のグラフ描画方法」によって、単調で変曲点がないことがわかる。
<教材例2> $f'(x) = f(x)$，$f(0) = 1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよう。
解)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

これらから、$a_0 = 1, a_1 = 1$　と

$2a_2 = a_1$，$3\cdot 2a_3 = a_2$，

$4\cdot 3a_4 = a_3$，$5\cdot 4a_5 = a_4$，$\cdots$，

$n(n-1)a_n = a_{n-1}$，$\cdots$　によって、

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

つまり、

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

これを、e^x と定義する。
つまり、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

ここで、右辺の x に ix を代入すると、

$$1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \cdots$$

$$= (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots)$$

$$+ i(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots)$$

$$= \cos x + i\sin x$$

これを e^{ix} と定義すると、

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

これをオイラーの定理という。

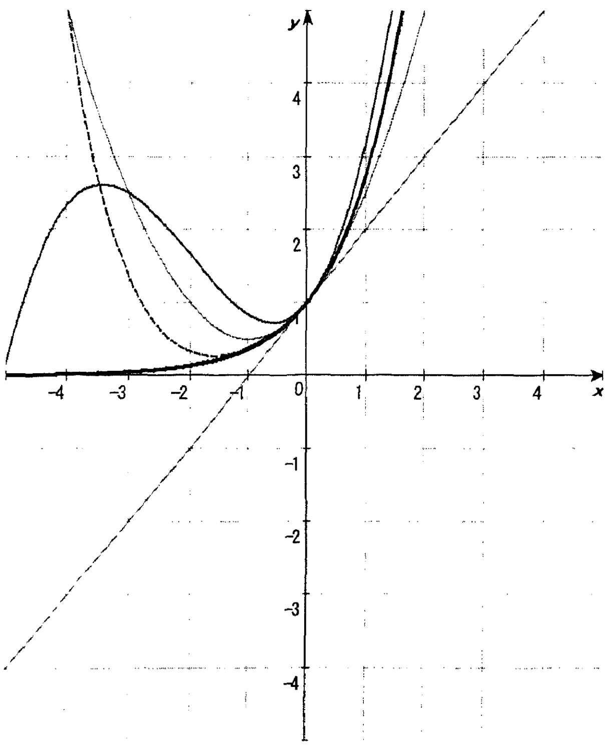
このことで、指数関数と三角関数を、多項式関数を仲介とし、数列と微分の手法によって、橋を架けたことになる。すごいことだ！微分方程式

微小な変化に注目して等式（近似式）を作り、微分方程式を導く事から始めて、様々な具体的事象にかかわるものへ進める。微分方程式の解法については、簡単に求積できる変数分離型にとどめ、深入りしない。

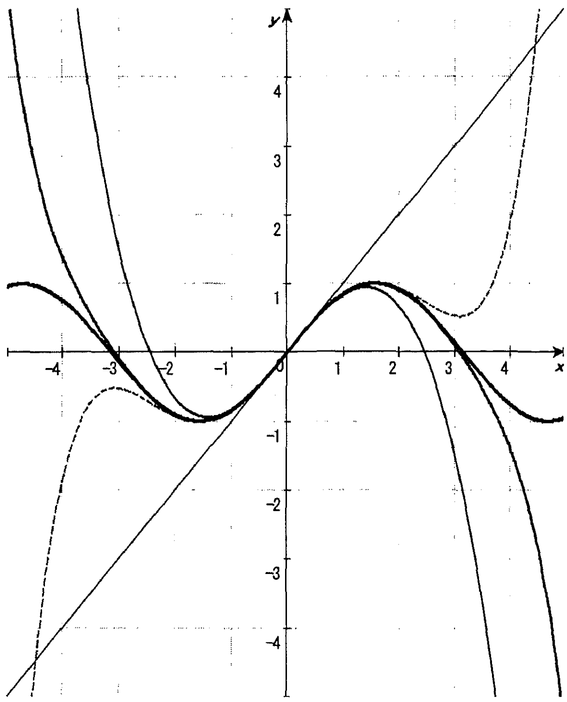
基本的な微分方程式

関数$y = f(x)$について、xの微小な変化量Δxに対するyの変化量をΔyとして、Δyの近似式から$\dfrac{dy}{dx}$の式を導くことは、面積を求めることに関連して、数学Ⅱでも行っている。体積や長さについても同様の方法で求められることまで確認しておきたい。

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$



(12) **面積**

曲線$y = f(x)$ $(\geqq 0)$とx軸の間で、
aからxまでの部分の面積を$S(x)$とする。
xの微小な変化量Δxに対する$S(x)$の変化量をΔSとすると、Δxが微小であるから長方形で近似して、

$\Delta S \fallingdotseq \Delta x \cdot f(x)$　より、$\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \fallingdotseq f(x)$

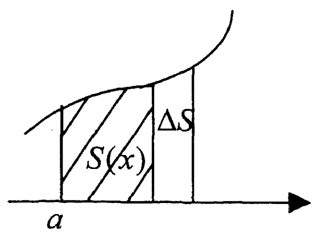
$\Delta x \to 0$のときを考えて、

$S'(x) = \dfrac{dS}{dx} = f(x)$　　----- ①

上の①は微分方程式であり、これから関数$S(x)$を求めることができる。

①より、$S(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$　（Cは積分定数）とすると、　$S(a) = F(a) + C = 0$　より、
$C = -F(a)$

よって、$S(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$



(13) **体積**

座標空間にある立体について、
$x=a$ から平面 $x=k$ までの間にある
部分の体積を $V(k)$ 、平面 $x=k$ での切
り口の面積を $S(k)$ とする。
k の微小な変化量 Δk に対する $V(k)$ の変化量を ΔV
とすると、Δk が微小であるから底面積 $S(k)$ の柱体
で近似して、

$$\Delta V \fallingdotseq \Delta k \cdot S(k) \quad より、\frac{\Delta S}{\Delta k} \fallingdotseq S(k)$$

$\Delta k \to 0$ のときを考えて、

$$V'(k)=\frac{dV}{dk}=S(k)$$

これより、面積の場合と同様に、

$$V(k)=\int_a^k S(k)dk$$

を得る。

(14) **$f'(x)$ の正負の変化と $f(x)$ のグラフの凹凸**

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2 \quad ・・・①$$

３点 $A(t,f(t))$, $B(t+h,f(t+h))$, $C(t+2h,f(t+2h))$
を通る放物線を調べる：２次の係数を a とおくと、
２点A，Bを通るすべての放物線は $t-y$ 座標平面で、

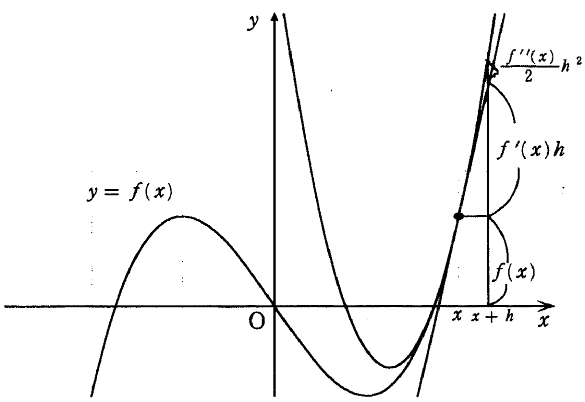
$$y=a(x-t)(x-(t+h)) +\frac{f(t+h)-f(t)}{h}(x-t)+f(t)$$

であるから、これが、点Cを通るから、

$$f(t+2h)=a((t+2h)-t)((t+2h)-(t+h)) +\frac{f(t+h)-f(t)}{h}((t+2h)-t)+f(t)$$

ゆえに、

$$f(t+2h)=2ah^2+2\{f(t+h)-f(t)\}+f(t)$$



$$a=\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{2h^2} \quad これと①から、$$

$$f''(0)=\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{h^2}$$

7　数学特別講座

7．1　はじめに

数学科では、希望する高校生を対象として、期末考査が終了した特別授業期間中などに，大学等の研究者による数学特別講座を企画した。特別講座は１回90分の中で、１つのテーマについて講演してもらうものである。また，大学の研究室訪問も企画した。

