筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第39集　1999年11月

数学的思考力を高める創造的教材の探求（その4）

筑波大学附属駒場中・高等学校
熊倉　啓之・駒野　　誠・鈴木　清夫

数学的思考力を高める創造的教材の探求（その4）

筑波大学附属駒場中・高等学校
熊倉　啓之・駒野　誠・鈴木　清夫

1．研究の目的

授業中での生徒の質問の中に，面白い数学が潜んでいることがある。教師が授業の準備をする際に生ずる素朴な疑問の中に，興味深い数学を見い出すことがある。しかし，日常の忙しさの中で，それらの質問や疑問は忘れてしまうことも多い。

そこで上記のことも含めて，数学の教材について，グループ（教材探検の会）で情報交換を行い，それぞれについて検討することを目的に，1994年度より活動を始めた。

現行の指導要領では，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てることにも重点を置いている。これは，指導法の問題が大きいが，一方でやはり，適切な教材を与えることも大切であろう。そのような教材はすでに数多く知られているが，まだ必ずしも十分ではないし，またすぐれた教材は，いくつあっても多過ぎることはないであろう。

そこで，（少なくとも我々にとって）新しいもので，多種多様な教材を開発していこうというのが，本研究のねらいである。

また本研究を通して，我々教師自身も，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を身につけることも，もう一つのねらいである。

2．研究の方法

教材は，たとえば次のようなものを取り上げる。

- 中学，高校の生徒が興味・関心をもつ教材
- 中学，高校の生徒が，理解できる教材
- 発展，特殊化，一般化できるような教材
- 次の段階（高校，大学）へつながるような教材
- 数学的なよさ・美しさがわかる教材
- 数学的な考え方を必要とする教材
- 操作・活動を伴う教材
- コンピュータ等の教具を活用する教材　など

取り扱う範囲は，必ずしも現行カリキュラムにとらわれることなく，自由に検討する。

また，教材検討は，発展・特殊化・一般化を考えたり，場面設定や表現など，生徒が取り組み易い形を検討する。

3．研究の経過

これまでに16教材について検討し報告した[1)2)3)]。これらのうち，12教材についてはさらに検

討を加え，出版物としてまとめた[1]。また1教材については，日本数学学会誌で報告した[5]。

取り上げた各教材は，それを全てそのまま生徒に与えることを考えてはいない。生徒の実態に応じて，適宜取捨選択，修正して，提示すべきであると考えている。

4．本年度の研究

本年度は，次の5教材について検討した。以下，それぞれの検討結果を報告する。

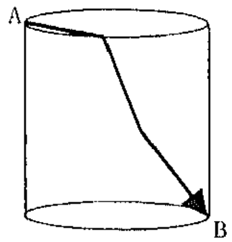
4.1　最短コースを探る　　4.2　カードをそろえる　　4.3　3^nの最小計算回数

4.4　地球を監視する衛星の数　　4.5　カージオイド曲線の秘密

4.1　最短コースを探る

4.1.1．課題

右図で，点Aから点Bまで，円柱の表面上を通って最短距離で行くには，どのようなコースをとればよいか。



【解答】　円柱の底円の半径を1，高さをhとする。図1で，A→P→Bのようにコースをとるとする。$\angle AOP=\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ として，コースの距離 $f(\theta)$ を求める。

図1

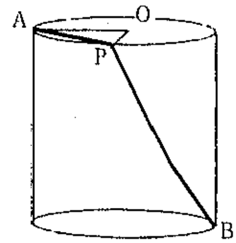
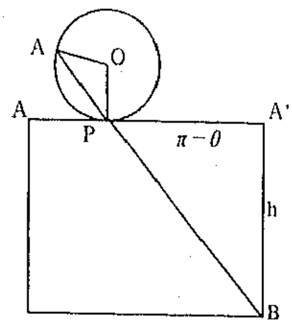


図2のように，展開図をかいて考えると，$AP=\theta$，$A'P=\pi-\theta$ だから，

図2

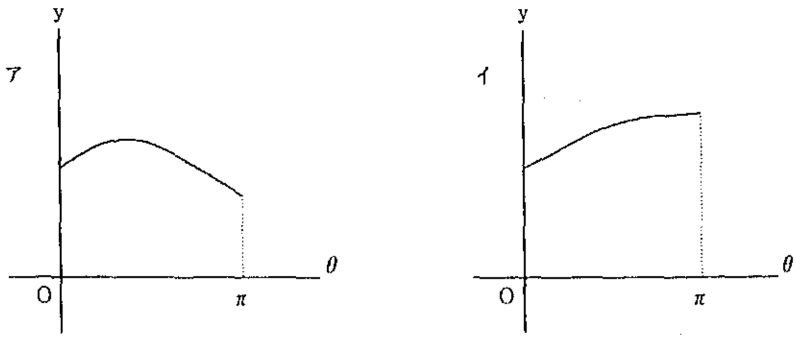


$$f(\theta)=2\sin(\theta/2)+\sqrt{(\pi-\theta)^2+h^2}\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

この $f(\theta)$ が最小となる場合を考えればよい。

$y=f(\theta)$ のグラフをかくと，図3のア，またはイのようになる。

図3



よって，$f(\theta)$が最小となるのは，$\theta=0$　または　$\theta=\pi$　のいずれか

$f(0)=\sqrt{\pi^2+h^2}$，$f(\pi)=2+h$

だから，$f(0)>f(\pi)$より，

$\sqrt{\pi^2+h^2}>2+h$　　よって，$h<\pi^2/4-1$

同様にして，$f(0)<f(\pi)$より，$h>\pi^2/4-1$

以上から，hの大小によって，次の結論が得られる。

ア．$h<\pi^2/4-1$のとき

A→C→Bと進めばよい。

このとき，最短距離は

$2+h$

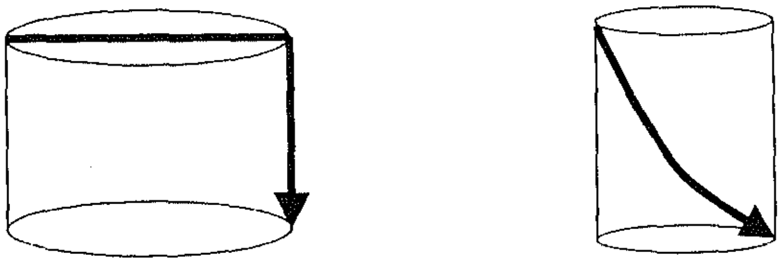
イ．$h>\pi^2/4-1$のとき

A→Bと進めばよい。

このとき，最短距離は

π^2+h^2

図4



$\pi^2/4-1=1.4674\cdots$だから，例えば，$h=1$（$h:r=1:1$)のときはア，$h=2$（$h:r=2:1$）のときはイの場合となる。

参考までに，図3アで，最短距離$f(\theta)$が最大になる場合を調べると，$f(\theta)$を微分して，

$$f'(\theta)=\cos(\theta/2)-\frac{\pi-\theta}{\sqrt{(\pi-\theta)^2-h^2}}$$

ここで，$f'(\theta)=0$とすると，$\cos(\theta/2)=\dfrac{\pi-\theta}{\sqrt{(\pi-\theta)^2-h^2}}$

