

衝撃試験法による緩衝材および筋の非線形粘弾性特性の測定法

小林 一 敏

A method of measurement of non-linear visco-elasticity of shock absorbing material and muscle by shock testing method

Kazutoshi KOBAYASHI

The shock absorbing materials used in sport surfaces and soles of sport shoes show the dynamic property of rubber-like elasticity, and muscle also shows the similar property.

The purpose of this paper is to propose a method of measurement of the dynamic property of rubber-like elasticity by means of shock test. The values of displacement and velocity of the deflection of sample are obtained from integrating the shock acceleration measured with the accelerometer installed in the shock testing device.

To obtain the rheological constants of sample, this method introduces the non-linear visco-elasticity model described following equation.

$$f = kx^p + c\dot{x}^q$$

Where, f is the force applied to sample,

x and \dot{x} are the displacement and velocity of deflection of sample,

k, p, c, q are the rheological constants of real number of sample.

These constants are obtained by the least squares method developed for the above model.

The measurement was performed about outsole foam and midsole foam of sport shoes, tensioned muscles, and relaxed muscles. In these cases, the measured values agree well with the estimated results from the model.

Key words: rubber-like elasticity, non-linear visco-elasticity model, shock testing method, the least squares method, shock absorbing material, muscle

1. まえがき

スポーツサーフェスや運動用具には、粘弾性を持つ材料が多く使われている。例えば、陸上競技場の全天候型トラックやスポーツシューズなどのように衝撃の緩衝性能を要求されるものは、粘弾性特性が重要である。また、生体の筋疲労は、いわゆる「こり」とか「はり」という感覚で実感されることが多いが、これは力学的には筋の粘弾性特性として表されると考えられる。

固体の動的粘弾性特性の測定法¹⁾として、普通低周波領域と呼ばれている約10~10000Hzの範

囲では、物質に正弦的応力又は、ひずみの振動を加え、両者の関係から粘弾性定数を決定する方法が用いられることが多い。この方法は線形粘弾性理論を基礎としており、微小変形域における適用を前提としている。

これに対し、スポーツサーフェスは地面に舗装された状態での緩衝性能の測定が必要な場合も生じるし、シューズは複合材料が特有の構造に成型されていて、一般に用いられている振動試験器による測定は容易でない。このため、スポーツ用舗装材やシューズの緩衝特性の測定法としては、加

速度センサーを付加したおもりを被測定物体の上に落下させ、衝突によって生じる衝撃加速度や衝撃力を測定する方法²⁾が用いられる場合が多い。

粘弾性特性をもっと詳しく調べるためには粘弾性体の力学モデルを導入し、そこに含まれる粘弾性定数を決める必要がある。弾性要素と粘性要素が並列に連結されているフォークト模型の定数を求めるのに、おもりの落下衝撃試験法を用いた研究は、H. J. Kolitzus¹⁾によるスポーツサーフェスに関するもの、中田と小林²⁾によるスポーツシューズに関するものがあるが、いずれも線形粘弾性モデルを用いている。

スポーツにおける緩衝材にはゴム弾性を持つ材料が多く用いられるし、筋肉もゴム弾性を持っている。このような材料は、強い衝撃力のために大変形を生じるので、非線形粘弾性体としての力学モデルを考える必要があるが、一般に無限次の多重時間積分を含んでいる。しかし、現実我々の実験から、これら多くの応答関数を定めることは困難で、通常いくつかの単純化がなされる^{9),10)}。