これらの目的は、高校の授業で学ぶ数学が将来どのように発展するのか，どのように活用されるのか等を知ることを通して，生徒の数学への興味・関心を高めるとともに，数学に対する理解を深め，数学を学ぶ意義を感じてもらうことである。したがって、特別講座の講師の専門分野は，数学に限定せず、卒業生アンケートの結果を踏まえ「統計」・「微分方程式」など数学を応用する分野を含めた内容になるようにした。

数学科では特別講座・研究室訪問の内容を普段の授業で使えるように、教材の構成等について検討した。ここでは６本の教材例を紹介する。

なお、実施した特別講座・研究室訪問のテーマと日程・講師は次の通りである。なお、所属は当時である。

2002 年度

＊第１回数学特別講座　　「結び目理論 入門」
　７月 10 日　児玉　大樹　(本校 41 期卒業生)
　東京大学大学院数理科学系研究生　理学博士

＊第２回数学特別講座　　「暗号理論と整数論」
　７月 17 日　伊藤　哲史（本校４４期卒業生)
　東京大学大学院数理科学系　博士課程２年

＊第３回数学特別講座　「初等超越関数の世界　楕円積分論からみた初等超越関数」
　12 月 12 日　渡邊　公夫　筑波大学数学系教授

＊第４回数学特別講座　「曲面の分類(モース理論入門)」12 月 16 日　児玉　大樹　(本校 41 期卒業生)
　東京大学大学院数理科学系研究生　理学博士

＊第５回数学特別講座　　「フラクタル入門」
　12 月 17 日　橋本　康　(本校 37 期卒業生)
　東京大学大学院工学系研究科物理

＊第６回数学特別講座　「科学の文法：統計科学の創生と発展」３月 11 日　椿　広計 (本校 23 期卒業生)
　筑波大学大学院ビジネス科学研究科教授

＊第７回数学特別講座「3 次特殊直交群 SO(3)の幾何学-「フーコーの振り子」のむこうにみえてくるもの-」３月 12 日　伊藤光弘　筑波大学数学系教授

＊第８回数学特別講座　　「一様な直線とは何か－積分幾何学入門－」３月 13 日　腰塚　武志
　筑波大学社会工学系　教授

2003 年度

＊第 9 回数学特別講座　「現代ファイナンス理論入 7 月 11 日（金）永原裕一（本校 27 期卒業生)
　明治大学政治経済学部助教授

＊第 10 回数学特別講座　「応用数学入門：フーリエ級数の世界」　～三角関数の先に広がる果てしない世界～　7 月 14 日　奈良高明（本校 39 期卒業生）東京大学大学院情報学環講師

＊第 11 回数学特別講座　「政策への数理アプローチ」
　7月 16 日　藤田康範　慶應義塾大学経済学部助教授

＊第 12 回数学特別講座　「個性豊かな多項式たち」
　12 月 16 日　渡邊公夫　筑波大学数学系　教授

＊第 13 回数学特別講座　「青春は詩集と楽譜と論文と共に　～多面体の多面的考察～」12 月 17 日　秋山仁　東海大学教育開発研究所　教授

＊研究室訪問　12 月 12 日　訪問研究室：東京大学工学部　計数工学科数理情報工学杉原研究室
　杉原厚吉　東京大学大学院情報理工学系　教授
「だまし絵と立体イリュージョン」

2004 年度

＊数式処理ソフトの講習会　７月９日　数式処理ソフト Mathematica 入門

＊第14回数学特別講座　「医薬品の効果と安全性の評価」－EBM (Evidence-Based Medicine) は確率・統計から－７月９日　岩崎　学(成蹊大学工学部教授)

＊数学特別講座　「組合せの確率モデル」
　９月11日　高木英明（筑波大学大学院教授）

2005年度

＊第 17 回数学特別講座　統計学と機械学習理論とモデル選択―賢すぎる人工知能は賢くない！？―７月８日　小林　景(統計数理研究所、本校 44 期卒業生)

＊第18回数学特別講座　2階線形常微分方程式が定義する多項式達―多項式の世界へようこそ！―７月 11 日　渡辺　公夫　(筑波大学)

＊第 19 回数学特別講座　モンテカルロ・シミュレーション入門　－経済の中の統計学－

　12 月 15 日　中島　上智（東京大学大学院経済学研究科、日本銀行調査統計局リサーチスタッフ、本校４８期卒業生）

＊第 20 回数学特別講座　リスクを減らせ！
　―経済の中の統計学―３月 10 日　中島　上智
　(東京大学大学院経済学研究科、日本銀行調査統計局リサーチスタッフ、本校４８期卒業生)

７．２　特別講座の教材化

（１）組合せの確率モデル

2004年９月11日，筑波大学教授・高木英明先生によるＳＳＨ特別講座『組合せの確率モデル』が開講された。希望者対象ながら多くの在校生の受講があり，アンケート結果も好評であった。特に事前に『赤銅鈴之助』問題が宿題として出されたり，本校の在校生全クラスにおいて誕生日調査を行ってそのデータを用いた説明があるなど，中学生を含む参加者にとって親しみやすく印象深い内容となった。また，数学史のトピックスなども紹介しており，中高の授業のヒントが含まれる講義となった。この講義をもとに，実際に教室で活用できる教材を考えたい。

(1) Laplace の原理

> 標本空間Ωにおいて，試行の結果としてすべての標本点が「同様の確からしさ」で実現するとき，事象Ａの確率は　$P(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}$　である。ここで，$|A|$ はＡに属する標本点の数を表す。

フランスの数学者ラプラス（1749～1827）はその著書『解析的確率論』の中でこのように確率を定義した。

例　サイコロの目が奇数になる確率は

$$\Omega := \{1,2,3,4,5,6\};\quad A:\{1,3,5\}\quad \text{より}$$

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

しかしここで出てくる「同様の確からしさ」という概念は重要である。

例えば，同じフランスの数学者ダランベール（1717～1783）は，次のように考えた。

１枚の硬貨を２回投げるときに起こりうるすべての場合は

①　２回とも表
②　１回が表で１回が裏
③　２回とも裏

の３通りである。少なくとも１枚が表である確率はそのうち２通りだから，その確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

（ダランベールの誤り）

これは明らかに間違いである。①～③は同様の確からしさとは言えない。

（２）サイコロの目の和

賭け事などでお馴染みのサイコロの目の和についても，「同様の確からしさ」に注意しなくてはいけない。

例　目の和が６のなる確率

①全ての目の和を次の２１通りと考えて

１と１，１と２，１と３，１と４，１と５，１と６，
２と２，２と３，２と４，２と５，２と６，
３と３，３と４，３と５，３と６，
４と４，４と５，４と６，
５と５，５と６，
６と６

よって $\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}=0.14\cdots$

②全ての目の和は次の表のように３６通りある
このうち和が６となるのは★の５通り

＼	1	2	3	4	5	6
1					★	
2				★		
3			★			
4		★				
5	★					
6						

よって $\dfrac{5}{36}=0.13\cdots$

①　と②のどちらが正しいかは簡単である。

（３）Demere の逆説

> １つのサイコロを４回投げて少なくとも１回６の目が出ることは，２つのサイコロを２４回投げて少なくとも１回２つとも６の目が出ることよりも起こりやすい。なぜか。

フランス人ド・メレ（1607～1684）が数学者パスカル（1623～1662）に出した問題である。

彼は賭け事の中で等しいと考えた出方がそうとは限らない場合に気づき，パスカルに相談したという。

解）１つのサイコロを４回投げて少なくとも１回６の目が出る確率は$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=0.52\cdots$

一方２つのサイコロを２４回投げて少なくとも１回２つとも６の目が出る確率は$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.49\cdots$

古代からサイコロは賭け事に使われてきたが，サイコロ賭博に関連した問題から確率論が芽生えた。特にパスカルとフェルマー（1601～1665）の間に交わされた賭の問題に関する文通は有名である。

ド・メレからパスカルによせられた問題としては次のような問題が知られている。

問　力量の同じ２人Ｐ，Ｑが賭けをする。最初に掛け金として２人は同額ずつ出し合う。勝負を何回かして先に３回勝った者が掛け金をもらう。しかしＰが２回，Ｑが１回勝った時点で勝負は中止となった。掛け金はどう配分すべきか。２：１の比で分けるべきか。

