筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第39集　2000年3月

放物線と2次方程式の構造

筑波大学附属駒場中・高等学校
牧下　英世

放物線と２次方程式の構造

筑波大学附属駒場中・高等学校
牧下　英世

１．はじめに

本年度，中学３年生（51期生）を担当して，教材研究の折りに気になったことをあれこれと報告してみたい。私の不勉強さの故に当然のことであるという叱咤を受けるかもしれないが，どれも初めての経験であり，とても不思議なことであった。

ここで報告する内容は，座標平面上における放物線とx軸，y軸との共有点の関係，直線と放物線との共有点の個数，放物線の接線，２次方程式$ax^2+bx+c=0$の解と係数の関係など，中学校の学習指導要領の内容ではないもの，高校の分断された２次方程式の内容の統合などを含んでいる。しかし，これらの内容を視覚的に扱うことにより，これまでにない２次関数の指導ができるものと考える。

なお，ここではとくにことわりのない限り，２次関数$y=ax^2+bx+c$を$a>0$であるものを考える。また，この２次関数のグラフである放物線は，x軸の異なる２点α，β（$\alpha<\beta$）で交わるものとする。

２．２次方程式を２次式と１次式に分けてみると，見えてくること

【課題１】

未知の直線 $y=px+q$ と放物線 $y=ax^2$ が異なる２点で交わる。
その２交点のx座標のα，β（$\alpha<\beta$）が与えられれば
この未知の直線の方程式は，

