

## 多段階衝撃試験法による緩衝材および筋の 非線形粘弾性モデルのパラメータ同定法

小林 一 敏・湯 川 治 敏\*

### Parameter identification technique for a nonlinear viscoelastic model of shock absorbing material and muscle by the shock test with multi-grade shock loads

Kazutoshi KOBAYASHI and Harutoshi YUKAWA

The shock absorbing materials used in sport surfaces and shoes show the dynamic property of nonlinear viscoelasticity, and muscle also shows the similar property. In general, the property can be expressed as parameters of a rheological model. A parameter identification technique in this paper is presented for a nonlinear Voigt model that is connected a nonlinear elastic element with a nonlinear viscous element in parallel. The proposed technique consists of the following two steps. In the first step, the nonlinear elastic parameters are identified by using the least-squares method in regard to each result of the shock tests with multi-grade shock loads. In the second step, the nonlinear viscous parameters are identified by using the least-squares method in regard to known parameters and every result of the shock tests. Examples of estimation by model and experiments are given to demonstrate the accuracy of the technique, and good results are shown.

Key words: nonlinear viscoelastic model, parameter identification, shock tests with multi-grade shock loads

#### I. まえがき

スポーツサーフェイスやスポーツシューズなどのように衝撃に対する緩衝性能を要求されるものは、粘弾性特性が重要である。また、生体の筋も力学的には粘弾性特性を示す。これらの材料は強い衝撃力が加わると大変形を生じるので非線形粘弾性体としての力学モデルを考える必要がある。

従来、固体の動的粘弾性特性の測定法<sup>7)</sup>としては、物体に正弦的応力又は、ひずみの振動を加え定常状態における両者の関係から粘弾性特性定数を決定する方法が用いられることが多い。この方法は線形粘弾性理論を基礎としており、微小変形域における適用を前提としている。

スポーツサーフェスのように地面に舗装された状態での試験や、シューズのように複合材料が特

有の構造に成型されている物体に対しては、加振力による振動試験法が困難な場合が多いため使用されることが少なく、主として衝撃試験法<sup>2)3)8)9)</sup>が用いられる。

佐藤ら<sup>10)</sup>によって最近、べき級数形非線形弾性要素を含む構造物のパラメータを微小インパクトと大インパクトの二段階インパクトにより同定しようとする衝撃試験法が提案された。これは衝撃後の試験資料の自由振動における自由減衰応答波形からモーダルアナリシスと最小二乗法を用いて推定しようとするものであるが、シューズや筋のように粘性的非線形要素を含む材質や、着地衝撃のように衝撃中の過渡応答が重要な場合には適しないと考えられる。

小林<sup>6)</sup>は、非線形弾性要素と非線形粘性要素の並列結合として表される非線形 Voigt モデルのパラメータを一段階衝撃試験法により同定する方

\*筑波大学研究生

法を開発した。この方法は衝撃試験に用いた衝撃強度の付近の特性の同定には優れているが、このパラメータを用いて一層弱い衝撃或は強い衝撃における試験材料の特性を推定しようとするとき誤差が大きくなる場合があることが判明してきた。

本研究は、非線形粘弾性物体に種々な強度の衝撃を多段階にわたり与え、各段階で得られた衝撃応答のデータを全体として一括処理する方法によって、広い範囲の衝撃強度に対して実験データとの誤差が小さくなるような非線形 Voigt モデルのパラメータを同定する方法を提案し、この方法の有効性を一段階衝撃試験法と比較して検討したものである。

## II. 測定装置と多段階衝撃試験法

ここで使用した装置は、小さい荷重変換器と加速度変換器を一体化した衝撃検出部を試験材料表面に衝撃伝達部 (test foot) を経て静止状態に置き、検出部後面に重錘等を落下させて試験材料に衝撃を与え、同時に衝撃力も測定し、その時に生じる試験材料表面の変形の加速度を検出して積分し、変形の数値と変位を求めるようになっている。<sup>4)</sup> 多段階衝撃試験法は、重錘の落下高を種々変えて、多段階の衝撃強度において試験材料表面に生じる圧縮過程の衝撃力、加速度、速度、変位の時間的経過を測定し、試験材料の粘弾性モデルのパラメータを同定しようとするものである。