解）
Ｐ，Ｑの勝った回数ｐ，ｑを（ｐ，ｑ）で表す。
（２，１）以降あり得る場面を全て数え上げる。
分岐のうち上はＰが勝つ場合，下はＱが勝つ場合で，力量の同じ２人ならどの分岐も$\frac{1}{2}$ずつの確率である。

（２，１）→（３，１）
（２，１）→（２，２）→（３，２）
（２，２）→（２，３）

したがって中止の後Ｐが勝つ確率は，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，

Ｑが勝つ確率は，$\frac{1}{4}$，したがって掛け金は３：１の比に配分するべきである。

この問題に対し，パスカルは次のようにアドバイスしたという。ＰはＱに「次の勝負に自分が勝てば３回先勝だから全額もらえて，負けてすぐ中止になったら２対２で半額ずつ配分される。だからまずどちらにしてももらえる半額をくれ。残りは次の勝負で決まるからそれも半額くれ」と言えばよい。

問　Ｘ回２つのサイコロを投げる。６のぞろ目が１度でも出たら勝ちという賭けにおいて，勝つ確率が$\frac{1}{2}$を超えるのはＸが何回以上か？

解）　賭けに勝つ確率が$\frac{1}{2}$を超えるのは，負ける確率が$\frac{1}{2}$以下となることであるからｎ回の試行において

$\left(\frac{35}{36}\right)^n\leq\frac{1}{2}$を満たすｎを求める。対数をとって

$$n\log_{10}\frac{35}{36}\leq\log_{10}\frac{1}{2}$$

$$n\{\log_{10}5+\log_{10}7-2\log_{10}6\}\leq-\log_{10}2$$

対数の値を代入し，　$n\geq 24.\cdots$
よって　Ｘが２５回以上の時

（４）くじの引き方

ｎ本のくじのうち１本が当たりである。最初に引くのが得かどうか。ただし引いたくじは戻さない。

解）最初に引く人が当たる確率は　$\frac{1}{n}$

２番目に引く人が当たる確率は

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

３番目に引く人が当たる確率は

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}$$

…

同様に最後に番目に引く人が当たる確率は

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n-2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n}$$

くじを引く順番と当たる確率は関係がないことがわかる。したがって何番目に引いても当たる確率は同じである。

（5） 合鍵が見つかるまでの平均試行回数

N 個の鍵の束の中から１つずつ取り出して鍵穴に入れる。合鍵がみつかるまで平均して何回ためすだろうか

解）合鍵が見つかるまでの試行回数をＫとする。

・試した鍵を毎回もとに戻す場合

$$P\{K=k\}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\times\frac{1}{n}$$

であるから平均は

・ 試した鍵をもとに戻さない場合

$$P\{K=k\}=\frac{1}{n}$$

であるから平均は

$$E[K]=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{K=k\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}k$$

$$=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

（6） 二項係数といくつかの公式

区別できるｎ個のものの中から順序を問題にしないでｍ個のものを取り出す組み合わせの数は $\binom{n}{m}={}_nC_m=\frac{n!}{(n-m)!m!}$

この組み合わせの数は二項展開の係数であり

二項定理

$$(x+y)^n=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m y^{n-m}$$

が成り立っている。また、取り出す組み合わせをある特定のものひとつが含まれる場合と含まれない場合に分ければ,

$$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$$

が成り立つことがわかる。これを用いて，二項係数を三角状に書き並べたパスカルの三角形を作ることができる。

$$\begin{array}{c}1\\1\quad 1\\1\quad 2\quad 1\\1\quad 3\quad 3\quad 1\\1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\ \vdots\end{array}$$

この三角形の数字

- 端の並びはすべて１
- 次の並びは自然数１，２，３，４，…
- その次の並びは三角数１，３，６，１０，…
- その次の並びは四面体数１，４，１０，…

となっている。

三角数は自然数の和で表さるので

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ドイツの数学者ガウス（１７７７～１８５５）は９歳のときこの和を次のように計算したと言われている。

$$\begin{array}{l}1\ +\ 2\ +\ 3\ +\cdots+\ n\ =S\\ \underline{n\ +\ (n-1)+\ (n-2)+\ \cdots+1\ =S}\\ \qquad\qquad (n+1)n=2S\end{array}$$

よって $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$ である。

等比数列の和については $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$

これは実際にｎ次式x^n-1を１次式$x-1$で割った商を計算してもよいし，和をＳとおいてｘＳとＳの差をとっても簡単に示せる

無限級数の和　$|x| < 1$のとき

$$\cdot\ 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

$$\cdot\ 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

第２式は第１式の両辺を微分したものである。
またネイピアの数については

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots = e^x$$

$$e = 2.718\cdots$$

である。

（７）　包除原理と複合確率の公式

和事象を積事象で表す

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n|\\ &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum|A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \cdots\\ &\quad + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned}$$

ｎ＝２のとき

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

であり，ｎ＝３のとき

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C|\\ &\quad - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|\\ &\quad + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

である。

複数の事象の和事象の確率は，それらのうち少なくとも１つが起こる確率を表し、積事象の確率は，それらがすべて同時に起こる確率を表す。２つの事象Ａ，Ｂに関して言えば，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

であり，３つの事象Ａ，Ｂ，Ｃならば

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C)\\ &\quad - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A)\\ &\quad + P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

である。さらに

$$S_0 = 1$$

$$S_m = \sum P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \cdots \cap A_{i_m}\right)$$

つまりＳｍはm個の事象が起こる確率の和であるとすれば，少なくとも１つの事象が起こる確率は

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots$$

$$= \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}S_m$$

である。

ちょうどｋ個の事象が起こる確率$P(k)$は

$$P(k) = S_k - \binom{k+1}{k}S_{k+1} + \binom{k+2}{k}S_{k+2} - \cdots$$

$$= \sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}S_m$$

である。

さらに少なくともｋ個の事象が起こる確率P_kは

$$P_k = S_k - \binom{k}{k-1}S_{k+1} + \binom{k+1}{k-1}S_{k+2} - \cdots$$

$$= \sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}\binom{m-1}{k-1}S_m$$

これらの確率の関係は

$$P_k = \sum_{j=k}^{n}P(j)$$

$P(k) = P_k - P_{k+1}$　したがって

$$P_0 = 1$$

$$P(k) = 1 - P_1$$

（8） 起こる事象の数

事象A_1, A_2, $\cdots$, A_nについて関数$I(A_i)$の値を，事象が起こらないときは0，起こるときは1と定義しよう。

$I(A_i)=0$ である確率は $1-P(A_i)$

$I(A_i)=1$ である確率は $P(A_i)$

であるから，平均（期待値）$E[\ I(A_i)\ ]$は

$$E[\ I(A_i)\ ]=0\times\{1-P(A_i)\}+1\times P(A_i)=P(A_i)$$

起こる事象の数をNとおけば

$$\sum_{i=1}^{n} I(A_i)=N$$

であり，Nの平均は

$$E(N)=E\left[\sum_{i=1}^{n} I(A_i)\right]=\sum_{i=1}^{n} E[I(A_i)]=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

2次のモーメントは

$$E(N^2)=E\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} I(A_i)\right\}^2\right]$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{n}\{I(A_i)\}^2+2\sum I(A_i)I(A_j)\right]$$

$$=\sum P(A_i)+2\sum P(A_i\cap A_j)$$

（9） いろいろな応用問題

確率の理論を応用してモデル化してみよう。

問1 玉入れの基本問題

> ｎ個の箱にｒ個の玉を入れる。入れ方は何通りあるか。
> ① 箱にも玉にも番号がついている。
> ひとつの箱にいくつ入れても良い。
> ② 箱にも玉にも番号がついている。
> ひとつの箱には２つ以上いれない。
> ③ 箱には番号がついているが玉は区別がつかない。
> ひとつの箱には２つ以上いれない。
> ④ 箱には番号がついているが玉は区別がつかない。
> ひとつの箱にいくつ入れても良い。

解）①１つの玉についてｎ通りの行き先があるので

$$n\times n\times n\times\cdots\times n=n^r={}_n\Pi_r$$

② １つ目の玉にｎ通り，２つ目の玉に（ｎ―１）通りの行き先があるから

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}={}_nP_r$$

③玉は区別できないので玉の入る箱を３つ選ぶ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots3\cdot2\cdot1}=\frac{{}_nP_r}{r!}={}_nC_r$$

