2001 筑波大学附属駒場論集第41集

テクノロジーを活用した数学教育とその実証的な研究
―スーパーサイエンスハイスクールへの対応―

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
牧下英世

テクノロジーを活用した数学教育とその実証的な研究
―スーパーサイエンスハイスクールへの対応―

筑波大学附属駒場中・高等学校
数学科　牧下　英世

【要約】 日本は今，先の見えない道に迷い込んでいるといわざるを得ない。この現状を打破し，社会のいろいろな要請に応えるためには教育の活性化が必要である。とりわけ，数学教育の役割の見直しと情報化に対する対応の重要性は大きいと考える。とくに，21 世紀の数学教育は，ITを主体的に駆使して数学の創造性を涵養することは重要である。

また，現実的な現象，とくに物理などの内容について，数学を主として考察する重要性に着目していく必要がある。そんなおり 2001 年夏，文部科学省は，科学技術、理科・数学教育を重点的に行う研究開発学校(スーパーサイエンスハイスクール(SSH))構想を立ち上げた。

本稿は，これらの点を踏まえて，数学教育の活性化のため，幾何ソフト，数式処理ソフト，グラフ電卓を活用した授業実践について報告するものである。

【キーワード】 テクノロジー，幾何ソフト，グラフ電卓，スーパーサイエンスハイスクール

1．はじめに

21 世紀を華々しく迎えたのとは裏腹に，現在の世界の情勢には晴れないものがある。とりわけ，わが国の経済環境は素人目からも危機的な状況にある。経済界では，不況によるこれまでにない人員整理を行っているが，情報産業においてはまだまだ人手不足であり，このことは，社会における『情報化』がものすごい勢いで進展していることを裏づけるものである。この情報化の進展は，これまで対面的なやりとりをしていた会社や役所にも普及しており，これまでの仕事形態や社会形態を一気に変えた。この情報化の進展は，我々の仕事形態などだけでなく我々人間の知的活動の形態をも一新する勢いである。たとえば，これまで何かを調べるためには，人に会ったり，現場へ行ったり，博物館で調査したり，図書館へ出向き本を調べたり，とにかく体全身を使って調べたものだが，情報化社会ではInternetを使えば大抵のものが汗もかかずに調べることができる。こういった情報化が学校へもどんどん入ってきている。とりわけ学校教育においては，来る平成15年度より高等学校で新教科「情報科」が発足し，すべての高校生が情報の内容を履修することになる。

さて，情報化に対応するためには，コンピュータをいかに使いこなすかが勝負であるという人がいるが，果

たしてそれだけでいいのだろうか。コンピュータをブラックボックスとして扱うのならそうあってもいいだろうが，それではその範囲の中でしか考えることができないだろう。上記で述べた，現在の産業界の大変さも実はこのあたりにあるのではないだろうか。すなわち，これからの産業界における競争力は、情報化を活かしての高度技術にかかっていると考えるからだ。

しかし，新聞紙上では未来を担う子どもの間にはいわゆる"理数離れ"の傾向が顕著になっている。本校ではそうでないと確信しているが，資源に乏しい日本では，これからの若者の叡智と意欲以外に頼るものをもたない現状下では，とてもお寒い状況であるといわざるを得ない。

そういった現状を打破し，社会のいろいろな要請に応えるためには教育の活性化が必要である。とりわけ，数学教育の役割の見直しと情報化に対する対応の重要性は大きいと考える。とくに，数学教育においては，ITを主体的に駆使して数学の創造性を涵養することは重要である。

また，現実的な現象，とくに物理の内容について，数学を主として考察する重要性に着目していく必要がある。そんなおり 2001 年夏，文部科学省は，「科学技術、理科・数学教育を重点的に行う学校を研究開発学校（スーパーサイエンスハイスクール（SSH））として指定し、高等学校及び中高一貫校における理科・数学に重点を置いたカリキュラムの開発、大学や研究機関等との効果的な連携方策についての研究を推進し、将来有為な科学技術系人材の育成に資する。」という趣旨のもと「スーパーサイエンスハイスクール」（SSH）構想を立ち上げた。