## III. 非線形粘弾性モデル

Fig. 1 に示すように荷重変換器の検出端を通じて加えられた衝撃力を  $F$ 、試験材料に伝える衝撃部 (test foot) の質量を  $m$ 、試験材料の非線形弾性係数を  $k$ 、非線形粘性係数を  $c$ 、変位を  $x$  とし、次式で表されるようなモデル (非線形 Voigt モデル) を導入する。

$$m\ddot{x} = F - kx^a - c\dot{x}^b \quad (1)$$

ただし、 $\ddot{x}$  は加速度、 $\dot{x}$  は速度、 $a, b$  は定数である。

## IV. 非線形パラメータの同定法

### 第一ステップ

ある段階  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) の強さの衝撃  $I_i$  によって生じるある時間  $j$  ( $j = 0, 1, \dots$ ) の力、加速度、速度、変位、を  $F_{ij}, \ddot{x}_{ij}, \dot{x}_{ij}, x_{ij}$  とする。

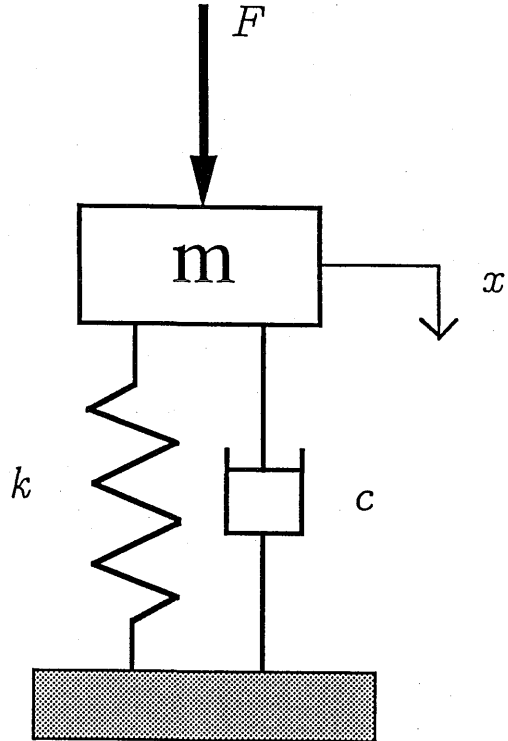


Fig. 1 Nonlinear Voigt model of visco-elasticity  
 $F$  : force applied to test foot  
 $k$  : element of nonlinear elasticity  
 $c$  : element of nonlinear viscosity  
 $m$  : mass of test foot  
 $x$  : displacement of test foot

$$f_{ij} = F_{ij} - m\ddot{x}_{ij} \quad (2)$$

とすれば  $f_{ij}$  は試験材料に直接加わる力となり、(1) は

$$f_{ij} = kx_{ij}^a + c\dot{x}_{ij}^b \quad (3)$$

となる。 $x_{ij}$  と  $f_{ij}$  の関係は一般的に Fig. 2 のようになる。各段階の最大圧縮変位  $x'_{ij}$  (この時の  $j$  は各段階  $i$  により異なる) における力の値を  $f'_{ij}$  とすると、 $x'_{ij}$  のときの時間  $t_{ij} = t'_{ij}$  では  $\dot{x}_{ij} = 0$  であるから (3) より、

