数学教育の理念と中心概念
—認識の獲得を目指して—

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
駒野　誠

数学教育の理念と中心概念

―認識の獲得を目指して―

数学科　駒野　誠

要旨

現在，数学教育には，理念が求められている。中・高一貫の学校で教えている経験によって、分かり得たことが多い。授業で見せる生徒の反応の変化など生徒と共に数学を勉強している現場教師にしか分かり得ないことがあるはずと考える。ここに３つのキーワード：『無限をいかに掴まえるか』，『共生の掛け橋』，『認識の変化の獲得』をもとに，学校数学の Identity を示し，数学教育の理念を次のように提案する：「数学学習は，『無限をいかに掴むか』について学習するが，今までの自分にない新しい概念や認識を獲得し，明日の自分の創造に資するものである。」また，この理念を達成するには，感動をともなうような教材が不可欠であり，その分類として，中心概念となる６つの柱を示した。

［キーワード］数学教育の理念，中心概念，認識の変化の獲得，共生，無限

1　はじめに

1.1　研究の目的

現在、数学教育は社会構造の変化に対応したあり方が問われている。そこで、数学の授業を日々行っている現場教師が数学教育の Identity を示すことが重要であると感じている。日々授業をしている者にしかわかり得ないことがあるはずと考えるからである。それは授業で見せる生徒の変化する目や顔つきであり、感想を書かせたときにわかる心の変化である。これまでの研究成果を振りかえり、これからの学校教育における数学教育の果すべき重要な役割と具体的な方策について提言することを目的とする。

1.2　研究の課題と方法

中学校の学習指導要領の数学の目標は、「数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。」[4] と、一見、非の打ち所のない名文である。しかし、数学を通して生徒の成長を促すことに関しては、理念がなく触れられていない。学校教育においての目的は生徒を一人前の人間として社会に送り出すことは異をまたない。そこで、生徒は、数学という学問を学びながら、自分の成長をいかに確認することが出来るかである。

そのための課題として、

その１は、理念の構築である。すなわち、なぜ数学を学ぶかの今までにない答を用意すること。

その２は、理念から派生する中心概念を示すこと。

その３は、中心概念から解発（リリース）[1] される教材の開発である。

これらの課題に挑戦し、中学・高等学校での授業実践を核として検証していく。

Identity of Mathematics Education and Its Core Concept.　―Aiming to Acquire Cognizance.―

1.3　この論文のキーワードについて

次のA君からE君までは、3年間著者が教えてきた中学3年生が書いてくれたもののほんの一部である。

A君：「無限」の数の中から「仲間」を取りこんでいく（理解する）事を繰り返していくうちに、僕の頭の中には、たくさんの「仲間」が住み着くようになった。僕は彼らと「共生」しているようだ。

B君：新しい概念が出てきたとき、数学では今までもっている知識からそれを理解し、仲間に加えていける。このようにして、無限に仲間を増やしていくことができる。

C君：「仲間」を認識するためには、共通点を発見することが大切でそのためにはお互いをよく知らなくてはならない。

D君：公式を覚えて実生活に使うのではなく問題を解いていくことによって論理的な考え方を身につけるために学習している。また、学校で他の人の考えを聞くことにより、学習により深みが出てくる。

E君：最初は、根号は非常にとっつきづらい感がありましたが、連分数の概念を学んだりして，いまでは結構慣れ、整数などと同様の「数」の一構成員として認識できるような気がしました。

（下線部は筆者による）

この論文には、数学教育を変えるための3つのキーワードがある。それは、

『無限をいかに掴まえるか』

『共生の掛け橋』

『認識の変化の獲得』

これらは長い年月を経て、やっと考えついたものである。それらを実践してきた報告とその提言である。

では、どうしてこのようなキーワード（中心概念になるもの）が創出されたかの経過を述べておく。

これまで、数学教育の目的が、創造性・論理的思考力などが語られてきた。しかし、これらは数学科が保持する特性であるのだろうか。疑問が残る。

と同時に、そのためには、教材が決めてであることは先人の言を待つまでもないことは明らかである。

では、それらの教材を提供するためには、現場教師の工夫・研究が要求される。そのためのエネルギーとして、創造性や論理的、ましてや形式陶冶などの言葉からではわくわくするような教材開発は遅々としてしか進まない。

そこで、3つのキーワードを考えた経緯とその意味を紹介する。

(1)『無限をいかに掴まえるか』について

一見哲学的な言葉であり、集合論の可附番無限などの言葉を連想してしまうかもしれない。ところが日常様々な場面で意識せず用いられているのである。

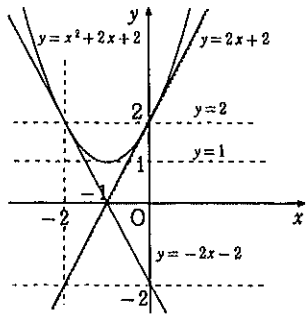
例えば、担任が生徒に話をするとき、何を話したらよいか無限に多くの中から抽出するのである。

社長が社員に話をするときも、無限にある事柄から柱を決めていく。しかも地球規模の中でのグローバルな視点を示しながら。生徒の書く作文や、管理職試験の論文作成における柱立て構想なども無限にある教育的配慮から選択していく作業である。多くの分類作業は、その典型的な無限を掴む作業である。

逆に、一見一つに見える事柄が見方を変えると無限に広がることを誰もが個人的な感想ではなく事実として同じように実感できる。ここに数学特有の世界があるのである。この発想の原点を示す。

例を示す。2次関数の研究をしていて、平方完成中心の授業展開に疑問を持っていた。$y = ax^2 + bx + c$ の、特に係数bの働きについての疑問が 1994 年に解決し、1995 年に日本数学教育学会（早稲田大会）[2] にて発表した。

2次関数の変形方法が無限にあることからその後、今まで見なれた既存の基礎・基本と呼ばれる教材の見直しを進めてきた。[3] 特に、「関数は関数を生む」[4] のなかで、【恒等式】の重要性について、多くの事例を出しながら、説明をした。「式と証明」の中だけに「恒等式」の術語を用いているが、式変形の場面でもっと使うことが大切である。また、恒等式の両辺を観察し、その意味を解釈することによって、一つの教材が十倍にもなるのである。また、それまでの2次関数の指導は、③の平方完成一点張りと言って良かった。しかし、図のように、式変形の工夫一つでその全貌が表出し、変形の意味を納得する。つまり、①や



$y=x^2+(2x+2)$と$y=2x+2$ ……①

$y=(x+2)^2-2x-2$と$y=-2x-2$ ……②

$y=(x+1)^2+1$と$y=1$ ……③

放物線と接線の関係が見えることが重要

②などの簡単な変形で、ある点での接線との位置関係が把握でき、一般の整関数へも考えが及ぶから、生徒に感動を起こさせることが出来るし、学習意欲を解発することになる。これだ！ここに数学教育の原点がある。そのための基礎として、「記数法」が具象として大切であることが認識されていないことは残念である。