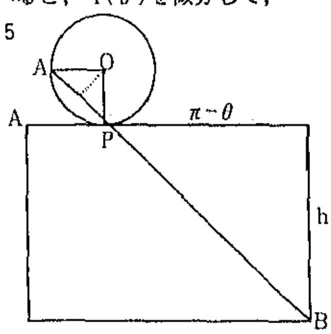
$$\{(\pi-\theta)^2+h^2\}\cos^2(\theta/2)=(\pi-\theta)^2$$

$$h^2\cos^2(\theta/2)=(\pi-\theta)^2\{1-\cos^2(\theta/2)\}$$

$$=(\pi-\theta)^2\sin^2(\theta/2)$$

$$h\cos(\theta/2)=(\pi-\theta)\sin(\theta/2)$$

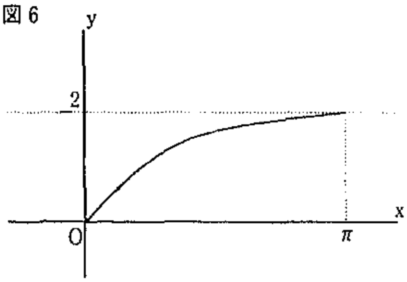
図5



よって，$\tan(\theta/2)=\dfrac{h}{\pi-\theta}$

これはちょうど，A，P，Bが一直線上に並ぶ場合である。(図5参照)

図6



さらに，上の式を変形して，

$$h=(\pi-\theta)\tan(\theta/2)$$

とし，このグラフを，$0\leqq\theta\leqq\pi$でかくと，図6のようになる。このことから，h≧2となるxはない。

よって，グラフが，図3のア，イになるのは，次の場合である。

h＜2のとき～図3ア，　h≧2のとき～図3イ

4.1.2. 課題の発展

【発展1】　点Aの位置を変える

図7

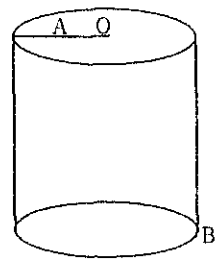


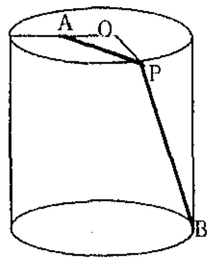
図7で，点Aが，半径の中点の場合に，円柱の表面上を通って最短距離で行くには，どのようなコースをとればよいかを考える。

円柱の底円の半径を1，高さをhとする。

図8で，A→P→Bのようにコースをとるとする。

∠AOP＝θ ($0\leqq\theta\leqq\pi$)として，コースの距離$f(\theta)$を求める。

図8



余弦定理から

$$AP=\sqrt{1+1/4-\cos\theta}=\sqrt{5/4-\cos\theta}$$

よって，はじめの課題と同様に考えると，

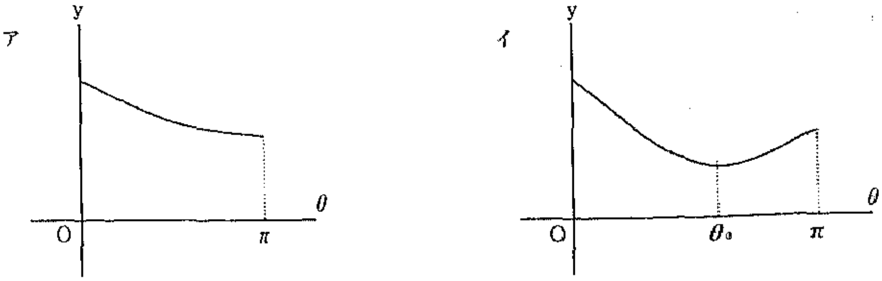
$$f(\theta)=\sqrt{5/4-\cos\theta}=\sqrt{(\pi-\theta)^2+h^2}\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

となることがわかる。

$f(\theta)$が最小となる場合を考えればよい。

$y=f(\theta)$のグラフをかくと，図9のア，またはイのようになる。

図9



よって，$f(\theta)$が最小となるのは，$\theta=\pi$　または　$\theta=\theta_0$　のいずれか

θ_0は，$f'(\theta_0)=0$をみたすので，微分をして調べる。

$$f'(\theta)=\frac{\sin\theta}{2\sqrt{5/4-\cos\theta}}+\frac{-(\pi-\theta)}{\sqrt{(\pi-\theta)^2+h^2}}$$

ここで，$f'(\theta)=0$とすると，

$$\{(\pi-\theta)^2+h^2\}\sin^2\theta=4(\pi-\theta)^2(5/4-\cos\theta)$$
$$=(\pi-\theta)^2(5-4\cos\theta)$$
$$h^2\sin^2\theta=(\pi-\theta)^2(5-4\cos\theta-1+\cos2\theta)=(\pi-\theta)^2(2-\cos\theta)^2$$

よって，$h\sin\theta=(\pi-\theta)(2-\cos\theta)$

$$h=\frac{(\pi-\theta)(2-\cos\theta)}{\sin\theta}\quad(0<\theta<\pi)$$

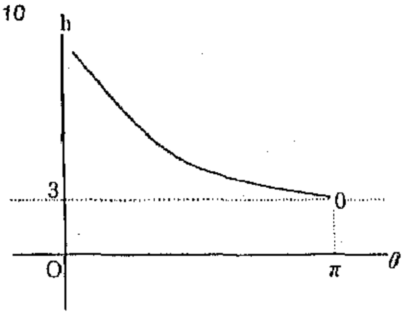
ここで，hのグラフは，図10のようになり，

$\theta\to\pi$のとき，

$$h=\frac{\pi-\theta}{\sin(\pi-\theta)}\cdot(2-\cos\theta)\to3$$

となるので，$h>3$となることがわかる。

図10



つまり，図8のグラフは，次の通りである。

$h\leqq3$のとき～ア，　　$h>3$のとき～イ

以上から，hの大小によって，次の結論が得られる。

ア．$h\leqq3$のとき

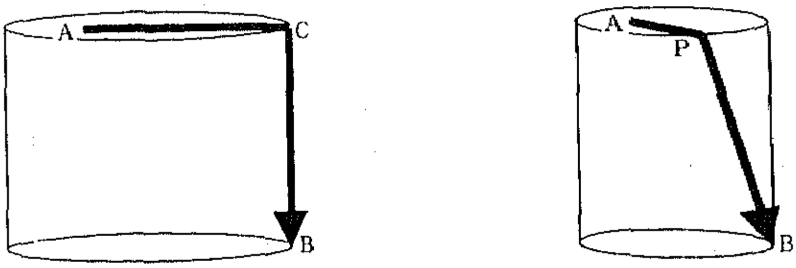
A→C→Bと進めばよい。

イ．$h>3$のとき

A→P→Bと進めばよい。ただし

$$\angle AOP=\theta_0,\ h=\frac{(\pi-\theta_0)(2-\cos\theta_0)}{\sin\theta}$$

図11



【発展２】円すいの場合を考える

図12

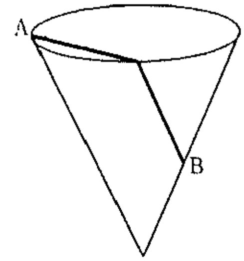
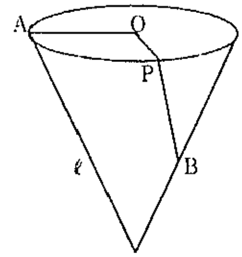


図12で，点Ａから，点Ｂ（母線の中点）まで，円すいの表面上を通って最短距離で行くには，どのようなコースをとればよいかを考える。

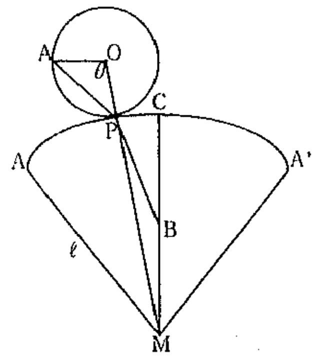
図13



円すいの底円の半径を１，母線の長さを ℓ とする。
図13で，$A \to P \to B$ のようにコースをとるとする。

$\angle AOP = \theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ として，コースの距離 $f(\theta)$ を求める。