この研究は、非線形粘弾性特性を有するフォークト模型における定数を衝撃試験法により求める測定法を開発し、緩衝材や筋肉の力学的特性を記述しようとするものである。

2. 測定装置

着地時の床、舗装材あるいは靴などの粘弾性の測定には、通常は測定対象におもり等を落下させたときの変形と反力の時間経過を計測する。この場合、変形の測定には、静止座標に固定した装置から変形面の変位を計測する方法が一般的である。このために、被測定面に生じる衝撃による振動から変位計を絶縁するために、変位計を支える足場を測定対象からできるだけ遠くに置く必要がある。足場の幅が6 m程度も必要とされており、装置⁹⁾が大型になり、携帯に不便であった。ここで使用した装置⁴⁾は、Fig. 1のように、小さい荷重変換器と加速度変換器を一体化した衝撃検出部を測定対象面に静止状態に置き、上部からおもりを落下させ、その時検出部に生じる加速度を積分して速度と変位を求めようとするもので、足場の幅は0.75m程度である。また筋肉の測定装置⁵⁾は全体で、直径0.032m、長さ0.19m、質量0.22kgであり、携帯が容易である。

本研究に用いた装置の特徴は次の通りである。

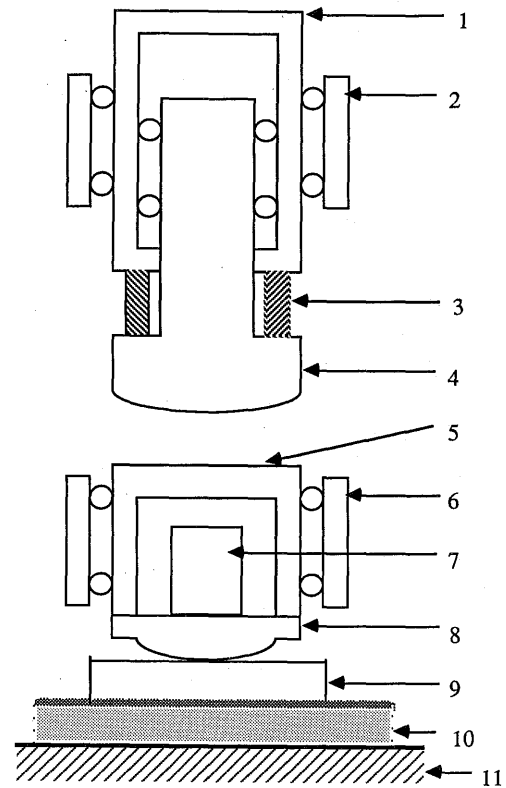
①加速度を積分する際に必要となる速度及び変位の初期値をすべて0にできる。

②変位を静止座標から測定する必要がないので、装置を小型化、軽量化することができる。

③おもりだけでなく、検出部を直接シューズで踏みつける等、身体運動において生じる種々の衝撃を衝撃源として用いることができる。

3. 非線形粘弾性モデル

荷重変換器の検出端を通じて加えられた衝撃力 F を伝える衝撃部 (test foot) の質量を m 、試験材料の非線形弾性係数を k 、非線形粘性係数を c 、



- 1 Impact weight
- 2 Guideway for the impact weight
- 3 Cylindrical spiral spring
- 4 Impact head
- 5 Impedance head
- 6 Guideway for the impedance head
- 7 Accelerometer
- 8 Force transducer
- 9 Test foot
- 10 Sample
- 11 Base of testing device

Fig. 1 Structure of testing device.

変位を x として、次式で表される非線形粘弾性モデルを導入する。この場合、レオロジーの研究で一般的になっているように試験材料の質量は無視する。

$$m\ddot{x} = F - kx^p - c\dot{x}^q \quad (1)$$

ただし、 \ddot{x} は加速度、 \dot{x} は速度、 p と q は実数である。

このモデルを図示したものが Fig. 2 である。

4. 最小 2 乗法

測定により、時間 t の経過にもなう力、加速度、速度、変位のベクトル ($t, F, \ddot{x}, \dot{x}, x$) の時系列が得られる。これから、 k, p, c, q の定数を最小 2 乗法により決定する方法を述べる。