『無限をいかに掴まえるか』という何気ないキャッチフレーズであるが、これに気が付くまで長い年月を要した。これには中等教育の数学科が6年間生徒を指導するねらいが込められている。「無限を掴まえる」ことは、学習する生徒と指導する教師に共通のものである。生徒にとって、学習者一人では認識できない身の回りにある無限に多くの事柄に対する視点を学習するのであり、問題解決学習の本質である。このことを学習するのに最も適した<数学というアプローチ>を通して学ぶのである。このことは、たまに行われる課題学習的授業展開とは異なる性質を持っている。日々の日常の授業で実行することができる考え方であることが特徴であり、重要である。

しかし、これらのことを、生徒は教科書の字面から獲得できないことであり、教師の指導理念によるところ大である。

(2)『共生の掛け橋』について

共生という言葉を耳にすると、アリとアリマキ、障害者と健常者、外国と日本、自然と人間等々を思い浮かべる方々が多いと思われる。一見、数学とは無縁の響きがある。ここでいう「共生」とは、自分自身を知ることであり、他者[5]を新しい仲間として認めることである。これによって、社会を見る目、世界を見る目が養われる。つまり、関わりに気づくことである。以外だが、数学そのものが共生の考え方を有し、発展してきた。「負の数」しかり、「虚数」しかり、ユークーリッドの公準しかりである。歴史を語ることの大切さを実感した。このことは昨年気がついたことであり、数学で生徒を育てているという自信を持って授業が出来るようになった。これは、ペリー運動以来の革命的な指導理念であると考えるようになった。繰り返しになるが、「共生」の理念は、一見他者と思われること（もの）と自分自身との間に「掛け橋」を架ける事であり、そのためには自分自身をよく知らねばならない。それが多くの視点・観点を持たせ思考が活性化することになる。これが生徒の成長である。

欧米の誤った人間中心による文化は、環境破壊や他人種への偏見や科学技術の悪用など、他者（人間だけではないことは言うまでもない）と社会との関係に階層化[6]・差別化を生じさせてきたように思われる。「共生」を数学教育の中核として確立することで、豊な世界を構築したい。この視点で教材を眺めてみれば、日常の授業は多く、生徒に語ることができる場面が発見できる。授業そのものが「共生」でなければならない。分からない問題を生徒と一緒に考えて行く姿勢が大切である。教師自身が学習者でもあるのだから。

日常的にはコミュニケーションの役割の重要性や読み手に分かるような答案を書くなども中心はここに帰着されることである。

(3)『認識の変化の獲得』について

理解と納得とは異なることであるのは、知られている。ところが、それを生徒にどう説明するかが長い間懸案であった。教育心理学、認知心理学などいろいろな本を読んできたが、納得できるものは少なかった。京都大学工学部教授長尾　真の著書『「わかる」とは何か』[7]の中で、「話題になっていることに関連した知識はほとんど持っている、しかしその話題がその知識によって解釈できない、という状態にあって、そこで何かのヒントを得た結果、持っている知識によってその話題が完全に解釈できるということがわかったとき、「わかった！」ということになる。」と述べている。数学が良きモデルとなりうるのである。これだと感じた。学校数学では、式という抽象的な世界とそれを支える具象の世界との対話[8]が特徴であると言い換えてもよい。これによって、「わかった」とは、今一つ構造が見えなかったところへ、その部屋を開くある種の鍵が手に入ることによってパーと光が差す状態で、一言で言えば「感動」が解発されるかどうかであると考えた。これが、科学の発見でもある。認識の変化が起こるときに納得が生まれる。そのことを強く意識はしていないが、「観」を創る青年期の生徒には、自己の成長を感じ取れる。そんなとき、生徒も教師も楽しいし面白い。授業で生徒から拍手をもらうのもそんな場面である。

この３つのキーワードによって、様々な事柄が解発される。そのひとつは、数学教育の理念や学習の中心概念であり、二つ目は、それから派生する具体的なカリキュラム策定作業である。

1.4　筆者の数学教育における想い出

エピソードその１）教育実習で、有名進学校の高校２年生へ、極限値の演習問題を行った。そのなかに

$\lim_{x \to a} \frac{xf(x) - af(a)}{x - a}$ の値を求めよ、があった。授業後生徒が「なんでこのような問題をやるのですか？」と聞いてきた。その場では、定義に従って計算することの意義を説明したが、納得した顔をしていなかった。

その２）教師５年目、女子生徒から「先生、数学ってなんで勉強しなくちゃいけないの？」と質問され、「数学の考え方は、将来きっと役に立つ」のようなことを答えたが具体的ではなく納得をしたように思えなかった。

その３）現在の勤務校に赴任し、いきなりの高３選択「確率・統計」の授業を担当した。これは受験科目ではない。そこで選択理由を生徒に尋ねてみた。「統計の概念、特に分散の概念が知りたいから」と、これにはまいった。当時40歳、いろいろな生徒を教えてきてが、本質を求めていることに大変なカルチャーショックを受けた。

以上３つはそれぞれ異なるようだが、ルーツは同じであったと考えている。

数学教育を論じる前に、学校教育のあり方を論じておく必要がある。

2　学校教育のあり方

2.1　国家百年の計

現在、教育に関する新聞記事が毎日のように掲載されているが、「子は国の宝」と言う言葉にとんとお目にかからなくなっている。歴史を見れば分かる通り、いつの時代の為政者にとっても教育問題は重要な政策のひとつである。為政者に都合の良い政策が効果のある時代もあった。しかし、現代の国際社会において、それは国家の破滅に等しい。国家間が共に地球に生き、豊な生活をおくるためには国と国が「共生」し合うことが必要不可欠である。そのためには、それを支える国民が思考しない、物言わぬ民になってはならない。

学校教育は現在、学力低下・引きこもり・いじめ・不登校など様々な問題を抱えている。先行き不透明感が子どもや大人に充満しつつある現在、教育こそ最重要課題として取り組むべきものと考える。「人」があっての国家であり、育ちいく子どもにとっても、老いる大人達にとっても、心豊な国を目指したいものである。

ところが、「21世紀日本の構想」懇談会最終報告書：日本人の未来（第５分科会報告書）では、教育のもつ二面性のうちの一面は国家の統治行為だとされ、ここでは読み書き計算のような基礎的認識能力を身につけることすら国家への義務だと謳われた。さらに、....（中略）....教育は一面において警察や司法機関などに許された権能に近いものを備え、それを補完する機能を持つと考えられるとまで述べている。全く温かみのない言葉の羅列に大変危ない匂いを感じる。

2.2　社会構造の変化

富国強兵・殖産興業を柱にして始まった国作り。高度成長期まで欧米先進国に追いつき追いこせと豊な生活を追い求め、大量消費文化が形成されてきた。それは、物質の豊さであり、損得・儲け・浪費などへと行動を駆り立ててきた。数学教育も、軍のエリートに対する微積分の導入に始まり、理系特に工学系へ輩出すべく授業が展開され、一応の成功を収め、経済大国にまでのぼりつめた。ところが、ベルリンの壁が崩壊し、東西冷戦の終結あたりから世界は変わり始め、日本もバブル崩壊と共に大きく様々な構造を変える必要に迫られている。人口問題・エネルギー問題・食糧問題・環境問題などなど、真に豊な地球へ向けての課題が山積している。