$$f'_{ij} = k(x'_{ij})^a \quad (4)$$

となる。

(4) から

$$\log f'_{ij} = \log k + a \log x'_{ij} \quad (5)$$

ここで、 $\log f'_{ij} \equiv f''_{ij}, \log x'_{ij} \equiv x''_{ij}$  とおけば (5) は

$$f''_{ij} = \log k + ax''_{ij} \quad (6)$$

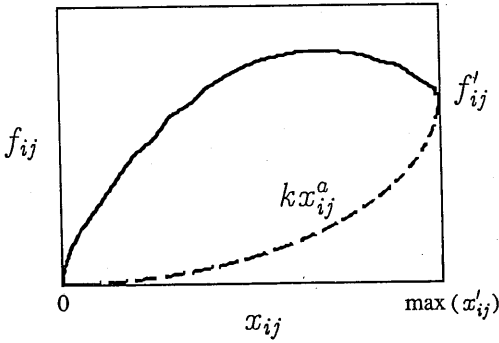


Fig. 2 The relation between displacement of deflection of sample  $x$  and shock force  $f$   
 $k$  : coefficient of nonlinear elasticity  
 $a$  : constant

各段階の強さの衝撃  $I_i (i = 1, 2, \dots, r)$  について  $(f''_{ij}, x''_{ij})$  の対が  $r$  組できるから、最小二乗法により、 $a, k$  を求めると、

$$a = \frac{\sum_{i=1}^r (f''_{ij} - \bar{f}''_{ij})(x''_{ij} - \bar{x}''_{ij})}{\sum_{i=1}^r (x''_{ij} - \bar{x}''_{ij})^2} \quad (7)$$

$$k = \exp(\bar{f}''_{ij} - a\bar{x}''_{ij}) \quad (8)$$

ここで、 $\bar{x}''_{ij} \equiv \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x''_{ij}$ ,  $\bar{f}''_{ij} \equiv \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r f''_{ij}$  である。

第2ステップ

(7), (8)を(3)に代入して、

$$f_{ij} - kx_{ij}^a \equiv y_{ij} \quad (9)$$

とおけば、(3)は、

$$y_{ij} = c\dot{x}_{ij}^b \quad (10)$$

となる。それぞれの衝撃  $I_i (i = 1, 2, \dots, r)$  について衝撃開始時  $t_{ij} = 0$  から  $t_{ij} = t'_{ij}$  の間をサンプリングタイム  $h$  で抜き取ったときのデータ  $(y_{ij}, \dot{x}_{ij})$  の組数を  $n_i$  とし、これらを全段階のデータについて一括したものを  $(y_i, \dot{x}_i)$  とすれば、その組数  $q$  は、

$$q = \sum_{i=1}^r n_i \quad (11)$$

となる。これらについて

$$y_i = c\dot{x}_i^b \quad (12)$$

から  $b, c$  の値は、最小二乗法により以下のように

求められる。

$$b = \frac{\sum_{i=1}^q (y_i - \bar{y}_i)(\dot{x}_i - \bar{\dot{x}}_i)}{\sum_{i=1}^q (\dot{x}_i - \bar{\dot{x}}_i)^2} \quad (13)$$

$$c = \exp(\bar{y}_i - b\bar{\dot{x}}_i)$$

ここで、 $\bar{y}_i \equiv \log y_i$ ,  $\dot{x}_i \equiv \log \dot{x}_i$ ,  $\bar{y}_i = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q y_i$ ,

$$\bar{\dot{x}}_i = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \dot{x}_i$$

なお、衝撃部 (test foot) の面積  $S$  を変えると、 $k$  と  $c$  の値は変わるが、 $f, k, c$  を  $S$  で除した値を用いれば、それぞれ単位面積あたりの値になる。

### V. 実験条件および係数同定の条件

実験は筋肉とシューズについて行なった。

第一は、成年男子 (24才) の前脛骨筋の表面部位に面積  $0.54\text{cm}^2$  の円柱形衝撃部を経て衝撃を与えた。衝撃力の強さの違いによる筋の粘弾性モデルのパラメータの違いを調べるために、最大圧縮変位  $2.52\text{mm}$  の最も弱い衝撃による試験 (Ml) から最大圧縮変位  $5.87\text{mm}$  の最も強い衝撃による (Mh) 間で15段階の衝撃負荷を用い、Ml, Mh および中間にあたる最大圧縮変位  $4.56\text{mm}$  の中等度の衝撃による試験 (Mm) を選び、一段階衝撃試験法<sup>6)</sup> にもとづく係数同定を行なった。