$$f = F - m\ddot{x} \quad (2)$$

とすれば (1) は、

$$f = kx^p + c\dot{x}^q \quad (3)$$

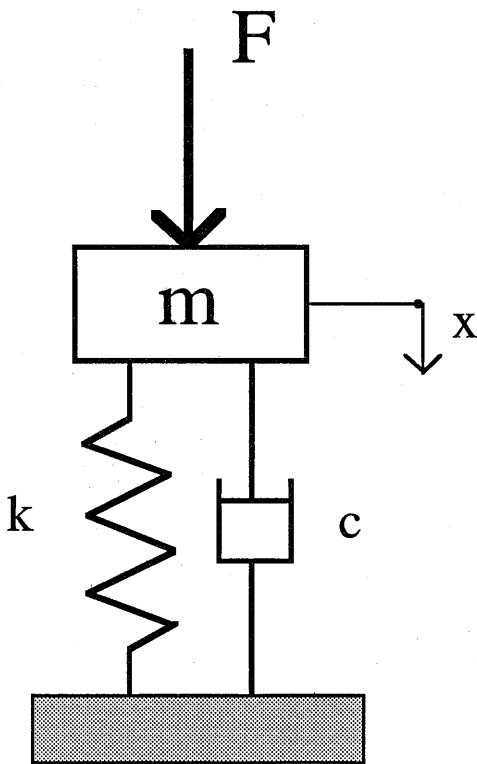


Fig. 2 Voigt model of visco-elasticity
 F : force applied to test foot
 k : element of elasticity
 c : element of viscosity
 m : mass of test foot

となる。測定値から x と f の関係を求めると、一般的に Fig. 3 のようになる。最大圧縮変位 x_{max} における力の値を f_0 とすると、 x_{max} のときには $\dot{x} = 0$ であるから (3) より、

$$f_0 = kx_{max}^p \quad (4)$$

となり、これから

$$k = \frac{f_0}{x_{max}^p} \quad (5)$$

が得られ、適当に定めた p に対応して k が決まる。

今、 $t = t_i$ における力 f_i の推定値を \hat{f}_i とし、

$$\hat{f}_i = kx_i^p + c\dot{x}_i^q \quad (6)$$

$$\varepsilon_i = f_i - \hat{f}_i \quad (7)$$

とおいたとき、

$$E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (f_i - \hat{f}_i)^2 \\ = \sum_{i=1}^n \{f_i - (kx_i^p + c\dot{x}_i^q)\}^2 \quad (8)$$

が最小となるように k, c, p, q を定めることになる。(6), (7) から

$$c\dot{x}_i^q = f_i - \varepsilon_i - kx_i^p \quad (9)$$

両辺の対数をとり、

$$\log c\dot{x}_i^q = \log(f_i - \varepsilon_i - kx_i^p) \\ = \log(f_i - kx_i^p) - \delta_i \quad (10)$$

とおく。

$$D = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 \\ = \sum_{i=1}^n \{\log(f_i - kx_i^p) - \log c\dot{x}_i^q\}^2 \quad (11)$$

としたとき、 D が最小値をとるとき E も最小値になる。

いま p を適当な値に定め、(5) により k も定まっている状態で、 c と q に関して D を極小にする条

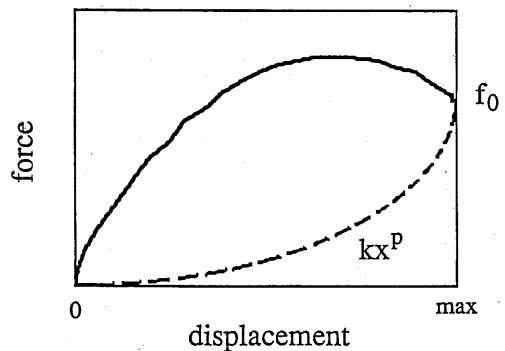


Fig. 3 The relation between displacement and force

件は、

$$\frac{\partial D}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial q} = 0 \quad (12)$$