ゆとりを前面に出し、生きる力を育てることに教育は転換した。しかし、真に基礎・基本の力をつける方向であるかについては疑問が残る。教育課程における各教科教育とは何かが明確でない根源的問題も背景にあると思われる。豊富な知識があると高偏差値を獲得でき、その結果給料が高い優良企業に就職できて立身出世し安定した生活が営める。そんな時代の終焉が来ている。構造化されていない単なる百科辞典的知識はＩＴ時代にはいらなくなった。カレル・ヴァン・ウォルフレンはその著作『人間を幸福にしない日本というシステム』[9]で、日本を変えるための基本的な概念として、「市民としての立場」と「偽りの現実(false reality)」の２つを挙げている。ここで、市民とは、自分のまわりの世界がどう組織されるかは自分の行動にかかっていると、おりにふれてみずから言い聞かせる人間である、と定義し、偽りの現実は、現実の事態を偽って説明し続けることによってもたらされる、と説明している。

学校教育は、それを受ける全ての国民に等しくウォルフレンのいう市民として生活力をつけることに配慮しなければならないと考える。

ランスロット・ホグベンが著書『数学の世界』[10]で「数学とは、計算、測定、形に関する信頼できる推論

の有用な規則を、最も経済的な方法で発見し、伝達する技術」と述べている。しかし、筆者は、科学技術が高度に発達し97%の高校進学率の現在、ホグベンのいう数学と数学教育とは同じであってはならず、人間化が欠かせないと考えている。

3　数学教育の活性化へむけて

3.1　小低学年・高学年の算数教育と中・高の数学教育の違い

小学校低学年生と中・高校生の学習の面白さは全く異なる様相をしていることは教育学者安彦忠彦[11]も指摘している。小学校低学年には徹底した基礎を教えることが重要であると。その時期の児童は新しい事柄に理屈なく興味を示し、吸収力も旺盛である。ところが、小学校中学年あたりから始まり、特に青年期前期の中・高校生は自立に向かって自己を探り始め、理屈のない暗記には積極的価値を持たない。

しかし、これまでは中・高生に対しても数学教育はパターン化した知識偏重であったことを反省する。その解決鍵となるのが、キーワード第1の『無限をいかに掴まえるか』である。正に、「コロンブスの卵」だと自負している。この何気ない言葉に気がつくまでに多くの年月を要した。

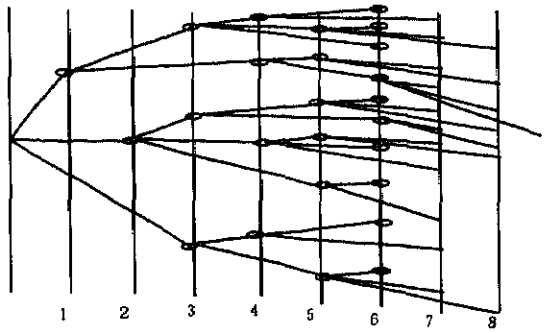
3.2　授業実践事例1

中学1年生の最初の授業で、算数と数学の違いは、「負の数を扱う」、「文字を使う」、「結果（答）だけでなく、解決の途中経過を大切にする」などを挙げてきた。しかし、キーワードを掴まえてからは、「算数はある特殊な場面という有限についての学習が中心であったが、数学は『無限をいかに掴むか』を勉強する教科である」、　と話し始めることになった。それを得させるため次の課題を考えさせた。

> 課題「バスケットボールの得点は1点，2点，3点である。得点の入る順番も考えに入れて10点入る仕方は何通りあるか。
> ただし、1点と3点はそれぞれ連続しないものとする。」

これにどれくらい挑戦できるか試したら、翌日正解者は123人中5人であった。59通りあるから、場合を調べ尽くすことは大変である。どのような方法で考えたかを聞いたところ、

①10点となる得点を並べていく方法(例えば、1212121など)、②樹形図を描き10点でストップする枝の数を数える、の2通りであった。数学の考え方で重要なことは、「式・図（表）・グラフ」の3つの抽象と具象を行き来することであり、①の式だけでは苦痛である。課題の要求通り10点という有限な世界で考えるのが普通である。そこで、11点や9点の場合も考えてみろ、と言われたらやる気がしないだろう。しかし、規則性があれば、「無限を掴まえる」ことができる。得点の数



列を図な特殊な樹形図を利用して作ると、

得点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
何通り	1	1	3	4	6	10	15	24	39	59

を得る。ここで、規則性があるかを問うと、こちらが用意していた答が返ってきた：2つ前から5つ分足すと、4+6+10+15+24＝59

求めたい得点が10点なら、4点～8点までのそれぞれの場合の数の合計である。中1だからこれはあくまで予想のままであるが、10点という有限の場合だけではなく、この規則性によって9点であれ、11点であれ全ての場合が氷解する。つまり、「無限に潜む規則性」を発見できた。ここに、数学のすごさが感得できる！生徒のものの見方が変わる。

漸化式で表すなら、

$F(n)=F(n-2)+F(n-3)+F(n-4)+F(n-5)+F(n-6)$

ところが、生徒はこちらが予想もしていなかった、次の2つの規則性を発見した。授業はこれだから面白い。ドラマだ。表（具象）と式（抽象）を行き来することの大切さを改めて教えられた。(漸化式で表すと)：

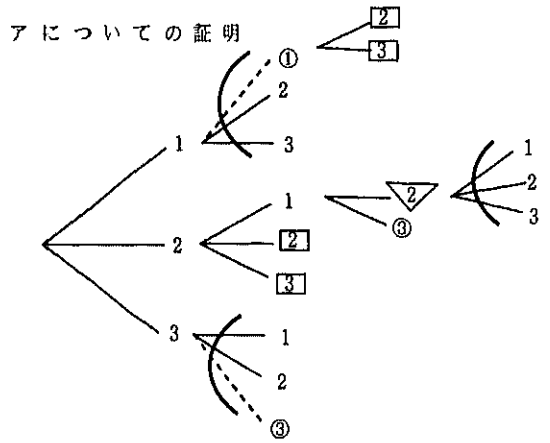
ア　：$F(n)=F(n-1)+F(n-3)+F(n-5)$

イ　：$F(n)=F(n-1)+F(n-2)-F(n-7)$

これらは、樹形図によって証明ができたので、生徒の発見した漸化式を加えて、今年の夏の日本数学教育学会(埼玉大会)高校部会「数学A」分科会にて発表を行った。(次の頁の樹形図参照)

中1でどれくらい理解できるか試みてみた。記号は、n点とる場合をF(n)と表すことにし、次の枝分かれで、

残りの点数が、１点,２点,３点と自由に（Freeに）選べて始まるとき、F(n)と書けることから、説明をしたところ感激してくれた。教師が無限地獄からの脱出発見に感激したのだから当然ともいえる。中１だから、もちろん完璧とはほど遠いが、生徒に「無限を掴む勉強をするのだ」との意識の変革ができ、今後の学習に対する構えに確かな手応えがあった。



実はこの教材は、中３に実施したもので、漸化式を作る課題を提出させた。大変おもしろい問題が多数集まった。これについては、別の機会に発表する予定である。

高校の数列指導は２項間、3 項間漸化式を解くことに重点が置かれすぎ、「無限をいかに把握するか」についての意識が欠けている。この実践例によって、他の教材も触発されるに違いない。数学が生きている様を見せることが出来る。上記問題の解答 59 が出来たとしても、それが自分の成長にぐっとくるものでないことは解答した生徒本人が一番よく知っているのである。