$$y=a(\alpha+\beta)x-a\alpha\beta$$

であることを証明しなさい。

これを証明する前に，次のことを確認しておく。

【直線と放物線の交点】

既知の直線$y=px+q$と放物線$y=ax^2$との交点を求めるために，

連立方程式$\begin{cases} y=ax^2 \\ y=px+q \end{cases}$

より，yを消去して，

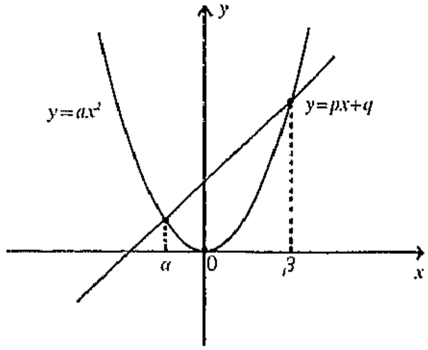
$$ax^2=px+q$$

2次方程式

$$ax^2-px-q=0 \qquad ①$$

を解いて

$$x=\alpha,\ \beta$$



これより，2点を求めることができる。

【課題1】の証明

式の形に着目：2次方程式を2次式と1次式に分けると見る。

証明

α，βを解とする1つの2次方程式は

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

これを展開すると

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

$-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$を右辺に移項して，

2次式と1次式に分けると

$$x^2=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

両辺をa倍すると

$$ax^2=a(\alpha+\beta)x-a\alpha\beta$$

これは，放物線$y=ax^2$と直線$y=a(\alpha+\beta)x-a\alpha\beta$

との連立方程式とみることによって，解決する。

すなわち，未知の直線の方程式は

$$\underline{y=a(\alpha+\beta)x-a\alpha\beta}$$

証明終

【例題】

放物線$y=2x^2$と直線Lが異なる2点で交わっている。
そのx座標が-1, 2であるとき，Lを求めなさい。

<解答>

-1, 2を解とする2次方程式の1つは

$(x+1)(x-2)=0$

これを展開すると，

$$x^2-x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2=x+2$$

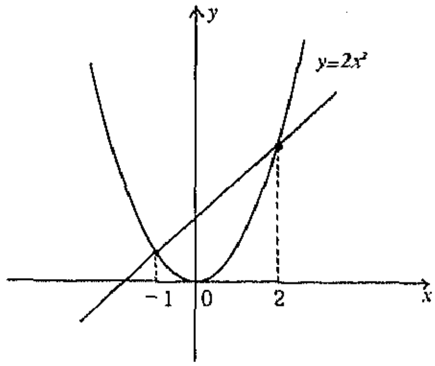
$$\Leftrightarrow \quad 2x^2=2(x+2)$$

これは，放物線$y=2x^2$と直線$y=2x+4$

との連立方程式とみることができる。

よって，求める直線Lは

$\underline{y=2x+4}$……⑱



【別解：2次方程式の解と係数の関係より】

①の2次方程式$ax^2-px-q=0$の解と係数の関係から，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{-p}{a}=\dfrac{p}{a} \\ \alpha\beta=-\dfrac{q}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=a(\alpha+\beta) \\ q=-a\alpha\beta \end{cases}$$

ゆえに，未知の直線$y=px+q$は

$$y=a(\alpha+\beta)x-a\alpha\beta$$

となる。

3．放物線$y=ax^2+bx+c$をxy平面上にかくとき，見えてくること

【課題２】

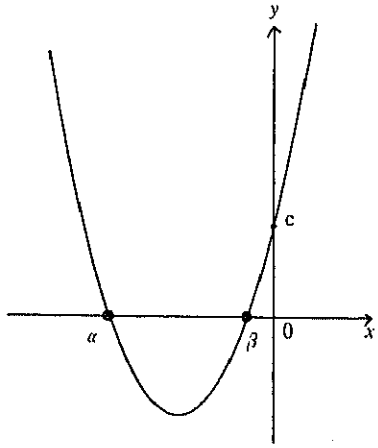
xy平面上において，２次関数のグラフである放物線

$$y=ax^2+bx+c \qquad ②$$

をかくとき，次の（１），（２）が知られている。

（１）放物線はx軸の異なる２点（α，0），（β，0）を通るならば，
α，β（$\alpha<\beta$）は２次方程式$ax^2+bx+c=0$の解である。

②において，$y=0$を代入すればよい。



（２）放物線はy軸の点（0，c）を通る。

②において，$x=0$を代入すればよい。

係数cが作図できた。

4．課題2のグラフに補助線を入れると見えてくるもの

【課題3】

2次方程式＝$ax^2+bx+c=0$の解と係数の関係$\alpha+\beta$を，
放物線$y=ax^2+bx+c$のグラフを利用して，x軸上に作図しなさい。

【解説】

放物線$y=ax^2+bx+c$と直線$y=c$との交点を考える。

連立方程式

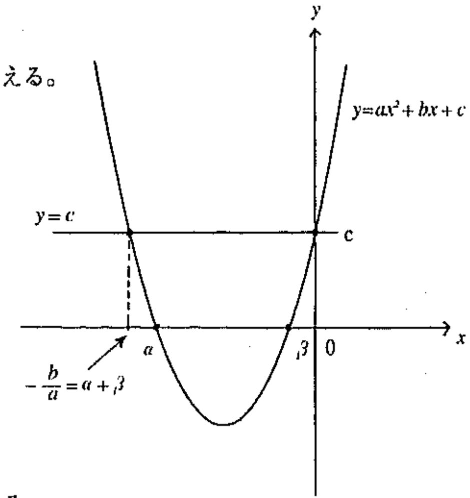
$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=c \end{cases}$$

より　$ax^2+bx+c=c$

$ax^2+bx=0$

よって$x(ax+b)=0$

$x=0,\ -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta$



これは，放物線と直線$y=c$との交点のx座標である。
よって，$\alpha+\beta$は右の図のように作図できる。
(もちろん，軸の式に着目したり，放物線の対称性を考えてもよい。)