④ 重複を許すのであれば，ｎ種類からｒ個選ぶ

$${}_{n+r-1}C_r={}_nH_r$$

問２ 場所占めの問題

> ｎ個の箱にｒ個の玉をでたらめに入れる。どの箱にも高々１つしか玉が入らない確率$P\left(\frac{r}{n}\right)$は？

解）すべての事象をΩとすれば，$|\Omega|=n^r$

どの箱にも高々１つの玉しか入らないという事象をＡとすれば

$|A|=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ であるから

$$P\left(\frac{r}{n}\right)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{n!}{(n-r)!n^r}$$

$$=1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$$

特にｎ個の箱にｎ個の玉をでたらめに入れるとき，すべての箱にちょうど１つずつ入る確率$P\left(\frac{n}{n}\right)$は

$P\left(\frac{n}{n}\right)=\frac{n!}{n^n}$ である。以下に$P\left(\frac{n}{n}\right)$の値をあげる。

n＝1のとき	1
n＝2	0．5
n＝3	0．22222
n＝4	0．09375
n＝5	0．0384
n＝6	0．015432

nが大きいときは$P\left(\frac{n}{n}\right)\approx\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$

問3　誕生日の問題

r人のクラスで同じ誕生日の人がいる確率$\overline{P}(r)$は？

閏年は考えず1年は365日であるとする。

これは問2の場所占めの問題と同じととらえれば，日が箱で人が玉に対応する。同じ誕生日の人がいない確率は

$$P\left(\frac{r}{365}\right)=1\cdot\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{365}\right)$$

$$=\binom{365}{r}\frac{r!}{365^r}$$

したがって

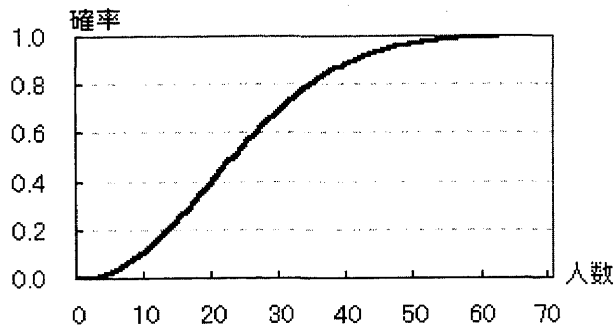
$$\overline{P}(r)=1-P\left(\frac{r}{365}\right)=1-\binom{365}{r}\frac{r!}{365^r}$$ である。

以下に$\overline{P}(r)$の値をあげる。

r＝5のとき	0．02714
r＝10	0．11695
r＝20	0．41144
r＝30	0．71632
r＝40	0．89123
r＝50	0．97037
r＝60	0．99412
r＝70	0．99916

$\overline{P}(22)\approx 0.4757$,　$\overline{P}(23)\approx 0.5073$　なので，23人以上のクラスでは同じ誕生日のいる人がいる確率が0．5より大きいことになる。

これをグラフにすると次のようになる。



今回の講義ではこの問題をついて事前に本校の実例を調査し，理論と確認した。以下がそのデータである。筑波大学附属駒場中高の21クラスについて誕生日の重なりを調査した。下の数値はクラス内で同じ誕生日のペアの数である。なお，★は3人の重なりを示す。

	クラス	1年	2年	3年
中学	A	4	5	2
	B	4	6	2
	C	1★	3	5
高校	1	2	1	4
	2	5	3	3
	3	1	1	2
	4	3	2	1

（調査時期　2004年7月）

このデータを見ると，1クラス平均41名の在籍数である本校では，同じ誕生日のペアがいないクラスはなく，多いクラスでは6ペアもいた。$\overline{P}(40)\approx 0.89$であるから，1～2クラスはペアがいないクラスがあるかと思われたがそれはなかった。

問4　空箱の数

n個の箱にr個の玉をでたらめに入れるとき，空箱の数$N\left(\frac{r}{n}\right)$の確率分布は？

箱iが空であるという事象をA_iとすれば，

$$P(A_i)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^r$$

$$P\left(A_i \cap A_j\right)=\left(1-\frac{2}{n}\right)^r$$

…

$$P\left(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{im}\right)=\left(1-\frac{m}{n}\right)^r$$ である。

$N\left(\frac{r}{n}\right)$ の確率分布は次のようになる。

$$P\left\{N\left(\frac{r}{n}\right)=k\right\}=\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{n-k-1}(-1)^m\binom{n-k}{m}\left(1-\frac{k+m}{n}\right)^r$$

平均は

$$E\left\{N\left(\frac{r}{n}\right)\right\}=\sum_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^r$$

ｎ個の箱にｎ個のボールをでたらめに入れるとき，空箱の数の平均は

$$E\left\{N\left(\frac{n}{n}\right)\right\}=n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

ｎが十分大きいときこの値は $\frac{n}{e}$ に近くなる。すなわち平均して約 $\frac{1}{3}$ が空箱になる。

本校の誕生日データから，クラス毎に誰の誕生日でもない日数の頻度を計算し，理論値 $P\left\{N\left(\frac{40}{365}\right)=k\right\}$ と比較したら次のような結果になった。

誰の誕生	クラス	頻度	理論値
３２５	０	０	０．１０９
３２６	４	０．１９０	０．２６０
３２７	６	０．２８６	０．２９０
３２８	４	０．１９０	０．２００
３２９	３	０．１４３	０．０９６
３３０	３	０．１４３	０．０３４
３３１	１	０．０４８	０．００９
３３２	０	０	０．００２
計	２１	１	

理論値との差については，３６５日同じ確からしさで子供が産まれていないということかもしれない。

問５　カード集め

この課題は，最近の子供に人気のカード集めに直結した話題とあって，生徒の興味を引いた。

> ｎ種類のカードのうちの１枚がおまけについているキャラメルを１つずつ買う。すべてのカードが集まるまでに買うキャラメルの数 $R(n)$ の平均値は？

集まったカードの種類がｍ－１からｍに増えるまでに買うキャラメルの数を X_m とすると

$$R(n)=X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n$$

である。X_m の確率分布は

$$P\left\{X_m=k\right\}=\left(\frac{m-1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

$$(k=1,2,3,\cdots)$$

となる。平均は

$$E\left[X_m\right]=\sum_{k=1}^{\infty}kP\left\{X_m=k\right\}=\frac{n}{n-m+1}$$

したがって

$$\begin{aligned}E\left[R(n)\right]&=\sum_{m=1}^{n}E\left[X_m\right]\\&=\sum_{m=1}^{n}\frac{n}{n-m+1}\\&=n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

以下に $E\left[R(n)\right]$ の値をのせる。

nの値	$E\left[R(n)\right]$
2	3
3	5．5
4	8．33333
5	11．4167
6	14．7
10	29．2897
20	71．95
50	224．96
100	518．738
200	1175．61
1000	7485．5

nの値に応じた$E\left[R(n)\right]$の値の意味をみてみよう。

・　n＝2
コインを投げるとき，表と裏が両方でるまでに投げる回数
・　n＝4
トランプからカードを１枚ずつ引くとき，４種類全部でるまでに引く回数。ただし引いたカードは毎回元に戻す。
・n＝5
『赤胴鈴之助』問題。これは講座の時に事前宿題として出されていたもの。あるキャラメルの箱には、「赤」「胴」「鈴」「之」「助」のうち、どれか１つの文字のカードが入っている。どの文字も同じ確率で入っているとして、５種の文字をすべて集めるには、平均何個のキャラメルを買えばよいか？
・　n＝6
サイコロを投げるとき全ての目がでるまでに投げる回数
・　n＝10
０から９までの数字をランダムに発生させる乱数において，すべての数字が出そろうまでの発生数

問６　一致の問題

自然数１～nをでたらめに並べ替える。数 i がちょうど i 番目の位置にくるような一致点の数Ｎ（n）の確率分布はどうなるか

自然数 i が i 番目にくるという事象をA_iとすれば

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}$$

$$P(A_i \cap A_j)=\frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\cdots$$

$$P(A_{i1}\cap A_{i2}\cap A_{i3}\cap\cdots\cap A_{im})=\frac{(n-m)!}{n!}$$

であるから，

$$S_m=\binom{n}{m}\frac{(n-m)!}{n!}=\frac{1}{m!}$$

これよりＮ（n）の確率分布が得られる。

$$P\{N(n)=k\}=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{n-k}\frac{(-1)^m}{m!}$$