3.3　学習指導要領と教科書

学習指導要領改訂時においては、指導時間や指導項目の取捨選択やその配列に多大の時間を割き、また重点もそこに置かれてきた。しかし、数学教育を通して生徒をどう育てたいのかの議論がカリキュラム論の本質であるべきである。つまり、数学教育の教授哲学と理念の構築にも精力を傾けねばならない。しかし、改訂作業は項目主義であり、それ以外は教師の指導と切り捨てているようである。ここに問題の根があると考える。

多くは、日々の授業に学習指導要領の内容を具現化しているといわれる教科書が用いられている。内容を本当に具現化するためには、理念が必要不可欠であるが、それがないため、実際は指導すべき学習項目の実行書になっているのである。指導要領の目的が教科書の扉等に転載されていない。学習指導要領は教科書出版社向けマニュアル・入試出題者向け出題範囲マニュアルと揶揄される。いっそのこと、「入学試験出題範囲規定書」と改めるとねらいが明確である。

学習指導要領の内容をどのように捉え、いかなる授業になるかは、授業する側の教師と授業を受ける生徒との共同作業の問題である。学習するのは生徒であるから、「数学を学習することの意義」が明らかにされていなければならないものである。

理念・原理が明確になれば、教科書もそれに正対して至るところで工夫を図らねばならなくなる。日本の教科書は諸外国に比べて薄いのも、単なる出版者サイドの採算が理由ではないだろう。教育にお金がかかるのは当然のことであり、文部行政の問題である。今の数倍の厚さの教科書でも教えることはなくなってしまうことはない。教師は、それに応えるように努力もするようになる。「教える立場になったら、生徒の 10 倍は知っていなければならない」、とは筆者の指導教官の言葉である。10 倍とは知識の量のみをさしているのではないことはいうまでもない。

3.4　世間の数学教育批判

上野健爾 の「数学のたのしみ」No.9[12] によると、教育課程審議会長の三浦朱門氏は雑誌「週間教育 Pro」1997 年 4 月 1 日号 のインタビュー記事 『「教育」今後の方向』の中で、教科内容の厳選に関して、教科のエゴをなくすために、たとえば数学では『曾野綾子のように「私は 2 次方程式もろくにできないけれども、65 歳になる今日まで全然不自由しなかった」という』数学嫌いの委員を半数以上含めて数学の教科内容の厳選を行う必要があると発言している、という。数学を学ぶことによって ‘感想で議論を進める’ ことに価値がないことはわかる。結果として、２次方程式を満たす解があることを発見する喜びを奪い去ってしまった。数学によって思考空間を広げる努力が急務であると感じる。この発言はすぐに役に立つような数学をやれとの要望ではないと解釈しておきたい。日本の将来を見据えたとき、理系大学卒業生でも社会に出てすぐには役に立たず大学院へと進学する高度科学技術の時代に、中等教育での学校数学そのものが、即生活に役立つような現代社会ではないことは誰もが認めるところである。変化の激しい国際社会にあって、仮にすぐに役に

立つような事柄があるとすれば、それは大した事柄ではなくたちまち役に立たなくなることであるに違いない。生徒は、消費者、生産者、公務員、裁判官、議員等々の様々な未来がある。

3.5 役に立つとは？

「役に立つ」とは、人がある視点・観点などで自分の思考空間に変容を感じ、自分の成長に寄与したと実感し感動し、その後の人生に前向きな姿勢を与え、結果として社会に貢献したとき、役に立ったと振り返えることができ、そのことによって自分が豊になることと筆者は捉えている。

3.6 日本の数学教育の歴史から学ぶこと

長田新[13]は、「形式陶冶に関する最近の論争」と題し、「形式陶冶を今日、学問として維持することは到底不可能である」と。形式陶冶説によって、数学は頭を練る学問だと考えていた多くの数学教師に衝撃を与えた。言い方は変わることがあっても「形式陶冶」という、いわば「昆虫の本能」のように今だ解明されていないことをある言葉で包含し曖昧さを残したものを根拠にして数学教育が行われてきた感が強い。どんな思考訓練なのか、またそれによって、どんな期待をするかの積極的文言がなかったのである。

4 数学教育の理念と中心概念

4.1 数学教育の理念

数学教育の活性化が叫ばれるが、それを実行するためには、教育の理念が必要である。また、数学教育の存在意義も示すことが要求される時代となっている。

ややもすると本質的指導ではない受験指導の亡霊に振りまわされてきたのであるから、数学教育そのものの見方が変わらなければ新たな創造的授業展開など遅々としか進まない。確かに夏の日本数学教育学会での発表件数は激減しているという。

ところが、理念についてインターネットで検索しても、その必要性と重要性を論じているが生徒を育てる観点からの理念を文章化したものは見当たらない。企業については参考になるもの多々あった。

教育における理念は崇高でなければならない。しかも、抽象的でできる限り短文で簡明であることが望ましい。また、それによって思考や行動が示唆を促されるものでなければならない。目的を実行するためには、短くしかも実行するエネルギーが込められた動的なキャッチフレーズを含んでいるとよい。他教科をみると、社会の歴史分野であれば歴史認識というキーワードがあり、理科では、自然観や科学を見る目を育てる、など教科を通して生徒に何を語るかの共通の認識がある。それらに対応するものが欲しい。しかも、中等教育6年間を見とおしたもので、生徒に何を掴みとってもらいたいのかを示し、訴えかけるものがよい。教える教師と学ぶ生徒が共通に求めるものでなければならない。

藤田宏は、「未来をになう数学教育」(Casio のホームページ) の中で、これからの数学教育の目的は、“数学的知性の涵養”にある、という。また、そのための指導原理あるいは実践の目標は数学的リテラシー（ＭＬ）の育成と数学的思考（ＭＴ）の強化の両成分を生徒・学生の資質・志向・進路・専門に最適なバランスで実現することであるという。このＭＬはマジョリティの生徒が世に出たとき知的市民として数理とつきあっていけるだけの素養であり，それは生涯学習の基盤であり、ＭＴは発展的な専門性の数理面での基礎となる思考力であると、述べている。

また、算数・数学教育の目的・目標[14]の中で、石田は、目的として、これまでは①陶冶的目的、②実用的目的、③文化的目的であった。これからは、①創造性の基礎を培う、②自律性の育成、③数理認識能力の育成、④数学という文化の享受を挙げている。

これらの考えを踏まえて、現場として、具体的に教育活動がより深まる言葉に直したい。

ややもすると、マジョリティには平易な数学（パターン化された手続き的数学）を教えておけば、と考えられる向きもあるが、それは全くの誤解であり、数学教育のねらいをも誤解している。それが最終目標では多感な中高生に自己の世界が広がったという感動を与えられないからである。

一方、とかく学力を論じるとき、計算力が評価しやすいがために取り出されることが多い。IEA の調査報道や「分数が出来ない大学生」なども、読者は計算力に焦点を当てがちである。もちろん数学を学習するには計算力なくしては不可能である。しかし、これまでは指導する基礎・基本の内容が、あることの計算と目的化してしまっていて、数学学習の目的を生徒に訴えかけるような形で、生徒に問題提供してこなかったし、生徒に語ってこなかった。