図14



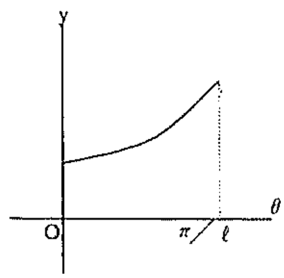
展開図をかいて考えると，$AP = \theta$，$CP = \pi - \theta$，$\angle BMP = (\pi - \theta)/\ell$ だから

$$f(\theta) = 2\sin(\theta/2) + \sqrt{\ell^{2}\cdot\ell^{2}/4 - 2\ell\cdot\ell/2\cdot\cos\{(\pi-\theta)/\ell\}}$$
$$= 2\sin(\theta/2) + \ell\sqrt{5/4 - \cos\{(\pi-\theta)/\ell\}}$$
$$(0 \leqq \theta \leqq \pi/\ell)$$

となることがわかる。

$f(\theta)$ が最小となる場合を考えればよい。
$y = f(\theta)$ のグラフをかくと，図15のようになる。

図15



よって，$f(\theta)$ が最小となるのは，

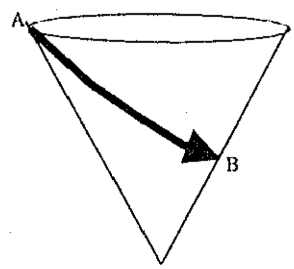
$$\theta = 0$$

の場合である。

以上から，次の結論が得られる。

$A \to B$ と進めばよい。（図16）

図16



４．１．３．授業への活用

① 分野

中学３年・課題学習（いろいろな関数），「個数の処理」
高校数学Ⅲ「微分の応用」，数学Ｃ「いろいろな曲線」等

② 留意点

特別な２つのコースの距離を比較するのであれば，中学で

も扱える。

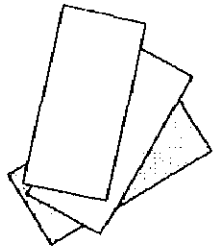
グラフについては，微分を使ってかいてもよいが，グラフ電卓等を積極的に使用してもよいだろう。

4.2 カードをそろえる

4.2.1 課題

ある品物を買うと，おまけでカードがもらえる。カードは3種類あるが，買うときにはどの種類のカードかわからない。

3種類のカード全部を揃えるには，平均で何個の品物を買えばよいか？



【解答】まず，カードの種類が，2種類の場合を考えることにする。

n個目の品物を買って，2種類のカードが全部揃う確率を$p_2(n)$とすると，

$p_2(1)=0$

$p_2(2)=2/2^2=1/2$

$p_2(3)$は，2個目まで1種類で，3個目に2種類となるのだから

$p_2(3)=({}_2C_1\cdot 1^2\cdot 1)/2^3=1/4$

同様に，$p_2(4)=({}_2C_1\cdot 1^3\cdot 1)/2^4=1/8$

一般に，$p_2(n)=({}_2C_1\cdot 1^{n-1}\cdot 1)/2^n=1/2^{n-1}$

よって，品物を買う個数の平均E_2は，

$$E_2=\sum_{n=2}^{\infty} np_2(n)=\sum_{n=2}^{\infty} n/2^{n-1}$$

$$=2/2+3/2^2+4/2^3+\cdots$$

$$E_2/2=\qquad 2/2^2+3/2^3+\cdots$$

$$E_2/2=1\qquad +1/2^2+1/2^3+\cdots$$

$$=1+\frac{1+2^2}{1-1/2}=3/2$$

だから，　$E_2=3$（個）

次に，カードの種類が，3種類の場合を考える。

n個目の品物を買って，3種類のカードが全部揃う確率を$p_3(n)$とすると，

$p_3(1)=p_3(2)=0$

$p_3(3)=3!/3^3=2/9$

$p_3(4)$は，3個目までに2種類揃っていて，4個目に3種類となるのだから

$$p_3(4)={}_3C_2(2^3-2)/3^4=2/9$$

一般に，$p_3(n)={}_3C_2(2^{n-1}-2)/3^n=(2^{n-1}-2)/3^{n-1}$

よって，品物を買う個数の平均E_3は，

$$E_3=\sum_{n=3}^{\infty}np_3(n)=\sum_{n=3}^{\infty}\{n(2/3)^{n-1}-2n(1/3)^{n-1}\}$$

ここで，$F=\sum_{n=3}^{\infty}\{n(2/3)^{n-1}\}$

$$=3(2/3)^2+4(2/3)^3+5(2/3)^4+\cdots$$

$$2/3F=\qquad 3(2/3)^3+4(2/3)^4+\cdots$$

$$1/3F=3(2/3)^2+(2/3)^3+(2/3)^4+\cdots$$

$$=4/3+\frac{(2/3)^3}{1-(2/3)}$$

よって，$F=20/3$

同様にして，$G=\sum_{n=3}^{\infty}2n(1/3)^{n-1}$

だから，$E_3=F-G=20/3-7/6=11/2=$5.5（個）

4.2.2. 課題の発展

【発展1】カードの種類が4種類の場合

n個目の品物を買って，4種類のカードが全部揃う確率を$p_4(n)$とすると，

$$p_4(1)=p_4(2)=p_4(3)=0$$

$$p_4(4)=4!/4^4=3/32$$

$p_4(5)$は，4個目までに3種類揃っていて，5個目に4種類となるのだから

$$p_4(5)={}_4C_3\{3^4-{}_3C_2(2^4-2)-{}_3C_1\}/4^5=9/64$$

一般に，$p_4(n)={}_4C_3\{3^{n-1}-{}_3C_2(2^{n-1}-2)-{}_3C_1\}/4^{n-1}$

$$=(3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3)/4^{n-1}$$

よって，品物を買う個数の平均E_4は，

$$E_4=\sum_{n=1}^{\infty}np_4(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{n(3/4)^{n-1}-3n(1/2)^{n-1}+3(1/4)^{n-1}\}$$

ここから先は，最初の課題と同様に計算して，

$E_4=$25/3（個）（$=8.333\cdots$）

【発展2】　カードの種類がk種類の場合を考える

4種類の場合と同様にして，5種類の場合を考える。

n個目の品物を買って，5種類のカードが全部揃う確率を$p_5(n)$とすると，

$$p_5(1)=p_5(2)=p_5(3)=p_5(4)=0$$

$$p_5(5)=5!/5^5=24/625$$

$$p_5(6)={}_5C_4\{4^5-{}_4C_3(3^5-3\cdot 2^5+3)-{}_4C_2(2^5-2)-{}_4C_1\}/5^6$$

一般に，

$$p_5(n)={}_5C_4\{4^{n-1}-{}_4C_3(3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3)-{}_4C_2(2^{n-1}-2)-{}_4C_1\}/5^n$$
$$=(4^{n-1}-4\cdot 3^{n-1}+6\cdot 2^{n-1}-4)/5^{n-1}$$

同様にして，6種類の場合を考えると，

$$p_6(n)={}_6C_5\{5^{n-1}-{}_5C_4(4^{n-1}-4\cdot 3^{n-1}+6\cdot 2^{n-1}-4)$$
$$-{}_5C_3(3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3)-{}_5C_2(2^{n-1}-2)-{}_5C_1\}/6^n$$
$$=(5^{n-1}-5\cdot 4^{n-1}+10\cdot 3^{n-1}-10\cdot 2^{n-1}+5)/6^{n-1}$$

この式は，次のようにもかける。

$$=({}_5C_5 5^{n-1}-{}_5C_4 4^{n-1}+{}_5C_3 3^{n-1}-{}_5C_2 2^{n-1}+{}_5C_1)/6^{n-1}$$
$$=\sum_{m=1}^{5}(-1)^{5-m}{}_5C_m m^{n-1}/6^{n-1}$$

これから，一般化すると，

$$p_k(n)=\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^{k-1-m}{}_{k-1}C_m m^{n-1}/k^{n-1}$$