本校においても，大学の独立行政法人化にともない本校の存続問題のなか，数学，理科を中心にSSHについて，対応と構想の情報が徐々に出されてきた。

本稿は，そうしたSSHの是非について述べるものでない。これまでの授業や生徒のアンケートなどから明らかになってきた内容について報告するとともに，テクノロジーを活用する観点でSSHについて数学科としてどのように対応できるのかについてまとめた私見である。

2．テクノロジー活用

テクノロジーの定義をどうするのか。大切な話題であると思うが，ここでは広義にはテクノロジーを「コンピュータ」と「ソフトウエア」，「インターネット」，「グラフ電卓」の活用を上げ，とくに，数学科で使用するソフト，グラフ電卓について述べる。

本校のコンピュータスペースに備えられている数学用のソフトウエアとして，

① Mathematica　　② Cabri Geometry II

がある。どちらも，使いやすいソフトウエアである。

Mathematica は，現在の形態でコンピュータスペースにコンピュータが設置されるようになったときに，全体の予算で購入したソフトウエアである。現在 Ver4が出ている（本校では Ver2のままである）。数学IIや数学III，数学Cに代表される解析学や線型代数学などの数学を考えるときに，大きな力を発揮するが，数学だけに限らず非常に広範囲な学問にも応用される。これまで，数学で何かコンピュータに仕事をさせるとき，なにがしらのプログラミングが必要であった。とくに，生徒に対する1時間の授業の教材を作成するのに，丸1日かけたりすることはざらにあった。しかし，Mathematica を使うことで，かなり解放された。しかも，学校数学の表現に近くなり，分数，指数，平方根，積分記号，行列表示など，とても扱いやすくなったので，操作

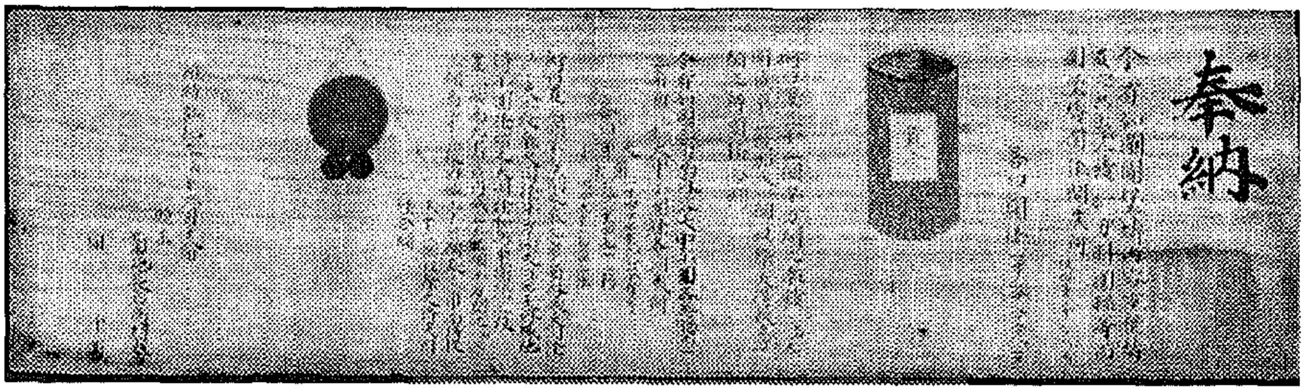
を理解するための時間も大幅に節約できる。先生が操作するのに時間が短縮されているのであるから，多くの生徒たちが操作ができるようになるのはすこぶる速い。

もう1つのソフトウエア Cabri Geometry II を紹介しよう。Cabri Geometry II は，図形描画ソフトである。約4年前数学科の予算で購入し，サイト契約なので，筑波大学附属駒場内のコンピュータには何台にもインストール 可能である。また，本校の生徒が希望すれば，7800 円で購入できる。この Cabri Geometry II も非常に操作が簡単なソフトウエアであり，図形を考えさせる場面で威力を発揮する。後ほど，実際の授業で活用したときのことについて触れる。特筆すべき点は，アニメーション機能があり，図形を動かすことができ，そのときにできる決まった点などの軌跡を描画できる。また，プレゼンテーションやレポート作成時に図形を電子的に文書に貼り付けることができるので，数学科の教員として是非ともこのソフトに習熟しておきたい。