したがって、(11)から

$$\frac{\partial D}{\partial c} = n \log c + q \sum_{i=1}^n \log \dot{x}_i - \sum_{i=1}^n \log (f_i - kx_i^p) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial D}{\partial q} = q \sum_{i=1}^n (\log \dot{x}_i)^2 - \sum_{i=1}^n \{ \log (f_i - kx_i^p) \cdot \log \dot{x}_i \} + \log c \sum_{i=1}^n \log \dot{x}_i = 0 \quad (14)$$

(13), (14)から次の(15), (16)として求まる。

$$q = \frac{L + M - N}{R} \quad (15)$$

$$c = \exp \left(\frac{S - T - U}{R} \right) \quad (16)$$

ここで

$$L = n \sum_{i=1}^n \{ \log (f_i - kx_i^p) \cdot \log \dot{x}_i \} \quad (17)$$

$$M = n \sum_{i=1}^n \log \dot{x}_i \quad (18)$$

$$N = \sum_{i=1}^n \log (f_i - kx_i^p) \quad (19)$$

$$R = n \sum_{i=1}^n (\log \dot{x}_i)^2 - \sum_{i=1}^n \log \dot{x}_i \quad (20)$$

$$S = \sum_{i=1}^n \log (f_i - kx_i^p) \sum_{i=1}^n (\log \dot{x}_i)^2 \quad (21)$$

$$T = \sum_{i=1}^n \{ \log (f_i - kx_i^p) \log \dot{x}_i \} \sum_{i=1}^n \log \dot{x}_i \quad (22)$$

$$U = \left(\sum_{i=1}^n \log \dot{x}_i \right)^2 \quad (23)$$

p を適当な間隔でかえながら(5), (15), (16)で求めた k , c , q の値を(8)に代入し、 E が最小となる p を求めれば、その時の k , p , c , q が求める最適値である。

なお、衝撃部 (test foot) の面積 (s) を変えると、当然、 k と c の値は変わるが、 f , k , c を s で除した値を用いれば、それぞれ単位面積あたりの値となり、 s によらない値を求めることができる。

4. 実験結果と考察

ジョギングシューズの外底の材料に用いられている厚さ16mm, ゴム硬度32° (JIS K6301—1975) の硬い感じの合成ゴムフォームに、Fig. 1の装置を用いて、5.3kgのおもりを面積6 cm²の衝撃部の上に0.09mの高さから落下させたときに、検査材料

の表面に生じた加速度を Fig. 4に示す。同一条件の実験を10回行ない、加速度を加算し、平均値の時間的变化と標準偏差 (S.D.)_iの時間变化を求め、平均値±S.D.を求めた。

これを積分して速度と変位を求めたものが Fig. 5, Fig. 6である。Fig. 4と同様に平均値をはさんで±S.D.の範囲も示してある。Fig. 6から最大圧縮比は62.4%に達しているのがわかる。

検査材料の表面に加えられた力も同時に測定し、10回の平均値と±S.D.の範囲を示したものが Fig. 7である。

これらの平均値を用いて求めた定数は、

$$k = 4.24 \times 10^5 \text{ N/m}^2, \quad c = 4.79 \times 10^1 \text{ N/(m/s)}^q$$

$$p = 1.69 \times 10^0, \quad q = 1.29 \times 10^0$$

この値を(6)に代入して求めた推定値 f_{est} と実測値 f_{meas} の時間的变化を Fig. 8に示す。

(3)式により表される力学モデルの精度を検討するために f_i と \hat{f}_i の相対誤差の平均値 A と最大値に対する最大誤差の比 B を求めた。

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|f_i - \hat{f}_i|}{f_i} \quad (24)$$

$$B = \frac{|f_i - \hat{f}_i|_{\text{max}}}{f_{\text{max}}} \quad (25)$$

Fig. 8から求めた値は、 $A = 0.074$, $B = 0.047$ であった。

比較のため、次式で表される線形粘弾性モデル

$$f = kx + cx \quad (26)$$

の定数を、Fig. 4~Fig. 7の値を用いて最小2乗法により求めたところ、

$$k = 8.33 \times 10^4 \text{ N/m}, \quad c = -1.07 \times 10^3 \text{ N/(m/s)}$$