よって，品物を買う個数の平均E_kは，次の式で与えられる。

$$E_k=\sum_{n=k}^{\infty}np_k(n)=\sum_{n=k}^{\infty}nA_{k-1}/k^{n-1}$$

ただし，$A_k=\sum_{m=1}^{k}(-1)^{k-m}{}_kC_m m^{n-1}$ $(n-1\geqq k)$

E_kの式は，さらに次のように計算を進めることができる。

$$E_k=\sum_{n=k}^{\infty}n\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^{k-1-m}{}_kC_m m^{n-1}/k^{n-1}$$
$$=\sum_{m=1}^{k-1}\left\{\sum_{n=k}^{\infty}n(m/k)^{n-1}\right\}(-1)^{k-1-m}{}_{k-1}C_m$$

ここで，$F=\sum_{n=k}^{\infty}n(m/k)^{n-1}$

$$=k(m/k)^{k-1}+(k+1)(m/k)^k+\cdots$$

$$(m/k)F=\qquad\qquad k(m/k)^k+\cdots$$

$$\frac{k-m}{k}F=k(m/k)^{k-1}+\frac{(m/k)^k}{1-m/k}$$

だから，$F=(m/k)^{k-1}\{k+m/(k-m)\}\times k/(k-m)$

となり，最終的に次の式が得られる。

$$E_k=\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^{k-1-m}{}_{k-1}C_m\left(\frac{m}{k}\right)^{k-1}\left(k+\frac{m}{k-m}\right)\frac{m}{k-m}$$

上の式を用いて，コンピュータにより，k＝2，3，…のときのE_kの値を求めてみた。

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_k	3	5.5	8.33	11.42	14.7	18.15	21.74	25.46	29.29
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19
E_k	33.22	37.24	41.34	45.53	49.77	54.09	58.47	62.91	67.41

4.2.3. 授業への活用

① 分野

高校数学Ⅰ「確率」，数学B「確率分布」等

② 留意点

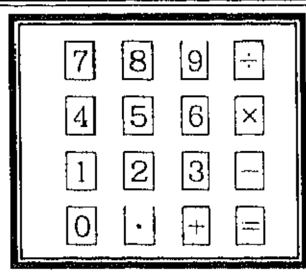
最初に直観でどうなるかを聞いた後，調べるようにするとよい。まずは2種類の場合から調べ，3種類，4種類，…と順に考えさせたい。

4.3 3^nの最小計算回数

4.3.1. 課題[6]

3^{30}を電卓で計算するのに，ボタンを押す回数をできるだけ少なくしたい。ただし，ボタンは，＝，×，÷のいずれかとする。

何回押せば計算できるか？



【解答】電卓には，いろいろな機能を持ったものもあるが，ここでは，次の条件のもとで計算を行うものとする。

① 計算式の通りに，ボタンを押す。

例） 3×3＝9 の場合　4回

② 直前に計算した結果を用いることができる。

例） $\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{9}\boxed{=}\boxed{81}$

↑

直前に計算した結果

③　②以外の過去の計算結果，既知の計算結果等は使えないものとする。

なお，実際には大きな桁数になると，エラーになる電卓もあるが，ここではどのような桁数であっても表示できるものとする。

3^nの計算で，nがいろいろな場合を調べる。

（1）n＝2^mの場合

この場合は，直前の計算結果を繰り返し用いると，ボタンを押す回数が少ないことがわかる。

n＝2のとき，$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{=}\ 3^2$　　より，2＋2×1＝4回

n＝4のとき，$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3^2}\boxed{=}\ 3^4$　　より，2＋2×2＝6回

n＝8のとき，$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3^2}\boxed{\times}\boxed{3^4}\boxed{=}\ 3^8$　　より，2＋2×3＝8回

一般に

n＝2^mのとき，$\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{3^2}\boxed{\times}\boxed{3^4}\boxed{\times}\cdots\boxed{\times}\boxed{3^{m-1}}\boxed{=}\ 3^{2+2m}$より，2＋2m回

上の結果2＋2mで，2は，最初の$\boxed{3}$と最後の$\boxed{=}$であり，2mは，途中$\boxed{\times}\boxed{3^x}$の形の部分である。したがって，実質的な計算回数はm回と考えてよい。すなわち，

（ボタンを押す回数）＝2＋2×（計算回数）

以下では，この計算回数を求めることにする。

因みに，n＝2^mのとき，m回である。

（2）n＝3，5，9の場合

この場合は，（1）の場合に，さらに$\boxed{\times}\boxed{3}$を1回行えばよい。

n＝3のとき，$3\boxed{\times 3}\boxed{\times 3}=3^3$　　より，2回

n＝5のとき，$3\boxed{\times 3}\boxed{\times 3^2}\boxed{\times 3}=3^5$　　より，3回

n＝9のとき，$3\boxed{\times 3}\boxed{\times 3^2}\boxed{\times 3^4}\boxed{\times 3}=3^9$　　より，4回

(3)　n＝6の場合

この場合は，次のいずれかが考えられる。

ア．n＝4の場合に，$\boxed{\times 3}$を2回行う。

イ．n＝3の場合に，直前の結果を用いる。

調べてみると，イの場合の方が計算回数が少ないことがわかる。

アのとき，$3\boxed{\times 3}\boxed{\times 3^2}\boxed{\times 3}\boxed{\times 3}=3^6$　　より，4回

イのとき，$3\boxed{\times 3}\boxed{\times 3}\boxed{\times 3^3}=3^6$　　より，3回

（4）n＝7の場合

この場合は，次のいずれかが考えられる。

ア．n＝6の場合に，$\boxed{\times 3}$を1回行う。

イ．n＝8の場合に，$\boxed{\div 3}$を1回行う。

調べてみると，イの場合の方が計算回数が少なくなる。

n＝7のとき，$3\boxed{\times 3}\boxed{\times 3^2}\boxed{\times 3^4}\boxed{\div 3}=3^7$より，4回