そこで、次のような数学教育の理念を掲げる。これは、教師・生徒・保護者さらに日本国民に対するメッセージでもある。

数学教育の理念

「数学学習は、『無限をいかに掴むか』について学習するが、その学習過程において、今までの自分にない新しい概念や認識を獲得し、明日の新しい自分の創造に資するものである。」

4.2 数学学習の中心概念

現在の日本は、特にアメリカからの情報を多く取り入れている感がある。アメリカは科学技術も最先端を走っている分野が多いこともあり、それを参考にして、というよりもお手本にして議論をする場合がある。しかし、東洋における日本の思想にはそぐわない場合があるのも事実である。子どもの育て方一つ見ても異なっているのであるから、学校教育を論じるとき、参考にこそすれ真似てはならないことだろう。日本独自の文化を考慮した教育を志向しなければならない。とはいっても、ＩＴ時代に突入し、地球が情報的に小さくなっているとき、世界を意識し、世界で活躍する日本人を育てなければならない。

ここでの数学教育の中心概念は、数学教育といえども数学以前の大前提である人間を教え育むことを忘れてはならない。欧米に比べて、大きな自然・世界観を文化とする日本は、世界の手本となるようなものを構築しなければならない。

4.2.1 中・高生が数学を学ぶこととは何か

学ぶこととは、認識の変化の獲得である、と定義する。数学教育講座（吉野書房）の『数学教育の基礎的諸問題』の第三章「教育としての数学」の中で、前田隆一[15]が、「実学で数学が道具に成り下がってしまってはならぬ。」と警告している。青年期の生徒にとって単なる知識の増加・応用だけでは自分の成長（自立）に寄与するとは考えにくい。入試や立身出世などの範疇では納得させられない自分がそこにいる。認識の変化はその人の心の動きを解発する。学校教育で、将来にわたって「役に立つ」ことは、「認識の世界」以外に国民として共通のものはありえない。これは、構造の美しさ、他者への優しさ、真偽の判別、少数派・弱者への配慮、身近に隠れている数学の発見、先人の偉業を称える等々、社会的文脈での認識でもある。理系のための、文系のための云々は数学教育の理念なき発想ではあるまいか。そこで、今まで扱いなれた教材をもこの立場に立って見なおしてみる必要がある。

4.2.2 中心概念構築の視点

(1) "Give だけでなく Get させる" 授業

Give の世界
教師⇒生徒 ・生徒がどこでつまずくかを予想しながら与える ・目的を明示せず、方法を伝授 ・産婆的、方法手段付与型 ・栄養素、ドリル、マニュアル ・援助、支援、理解、follow up ・解法、別解、正解、終了
Get（させる）の世界
教師⇒生徒 ・生徒が（Get しようと）求めて来ることを確信して与える ・目的を明示し、方法は考えさせる ・主知性、目的指示型 ・フェロモン、共生、無限、認識 ・解発、創発連鎖、納得、catch up ・気づき、感動、挑戦、創造

これら「与えて、わからせる」ことと「求めてこさせ、わかったといわせる」ことの両方のバランスで学校数学は実現できるのではないか。後者については、"フェロモン的" 授業により生徒の主体的行動を解発させるようなメッセージを送ることが求められていると感じている。「気づき」とは、自分の中に今までなかったか、あったとしても未成熟であるとき、自分の世界が広がる感触に気づくことである。これが青年期の中・高生に生きる糧になる。テレビゲーム的な表現をするならば、数学アイテムを集めても生徒のレベルアップはないが、数学的心で生徒をレベルアップさせられる。それが「認識の変化」であり、そのためには「無限をいかに掴むか」が欠かせない。

(2) 企業における人間化から学ぶこと

企業も物を売るのではなく、「心」を買ってもらう時代へと変わってきた。例えば、着物を買いに来たお客様に、これはいかがですかの繰り返しでは買ってもらえないという。着物を着るライフスタイルを売るのだそうだ。

教科としての数学も何とか理解して良い点を取ってもらうように、では主体的勉強に向かわない。ましてや、入試があるからの押し売りでは、思うようにことが運ばない。電車の吊広告でストリップにも客がこないとあるのを見て、学校教育も知識の切り売りなら、

もう脱ぐものがないなと。ジェット機内でのコーヒーサービスで、紙コップ回収時の「よろしいですか」ではなく、「おかわりいかがですか」でり、ハイヒールの踵が壊れたときの店員の「お取替えします」ではなく、「お怪我はありませんでしたか」の授業でありたいと思う。学校数学も人間化への努力をしていきたい。

4.2.3 中心概念

数学によって、生徒に認識の変化を獲得させ、21世紀の社会の市民としてその後の生き方に資するような事柄およびその内容がその後の科学研究の基礎にもならなければならない事柄を中心概念とする。それには、次のア～カが考えられる。

ア．拡張と共生と分類；

日常多くの場面でもそうだが困難は分割・分類する。話の柱立て、文章の構成など、多くの視点を頭にいれて考えることが大切である。また、新しい仲間（数や考え方）を添加することで思考が活性化する。

〔実践事例2，3，5，6〕

イ．統一と構造；

一見すると、個々には異なるものが、よく調べてみると、実は同じ構造をしていることに気がつくことがある。これこそ無限をつかむ典型である。実践事例5と6は同じ構造を持っていることに気づく。

〔関数のテーラー展開の考え方[3]，実践事例1,2,5,6〕

ウ．変化と不変と規則性；

変化を如何にとらえるか。変化を知るには不変も知る必要がある。また、変化には人間として扱いやすい線形的変化とそうでない非線形的変化がある。前者は無限を把握しやすいが後者は学習で獲得していくものである。

〔1.3　2次関数の実践事例、実践事例1，実践事例4〕

エ．真偽と論理；

数学教育が積極的に論理的な指導をしてきたとは言えない。数学のように明確な理論体系を有する世界では使えるが、そうでない場合の使い方は信頼性に欠ける。このことによる誤った議論がまかり通る場合が多々ある。これは言葉の問題であり、各教科が取り組む課題でもある。その一翼を担うのが数学教育である。

〔実践事例7，5〕

オ．歴史；

数学が作られてきた歴史を伝えることは、数学が生徒にとって身近になることであり、生徒の心の中に「数学との共生」がはかられる。　〔実践事例3〕

カ．コミュニケーション；

創造と対話の重要性。これによって、相互が今までに抱いていなかった全く新しいことの芽生えが生まれることがある。これは、相手の考えによってあることが解発されたのである。これを江森英世[16]）は「創発連鎖」と呼んでいる。相手に納得いくように話すことが求められている。　〔実践事例1，2〕

5　実践事例

5.1　実践事例2

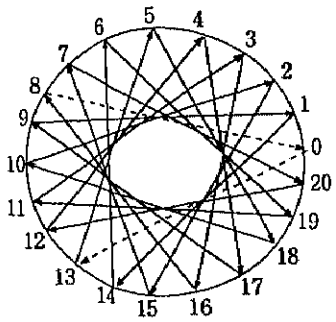
中学1年で初めて、正負の数を扱う。そのときの授業実践を紹介する。

問題「英国流の建物がある。0,1,2,3,…,20の階がある。しかし、このエレベーターは特殊で、上・下の2つのボタンしかなく、上ボタンを押すと+13階分ノンストップ、下を押すと－8階分ノンストップで運行する。いま、13階にいて、8階へ行きたい。どのように、上下のボタンを押せばよいか。また、ボタンを押す合計数を求めなさい。」[17]　（ロシアの中・高生を対象に数学者も交えたグループが考えた数学の問題を改題）