【例題】

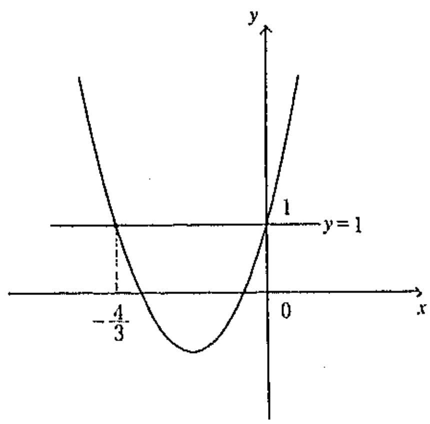
2次方程式$3x^2+4x+1=0$の解α，βについて，
放物線$y=3x^2+4x+1$のグラフを利用して，
$\alpha+\beta$をx軸上に作図しなさい。

＜解答＞

右の図のように放物線に直線$y=1$をひけば，

$$\alpha+\beta=-\frac{4}{3}$$

が作図できる。



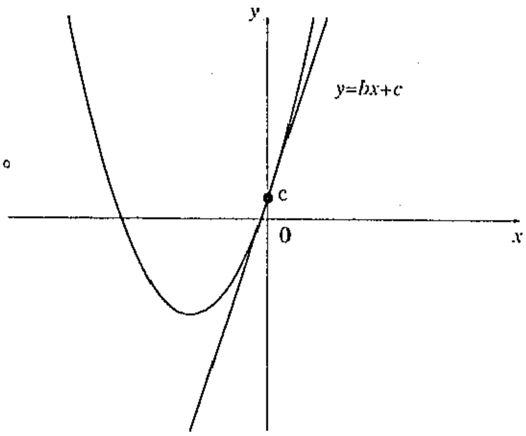
【課題4】

放物線$y=ax^2+bx+c$とy軸との交点（0, c）における この放物線の接続の方程式は，

$$y=bx+c \qquad ③$$

であることを証明しなさい。

証明



点（0, c）を通る直線は，傾きをkとすると

$$y=kx+c$$

これと，放物線$y=ax^2+bx+c$

との共有点が1個である条件を考えればよい。

$$\begin{cases} y=kx+c \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$$

より，$ax^2+(b-k)x=0$

重解条件より　$D=0$

$$(b-k)^2=0$$

よって，　$k=b$

故に，求める接線は

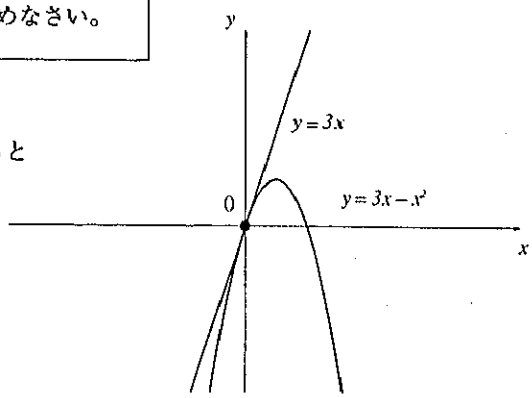
$$y=bx+c$$

証明終

放物線$y=ax^2+bx+c$の点で，y軸上の点（0, c）における接線が$y=bx+c$であることがとても不思議なことである。

【例題】

放物線$y=x(3-x)$の原点における接線を求めなさい。



＜解答＞

与えられた放物線の方程式の右辺を展開すると

$$y=3x-x^2$$
$$=-x^2+3x$$

上の③により，求める直線の式は

$y=3x$……⑱

ちょっと古い問題であるが，次の入試問題を見ていただきたい。

この問題を，計算をできるだけ回避し，これまでに述べた【課題】を使って，視覚的に解決してみよう。

【総合例題】

係数a，b，cがすべての正の数である２次方程式$ax^2+bx+c=0$が実根をもつとき，

実根の絶対値は$\dfrac{b}{a}$よりも小さくて，$\dfrac{c}{b}$より大きいことを証明せよ。

（早稲田大学政経学部56）

（Ⅰ）異なる２つの実数解がある場合

【条件から分かること】

（ⅰ）

２次方程式$ax^2+bx+c=0$の異なる２つの実数解をα，β（$\alpha<\beta$）とすると

a，b，$c>0$

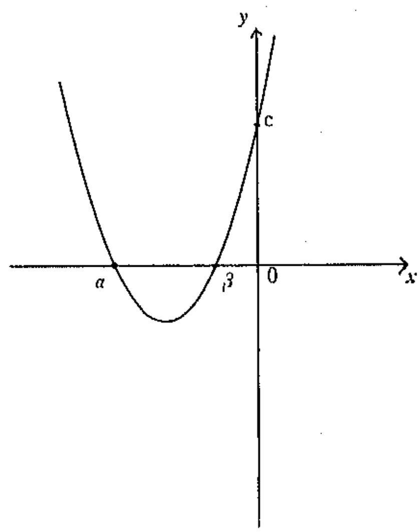