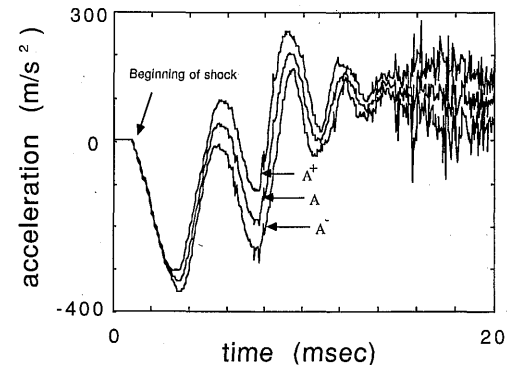


Fig. 4 Acceleration of surface of sample.

A is averaged acceleration of ten measurements.

A^+ is value of $A + \text{S.D.}$

A^- is value of $A - \text{S.D.}$

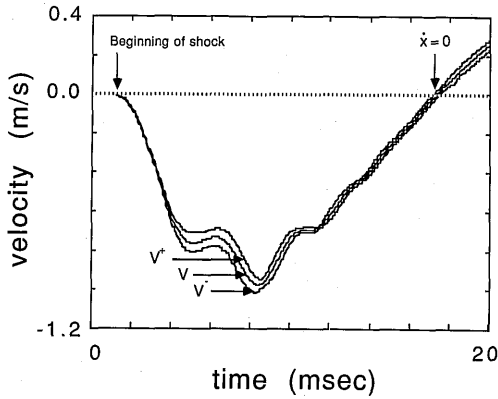


Fig. 5 Velocity of deflection of sample.
 V is averaged velocity of ten measurements.
 V^+ is value of $V + S.D.$.
 V^- is value of $V - S.D.$.

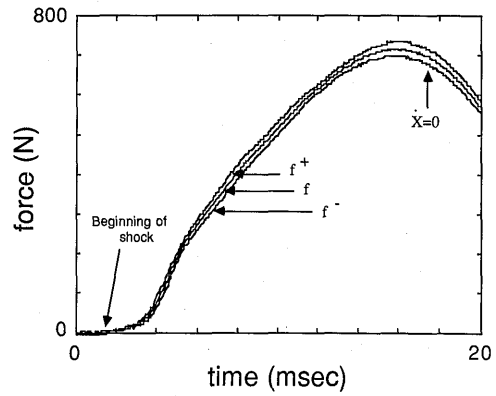


Fig. 7 The force applied to sample.
 f is averaged force of ten measurements.
 f^+ is value of $f + S.D.$.
 f^- is value of $f - S.D.$.

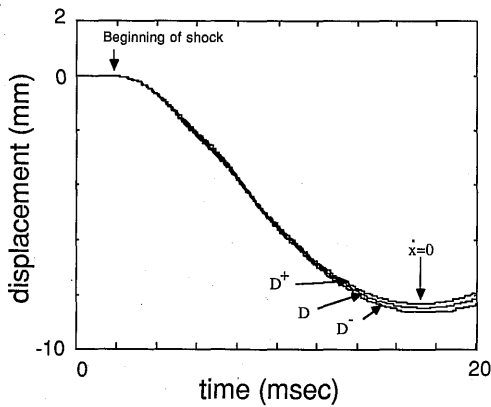


Fig. 6 Displacement of deflection of sample.
 D is averaged displacement of ten measurements.
 D^+ is value of $D + S.D.$.
 D^- is value of $D - S.D.$.