第二は、陸上競技多目的用のシューズの踵部に、面積  $6.09\text{cm}^2$  の円柱形衝撃部を経て9段階の衝撃を与え、筋の場合と同様に、シューズの最大圧縮変位が  $5.62\text{mm}$  (Sl),  $8.50\text{mm}$  (Sm),  $10.19\text{mm}$  (Sh) になる弱, 中, 強の三つの試験を選び、係数同定を行なった。

### VI. 実験結果と考察

Table 1は、筋について、Ml, Mm, Mh の試験データから同定したそれぞれのパラメータ、および15段階のすべてのデータを用いて同定した多段階衝撃試験法によるパラメータを示してある。Table 2はシューズについて、筋と同様の方法を用いて同定したパラメータを示してある。

Fig. 3は、Mhの試験データから同定したパラメータを用いてMhの実験値を推定した曲線、多段階衝撃試験法によるパラメータによりMhの実験値を推定した曲線、およびMhの実測曲線を

Table 1 Identification of model parameters for muscle.

| shock test        | shock load for muscle  | model paramaters   |                       |                       |                       |
|-------------------|------------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|                   |                        | <i>k</i>           | <i>c</i>              | <i>a</i>              | <i>b</i>              |
| single shock      | light shock load (Ml)  | $7.81 \times 10^3$ | $9.11 \times 10^{-1}$ | $1.10 \times 10^0$    | $4.69 \times 10^{-1}$ |
|                   | medium shock load (Mm) | $2.99 \times 10^3$ | $2.92 \times 10^0$    | $9.30 \times 10^{-1}$ | $6.24 \times 10^{-1}$ |
|                   | heavy shock load (Mh)  | $1.23 \times 10^4$ | $1.22 \times 10^0$    | $1.13 \times 10^0$    | $4.07 \times 10^{-1}$ |
| multi-grade loads |                        | $9.71 \times 10^4$ | $4.60 \times 10^0$    | $1.55 \times 10^0$    | $5.34 \times 10^{-1}$ |

Ml, Mm, Mh: each maximum displacement of deflection of sample is 2.52mm, 4.56 mm, 5.87mm.

Number of multi-grade shock loads are 15.

Table 2 Identification of model parameters for shoe.

| shock test        | shock load for shoe    | model paramaters   |                    |                    |                       |
|-------------------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------|
|                   |                        | <i>k</i>           | <i>c</i>           | <i>a</i>           | <i>b</i>              |
| single shock      | light shock load (Sl)  | $4.86 \times 10^5$ | $1.87 \times 10^0$ | $1.77 \times 10^0$ | $3.68 \times 10^{-1}$ |
|                   | medium shock load (Sm) | $8.96 \times 10^6$ | $6.22 \times 10^0$ | $2.32 \times 10^0$ | $5.19 \times 10^{-1}$ |
|                   | heavy shock load (Sh)  | $3.99 \times 10^8$ | $9.24 \times 10^0$ | $3.15 \times 10^0$ | $6.86 \times 10^{-1}$ |
| multi-grade loads |                        | $4.66 \times 10^8$ | $5.68 \times 10^0$ | $2.19 \times 10^0$ | $3.89 \times 10^{-1}$ |

Sl, Sm, Sh: each maximum displacement of deflection of sample is 5.62mm, 8.50 mm, 10.19mm.

Number of multi-grade shock loads are 9.