（5） n＝30の場合

これまでの（1）～（4）の結果から，次のことがわかる。

① $n=2^m$の場合 → 直前の結果を繰り返し用いる。

② $n=2^m+1$の場合 → ①に，さらに$\boxed{\times 3}$を1回行う。

③ $n=2^m-1$の場合 → ①で$n=2^m$を計算し，さらに$\boxed{\div 3}$を1回行う。

①～③以外の場合は，次のようになる。

④ $n=2k$（偶数）の場合 → $n=k$を計算し，さらに$\boxed{\times 3^k}$を1回行う。

⑤ $n=2k+1$（奇数）の場合 → 次のア，イのいずれか少ない方

ア．$n=2k$を計算し，さらに$\boxed{\times 3}$を1回行う。

イ．$n=2k+2$を計算し，さらに$\boxed{\div 3}$を1回行う。

上の結果に基づき，n＝30のときを調べる。

n＝30は偶数だから，n＝15の場合に，$\boxed{\times 3^{15}}$を1回行う。

n＝15は奇数だから，次のいずれか少ない方

ア．n＝14の場合に，$\boxed{\times 3}$を1回行う。

イ．n＝16の場合に，$\boxed{\div 3}$を1回行う。

まずアの場合を考えると，

n＝14は偶数だから，n＝7の場合に，$\boxed{\times 3^7}$を1回行う。

n＝7は，（4）より4回計算すればよい。

よって，アの場合の計算回数は，4＋1＋1＝6回

次にイの場合を考えると，

n＝16は，（1）より4回計算すればよい。

よって，イの場合の計算回数は，4＋1＝5回

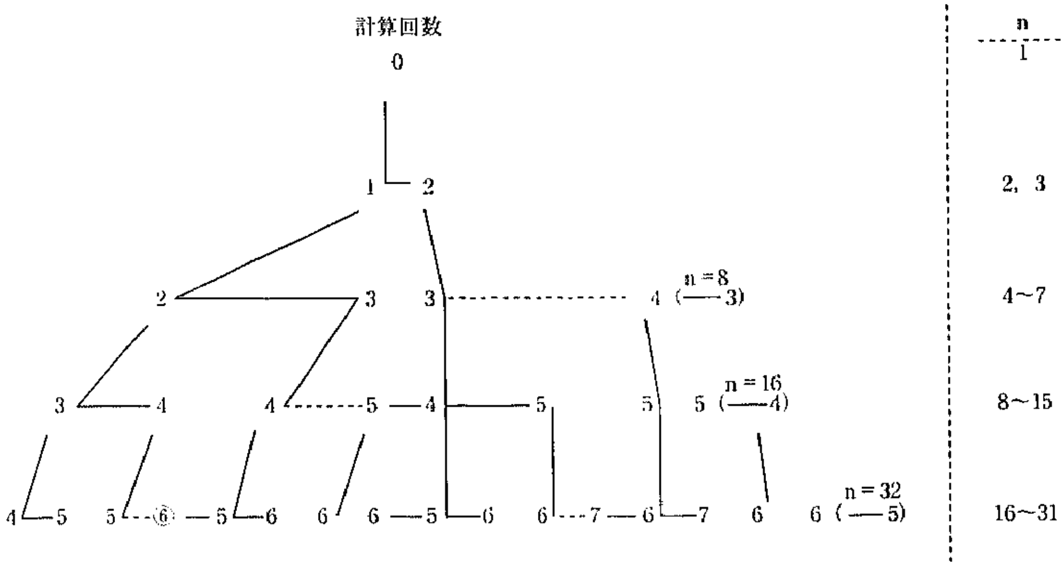
だから，イの方が少ないので，合計の計算回数は，4＋1＋1＝6回

計算の手順は，$3\ \boxed{\times 3}\boxed{\times 3^2}\boxed{\times 3^4}\boxed{\times 3^8}\boxed{\div 3}\boxed{\times 3^{15}}=3^{30}$

4.3.2. 課題の一般化

【一般化】漸化式を求める

4.3.1.(5) で検討した結果に基づき，n＝1～31の場合の各計算回数を，$2^{k-1}\leqq n<2^k$ごとにかくと，次のようになる。



——— 最小回数の計算手順　　　------- 最小回数の計算別手順

（例） n = 19の場合の計算手順

＜手順1＞	n	1	→	2	→	4	→	5	→	10	→	20	→	19
	回数	0		1		2		3		4		5		6
＜手順2＞	n	1	→	2	→	4	→	8	→	9	→	18	→	19
	回数	0		1		2		3		4		5		6

次に，実際に漸化式を作ってみると，次のようにまとめられる。

3^nの最小計算回数を，

$a_n = A(k, m)$　　ただし，$n = 2^{k-1} + m$　　$(0 \leqq m \leqq 2^{k-1} - 1)$

とおく。このとき，$k \geqq 2$で

$A(k+1, 2m) = A(k, m) + 1$　　… ①

$A(k+1, 2m+1) = \mathrm{Min}\{A(k, m), A(k, m+1)\} + 2$　　… ②

$A(2, 0) = 1$, $A(2, 1) = 2$, $A(3, 0) = 2$

となる。ただし②で，$m = 2^{k-1} - 1$のとき，

$A(k, m+1) = A(k, 2^{k-1}) = A(k+1, 0)$ とおきかえて考える。

ところが，②で，$A(k, m)$ とその両隣りの大小を比較してみると，いつも

$A(k,$ 偶数$) \leqq A(k,$ 奇数$) \geqq A(k,$ 偶数$)$

となっていることがわかる。このことは，漸化式の作り方から示される。

そこで，②式を書き換えて，次のような漸化式ができる。

3^nの最小計算回数を，

$a_n = A(k,\ m)$　　ただし，$n = 2^{k-1} + m$　　$(0 \leqq m \leqq 2^{k-1} - 1)$

とおく。このとき，$k \geqq 2$で

$$A(k+1,\ 2m) = A(k,\ m) + 1 \qquad \cdots ①$$

$$A(k+1,\ 2m+1) = \begin{cases} A(k,\ m) + 2 & (m：偶数) \\ A(k,\ m+1) + 2 & (m：奇数) \end{cases} \qquad \cdots ②'$$

$A(2,\ 0) = 1,\ A(2,\ 1) = 2,\ A(3,\ 0) = 2$

となる。ただし②'で，$m = 2^{k-1} - 1$のとき，

$A(k,\ m+1) = A(k,\ 2^{k-1}) = A(k+1,\ 0)$ とおきかえて考える。

4.3.3. 授業への活用

① 分野

中学校数学「課題学習」，高校数学Ⅰ「個数の処理」，高校数学A「数列」等

② 留意点

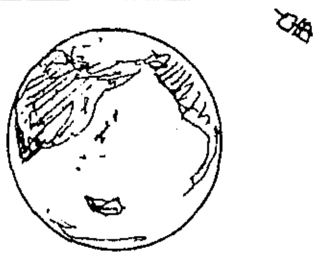
実際に電卓を用いて，最小の計算回数を調べさせたい。いろいろなnについて帰納的に調べて規則性を自分で発見し，電卓の機能を超える多数桁の計算についても，計算回数がわかるとよいだろう。

4.4. 地球を監視する衛星の数

4.4.1. 課題

地球（球）の全ての地点を監視するためには，静止衛星を最低何個うちあげる必要があるか？

また，どんな配置にしておくのがよいのか？



【考え方】

地球と静止衛星は，見る・見られるの関係にある。その主体をどちらにするかで2通りの解法が考えられる。つまり，静止衛星から地球が見えること、または地球から静止衛星が見えることを考えればよい。

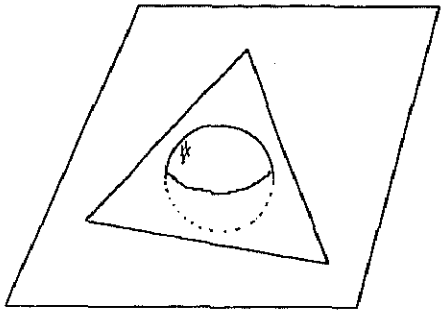
【解答１】（地球から静止衛星をみる立場）

（１）静止衛星２個

２個が無限遠点にないので不可能である。

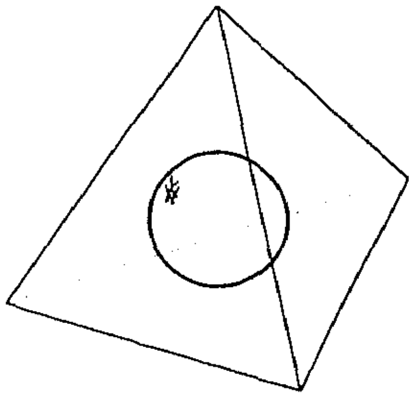
（３）静止衛星３個

３個は同一平面上にある。その平面が地球を切断するとき，その平面に垂直な直線と地球との交点付近は見えない。また，その平面と地球が接しているか離れている場合は，その平面から見て地球の反対側の一部は見えないことになり，３個では不可能である。



（４）静止衛星４個

地球を内包するような四面体の頂点に静止衛星があればOK.