特に、すべての位置で一致が起こる確率は

$$P\{N(n)=n\}=\frac{1}{n!}$$

一致が１つも起こらない確率は

$$P\{N(n)=0\}=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}$$

こ

の値はnが大きくなると$\frac{1}{e}$に近づく。

問７　出会い数

自然数１～nをでたらめに並べ替える。一致点が起こらないように並べる数D_nを出会い数という。

１番目には１以外のどれかがくるから$(n-1)$通り。

１番目がk（$k\neq 1$）、1番目が１とする。１番目のkと1番目の１を交換すると、２番目以降は$2, 3, \cdots, n$の順列となる。このとき

・$k\neq 1$の場合はD_{n-1}通り。

・$k=1$の場合は１とkで順番が一致し、他が一致しないのでD_{n-2}通り。

よって次のような漸化式が立つ。

$$D_n = (n-1)\{D_{n-1} + D_{n-2}\}$$

この漸化式を変形して

$$D_n - nD_{m-1} = -\{D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}\}$$
$$= (-1)^2\{D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}\}$$
$$\cdots$$
$$= (-1)^{n-2}\{D_2 - 2D_1\}$$

nが小さいとき，$D_1 = 0$,　$D_2 = 1$より

$$D_n - nD_{m-1} = (-1)^{n-2} = (-1)^n$$

この両辺を$n!$で割って

$$\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{m-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n1}$$

ゆえに

$$\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{D_k}{k!} - \frac{D_{k-1}}{(k-1)!}\right\} = \frac{D_n}{n!} - \frac{D_1}{1!}$$
$$= \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

したがって

$$D_n := n!P\{N(n) = 0\}$$
$$= n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

以下に出会い数D_nの値をあげておく。

nの値	出会い数D_nの値
1	0
2	1
3	2
4	9
5	44
6	265
7	1854
8	14833

また，この問題を授業で扱ったときには、縦にn，横に一致点の数kをとって並べ方の数を表にまとめてみた。この数は乱列または完全順列・攪乱順列などとも呼ばれる。

	0	1	2	3	4	5	6	計
1	0	1						1
2	1	0	1					2
3	2	3	0	1				6
4	9	8	6	0	1			24
5	44	45	20	10	0	1		120
6	265	264	135	40	15	0	1	720

問8　夫婦の問題

n組の夫婦が丸テーブルの周りに男女交互にでたらめに席につく。どの夫婦も隣り合わない確率P_nは？

どの夫婦も隣り合わない並び方の数を夫婦数という。夫婦数M_nは,

$$M_n = 2n!\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{2n}{2n-m}\binom{2n-m}{m}(n-m)!$$

である。たとえば,

$M_3 = 12$,　$M_4 = 96$,　$M_5 = 3120$　である。

よってどの夫婦も隣り合わない確率P_nは

$$P_n = \frac{M_n}{2(n!)^2}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{2n}{2n-m}\binom{2n-m}{m}\frac{(n-m)!}{n!}$$

たとえば,

$P_2 = 0$,　$P_3 = \frac{1}{6}$,　$P_4 = \frac{1}{12}$,　$P_5 = \frac{13}{120}$　である。

この値はnが大きくなると$\frac{1}{e^2}$に近づく。

（１０）　まとめ

古典的なLaplaceの確率論では、興味のある事象の確率を、「同様の確からしさ」をもつ事象の起こり方の場合の数の比で考える。また、事象ＡとＢの少なくとも一方が起こる確率は、$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ であるが、この式を n 個の事象の場合に一般化した公式が「包除原理」である。

親しみやすい確率の問題の離散的な計算を通して組合せのモデルを考えることは，授業の中で効果的な教材となる。

特別講座の受講生アンケートをいくつか紹介したい。

- 確率の話は意外性があるので面白い。
- 確率を用いて複雑な問題を解決・応用できるということを強く感じることができた。こういうことに関する本も読んでみたいと思う。
- 直観と確率は全くあっていないことが多いのに驚かされた。
- 問題は面白く考えたいが，難しくて理解できなくてとても残念だった。もっと数学に詳しくなってから考えようと思った。

殆どの生徒が例題・問題の内容に興味を持っていること，数学が応用される場面を実感したこと，式が難しかったことなどを述べていた。とかく抽象的な数式ばかり扱ってしまいがちな高校の数学の授業に，現実の数学へのモデル化を知り、数学の威力を感じられる教材を工夫したいものだ。

【参考文献】

- 平成16年度（3年間）数学特別講座
  筑波大学附属駒場中高　数学科（２００４）
- 組合せ論入門　ポリア　他
  近代科学社
- 数学読本４　松坂和夫
  岩波書店
- デバグ数学セミナ　小針晛宏
  学生社
- 話題源数学（上・下）
  編集代表　飯島忠・吉田稔
  とうほう
- カッツ数学の歴史　カッツ
  共立出版
- 大数学者に学ぶ入試数学ＩＡ
  監修　秋山仁　数研出版
- フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』
  http://ja.wikipedia.org/wiki
- 代数学辞典（上・下）
  笹部貞市郎　編　聖文社

（2）ＥＢＩと確率・統計

２００４年７月８日，成蹊大学教授岩崎学先生によるＳＳＨ特別講座『医薬品の効果と安全性の評価』が開講された。医薬品という専門分野のように思える話題の中で，いかに確率と統計が重要な役割を果たすのかが印象的に語られ，受講者は教員も含め統計学の果たす役割を実感することができた。この講義の中からヒントを得た教材を考えてみた。

（1）　ＥＢＭと数学

EBM(Evidence Based Medicine)というのは、ある治療法や医薬品が本当に効果がありかつ安全であるのかを，権威のある偉い医者が決めるのではなく，客観的なデータに基づいて判断しようというものだ。そこで主要な役割を果たすのが確率と統計ある。実際，薬の効果や安全性の評価のための審議会には専門の医者の他に必ず統計学者が加わっている。

数学が実際の場面に応用されるには，まず現象のモデル化，現象の数式化が必要だ。その結果、現象の分析を数学の問題に帰着することができる。

次に解を求めることだが、高校の数学の範囲ではこの部分の比重が大きい。

最後に解の吟味である。安全の為の計算では１００%に近い正解が要求されるため，最終チェックは大変重要である。チェックの結果正解と判断されれば，現実問題に適用できる。

（2）　積分の意味

次の２つの定積分の式を見比べる。

$$\int_0^2 xe^x dx \quad \cdots \quad ①$$

$$\int_0^2 xe^{-x} dx \quad \cdots \quad ②$$

数学の計算式としては非常に似ていて，どちらも部分積分というテクニックで計算をする。

①は

$$\int_0^2 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - \left[e^x\right]_0^2$$
$$= 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

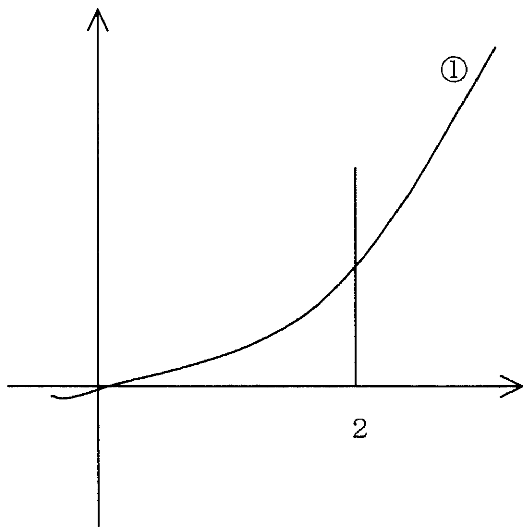
②は

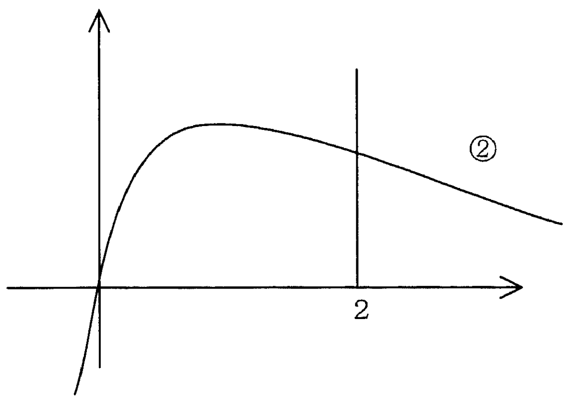
$$\int_0^2 xe^{-x} dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x} dx = -2e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_0^2$$
$$= -2e^{-2} - e^{-2} + 1 = -3e^{-2} + 1$$