と解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}<0\\[2ex]\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0\end{cases}$$

α，βは同符号でかつ負の数

よって，$\alpha<\beta<0$

であることがわかる。



（ⅱ）

２次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフは右の図のようになる。

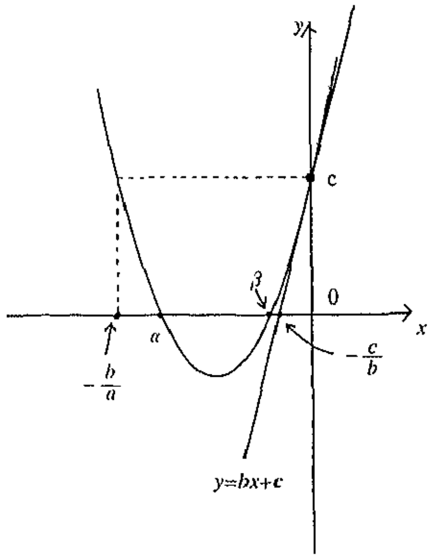
これらの前提を踏まえれば，視覚的に次のことが分かる。

【課題３】から，x軸上に

$$-\frac{b}{a}= \alpha + \beta$$ が作図できる。

【課題４】から

また，放物線とy軸との交点（0，c）における放物線の接線は$y=bx+c$である。



よって，この接線はx軸上の点

$\left(-\frac{c}{b},\ 0\right)$ を通るから

x軸上に$-\frac{c}{b}$が作図できる。

以上より，x軸上において，$-\frac{b}{a}$，$-\frac{c}{b}$，α，βの大小関係は次のようになることが，視覚的に分かる。

$$-\frac{b}{a}<\alpha<\beta<-\frac{c}{b}<0$$

よって，

$$0<\frac{c}{b}<|\beta|<|\alpha|<\frac{b}{a}$$

（Ⅱ）重解であるとき

同様にして

$$-\frac{b}{a}<\alpha<-\frac{c}{b}$$

よって，$0<\frac{c}{b}<|\alpha|<\frac{b}{a}$

$\boxed{証明終}$

いずれにせよ，実数解の存在だけで，実数解の個数が１個でも２個でも成り立つ。

出題者は，この問題を【課題3】，【課題4】をもとにして，作問したのではないだろうか。

また，次のように式を変形してみると，新たなことが見えてくる。それを次のアイディアとした。

【アイディア1】

この問題は，$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{b}$と α，βの大小関係に注目したものであるが，

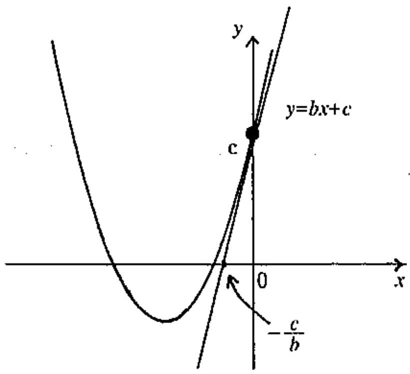
α，βとの関係については，

$\frac{b}{a}$は，　　$-\frac{b}{a}=\alpha+\beta$

である。

$\frac{c}{b}$については，$-\frac{c}{b}=\dfrac{\frac{c}{a}}{-\frac{b}{a}}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