次のような〔解1〕が考えられる。

13→5→18→10→2→15→7→20→12→4→17→9→1→14→6→19→11→3→16→8

結局、上ボタン12回、下ボタン7回の合計19回。これで終わっては、感激がない。キーワード「無限を掴む」によって、次の図のように円上に0,1,2,3,…,20の点を打ち、それらを巡回することで、全てを巡回した様子が一目で示せる〔解2〕。〔解1〕を反時計+13や時計－8と対応させたのが、反時計まわり+13だけで済むことが重要である。



（これは2学期に学習する、+13≡－8(mod.21)の合同式を扱うことの布石でもある。）　この問題の類似問題を作ることが出来るか、で議論をした。

つまり、どの階にも行って最後に目的の階へ行くような上下ボタンの設定問題である。生徒の作ったうち階数の少ないものを取り上げた。

問題「0,1,2,3,4,5,6のビルで、上ボタンで+4、下ボタンで－3移動するとき、4階から3階へ行くには何回ボタンを押すか？」

教師の発問：このとき、上のボタンと下のボタンで移動する、+4と－3としたが、この2つの数は、何でも良いのか？

教師：4と－3以外の組合せを調べてみると、

生徒：上+6, 下－1 (6→1)；+5, －2 (5→2)；+3, －4 (3→4)；+2, －5 (2→5)；+1, －6 (1→6)

教師：ということは、全ての場合がOKということ？では、ビルが英国流0,1,2,3,4,5の6階であるとき、ボタンでの移動で可能性がある上下の組は、+5, －1；+4, －2；+3, －3；+2, －4；+1, －5　これではどうだろうか？　全ての階を巡回できないのは？

生徒：2つの数に共約数がないとき。互いに素な数であれば。

教師：理由は？

生徒：共役数があると、同じ階に行くときがあり、すべての階を回れない。例えば、4→2→6→4→2→…となって全ての階を巡回できなくなる。

教師：では、どんなビルの階数であれば、上下のボタンでの移動の数の組合せが可能なのか？

生徒：素数なら大丈夫。

教師：確かに、7＝3+4 のように共役数がないが、素数ならいつでも分解した2つの数に共役数がないといえるか？

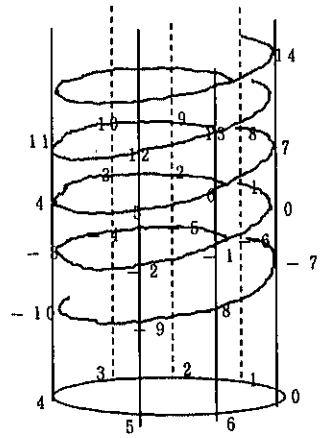
生徒：2つの数に、もし共役数があるなら、それら2つの数は、それぞれその共役数との掛け算になるから、その和は共役数掛ける何か、となってしまうから。

教師：(黒板に、生徒の話を聞きながら)
ある数を◎とする。◎=□+■と分解できたとき、もし、分解した2つの数に共役数○があったとすると、それぞれ□=○×△, ■=○×▲となるから、=□+■=○×△+○×▲=○×（△+▲)、これは◎が素数に矛盾する。これを「背理法」という。)

教師：納得した？　(生徒うなずく)

教師：実はここにも、「共生」の考え方がある。2人で議論しているとき、相手がひょっとすると約数があるのでは？　というとき、一端相手のことに耳を傾けそれに従って、約数があるとしよう、と話を進める。しかし、どこかで矛盾が出てきて、やはり駄目だったことを示す。慣れないうちはこのように2人を登場させると考えやすいが、次第に自分の中に「他者」ができてくると、1人でそのことが出来るようになる。

このようにいろいろな「視点」でものごとを考えていくのが「大人」だ。ここでの指導は、〔解1〕では、数直線という1次元の話に対して、〔解2〕では、回転し巡回することで、結果として全ての階を回ることが一目で見える2次元の話である。



さらに、では3次元はどんなことかを考えさせたが答えは出ない。そこで図のような螺旋階段を描き、カレンダーと同様、無限にあった整数が、有限の数 0 から 6 に分類できたことになるというと、「オオー」と声があがる。この縦のライン上の数はすべてが7で割った余りであり、同じ余りの「仲間」である。これら2つの発想の転換は、教師が用意して「認識の変化」を経験させることによって、「無限を掴まえる」ことの素晴らしさを勉強する。

以上、数学の授業のひとこまで、「無限」、「共生」、「他者」、「大人」、「視点」、「仲間」などの社会との関わりの言葉が見られる。これは、数学特有のことであって、無理やりこじつけているのでないところに数学教育の Identity がある。逆に、これなくして数学の創造はありえないと考える。このようにいろいろな場面で『語り』を差し挟むことが重要であると考えている。これが、先に示した「形式陶冶」や「実質陶冶」をある意味で意識した数学の授業である。

5.2　実践事例3

共生、それは国語科や社会科の専任領域と思われてきた。ところが、数学や一般に科学の研究はまさに「共生」の歴史でもある。例えば、ガリレオの「地球は回っている」との主張は、ある権威によって覆されてきた。また、数学では長い間のユークリッド原論の第5公準に異を唱えたロバチェフスキーやボヤイのように、ある種の「排除の原理」が働いてきた歴史がある。背理法の証明のように、相手のいうことを一端認め、そ

れにそって議論を進めると矛盾が出で相手を納得させる方法も考え出した。他を認めることによって、自分の世界が広がり、新たな発見があり、そこに感動がある。それが、共生本来の姿である。ノーベル賞受賞の白川博士は「実験での触媒の量のミス」を排除するのではなく、ある結果との関わりを見出した、と捉えることができるのではないか。共生の考えなくして、新たな発見はありえない。仲間作りでもあり、その掛け橋をどう構成するかでもある。損得勘定からくるものではない。数学という道具・手段を用いて教育していこうとするのであるから、その授業中に「共生」に関する話が教師から出ることが望ましい。しかし、実際に授業をして感じたのは、中学生は共生って何ですかとの質問がくる。と言う事は、国語・社会においても十分な説明がなされていないようでもある。

中学１年で、「正の数・負の数」[18] という単元がある。まず現実にある負の数の存在から始めるが、中でも負と負の積は理解しにくい。原因は、今までに獲得した数の概念で考察するときの困難性により、排除の原理が働いてしまうからである。そこで、和とは何か？積とは何か？について考えさせると、議論百出する。和は同じ種類、積は異なる種類であると結論に至る。さらに、積は単位が異なるものでなければならないことを見出す。それによって、日常の事象を利用できる状態までになる。ここで、正の数の積（自分自身）をよく理解していなかったから、他者（負の数の積）を受け入れにくかったことを学ぶのである。最終的に、分配法則が新しい仲間についても適用できるようにしてあげる（算法不易の原理[19]）とどうなるだろうか。ここに、数学としての出番があり、負と負の積が正になることについて、