というように計算できる。

しかし，式の意味を考えると，②は①よりはるかに重要である。統計の専門家にしてみれば①など見たこともない計算だそうだ。

定積分であるから面積を求めているという視点で考える。





$f(x) = xe^{-x}$ という関数は最大値をとる。最大値を取る点は微分によって求めることができる。

$f'(x) = xe^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x-1)$

$f'(x) = 0$　なる点はｘ＝１である点である。

この関数は統計学では，機械などの寿命を表す曲線

として使われている。tを時刻とすると，$f(t)$が大きいほどその時刻で寿命を迎える割合が高いと考えるわけだ。最大値t＝1はもっとも多くの機械が寿命を迎える。

積分$\int_0^x te^{-t}dt$は時刻xまでに故障してしまう機械がどれぐらいあるかを表す。

この積分のx→∞の極限をとると，$\lim_{x\to\infty}\int_0^x te^{-t}dt = 1$となる。無限の未来にはすべての機械は故障してしまうわけだから，無限の未来までに故障する割合は1である。

例えば，$\int_0^x te^{-t}dt = \dfrac{7}{10}$というxの方程式を解くことは，70%が故障してしまうのはどの時点かという問題となる。この方程式はニュートン法で近似した解を求めると、x＝2．44…　となる。この方程式を解くのは高校の範囲でないが，式の意味を考えることは重要である。

（3）　ＥＢＩの話題

例　ある薬を飲むとちょうど確率pで病気が治る。10人の患者に飲ませて6人が治る確率はいくらか。

ポイントは2つある。

独立性→ある人の結果が他の人の結果に影響しない
公平性→効き目の確率はどの人も同じ

解）10人のうち誰が治ったかの組み合わせは${}_{10}C_6$

であるから，求める確率は

${}_{10}C_6 p^6(1-p)^4$　である。

$p=\dfrac{1}{2}$　の場合，この確率は約0．2である。

次に逆を考えてみよう。何人治ったという情報だけから薬の有効性を推定する問題である。

例　ある薬があり有効性はまだ不明である。10人の患者にこれを飲ませたらそのうち6人が治った。このとき薬の有効性はいくらと推定できるか。

10人中6人治ったのだから有効性pは$p=\dfrac{6}{10}$と単純に考えてよいのだろうか。10人という限られた人数をどう評価すべきか。これを統計学者フィッシャーは次のように考えた。

『10人中6人が治る』確率がもっとも大きくなる値を，薬の有効性の推定値とする

つまり有効性の値を動かして結果がもっとも起こりやすい値を求めるという逆転の発想だ。

解）有効性pを変数と考え，関数$L(p)$を

$L(p) = {}_{10}C_6 p^6(1-p)^4$　とおく。

関数$L(p)$の最大値を求めればよい。対数をとって

$\log L(p) = \log {}_{10}C_6 + 6\log p + 4\log(1-p)$

の最大値を求める。pで微分すると

$(\log\ L(p))' = \dfrac{6}{p} + \dfrac{4}{1-p}$

$\dfrac{6}{p} + \dfrac{4}{1-p} = 0$　を解くと，

$6(1-p) = 4p$　より　$p=\dfrac{6}{10}=0.6$　となり

p＝0．6でL（p）は最大となる。直観的な推定値が数学的な計算で確認されたことになる。

これは『有効性の推定』という曖昧で扱いにくい現実問題を，単純な数学のモデルにあてはめたことになる。

例　1%の確率で発病する病気に対し，99%の精度の検査があるとしよう。ある人がこの検査で陽性となったとき，この人が発病している確率はいくらか。

解)
発病率は1％であるから，ランダムに抽出された１００００人のうち，発病している人は１００人，していない人は９９００人である。

つぎに全員が検査を受ければ，発病した１００のうち正しい結果（陽性）は９９％の９９人にでて，一方発病していない９９００人のうち間違った結果(陽性)が1％の９９人に出る。

検査を受けて陽性が出たばあい，発病している９９人かしていない９９人かのどちらかのグループにぞくしているから，この人が発病している確率はベイズの定理により

$$\frac{99}{99+99} = 0.5 \text{ である}$$

<table>
<tr><td rowspan="4">１００００人のうち</td><td rowspan="2">発病するのは１００人</td><td>陽性９９人</td></tr>
<tr><td>陰性1人</td></tr>
<tr><td rowspan="2">発病しないのは９９００人</td><td>陽性９９人</td></tr>
<tr><td>陰性９８０１人</td></tr>
</table>

これは意外に低いと感じる結果である。例え精度が９９％であったとしても，発病率が低ければ発病しない大勢のグループの中に検査が間違って出る人が多数でるわけで、９９％という数字に惑わされて絶望する必要はないわけである。

この例題は本校の教育実習生が授業で紹介したものだ。はじめに発病している確率の予想をさせてみた。大抵発病確率は９９％ではないだろうと予想するが，５０％とはイメージしない。しかしベイズの定理を理解して丁寧に考えれば誰でも理解できる計算である。比率で考えるより，整数値で考えられるような十分大きい人数で分けていくと考えやすいようであった。

実際の医療で病気の判断をする場合に１種類の，あるいは１回の検査で確定するのではなく，検査を組合せ何度もやって診断する場合が多い。

（４）　シンプソンのパラドックス

これはシンプソンが１９５１年に記述した統計的なパラドックスである。母集団での相関と分割した集団の相関は異なっている場合がある。集団を２つに分けた場合にある仮説が成立しても，集団全体では正反対の仮説が成立することがあり，大変面白く感じられる。

例　ある病気についての２種類の薬P，Qがあり，どちらが優れているかを判断したい。100 人の患者のデータの全体は表１のようであった。

表１

	効果あり	効果なし	合計	有効性
薬P	４０	１０	５０	０．８
薬Q	３０	２０	５０	０．６
合計	７０	３０	１００	０．７

この結果からは誰もがPの方が優れていると判断したくなる。しかし，この表を男女別に分けた表２を見てみよう。

表２　男性患者

	効果あり	効果なし	合計	有効性
薬P	４	６	１０	０．４
薬Q	１２	１８	３０	０．４
合計	１６	２４	４０	０．４

女性患者

	効果あり	効果なし	合計	有効性
薬P	３６	４	４０	０．９
薬Q	１８	２	２０	０．９
合計	５４	６	６０	０．９

女性と男性で有効率に大きな差があったことがわかるが，驚いたことに薬の有効性は同じという結果になってしまった。２つの分かれた結果を合算することで見えていた結果が隠されてしまう例である。

もっと極端な数値例を見てみよう。

例　A君とB君が１回目と２回目で合わせて 110 問を解くというテストを受けた。最初のテストでは、A君は 100 問を解き 60 問正解で、B君は 10 問中 9 問が正解であった。次のテストでは、A君は 10 問中 1 問、B君は 100 問中 30 問が正解だった。

結果を表にまとめると，次のようになる。

表１　　最初のテスト

	正解	不正解	合計	正答率
A君	６０	４０	１００	０．６
B君	９	１	１０	０．９
合計	６９	４１	１１０	$\frac{69}{110}$

表２　　次のテスト

	正解	不正解	合計	正答率
A君	１	９	１０	０．１
B君	３０	７０	１００	０．３
合計	３１	７９	１１０	$\frac{31}{110}$

表３　　２回のテストの合計

	正解	不正解	合計	正答率
A君	６１	４９	１１０	$\frac{61}{110}$
B君	３９	７１	１１０	$\frac{39}{110}$
合計	１００	１２０	２２０	

B君はどちらのテストでもA君よりも正解率が高かったのにもかかわらず、合わせると A 君の方が正解率が高いという結果になった。

一般に，ａ＜ｂかつｃ＜ｄならば，ａ＋ｃ＜ｂ＋ｄは当然のことである。しかしこの例では、計算の方法がこうではないことに一見気づかないので結果は大変不思議に見える。

各々の総得点を計算する際に異なった加重を与えてみるとどうなるだろうか。A 君の最初のテストの加重は$\frac{100}{110}$であり，B 君は$\frac{10}{110}$である。２回目のテストの加重は各々、A 君$\frac{10}{110}$、B 君$\frac{100}{110}$となる。

$$\text{A君}\quad \frac{100}{110}\times 0.6+\frac{10}{110}\times 0.1=\frac{61}{110}$$

$$\text{B君}\quad \frac{10}{110}\times 0.9+\frac{100}{110}\times 0.3=\frac{39}{110}$$