2．1　**Mathematica** の活用

江戸時代の数学である和算のうちの算額の問題を Mathematica を使用して解いた例を挙げる。算額については拙著筑波大学附属駒場論集 2000 を参照していただきたい。江戸時代の数学を現代数学で，しかもコンピュータを使って解くことにおもしろさを感じるだろう。

岩手県遠野市　早池峯神社の算額　　　　　　　【写真:安富　有恒氏】



早池峯神社は老朽化しているため、算額は現在遠野市立博物館で保管されている。早池峯神社の算額には写真のように2題の問題がある。ここでは，写真の左側の正三角形に内接する大円，中円，小円の直径を求める問題に挑んでみたい。

早池峯神社　算額

今有如図三角面内容大中小円各無動只云三角
面三寸及大中小円径各問幾何
答曰大円径一寸四分四厘九毛一今有奇
中円径七分八厘四毛一三弱
小円径四分五厘一毛六四三強
術曰置三個平方開之乗三角面内減大円径名天
天二段乗大円径平方開之名地天内減地得小円
径倍之大円径和為中円径三段
置三個商九十四段内減一十二個平方開之加入
三個商二十三段内減二十七個乗三角面得数五
十二個以除之得大円径合問
維時弘化三丙午六月十八日
願主　菊地長右衛門義方
同　千蔵

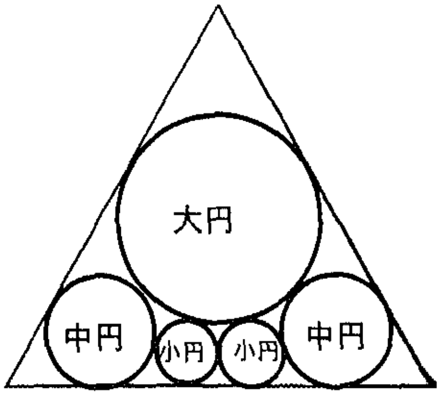
問題　図1のように，正三角形に接するように大円，中円，小円が入れてある。

三角形の一辺が3寸であるとき，3円の直径をそれぞれ求めなさい。

答　大円が1寸4分4厘9毛10と端数

中円が7分8厘4毛13弱

小円が4分5厘1毛643強



〔図1〕

現代解　右の図2のように，大円，中円，小円の半径をそれぞれa，b，cとして，それぞれ記号をふっておく。

大円と中円に着目する。

△QPJについて

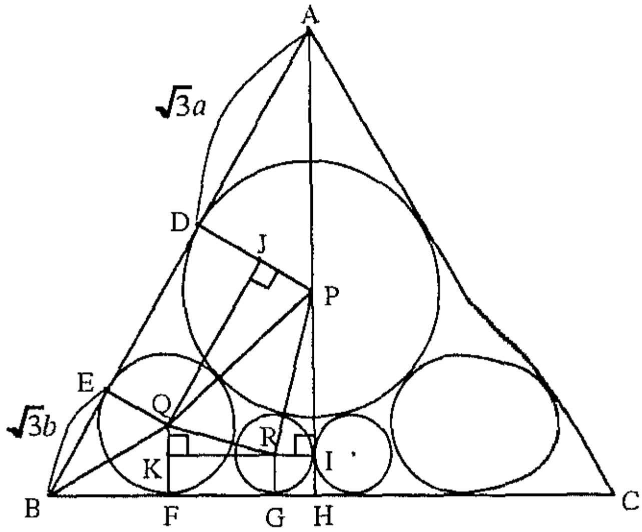
$JQ^2 = PQ^2 - PJ^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2$

また，$AD = \sqrt{3}a$，$BE = \sqrt{3}b$　であるから

$JQ = DE = 3 - \sqrt{3}(a+b)$

よって，$\left\{3 - \sqrt{3}(a+b)\right\}^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2$