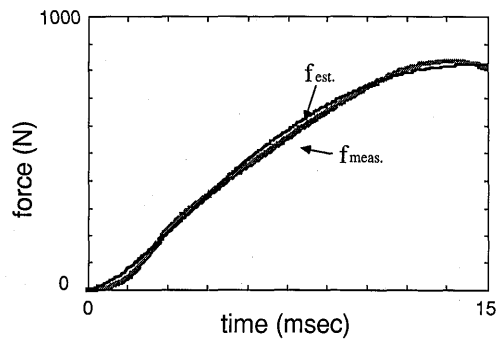


Fig. 8 Comparison of the measured values with estimated values applying shock on outsole foam of shoes.
 $f_{meas.}$ is the force curve obtained from measurement.
 $f_{est.}$ is the force curve obtained from estimation by non-linear Voigt model.

で c の値が負になったため、このモデルによる推定が不可能であった。

同様に、シューズの中底に用いられている厚さ 16mm、ゴム硬度 3°の柔らかい感じの合成ゴムフォームを圧縮比 56% まで計測した例、および腕橈骨筋を脱力させた状態において直径 8.3mm の衝撃部 (test foot) が 2.7mm 圧入された場合と、緊張させた状態において同じく 2.5mm 圧入された場合のモデルの定数および誤差の評価を示す値を

table 1 に示す。

Fig. 9 は中底に用いた合成ゴムについて力の実測値とモデルによる推定値を示したものであるが、線形モデルでも定数が求められたが、非線形モデルに比べて著しく誤差が大きくなっている。Fig. 10, Fig. 11 は腕橈骨筋を緊張させた場合と脱力させた場合の力の実測値とモデルによる推定値を示したものである。

この結果からみて、スポーツサーフェスやス

Table 1 constants of non-linear and linear Voigt model

test samples	non-linear Voigt model				evaluation of error		linear Voigt model	
	constants				A	B	constants	
	k [N/m ²]	p	c [N/(m/s) ²]	q			k [N/m]	c [N/(m/s)]
outsole foam of shoes	4.24×10^5	1.69×10^0	4.79×10^1	1.29×10^0	0.074	0.047	8.33×10^4	-1.07×10^3
midsole foam of shoes	5.50×10^4	9.10×10^{-1}	2.48×10^1	1.12×10^0	0.036	0.055	1.60×10^4	5.06×10^1
tensioned muscle	6.85×10^3	1.21×10^0	1.33×10^0	4.62×10^{-1}	0.057	0.084	2.10×10^3	-2.04×10^0
relaxed muscle	6.30×10^2	5.50×10^{-1}	1.09×10^0	4.50×10^{-1}	0.050	0.114	1.50×10^3	-1.90×10^0

スポーツシューズの緩衝材や筋などの、ゴム状粘弾性体の力学的性質は、粘弾性モデルとしては最も簡単な Fig. 2 に示したような非線形化したフォークトモデルにより表現できる可能性が高いと考えられる。

5. まとめ

スポーツサーフェスやスポーツシューズなどの緩衝材料としてゴム状粘弾性体が多く用いられており、また筋肉も同様な力学的性質を持っている。この力学物性は微小変形を仮定した線形粘弾性理論を基礎とした振動法による測定が多い。

スポーツの分野では、ゴム状弾性体が50%を越

える大変形が生じることが多く、また測定環境が振動試験法に適さない場合も多い。

この研究は、ゴム状弾性体の力学物性を、非線形粘弾性モデルをもとにして、衝撃試験法により求めようとするものである。ここで用いた衝撃試験装置は衝撃中の変形速度、変位を衝撃加速度の積分により求められるような構造になっている。研究の結果を次にあげる。

1) フォークトモデルの弾性要素と粘性要素を非線形化した非線形粘弾性モデルを導入し、最小2乗法によりモデルに含まれる定数を決定する方法を開発した。

2) シューズ底に用いている合成ゴムフォーム

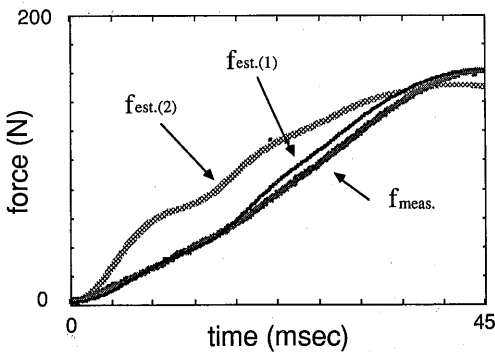


Fig. 9 Comparison of the measured values with estimated values applying shock on midsole foam of shoes. $f_{meas.}$ is the force curve obtained from measurement. $f_{est.(1)}$ is the force curve obtained from estimation by non-linear Voigt model. $f_{est.(2)}$ is the force curve obtained from estimation by linear Voigt model.