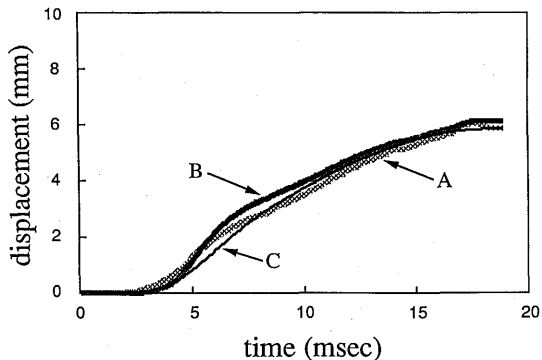


Fig. 3 Comparison of the estimated curves (A, B) with the measured curve (C) on the heavy load shock test for muscle.

- A : estimated curve for heavy shock load test by using the parameters identified from heavy shock load test.
- B : estimated curve from the multi-grade loads test.
- C : measured curve.

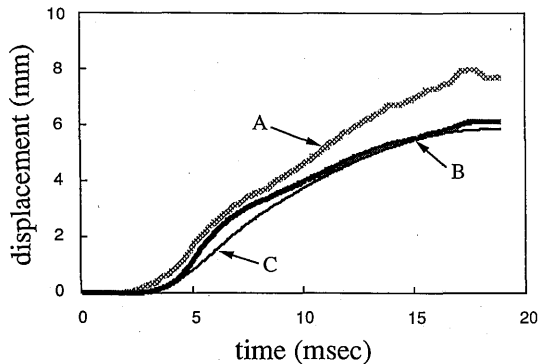


Fig. 4 Comparison of the estimated curves (A, B) with the measured curve (C) on the heavy load shock test for muscle.

- A : estimated curve for heavy shock load test by using the parameters identified from light shock load test.
- B : estimated curve from the multi-grade loads test.
- C : measured curve.

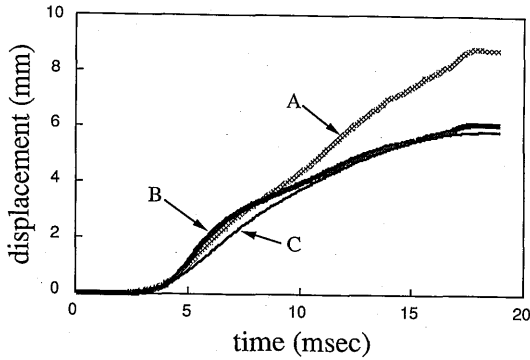


Fig. 5 Comparison of the estimated curves (A, B) with the measured curve (C) on the heavy load shock test for muscle.  
 A : estimated curve for heavy shock load test by using the parameters identified from medium shock load test.  
 B : estimated curve from the multi-grade loads test.  
 C : measured curve.

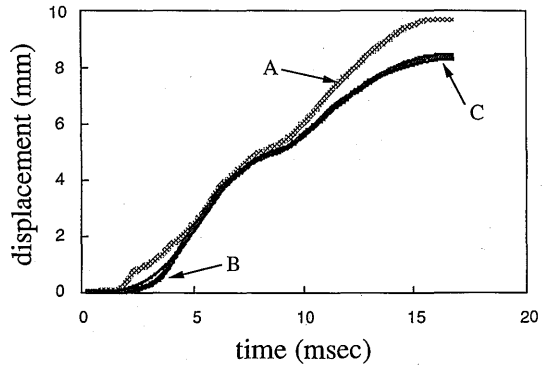


Fig. 7 Comparison of the estimated curves (A, B) with the measured curve (C) on the medium load shock test for shoe.  
 A : estimated curve for medium shock load test by using the parameters identified from light shock load test.  
 B : estimated curve from the multi-grade loads test.  
 C : measured curve.