と変形することによって，α，βの関係が分かる。



また，あとの【発展】のところで記したが，この問題を3次関数に拡張しても，同様のことが成り立つ。

5．解と係数の関係$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$をxy平面上に作図する。

【課題3】で述べたように，解と係数の関係のひとつ，$\alpha+\beta$はx軸上に作図できた。
そうなれば，残りの$\alpha\beta$の作図も考えたい。しかし，これがなかなか考えづらかった。この作図のアイディアの素になったのが，4の【総合例題】とした入試問題である。

【課題5】

2次方程式$ax^2+bx+c=0$の解をα，βとするとき，解と係数の関係

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

をx軸上に作図しなさい。

【アイディア2】

直線$y=bx+c$は

x軸上の点$\left(-\frac{c}{b},\ 0\right)$を通る。

これを利用する。すなわち，

x軸上に点$\left(\frac{c}{a},\ 0\right)$を得るために，傾きが$a$である直線を見つけることを考えた。

そこで，

傾きがaの直線が，放物線$y=ax^2+bx+c$に接するときを考える。

そこで，この直線を

$$y=ax+k \qquad ④$$

とおき，その接点を求めてみる。

$ax^2+bx+c=ax+k$より

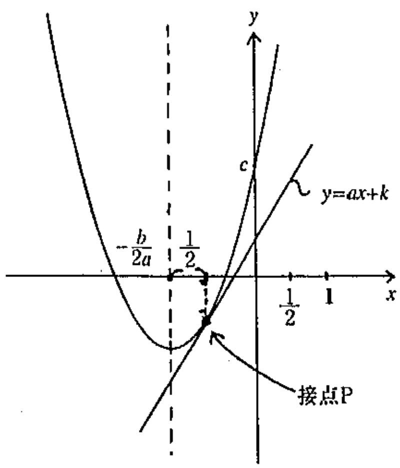
$$ax^2+(b-a)x+c-k=0 \qquad ⑤$$

左辺を平方完成すると

$$a\left(x+\frac{b-a}{2a}\right)^2-\frac{(b-a)^2}{4a}+c-k=0$$

この結果から，接点のx座標は次のようになる。

$$x=-\frac{b-a}{2a}=-\underbrace{\frac{b}{2a}}_{\text{軸}}+\frac{1}{2} \qquad ⑥$$



よって，

x軸上で$-\dfrac{b}{2a}$は軸であり，軸から$\dfrac{1}{2}$

離れたx座標であるから，放物線上の求める接点Pは，容易に作図できる。

> これは，⑤の左辺をxで微分して，$2ax+b-a=0$より
>
> $$x=\frac{a-b}{2a}$$
>
> としてもよい。
>
> なお，この場合，$-\dfrac{(b-a)^2}{4a}+c-k=0$である。