それは，地球上の任意の点での接平面を考えると，その接平面は四面体の辺と必ず交わるので，四面体の頂点のどれかが見える。つぎに，静止衛星の高さをできるだけ低く設定するために，地球に外接する正四面体の４頂点とするとよいことを示す：

地球（球）の表面を，$x^2+y^2+z^2=1$……①

地球上の任意の点をＰ（ａ，ｂ，ｃ）とする。

Ｐでの接平面の方程式αは，$ax+by+cz=1$……②

点Ｐから静止衛星が見えるのは，その衛星が接平面αを境に，地球と反対側にあればよい。そこで，

$$f(x,\ y,\ z)=ax+by+cz-1$$

を考える。$f(0,\ 0,\ 0)=-1<0$より，見える側は正か零領域である，

正四面体の４つの頂点（静止衛星）の座標（位置）を次のように設定する。

$A(0,\ 0,\ 3)$，$B(2\sqrt{2},\ 0,\ -1)$，$C(-\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ -1)$，$D(-\sqrt{2},\ -\sqrt{6},\ -1)$

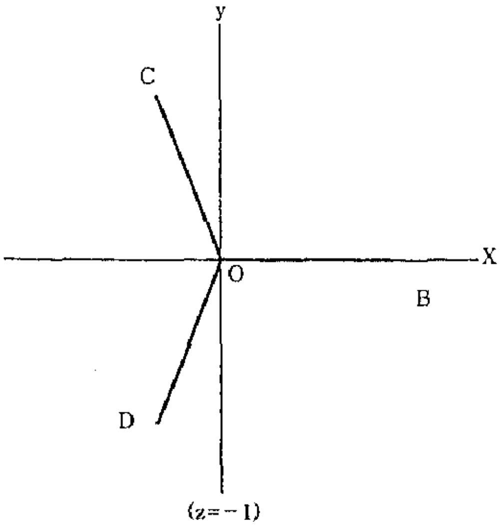
（１）点Ａから地球が見える場合：

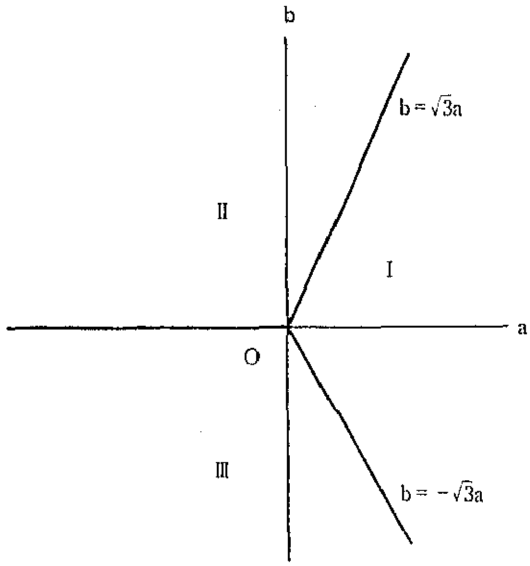
$f(0,\ 0,\ 3)=3c-1\geqq 0$　よって，$c\geqq 1/3$であればOK.

（２）$c<1/3$の場合：

残る３点は同一平面$z=-1$上の正三角形を成している。

そこで，接点の位置を以下のように場合分けする。





Ⅰについて，OKであるならば，Ⅱ，Ⅲについても OKである。

そこでⅠについて，

$$-\sqrt{3}a \leqq b \leqq \sqrt{3}a,\quad c < 1/3,\quad a \geqq 0$$

点Pは①上だから，$a^2+b^2+c^2=1$

$$1=a^2+b^2+c^2 \leqq 4a^2+c^2$$

Pの満たす領域は，右の楕円の斜線部で，

$$c \leqq 2\sqrt{2}a-1 \cdots\cdots ③$$

を満たす。

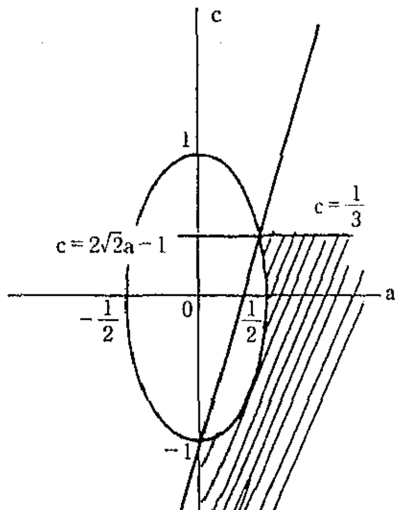
B点から見ると，

$f(2\sqrt{2},\ 0,\ -1)=2\sqrt{2}a-c-1 \geqq 0$（③より）

よって，点Bは，見える。

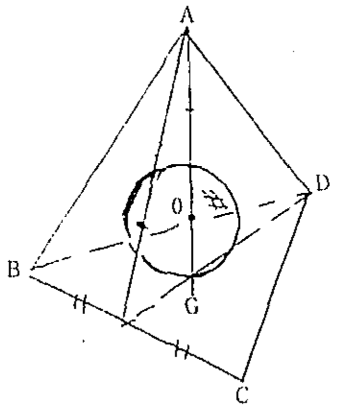
以上の事から，外接する正四面体の4頂点は，地球上の全ての点から見ることが出来る。

ゆえに，逆にこの4つの静止衛星で地球上の全ての地点を監視可能である。



【解答２】（静止衛星から地球をみる立場）

正四面体の特徴



Ａ－ＢＣＤの中心Ｏは，

△ＢＣＤの重心Ｇに対し，ＡＧのＧから４等分点

各４つの正三角形の重心が，内接球と接する点。

地球（球）の表面を，$x^2+y^2+z^2=1$……①

正四面体の４つの頂点（静止衛星）の座標（位置）を次のように設定する。

$A(0,\ 0,\ 3)$，$B(2\sqrt{2},\ 0,\ -1)$，$C(-\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ -1)$，$D(-\sqrt{2},\ -\sqrt{6},\ -1)$

点$(p,\ q,\ r)$から見える限界の円を含む平面（円の切断面）の方程式は

$$px+qy+rz=1 \quad \cdots\cdots ②$$

Ａによる切断面は，$3z=1$……③

Ｂによる切断面は，$\sqrt{2}x-z=1$……④

Ｃによる切断面は，$-\sqrt{2}x+\sqrt{6}y-z=1$……⑤

Ｄによる切断面は，$-\sqrt{2}x-\sqrt{6}y-z=1$……⑥

２点ＦからＧからの見える限界線（２円）の交点を記号R_{FG}とすると

R_{BC}は，①，④，⑤を連立して，$(\sqrt{2}/3,\ \sqrt{6}/3,\ 1/3)$，$(0,\ 0,\ -1)$

R_{BD}は，①，④，⑥を連立して，$(\sqrt{2}/3,\ -\sqrt{6}/3,\ 1/3)$，$(0,\ 0,\ -1)$

R_{CD}は，①，⑤，⑥を連立して，$(-2\sqrt{2}/3,\ 0,\ 1/3)$，$(0,\ 0,\ -1)$

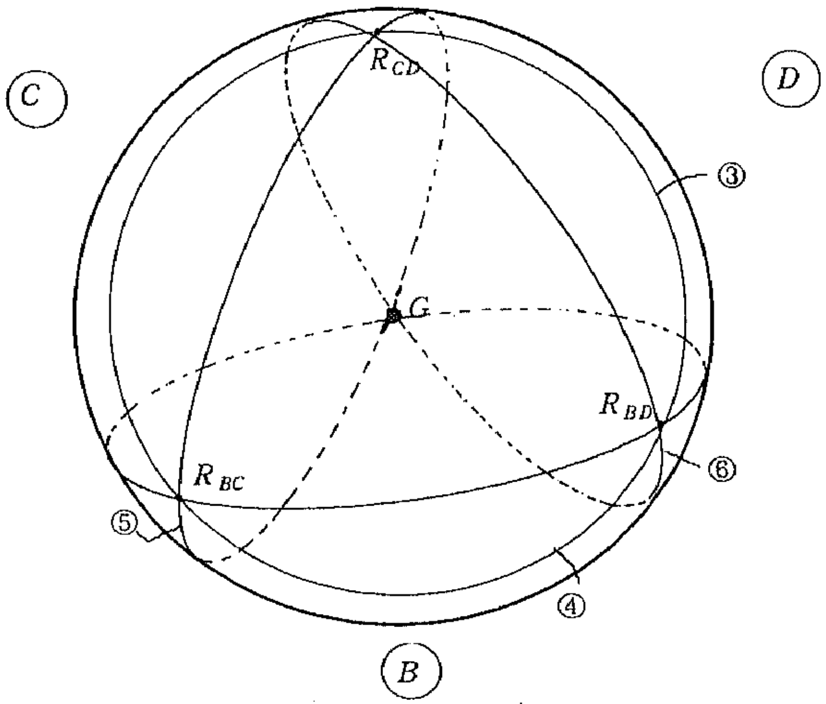
また，

R_{AD}は，①，③，⑥を連立して，R_{BD}とR_{CD}（ただし，$(0,\ 0,\ -1)$を除く）

R_{AC}は，①，③，⑤を連立して，R_{BC}とR_{CD}（ただし，$(0,\ 0,\ -1)$を除く）

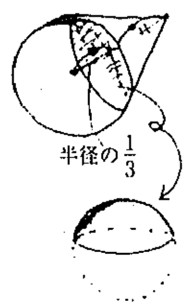
R_{AB}は，①，③，④を連立して，R_{BC}とR_{BD}（ただし，$(0,\ 0,\ -1)$を除く）