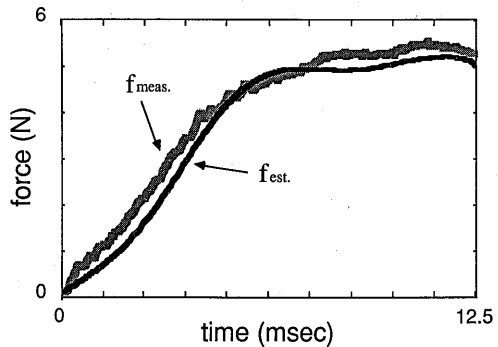


Fig. 10 Comparison of the measured values with estimated values applying shock on tensioned muscle. $f_{meas.}$ is the force curve obtained from measurement. $f_{est.}$ is the force curve obtained from estimation by non-linear Voigt model.

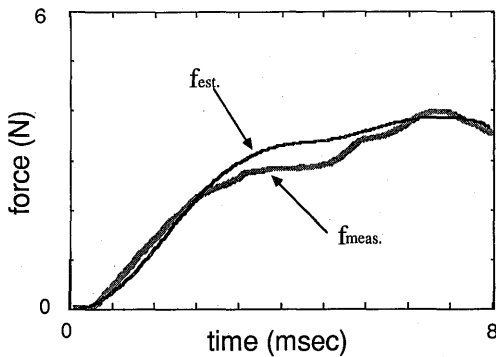


Fig. 11 Comparison of the measured values with estimated values applying shock on relaxed muscle.

f_{meas} is the force curve obtained from measurement.

f_{est} is the force curve obtained from estimation by non-linear Voigt model.

について、硬い材質のゴム硬度 32° の資料、柔らかい材質のゴム硬度 3° の資料を用いて計測した。また腕橈骨筋について、緊張させた状態と脱力させた状態で計測した。これらのすべての場合について、衝撃試験から求めた非線形モデルは実験で求めた実際の衝撃力を良い精度で推定することができた。

References

- 1) H.J.Kolitzus, Functional Standards for Playing Surface, sport shoes and Playing surface, Human Kinetics Publishers, Inc., Champaign, IL, 1984, pp. 98-118.
- 2) 小林一敏, 菅原秀二, 身体に与える合成樹脂系舗装材の力学的特性, 順天堂大学保健体育紀要18, 24-35, 1975.
- 3) 小林一敏, 他4名, 全天候型テニスコートの力学的特性に関する一考察, 筑波大学体育科学系紀要5, 95-103, 1983.
- 4) 小林一敏, 衝撃加速度から変位の算出, J.J. Sports Sci. 6-3, 185-190, 1987.
- 5) 小林一敏, 筋の粘弾性装置の試作, 日本体育学会第38回大会号, p. 706, 1987.
- 6) 高分子学会レオロジー委員会編, レオロジー測定法, 共立出版, 1965, pp. 198-211.
- 7) 中田 了, 小林一敏, スポーツシューズの衝撃緩衝特性に関する力学的研究, 東京体育学研究9, 43-48, 1982.
- 8) 中川鶴太郎, レオロジー(第2版), 岩波書店, 1978, pp. 186-190.
- 9) 小野英哲, 吉岡 丹, 体育館の床の弾力性に関する研究(その2), 日本建築学会論文報告集187, 27-34, 1973.
- 10) 山本三三三, 物体の変形学, 誠文堂新光社, 1972, pp. 220-278.