ここで，直線④と放物線の交点をPとすると，

Pにおける放物線の

接線④　$y=ax+k$が引ける。

よって，④を平行移動して，点（0，c）を通るようにすれば，

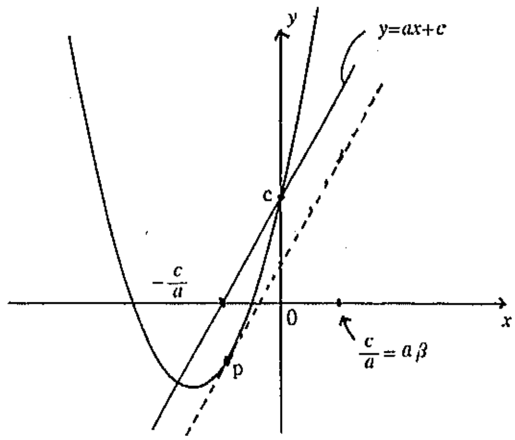
$$\text{直線}\ y=ax+c \qquad ⑦$$

が作図できる。よって，

⑦とx軸との交点が　$-\dfrac{c}{a}=-\alpha\beta$

になる。

あとは，絶対値を取ればよい。



<別解>

④を原点を通るように平行移動し，

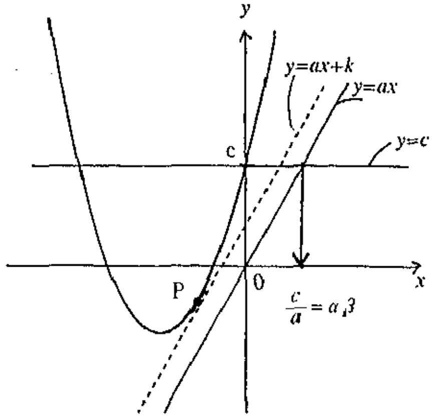
直線 $y=ax$ と

直線 $y=c$

との交点から x 軸に垂線を引いてもよい。

すなわち，$(\frac{c}{a},\ 0) \Leftrightarrow (\alpha\beta,\ 0)$

を得る。



こういった操作により，放物線 $y=ax^2+bx+c$ における傾きが a，c である接線の接点が特定できる。

特に，傾きが c の直線がこの放物線に接するとき，次のことが分かる。

【課題6】

放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点における接線で，

傾きが c の直線との接点の x 座標は，$(\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\alpha\beta),\ 0)$

であることを証明しなさい。

証明

傾きが c の直線を $y=cx+m$ とする。

この直線と，放物線 $y=ax^2+bx+c$ の

共有点が，1個であるための条件を考えればよい。

$ax^2+bx+c=cx+m$

よって，2次方程式 $ax^2+(b-c)x+c-m=0$

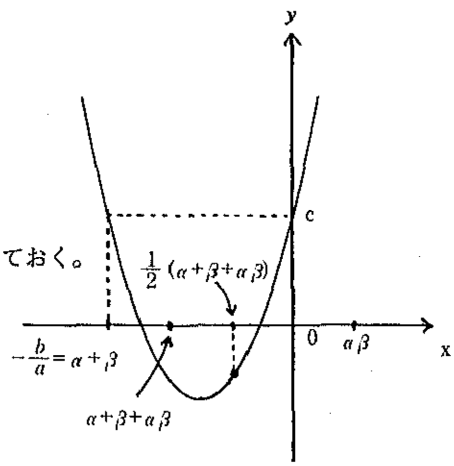
の重解条件を考えればよいが，ここでは微分で求めておく。

すなわち，$2ax+(b-c)=0$ より，

接点の x 座標は

$$x=\frac{c-b}{2a}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha\beta+\alpha+\beta)$$



証明終

6．$\alpha^2+\beta^2$の作図

$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$の作図ができたならば，$\alpha^2+\beta^2$の作図もしたい。この作図は，課題５の作図よりも先に考えついたが，流れを考慮したのでここで記す。

【課題６】

２次方程式$ax^2+bx+c=0$の解をα，βとするとき，
放物線$y=ax^2+bx+c$のグラフを用いて，$\alpha^2+\beta^2$を
x軸上に作図しなさい。