以上より，Ａから見た限界が丁度３点R_{BC}，R_{BD}，R_{CD}を通ることが示せたので，地球に外接する正四面体の頂点に位置する４つの静止衛星から地球の全ての地点を監視できることがわかった。



＜頂点Ａから底面に垂直に見た図＞

4.4.2. 課題から気が付いたこと



興味ある数値を紹介する：

球（半径１）の全体の表面積：4π

右の図のような中心から1／3以上の部分の表面積は，$4\pi/3$

（１）地球から３つの静止衛星が見えるのは，４地点

（２）地球から２つの静止衛星が見えるのは，地球の表面積の1／3

（３）地球から１つの静止衛星しか見えないのは，地球の表面積の2／3

おにぎり型球面三角形の表面積：$2\pi/3$，これが４つある。

スイカ型球面三角形の表面積：$2\pi/9$，これが６つある。

よって，一つの静止衛星から見ることが出来る表面積は，$4\pi/3$

これは，おにぎり型１つ＋スイカ型３つの合計面積である。

$(2\pi/3)\times4+(2\pi/9)\times6=4\pi$（全表面積）

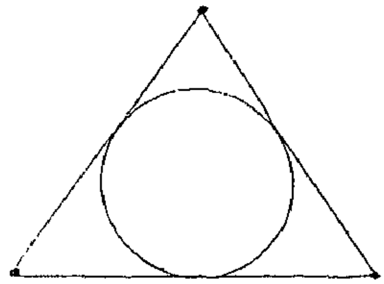
重なっている部分の総面積の全体に対する割合は，

スイカ型球面三角形の表面積$2\pi/9$の６つ分だから，$4\pi/3$で，$4\pi/3/4\pi=1/3$

4.4.3. 課題の特殊化

【特殊化1】次元を下げて円を考える：

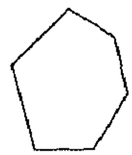
平面上の円の周上を動く点があるとする。そのとき，その平面上の固定した点からその動点を観察するには，何点必要でどのように配置するのがよいか？



特殊化1の解答：
その円に外接する（正）三角形の3頂点

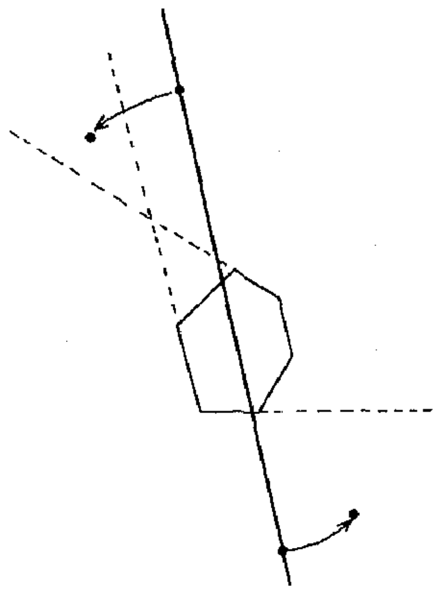
【特殊化1の発展】円から凸な平面図形へ

平面上の凸多角形の周上を動く点があるとする。そのとき，その平面上の固定した点からその動点を観察するには，何点必要でどのように配置するのがよいか？



特殊化1の発展の解答：2点でOK.

凸多角形の内部を通るような直線を考える。凸多角形の外部でその直線上の2点から凸多角形を見る。そのとき，その直線に平行な凸多角形の辺がある場合には，この平面上で凸多角形の内部の点を一方が見える位置まで移動する。ただし，2点を結ぶ直線と凸多角形の辺が再び平行にならないところまでである。



4.4.4. 課題の発展

【発展】立体を変える

空間において，一般に凸である立体図形で，3点でその立体を監視できるようなものは存在するのか？

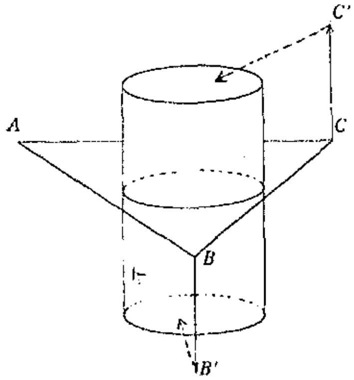
ここで，凸とは，その立体の表面の任意の2点を結んだとき，その線分がその立体の内部または表面上にあること。

発展の略証：

円柱（上下の面がある）は，3点で可能である。

円柱を上面に平行な切断面を考え，その平面上に側面を外接するような正三角形の頂点をとる。このとき，上面と底面は見えない。そこで，そのうちの2点を円柱の母線に平行に上下させる。すると，上げた方は上面，下げた方は底面が見えてくる。そのとき，円柱の側面は常に見えている。

よって，円柱は3点で監視可能である。



4.4.5. 授業への活用

①分野

中学2年　平行線の指導場面，3年　空間の切断の指導場面，課題学習全般

高校数学B「ベクトル」

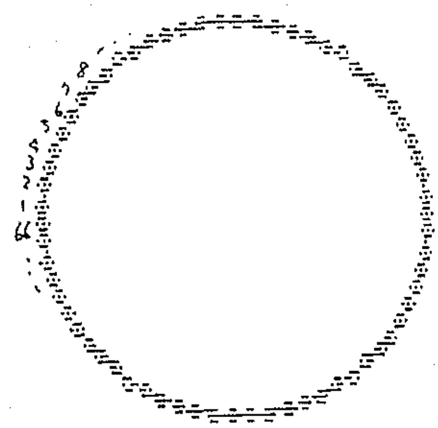
②留意点

空間での平面の方程式，切断面の扱い方など少し発展的な内容であるが情報化社会における問題として投げかけたい課題である。球を内包すれば見えることを引出したい。その際，円の接線に対応する接平面の考えをヒントとして与えるのもよい。

4.5. カージオイド曲線の秘密

4.5.1. 課題

右の図のように円周上を66等分した66個の点をとる。それらを順に内部を右に見て P_1，P_2，……，P_{66}とし，線分 P_iP_{2i}（i＝1，2，……，66）を結んでいくと，どんな曲線が浮び上がるでしょうか？



【解答】

〈性質Ⅰ〉一般に，円周上をn等分した点を，順に内部を右に見て P_1(A)，P_2，P_3，……，P_nとする。このとき，中心角について，

$2\angle AOP_i = \angle AOP_{2i}$ ($i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$) が成り立つ。