分配法則が負の数を含めて成立つとしてあげると、$(-1)\times(-1+1)=(-1)\times(-1)+(-1)\times 1$　よって、$0=(-1)\times(-1)-1$　ゆえに、$(-1)\times(-1)=1$　分配法則の成立抜きにして、これが正しい証明のごとき事が書かれたものもネット上で散見できる。

言葉遣いに、『新しい仲間』とか『～してあげる』など配慮している。相手に何かを訴えるには言葉をもって語るしかない。この語りが教育でもある。「もうすぐ春だね。木の芽が出てきたかな。」と自然との共生も語る。これは数学の言葉を用いて授業するとき、生徒に聞く耳を形成させることになる。なぜなら、無限の世界をどんな視点でみるかのサインでもあるからである。これについては25年前の思い出がある。東京都工業高等学校数学教育研究会（略称：工数研）の月１回の研究会で、若輩の著者が発表すると会長初め評価して下さった。その帰路、松原誠先生からの一言一言を聞き逃すまいとした。感動したのは、教師の伝えたいことが生徒に伝わっているかのノイズ理論であった。Skemp の著書「数学教育の心理学」（新曜社）は数学教育を研究する原点であった。また、２次方程式の解の公式は何の役に立つのか？と問われ当時はありきたりの答えしかできなかった。

正負の数は、『無限をつかまえる』ことの序章である。負の数の加入によって、『思考空間が活性化したのである』とまとめられる。これが、数概念の拡張の本質である。

これによって、いじめなどの社会問題の話が数学の授業でも自然に取り上げられる。人としての「徳」を育てる授業は、全ての教科の時間に存在するはずのものである。マイナス×マイナス＝プラス等の計算を教えることが最終目的ではあるまい。整数は、元は１から、足す・引く・掛けるで仲間が増える（ペアノの公理）。君達の祖先も実は同じで、遠い親戚かもしれない。他者に対する見方についての見解を示しているのである。しかも、道徳の時間でない教科の時間というところが重要なのである。つまり、道徳一つとっても、学校教育の目標達成のために、数学を通してだと説明がしやすいことだってあるのである。

5.3　実践事例４

次に紹介する授業実践は、無理数についての認識についてである。$\sqrt{2}$ はどんな数であるか。この認識の変化を求める授業を紹介する。

平方根２は、平方すると２になる数とか、平方根２は、1.41421356…などは知っている知識である。この小数は無限に続いていて、生徒はそんな数は電卓でしか得られないと考えている。

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{1}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{1}}=1+\frac{1}{2+\frac{\sqrt{2}-1}{1}}=\cdots\cdots$$

この後は、繰り返しである。生徒も、この自己再帰的構造に驚いた。循環しない無限小数だから、規則性はまったくないと考えていたところに規則性が潜んでいたのであるから。これを筆者は「無限に潜む規則性」と呼んでいる。これを、記号で、$\sqrt{2}=[1;2,2,2,\ldots]$ と表現する。

次に、$\sqrt{2}$ の実感を掴んでもらうために、近似分数列を

作ることにした。

$$1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}, \ldots\ldots$$

これを簡単な分数列に直すと、

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \ldots\ldots$$

この分数列にも規則性が発見できた。連続する２項に、$\frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}$ の関係がある。この証明、$1+\frac{a}{b}$ の次が

$$1+\frac{1}{2+\left(\frac{a}{b}-1\right)}=\frac{a+2b}{a+b}$$ である。

小数に直すと、　1, 1.5, 1.4, 1.4166666....,
1.4137931034...., 1.414285714....,
1.414201183 ,.....
なるほど、繰り返しさえすれば電卓でなくてもより正確な値が出る（実はこの数列の極限値が $\sqrt{2}$ ）という認識の変化は衝撃的でさえある。

5.4　実践事例５

実践事例４の後の発展教材である。

問題「方程式 $x^2-2y^2=1$ ... ①（ただし、x, y は正の整数である）の解を４つ探してみよう。」

すぐに、(3,2) は発見してくれた。次となるとそう簡単ではないらしい。①を因数分解してみると、

$$\left(x+\sqrt{2}y\right)\left(x-\sqrt{2}y\right)=1$$

この解の一つが、(3,2)であるから

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)=1 \quad \ldots②となる。$$

ここで、$\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=17+12\sqrt{2}$　これより、(17,12) が解である。

確かめると、$17^2-2\times12^2=289-288=1$

どうして平方すると求められるのか？　と理由を問いかけても返答なし。基本的な等式の性質の難しさを示している。つまり、$A=B \Rightarrow A^2=B^2$　とは見えなかった。①の両辺を平方しても、

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2=1$$

つまり、$\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)=1$　を満たすから、(17,12)は①の解であることが分かる。同様にして、２乗、３乗しても言えるから、次々に解を見出すことが出来た。（数学的帰納法の証明の必要性がでる）

この結果、整数だけの社会Ｚに、新たに $\sqrt{2}$ という仲間を入れること（添加）で、整数Ｚの世界を探していては困難であったことが、$Z\left[\sqrt{2}\right]$ という新しい世界では、簡単に求められるようになった。この問題のように整数問題は、中学生でも高校生でも理解にそんなに大きな違いはない。x, y に代入して発見するが、大局的な視点の差が１、つまり小学生風の４－３＝１，５－４＝１，・・・、９－８＝１，・・・など。もっと効率化して発見するにはどうすればよいか。そのなかで、$\sqrt{2}$ を利用するという認識の変化は、今までの経験（式変形など）とは異なるものであった。また、連分数で考えた近似分数列が再度登場したこと。この結果が、最初の生徒の感想として、「無理数も数の一構成員として認識できる気がした」となる。

5.5　実践事例６

$x^2+y^2=z^2$ を満たす正の整数の組をピタゴラス数というが、その組を発見するとき、(4,3,5) はよく知られている：　そこで、

問題　$4^2+3^2=5^2$　を利用して、別のピタゴラス数を発見せよ。

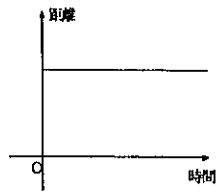
さて、「無限を掴む」ために、整数Ｚの思考範疇に虚数 i を添加することで、$(4+3i)(4-3i)=5^2$　となる。$(4+3i)^2=7+24i$　これより $x=7, y=24, z=25$.