このように考えれば、計算方法によりパラドックスを見抜くことは出来る。しかし、依然として個人の成績と全体の成績の間には矛盾が残る。A 君と B 君のどちらが上なのだろうか？総得点に基づくとA君の方が上だと考えられる。しかし、例のように分割したデータでB君の方が上であるかのように話を持って行くことは可能である。

この例を治療の評価に当てはめるとどうなるか。『２人の医者 A 君と B 君は病院で治療を行っている。中等症と重症の２群の患者に対する治療成績を２回テストした。結果は先ほどと同じ数値で考える。B 君は両方の群でよりよい治療成績であったが、全体の治療成績は悪かった。その理由はB君の患者はほとんど重症であり（100/110)、A 君の患者は殆どが軽症であったためである。A 君の治療が良かったという結論は論理的に誤っている。』

上の話では、A 君と B 君の状況を先ほどのテストの話から何も改変していない。これらの問題は近年の文献でシンプソンのパラドックスとして議論された問題である。

統計学者にとっては１世紀以上前からこの現象は既知であったが、哲学者、コンピュータを扱う科学者、疫学者、経済学者らは最近でもこのパラドックスに対する議論を行っている。

ちなみに本校の生徒に対し，授業中にこのパラドックスをしめしたところ，「実に不思議だ」とデータを凝視する生徒と，「こういうのってあるよ。プロ野球の結果とか記録とか」などと言って他の数値を出してくる生徒と２種類に反応が分かれた。パラドックスの内容や例を知らない場合は，不思議に感じて理由を考えこむ者が多かった。そのとき生徒から出てきた考察としては「分けた場合の比較の量（問題数）が違うから」「始めの一部分の連続した結果でまどわされている」などがあった。

このように，データを分けたり合体することで結果が変わってしまうようなことが統計学では起きる。データから判断するときに注意しなくてはいけない点である。

また実生活では，条件がさまざまで複雑なものを比較し判断するわけだが，どの条件をそろえて何を比較するのか常に意識するべきであろう。

（5） 新薬の有効性の評価に関連して

新しい薬を評価する客観的基準というのも興味深い問題である。

例　２０人の患者をランダムに１０人ずつに分け，はじめの１０人に新薬を，残りの１０人に従来の薬（対照薬）を飲ませる。

①

	効果あり	効果なし	合計	有効率
新薬	4	6	１０	０．４
対照薬	3	7	１０	０．３
合計	7	１３	２０	０．３５

②

	効果あり	効果なし	合計	有効率
新薬	5	5	１０	０．５
対照薬	3	7	１０	０．３
合計	8	１２	２０	０．４

③

	効果あり	効果なし	合計	有効率
新薬	6	4	１０	０．６
対照薬	3	7	１０	０．３
合計	9	１１	２０	０．４５

④

	効果あり	効果なし	合計	有効率
新薬	7	3	１０	０．７
対照薬	3	7	１０	０．３
合計	１０	１０	２０	０．５

⑤

	効果あり	効果なし	合計	有効率
新薬	8	2	１０	０．８
対照薬	3	7	１０	０．３
合計	１１	9	２０	０．５５

⑥

	効果あり	効果なし	合計	有効率
新薬	9	1	１０	０．９
対照薬	3	7	１０	０．３
合計	１２	8	２０	０．６

①～⑥の結果のどれが出たら，新薬の有効性は認めて良いだろうか。いずれのデータも新薬の方が有効性が高いという結果である。

この問題は次のように考える。

新薬と対照薬の有効性が同じであると仮定して，このような結果が得られる確率が十分に低いだろうか

根底にあるのは一種の背理法で，２薬の有効性が同じであることがまずないといえるような結果であれば新薬の有効率の方が高いと判断しようと言うのだ。

そこで表

	効果あり	効果なし	合計
新薬	a	b	n
対照薬	c	d	m
合計	p	q	N

なる結果が得られる確率が問題になる。

２薬の有効率は同じと仮定するので，Ｎ人の患者に同じ薬を与えてから，その中からランダムにｎ人選んできても同じことである。Ｎ人からｎ人選ぶ組合せは$_NC_n$通りある。このうち上の結果に該当するのは「効果あり」のｐ人からａ人，「効果なし」のｑ人からｂ人選ばれる場合だから$_pC_a \times {}_qC_b$通り。

よって求める確率は$\dfrac{_pC_a \times {}_qC_b}{_NC_n}$

ただしこの確率はａが極端に小さいときに小さな値を取るので，新薬を飲んだ人のうちａ人に効果が表れる確率$P(X=a)$でなく，ａ人以上に表れる確率

$P(X \geq a)$ で考える。実際に①～⑥のデータ

$P(X \geq a)$ を計算すれば

	$P(X \geq a)$
①ａ＝４	０．８３６
②ａ＝５	０．５１１
③ａ＝６	０．２７１
④ａ＝７	０．１２１
⑤ａ＝８	０．０４３
⑥ａ＝９	０．０１１

この値が「有意水準」とよばれる基準値を下回るときに，新薬の有効性が認められるのである。ちなみに実際にこの薬が認められるレベルのデータは⑥だけである。

本質的な理論は，新薬を飲んだ患者をランダムに選んできたと考え，それがまずあり得ないことを検証するというものだ。こうしたランダムネスを利用すると，偶然変動がつきものであるデータを簡単なモデルにあてはめることができる。

（６）　まとめ

ひとことでいうと，確率は演繹的，統計は帰納的に考えているわけで逆の論理である。確率は仮定のもとで問題を解くが，統計は結果から仮定をどう置くかを考える。数学における仮定はあくまで仮定であって正しいとは限らない。

とかく中高の数学の内容や形式では，天降り的・演繹的な問題解決方式が多くなりがちであるが，統計学を学ぶと，数学も自然科学の一種であることが実感される。現象やデータから立てた仮説が覆されることもあるのである。教材として魅力が十分な分野だと感じている。

【参考文献】

・ 平成16年度（3年間）数学特別講座
筑波大学附属駒場中高　数学科　（２００４）

・ 偶然性の数学　加地紀臣男
培風館（１９８９）

・ 決定のはなし　斎藤嘉博
日科技連（１９９１）

・初学者のための統計教室　安藤洋美／門脇光也
現代数学社（２００４）

・ 話題源数学（上・下）
編集代表　飯島忠・吉田稔
とうほう（１９９０）

・ 大数学者に学ぶ入試数学ＩＡ
監修　秋山仁　数研出版（１９９９）

・ フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』
http://ja.wikipedia.org/wiki

（3）シミュレーションを用いた授業

社会や日常生活の場面で，数学の見方・考え方や数学の有用性を生徒に理解させる数学の分野として，確率や統計は中学・高校において重要なものである。

日常の場面で現れる問題をさいころや乱数表の利用により，シミュレーションすることで解を見出すことで，数学が現実問題解決へ向けて有用なものであることを生徒が実感できると考える。

（1）釣銭問題

現実の問題を扱うとき，複雑な条件を数学の式で表し解くことが困難であったり，とても面倒であったりする場合にも，数値実験をすることにより答えを見つけることができる。

ここでは，釣銭の問題を電卓を利用して，数値実験することにより問題の解決を試みる。

＜釣銭問題その１＞

遊園地の入場料は，大人 500 円，子供 300 円です。お客は子供連れが多く，大人が一人で来ることはないと考える。

お客のグループでの来園の仕方や入場料の出し方が次の表で与えられるとき，100 組のお客におつりが不足せずに支払うには，あらかじめ 500 円玉と 100 円玉をいくら用意したらよいか？

＜来園の仕方＞

確率	大人人数	子供人数
$\frac{1}{6}$	1	1
$\frac{1}{6}$	1	2
$\frac{2}{6}$	2	1
$\frac{1}{6}$	2	2
$\frac{1}{6}$	2	3