〈性質Ⅰの略証〉

右の図のように，定点A，動点P_i，P_{2i}をとる。

$\angle P_iAO = \theta$

とすると，

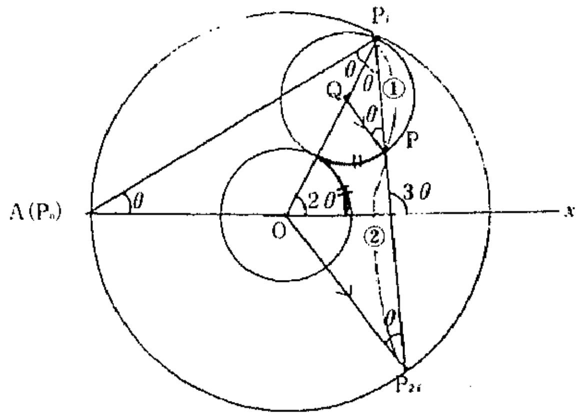
$\angle AOP_i = \pi - 2\theta$

であり，

$\angle AOP_{2i} = 2\pi - 4\theta = 2(\pi - 2\theta)$

$= 2\angle AOP_i$

$\angle AOP_{2i} = 2\angle AOP_i$



〈性質Ⅱ〉

点Aから出た光がBで反射したBPは，カージオイド曲線上の点Pでの接線である。

カージオイド曲線とは，

右の図において，$\angle QOx = \theta$とすると，

$\angle OQP = \theta$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$より，

$= 2(\cos\theta, \sin\theta) + (\cos(2\theta - \pi), \sin(2\theta - \pi))$

$= (2\cos\theta - \cos 2\theta, 2\sin\theta - \sin 2\theta)$

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}$$

〈性質Ⅱの証明〉 光がA→B→Cと反射したとする。

$\angle BAO = \theta$とすると，

(BCの傾き)$= \tan 3\theta$

一方，$\angle BOx = 2\theta$であるから，カージオイド曲線上の点Pは，

P $(2\cos 2\theta - \cos 4\theta, 2\sin 2\theta - \sin 4\theta)$ と表される。

このとき，$\angle OBP = \theta$であるから

$\angle ABO = \angle OBP$となり，

BPは，反射した線と一致する。すなわち，BC上に点Pがある。……①

点Pにおける接線の傾きは，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{4\cos 2\theta - 4\cos 4\theta}{-4\sin 2\theta + 4\sin 4\theta} = \frac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{-\sin 2\theta + \sin 4\theta}$$

$$= \frac{2\sin 3\theta \sin\theta}{2\cos 3\theta \sin\theta} = \tan 3\theta$$

よって，（ＢＣの傾き）＝（点Ｐでの接線の傾き）……②

①，②は，カージオイド曲線の接線である。

性質Ⅰ，性質Ⅱより，線分P_iP_{2i}（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）は，カージオイド曲線の包絡線である。

〈性質Ⅲ〉線分P_iP_{2i}（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）を1：2に内分する点が包絡線であるカージオイド曲線上の接点である。

これは，性質Ⅰの図で，

$$QP // OP_{2i},\quad P_iQ : QO = 1 : 2$$

であるからである。

補遺：$x_i = 1, 2, \cdots\cdots, 28$に対して，

$$y_i \equiv k\, x_i \pmod{29}$$

x_iとy_iとを結ぶ線分による包絡線を考えていることになる。

$k=2$の場合がカージオイド曲線であり，$k=3$の場合がネフロイド曲線である。

$k=2$のとき

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	1	3	5	7	9

x_i	20	21	22	23	24	25	26	27	28
y_i	11	13	15	17	19	21	23	25	27

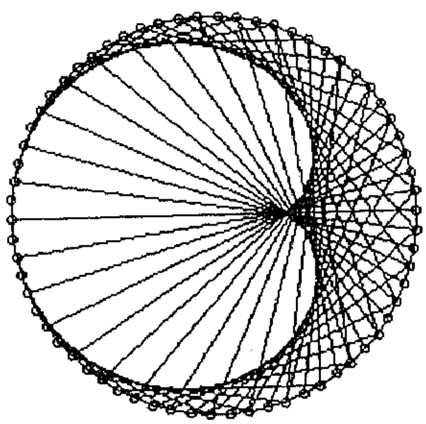
これを一筆書きで描くなら，

x_i	1	2	4	8	16	3	6	12	24	19	9	18	7	14	28	27	25	21	26	23
y_i	2	4	8	16	3	6	12	24	19	9	18	7	14	28	27	25	21	26	23	

x_i	23	17	5	10	20	11	22	15
y_i	17	5	10	20	11	22	15	1

下の図は，66点のカージオイド曲線（$\bmod 67$）

4.5.2.　課題の特殊化



【特殊化】線分P_iP_{k+i}（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）

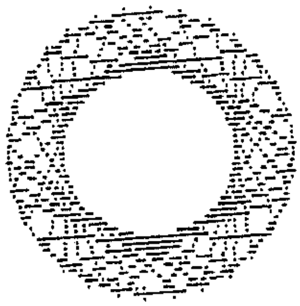
円周上をn等分した点を，順に内部を右に見てP_1（A），P_2，……，P_nとする。このとき，適当なkについて，線分P_iP_{i+k}（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）を引くと，どんな曲線が浮び上がるだろうか？

その包絡線は円である。

なぜなら，$\angle AOP_{1+k}=\angle P_iOP_{i+k}$

（$i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$）が成り立るから。

常に中心角一定であり，円である。

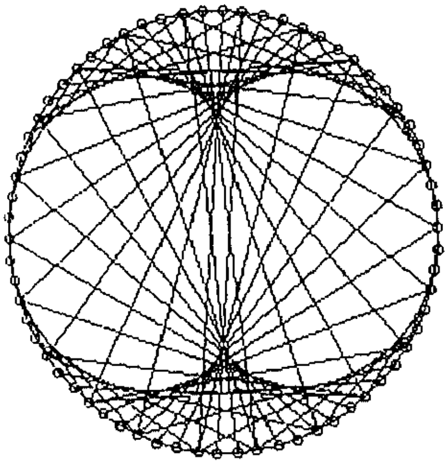


4.5.3. 課題の発展

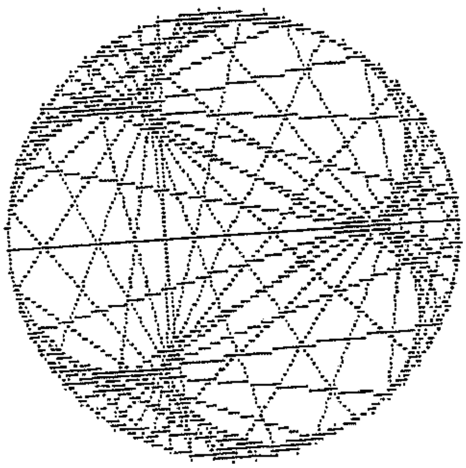
【発展1】線分P_iP_{ki}（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）の$k=3$のとき

結果は，ネフロイドとよばれる曲線である。

$k=3$のとき



参考に，$k=4$のとき



4.5.4. 授業への活用

①分野

中学2年　多角形，3年・課題学習

高校数学Ⅱ「複素数平面」

高校数学Ⅲ「微分の応用」，数学C「いろいろな曲線」

②留意点

中学においては，星型多角形を発展させて考えさせるのによい。色々な曲線を整数と関連させ，どんな曲線が浮び上がるかを見せ学習する意欲を喚起させたり，数学的な美しさを体得させるのによい。

高校では，カージオイドの媒介変数表示についてのは，複素数平面で求めることもよい。P_iの複素数をωとすると，P_{2i}の複素数はω^2と簡単である。発展課題を多く含んでいることが奥深い。

【引用・参考文献】

1）熊倉啓之他（1995）「数学的思考力を高める創造的教材の探求（その１）」『筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告第35集』

2）駒野誠他（1996）「数学的思考力を高める創造的教材の探求（その２）」『筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告第36集』

3）鈴木清夫他（1996）「数学的思考力を高める創造的教材の探求（その３）」『筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告第37集』

4）熊倉啓之・駒野誠・鈴木清夫他（1997）『数学ランド・おもしろ探検』森北出版

5）熊倉啓之他（1997）「三角形の『心』に関する一考察」『日本数学教育学会誌79－7』

6）根上生也（1996）『爽快2^{100}三話』遊星社