理由は、$(x+iy)^2(x-iy)^2=(z^2)^2$　を満たしているからである。虚数を学んで、4+3だって、分解できるということ；和を積に分解するなんてという驚きが実感できる。

生徒Ｆ：$R[i]$ をＣと思ったりすることが同一視の中でも重要なポイントで新しい数学へつなげていくことが肝要だと思う。と感想を述べている。

5.6　実践事例７

問題「横軸が時間、縦軸が距離で、時間に無関係に距離が一定である、右のようなグラフをみて、どんなことを観測した結果と考えられるか？図示してみよ」



今までの学習経験が強化され誤った情報解釈になることを指摘する問題である。これは、1998年にアメリカ・ナッシュビルでのグラフ電卓研究会で発表した。本校教育研究会にて中２で公開授業研究をしている。

はじめは、「ずーっと止まっている」との答が返ってくる。このように教わってきたからである。つまり、1次元と限定して考えている。こちらが本当にそうかと聞き出すと、生徒が考え出したのは、円上を動き回っていても、と2次元つまり平面上へと視点を広げた。これでも結果は同じグラフになる。ここでも「認識の変化」が感じ取れる。しかも、情報を誤って解釈しないことを学んだのである。中2では大方2次元までであるが、同じ問題を高校3年生に調査を実施してみたところ、球など空間を動き回る様々な図を示してくれた。6年間の学校数学の成果が出ている証拠でもあった。真実を見るためにも統計教育は欠かせないはずである。

6　数学教材の柱の視点

まず、事象には数量（代数・関数）的なものと、図形（幾何）的なものがある。

線形性をもつような事柄は頭の中で変化を想像しやすい事柄である。例えば、1次関数、相似、1次変換など。ところが非線型は、人間にとっては苦手な領域であり、判断を誤らないためには学習経験が欠かせない。そこで、線形と非線型（離散）について学習する。非線型は、2次関数、指数・対数関数、三角関数等の変化など、身の回りに多く見られものを学習する。

連続性については、直感的である。不連続については考え難くミスを犯しやすい。そこで、連続と不連続について学習する。不連続（離散）の代表は、数列である。これと線形・非線形の連続関数との関係がこれまた重要であり、連続との掛け橋的役割を担っている。この掛け橋の学習が高校までの最終目的のような気がしてきている。決して、微積が最終ではない。
これなくして、連続の実感が伴わないし、使えない。

7　おわりに

7.1 成果と今後の課題

中高6年間の学校数学の人間化をはかる努力をしてきている。現在での著者なりのIdentityが示せたと考えている。「無限をいかに掴まえるかである」や「共生」など『語る』ことで、生徒の学習への構えや数学との付き合い方は変わってきた。 1.3節で紹介した生徒達の感想をまた一部紹介する。

生徒G：数学には様々な数があり、人は差別しがちだが、現実に例えてみればそれぞれが動物界の一員のような感じで仲間なのである。だから、すべてがあり、うまく共生しなければ数学というのが崩壊して行くような気がする。

生徒H：基礎的なことを勉強しつづけることで、将来が無限に広がる大きなネットワークすなわち仲間を築きあげることもできる。

生徒I：自分のことをひらめきがあまりない人と思っているので、自分でそういう足りないところを埋めようという気持ちで数学をやっていたが、今では楽しく思える。また、「視野を広げる」という意味で数学はとても大切に思っている。

生徒J：いろいろな式が共生しているとは、「立場を変えられる」という意味でもある。

教師への授業内容の期待は高まる。また、感動をGetしてくれるように教材の本質の研究に責任を感じている。一方、理念や中心概念は教える教師の哲学の問題でもある。しかし、理念に関する実践的先攻研究は見当たらない。そのため、研究の出発は「企業の理念」であった。我が社は、このような研究をしていて、云々と自己宣伝の羅列項目群を理念と呼んでいる会社は成長しないということのようである。

この論文を契機として、学校数学の人間化をより良いものにしていくと同時に多くの方々に提案していただくような努力を今後していきたい。また、日本独自の理念を作っていきたい。

現在の研究のスタンスは、明治以来の基礎・基本といわれる教材および指導の見なおし作業である。それは、日々の授業がわかりやすく、そこにこそ学ぶ価値を見出したいからである。

これらの研究が、まず指導内容項目ありきのカリキュラム策定から脱出する一助になればと考えている。

7.2　参考文献等

0）文部省（2000）中学校学習指導要領
1）解発（ﾘﾘｰｽ）：生物、特に昆虫のフェロモンよって行動が引き起こされることを呼んだのが始まり。
2）駒野　誠（1995）「2次関数のグラフの構造」日本数学教育学会早稲田大学「数学I分科会」
3）駒野　誠（1997）「整関数のグラフの構造 ―関数のカリキュラム改革に関する一考察 ―」第30回数学教育論文発表会大阪教育大学
4）駒野　誠（2000）「関数は関数を生む―恒等式を核として―」2000年度筑波大学附属駒場論集
5）仲丸信行（1999）「他者の視点の獲得」筑波大学教

育学系論集
6）苅谷剛彦「階層化する社会の「学力」問題」 2000年度本校第1回校内研修会 2000/6/29の講演
7）長尾 真（2001）『「わかる」とは何か』岩波新書 P.139
8）渡辺公夫 筑波大学教授 本校教育研究会数学の助言者 研究協議会の話から。（7年連続助言者）
9）カレル・ヴァン・ウォルフレン（2000）『人間を幸福にしない日本というシステム』新潮社
10）ランスロット・ホグベン（1995）『数学の世界』河出書房新社
11）安彦忠彦「中高一貫における今後のカリキュラム研究のあり方」2000年度本校第2回校内研修会 2001/3/2講演
12）上野健爾（1998）『数学のたのしみ』日本評論社 NO. 9
13）吉田明史（2000·2001）「数学的活動を通して創造性の基礎を培う（14）～（16）」中等教育資料
14）石田忠男 日数教会誌2000第82巻 第7・8号
15）前田隆一（1952）『数学教育講座』吉野書房 第1巻 基礎項目「教育としての数学」
16）江森英世（2000）『数学的コミニュケーッション参画者の認知過程』日本数学教育学会論究
17）ﾄﾞﾐﾄﾘ･ﾌｫｰﾐﾝ、ｾﾙｹﾞｲ･ｹﾞﾝｷﾝ、ｲﾘﾔ･ｲﾃﾝﾍﾞﾙｸﾞ（1998）『数学のひろばⅠ』岩波書店
18）駒野 誠（1992）『具体性のある正の数・負の数』算数・数学読本・教職研修 総合特集 No.95 教育開発研究所 p. 216-219
19）白石早出雄（1943）『数と連続の哲学』共立出版株式会社
20）PHP研究所刊（1992）歴史が転換するとき
21）ジャン・ボードリヤール『消費社会の神話と構造』（1970）
22）小倉金之助（1924）『日本数学教育の根本問題』イデア書店
23）Rueben Hersh (1997) What Is Mathematics, Really? Oxford Univ. Press.
24）E.A.Silver & J.Kilpatrick(1994) Challenges of Diversity in the Future of Mathematics.
Education Research Journal for Research in Mathematics Education, 25(6),734-754
25）加納寛子（2000）『数学学習でのポートフォリオ（第1回）』図書文化出版指導と評価7月号
26）宮下英明（2000）「快楽としての数学」北海道教育大学
http://m.iwa.hokkyodai.ac.jp/miyasita/footprints/index_j.html
27）妹尾樫一郎 情報活動論 慶応大学ホームページ
28）企業理念を掲げた企業こそ21世紀の覇者
http://www.sorb.co.jp/writing/tetugaku.htm
29）松宮哲夫 『数学教育思潮の流れと教科書』大阪教育大学ホームページ
30）駒野 誠『数学教育』明治図書 1980から現在までの8編

【追記】
この研究は、平成13年度の科学研究補助金（奨励研究（B））課題番号：13913007の支援を受けている。
また、この論文は、平成13年度の第50回読売教育賞優秀賞を受賞した論文に手を加えたものである。