【解説】

放物線$y=f(x)=ax^2+bx+c$において，

α，βは２次方程式$ax^2+bx+c=0$の実数解だから

$f(\alpha)=f(\beta)=0$　すなわち，

$$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c=0 \qquad ⑧$$

$$f(\beta)=a\beta^2+b\beta+c=0 \qquad ⑨$$

一方，【課題４】より，放物線上の点（0，c）における
接線の方程式は$y=bx+c$であることに注意すると，
⑧，⑨式より，

$$y=b\alpha+c$$
$$=-a\alpha^2$$

同様にして，

$$y=b\beta+c$$
$$=-a\beta^2$$

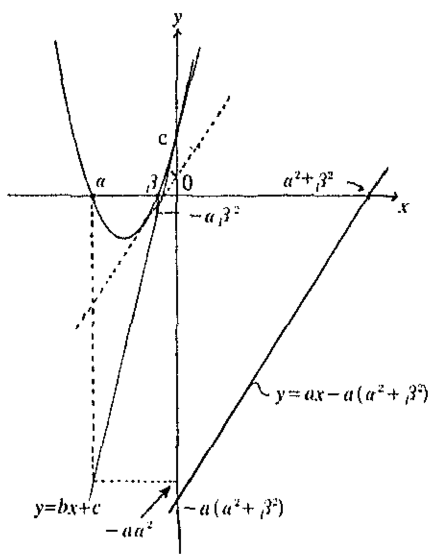
であるから，
y軸上に点Q（0，$-a(\alpha^2+\beta^2)$）を
作図できる。
よって，傾きaの直線で点Qを通る直線

$$y=ax-a(\alpha^2+\beta^2)$$

のx軸との交点は，

$$(\alpha^2+\beta^2,\ 0)$$

となる。



【例題】

2次方程式$x^2+3x+2=0$の解α，βについて，
放物線$y=x^2+3x+2$のグラフを利用して，
$\alpha^2+\beta^2$をx軸上に作図しなさい。

【解説】

y軸の点（0，2）における，この放物線の接線は

$y=3x+2$

である。【課題6】より，$y=3x+2$における

$x=\alpha$，βのときのyの値が，それぞれ$-\alpha^2$，$-\beta^2$である。

よって，

$-(\alpha^2+\beta^2)$がy軸上に作図できる。

あとは，傾きが1の直線が点Q（0，$-(\alpha^2+\beta^2)$）を

通るようにすればよい。

そこで，この放物線上の点における傾き1の接線を考える。

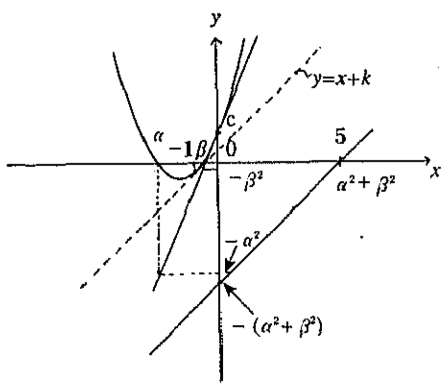
$y'=2x+3=1$　より

接点のx座標は　　　　$x=-1$

であるから，その接線を平行移動させて

点Qを通るようにすればよい。

右の図を参照されたい。



さて，計算によると

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\times2=5$

であり，味気ない。

7．3次関数$y=ax^3+bx^2+cx+d$で考えて，結果を予想してみよう。

【総合例題】で扱った問題を3次関数$y=ax^3+bx^2+cx+d$に発展させると，次が成り立つことが予想できる。3次関数の代表的な場合について，視覚的に見てみる。

【発展】
係数a，b，c，dが正の数である3次方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0$の
実数解の絶対値は，$\frac{b}{a}$より小さくて，$\frac{d}{c}$より大きいことを実感しなさい。