＜入場料の出し方＞

確　率	支払い
$\frac{1}{3}$	ちょうど
$\frac{2}{3}$	1000 札

n 組のお客が来園したときに，釣銭として必要な 500 円玉の個数を X，100 円玉の個数を Y とする。また，k 組目のお客が入場したときに必要な 500 円玉の個数を X_k，100 円玉の個数を Y_k とすると確率変数と

X_k，Y_k の確率分布は次のようになる。

X_k	Y_k	確率	X_k	Y_k	確率
-1	-3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}$	1	2	$\frac{2}{6}\times\frac{2}{3}$
0	2	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}$	-1	-1	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}$
0	-1	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}$	0	4	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}$
1	4	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}$	-1	-4	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}$
0	-3	$\frac{2}{6}\times\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}$

X_k と Y_k の期待値と分散を求めると，

$$\mathrm{E}(X_k)=\frac{1}{6},\ \mathrm{V}(X_k)=\frac{17}{36}$$

$$\mathrm{E}(Y_k)=\frac{5}{6},\ \mathrm{V}(Y_k)=\frac{245}{36}$$

となる。

X は，$X_1 + X_2 + \cdots + X_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ の最大値であり，Y は $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$ の最大値であり，X と Y の確率分布を求めることは難しい。

この問題を解く一つのやり方として，確率を利用した数値実験をすることにより，具体的な数値から答を推測する方法ことがある。

ここでは，100 組の客が来園したときに必要な釣銭の数を関数電卓で数値実験をすることで求めることを 100 回行った結果から，500 円玉の個数と 100 円玉の個数を推定してみる。

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
28	81	12	92	14	92	11	74
15	68	6	71	28	136	9	54
8	73	15	55	11	41	7	49
9	89	12	61	32	114	16	89
22	98	19	74	22	98	18	99
19	101	17	101	21	95	12	95
16	75	20	129	14	66	22	113
20	117	9	74	15	48	20	105
15	95	14	92	15	68	23	94
14	95	21	90	20	78	10	82
24	99	17	58	14	82	26	121
16	82	18	127	21	101	21	99
14	93	29	120	24	89	23	131
28	115	13	60	24	118	18	81
16	79	34	111	21	81	34	127
81	111	11	28	6	57	22	123
24	126	13	85	27	102	8	65
23	139	23	55	18	88	26	93
17	81	13	87	21	84	20	65
16	98	20	78	17	102	16	57
20	71	16	92	33	109	26	137
16	98	30	87	22	51	22	88
24	93	22	116	5	82	28	109
11	66	16	75	22	122	13	90
20	110	12	81	24	134	23	73

このデータの平均は

$\overline{X} = 18.53$，$\overline{Y} = 90.0$

標準偏差は $S_X = 6.45$，$S_y = 23.41$

X の最大値は 34，Y の最大値は 139 となる。

平均から標準偏差の２倍離れた値を考えると

X については,

$18.5 + 2 \times 6.45 = 31.4$

Y については,

$90.0 + 2 \times 23.4 = 136.8$

この値はそれぞれの最大値とほぼ一致している。

100 組のお客を想定した場合,

500 円玉は 35 枚，100 円玉を 140 枚

程度準備すればよいことが分かる。

近似計算として，$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ で計算してみると,

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を独立と考えてよりから

$$E(X) = \frac{1}{6}n,\quad V(X) = \frac{17}{36}n$$

同様に，$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ とすると,

$$E(Y) = \frac{5}{6}n,\quad V(Y) = \frac{245}{36}n$$

このことから，500 円玉と 100 円玉の期待枚数は

500 円玉は $\frac{1}{6} \times 100 = 16.6$ 枚,

100 円玉は $\frac{5}{6} \times 100 = 83.3$ 枚

標準偏差の２倍を考えると

X は　$16.6 + 2 \times 6.87 = 37.2$

Y は　$83.3 + 2 \times 26.1 = 135.5$

であるから，500 円玉は 37 枚，100 円玉は 140 枚用意すればよいことになる。

＜釣銭問題その２＞
条件を少し変えて，数値実験をしてみる。支払いを1000 円札でするお客に「釣銭のないようにできましたらお願いできますか？」と声を掛けたときの効果を見積もった実験をしてみる。

声を掛けたときの反応を次の表の通りとする。

確　率	反　応
$\frac{1}{5}$	釣銭なし
$\frac{4}{5}$	1000 札

この条件で同じように数値実験を100回行った結果が次の表である。

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
8	21	13	45	10	28	9	40
6	33	2	13	4	9	5	24
4	26	10	32	2	19	9	33
4	3	16	82	10	51	15	44
7	33	4	16	13	77	2	14
0	0	8	21	3	48	2	19
3	10	13	29	2	4	6	72
2	4	16	27	3	25	2	22
4	33	5	18	3	20	1	22
8	21	2	8	7	10	4	34
7	26	4	17	14	72	6	42
9	6	1	26	0	4	3	28
4	31	0	11	4	25	5	18
8	12	4	0	2	49	8	42
12	38	7	22	2	1	17	12
11	53	11	17	11	48	1	5
10	45	4	32	8	38	8	47
1	0	11	59	7	40	2	22
9	11	7	31	5	16	15	40
7	14	5	38	2	14	18	56
4	12	3	27	13	49	4	16
2	19	17	51	1	6	9	32
14	67	1	0	4	13	2	16
16	43	9	26	8	27	3	20
5	17	12	39	10	51	4	42

このデータの平均は

$\overline{X} = 6.58$，$\overline{Y} = 27.48$

標準偏差は$S_X = 4.6$，$S_y = 18.18$

X の最大値は18，Y の最大値は82

となる。

平均から標準偏差の２倍離れた値を考えると

X については,

$6.6 + 2 \times 4.6 = 15.8$

Y については,

$27.5 + 2 \times 18.2 = 63.9$

100 組のお客に対しては，このことから釣銭として500 円玉は 18 枚，100 円玉は 80 枚程度用意すれば十分である。

声掛け効果について，500 円は 34 枚から 18 枚へとほぼ半減しており，100 円は 140 枚から 80 枚と効果が大きいことが理解できる。

【参考文献】

・おはなしＯＲ　　森村英典著　日本規格協会
・ＯＲのはなし　　大村　平著　　日科技連

8　まとめにかえて

本校のＳＳＨ研究は，学校全体または数学科のカリキュラムを変更することなく実施した研究である。そのため，開発した教材は中学・高校の既存のカリキュラムの中で位置づけを行った。

開発した教材は，順次授業で実践しており，そういった意味では，実証的な研究の途上にあるといえる。早急にすべての開発した教材を授業で実践し，よりふさわしい内容にするとともに，本校数学科のカリキュラム上での位置づけについても検討を行っていきたい。

ところで，ＳＳＨ研究は今年度が最終年となる。学校全体ではポストＳＳＨについて結論を出す時期である。同時に，本校数学科においても今後の教育研究の方向性について考えなくてはならない。

これまでに行ったＳＳＨ研究を踏まえ，次のような研究が考えられるだろう。

(1) 開発した教材・カリキュラムの活用
(2) 数学特別講座[1]
(3) 筑波大学とのさらなる連携[2]
(4) 卒業生の追跡調査[3]
(5) 成果の普及
(6) その他

本冊子にまとめた内容について，是非とも忌憚のないご意見を賜れば幸いである。

---

[1] ＳＳＨ研究では，数学特別講座を20回以上実施した。生徒たちだけでなく，我々も教材開発につながる多くの示唆を頂いた。そういった意味で，今後も生徒の要望を加味しながら実施していきたい。

[2] ＳＳＨ研究も本年が最終年である。新規５年のＳＳＨ研究に名乗りを上げることも考えられる。また，「新世紀の先導的個性を育てる数学教養育成への基盤プログラム（デカルト・プログラム）」（平成17年度筑波大学学内教育プロジェクト：代表：伊藤光弘教授）や「中高一貫校における才能教育とリーダー育成のためのカリキュラム研究開発」（科研費・萌芽研究平成16年度～18年度，代表：田中統治教授（筑波大学））などの研究によりさらなる研究開発を行うことも考えられる。

[3] ５年間のＳＳＨ研究を体験した卒業生の追跡調査など，スーパーサイエンスハイスクール事業の効果を検証するために、本校卒業生の大学・大学院での研究内容やその後の進路選択に及ぼした影響等について、継続的に調査すること。