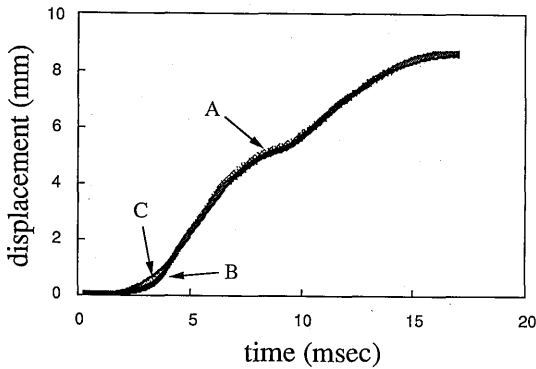


Fig. 6 Comparison of the estimated curves (A, B) with the measured curve (C) on the medium load shock test for shoe.  
 A : estimated curve for medium shock load test by using the parameters identified from medium shock load test.  
 B : estimated curve from the multi-grade loads test.  
 C : measured curve.

示したものである。

Fig. 4 は、M1 の試験データから同定したパラメータを用いて Mh の実験値を推定した曲線、

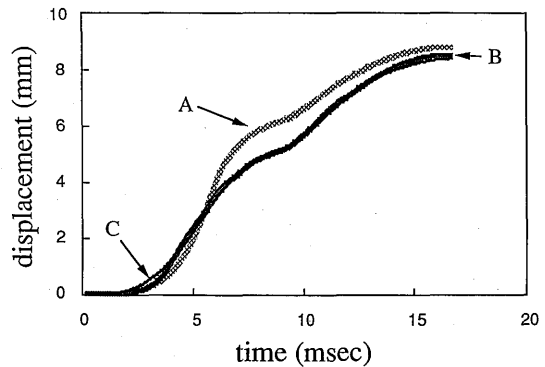


Fig. 8 Comparison of the estimated curves (A, B) with the measured curve (C) on the medium load shock test for shoe.  
 A : estimated curve for medium shock load test by using the parameters identified from heavy shock load test.  
 B : estimated curve from the multi-grade loads test.  
 C : measured curve.

Fig. 3 と同じパラメータにより Mh の実験値を推定した曲線、および Mh の実測曲線を示してある。

Fig. 5 は Mm の試験データから同定したパラ

Table 3 Standard error between estimated values and measured values on the shock test of muscle.

| shock load for experiment | estimates from single shock |                     | estimates from multi-grade shocks |
|---------------------------|-----------------------------|---------------------|-----------------------------------|
|                           | shock load for estimation   | standard error (mm) | standard error (mm)               |
| Ml                        | Ml                          | 0.130               | 0.047                             |
|                           | Mm                          | 0.336               |                                   |
|                           | Mh                          | 0.432               |                                   |
| Mm                        | Ml                          | 0.357               | 0.249                             |
|                           | Mm                          | 0.131               |                                   |
|                           | Mh                          | 0.587               |                                   |
| Mh                        | Ml                          | 1.176               | 0.289                             |
|                           | Mm                          | 1.421               |                                   |
|                           | Mh                          | 0.209               |                                   |

Ml, Mm, Mh: each maximum displacement of deflection of sample is 2.52 mm, 4.56mm, 5.87mm.

Number of multi-grade shock loads are 15.

Table 4 Standard error between estimated values and measured values on the shock test of shoe.

| shock load for experiment | estimates from single shock |                     | estimates from multi-grade shocks |
|---------------------------|-----------------------------|---------------------|-----------------------------------|
|                           | shock load for estimation   | standard error (mm) | standard error (mm)               |
| Sl                        | Sl                          | 0.113               | 0.185                             |
|                           | Sm                          | 0.187               |                                   |
|                           | Sh                          | 0.898               |                                   |
| Sm                        | Sl                          | 0.769               | 0.111                             |
|                           | Sm                          | 0.102               |                                   |
|                           | Sh                          | 0.620               |                                   |
| Sh                        | Sl                          | 1.120               | 0.364                             |
|                           | Sm                          | 0.337               |                                   |
|                           | Sh                          | 0.218               |                                   |

Sl, Sm, Sh: each maximum displacement of deflection of sample is 5.62mm, 8.50mm, 10.19mm.

Number of multi-grade shock loads are 9.