【解説】

3次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

が，3個の実数解を持つ場合について考える。

すなわち，3次関数

$$y=ax^3+bx^2+cx+d \qquad ⑩$$

のグラフは，右の図のようになり，⑩とy軸との交点は（0，d）である。

この（0，d）を通る直線を

$$y=mx+d$$

として，yを消去すると

$$ax^3+bx^2+cx+d=mx+d$$

よって，$ax^3+bx^2+(c-m)x=0$

$$x\{ax^2+bx+(c-m)\}=0 \qquad ⑪$$

これが，$x=0$という重解を持つためには

$$c-m=0$$

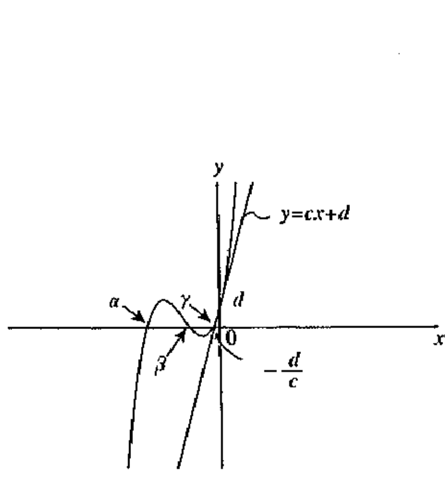
すなわち，$m=c$

よって，（0，d）における⑩の接線の方程式は

$$y=cx+d \qquad ⑫$$

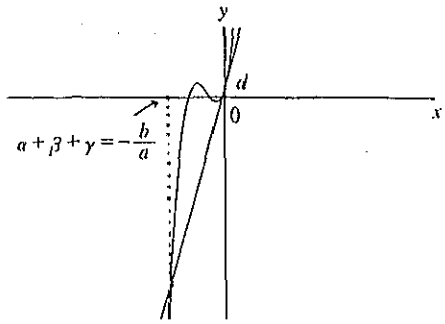
となる。

直線⑫とx軸との交点が（$-\frac{d}{c}$，0）



しかも，⑪から，直線⑫は，⑩と

$x=-\frac{b}{a}$となる⑩上で交わる。



これらのことから，この【発展】問題が，成り立つことを実感できたと思う。

一般に，n次関数

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0 \quad ⑬$$

のグラフがy軸と交わる点をＰとするとき，Ｐにおけるこのn次関数の接線は

$$y=a_1x+a_0 \quad ⑭$$

となることが分かる。また，nが奇数のときは，接線⑭は⑬と交わり，

その交点のx座標は$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$であり，n次方程式のn個の解の和である。

さて，３次方程式$ax^3+bx^2+cx+d=0$の３つの実数解をα，β，γとしたときの解と係数の関係について，

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a} \end{cases} \rightarrow \qquad -\frac{d}{c}=\frac{-\frac{d}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$$

であることに注意しておきたい。これも，全く2次関数の場合と同じである。

なお，3次関数ではうまくいくが，4次関数

$$y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

で同じことを考えたがうまくいかない。

一般に，偶数次ではうまくいかないことがグラフの形からわかりそうである。

これらのことについては，次回への課題としたい。

8. おわりに

今回報告した内容は，本校の中学3年生（51期生）を対象とした授業の一部である。生徒たちは，2次関数，2次方程式の問題を式の計算を中心に解こうという姿勢が大きい。

式の計算が，ただの式変形に終始している生徒にとっては，何も見えてこないし，2次関数や2次方程式の学習自体が空虚に感じたことだろう。

しかし，グラフから視覚的に問題をながめることによって，こういった問題に向かえば，式の変形や式の意味，現在の高校の数学Ⅰで指導している2次方程式・2次不等式の解の意味の理解をより容易にすると思う。

そういった点では，【総合例題】として取り上げた，早稲田の入試問題は関数の構造を大いに意識した出題であり，興味深いものであったし，生徒も放物線$y=ax^2+bx+c$の係数a，b，cの意味や，2次方程式$ax^2+bx+c=0$の「解と係数の関係」などを，視覚的に見ることによってグラフに対する意識が高くなったのではないかと思う。（そうであってほしい。）

今回は2次関数についての報告であるが，早稲田の入試問題の【発展】として，3次，4次の関数の構造とその係数と解の関わりが分かってきた。これらについては，次回に研究報告を行いたい。

今回の研究報告に際し，本校数学科の駒野　誠教官，東京都立墨田川高等学校の中島英世先生，からは，貴重なご示唆を頂いた。また，本校研究部の寺田恵一教官から，終始激励をいただいた。ここに，お礼を申し述べたい。

最後に，このような取り組みにより，対象となった51期生がこれから学ぶ高等学校の数学を，いろいろな角度から見ることができるようになっていってほしい，という期待を込めて筆を置く。

あわせて，各位のご批判を仰ぎたい。