メータを用いて Mh の実験値を推定した曲線, Fig. 3 と同じパラメータにより Mh の実験値を推定した曲線, および, Mh の実測曲線を示してある。

Fig. 6~8 は, Fig. 3~5 に示した Mh の推定値と実測値との比較と同様な方法で, シューズの中程度の衝撃 (Sm) について比較を行なった結果を示してある。

パラメータの同定の正確さを比較するために,

一段階衝撃試験法と多段階衝撃試験法について, 実測値との間の標準誤差を求めたものが Table 3, 4 である。筋およびシューズの両者において, 一般に同一の衝撃についての推定には, 一段階衝撃試験法により同定したパラメータが優れているが, 広い範囲の強度の推定については, 多段階衝撃試験法が優れている。

一般にシューズの特性を表すモデルのパラメータは, 衝撃の強度により不変であることが望まれ

る。この観点からみれば、多段階衝撃試験法は今後の各方面への応用的研究の基礎として、基本的に重要な意義を持っていると考えられる。

また推定のための計算をする操作と、計算時間の面から見ると、一段階衝撃試験法は、計算時間の短縮にはパラメータの最適値の決定に人間による判断の助力が必要であるのに対し、多段階衝撃試験法は、ほとんど自動的に計算が進行して手間がかからず、しかも前者に比べて計算時間が $1/15 \sim 1/20$ に短縮されるという長所がある。

## VII. ま と め

筋や緩衝材の非線形粘弾性モデルのパラメータ同定法として、多くの衝撃強度による試験データを一括して処理する多段階衝撃法を提案する。これはすでに開発されている一段階衝撃試験法と比較して次のような特長を持っている。

1) 資料に与える衝撃強度を広範囲に変化させる条件下で、モデルのパラメータを最適化できる。筋、およびシューズの粘弾性特性の推定に対して、一段階衝撃試験法に比べて、広範囲な衝撃強度に対する推定精度が大きく向上することが実験により確かめられた。

2) 計算時間が一段階衝撃試験法に比べ、 $1/15 \sim 1/20$ に短縮されている。

また、広範囲の衝撃強度の変化に対して、モデルのパラメータが一定であることは、今後、各方面への応用的研究の基礎として重要な意義を持っている。

## References

- 1) 土居陽治郎, 小林一敏: 筋肉の硬さ測定に関する研究, 筑波大学体育科学系紀要, 第11巻, 265—274, 1988.
- 2) 小林一敏, 菅原秀二: 身体に与える合成樹脂系舗装材の力学的特性, 順天堂大学保健体育紀要18, 24—35, 1975.
- 3) 小林一敏, 前田寛, 宮地力, 浅井武, 中田了: 全天候型テニスコートの力学的特性に関する一考察, 筑波大学体育科学系紀要, 第5巻, 95—103, 1983.
- 4) 小林一敏: 衝撃加速度から変位の算出, J. J. Sports Sci., Vol. 6, No. 3, 185-190, 1987.
- 5) 小林一敏: 筋の粘弾性装置の試作, 日本体育学会第38回大会号, p706, 1987.
- 6) 小林一敏: 衝撃試験法による緩衝材および筋の非線形粘弾性特性の測定法, 筑波大学体育科学系紀要, 第11巻, 205—211, 1988.
- 7) 高分子学会レオロジー委員会編: レオロジー測定法, pp. 198—211. 共立出版, 1965.
- 8) 中田了, 小林一敏: スポーツシューズの衝撃緩衝特性に関する力学的研究, 東京体育学研究, 9, 43—48, 1982.
- 9) 小野英哲, 吉岡丹: 体育館の床の弾力性に関する研究(その2), 日本建築学会論文報告集187, 27—34, 1973.
- 10) 佐藤秀紀, 岩田佳雄, 内瀧敏明: 一自由度非線形系のパラメータ同定法, 日本機械学会論文集(C編), 54—497, 87—92, 1988.