が成り立つ。



〔図2〕

次に，中円と小円に着目すると，△RQKについて

$KR^2 = QR^2 - QK^2 = (b+c)^2 - (b-c)^2$

また，$BF = \sqrt{3}b$，$GH = c$　であるから

$KR = FG = \dfrac{3}{2} - \left(\sqrt{3}b + c\right)$　よって，$\left\{\dfrac{3}{2} - \left(\sqrt{3}b + c\right)\right\}^2 = (b+c)^2 - (b-c)^2$

また，大円と小円に着目すると，△PRIについて，$\left\{\dfrac{3}{2}\sqrt{3} - (2a+c)\right\}^2 = (a+c)^2 - c^2$

以上をまとめると，次の連立方程式ができる。

$$\begin{cases} \left\{3 - \sqrt{3}(a+b)\right\}^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2 \\ \left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{3}b - c\right)^2 + (b-c)^2 = (b+c)^2 \\ \left(\dfrac{3}{2}\sqrt{3} - 2a - c\right)^2 + c^2 = (a+c)^2 \end{cases}$$

しかし，この連立方程式をいろいろな方法で，代数的に解いてみたが，私の不勉強さもあって解けなかった。

そこで，数式処理ソフトMathematicaを使って，コンピュータに解かせてみた。

まず，次のように入力すればよい。

$$In[1] := eqn =$$

$$\left(3-\sqrt{3}(a+b)\right)^2+(a-b)^2-(a+b)^2==0\ \&\&$$

$$\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}b-c\right)^2+(b-c)^2-(b+c)^2==0\ \&\&$$

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-2a-c\right)^2+c^2-(a+c)^2==0$$

次の結果を得た。

$$a=\frac{3}{104}\left(2\sqrt{1044+610\sqrt{3}}+23\sqrt{3}-\sqrt{3(1044+610\sqrt{3})}-27\right)$$

$$b=\frac{1}{104}\left(-\sqrt{3(1044+610\sqrt{3})}+33\sqrt{3}+63\right)$$

$$c=\frac{3}{104}\left(-\sqrt{1044+610\sqrt{3}}+5\sqrt{3}+45\right)$$

さらに，近似値を計算して，直径を求めるために各値を2倍してみたら，次の結果を得た。

2a = 1.4491011864547821851‥‥

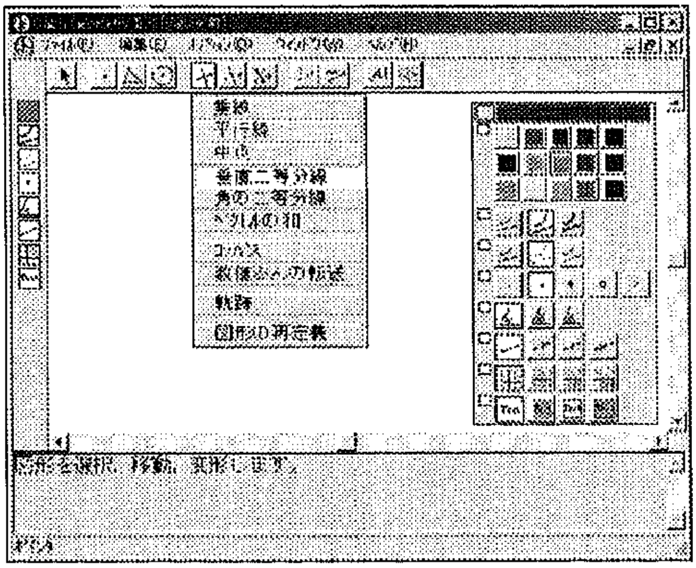
2b = 0.7841293311357554050‥‥

2c = 0.4516434034762420150‥‥

これらの結果は，答えと一致している。江戸時代の人たちはこの問題の答えを正確に求めていることが分かる。

2．2 **CabriGeometryII** の活用

CabriGeometryII を起動すると，右の図のような画面が出てくる。



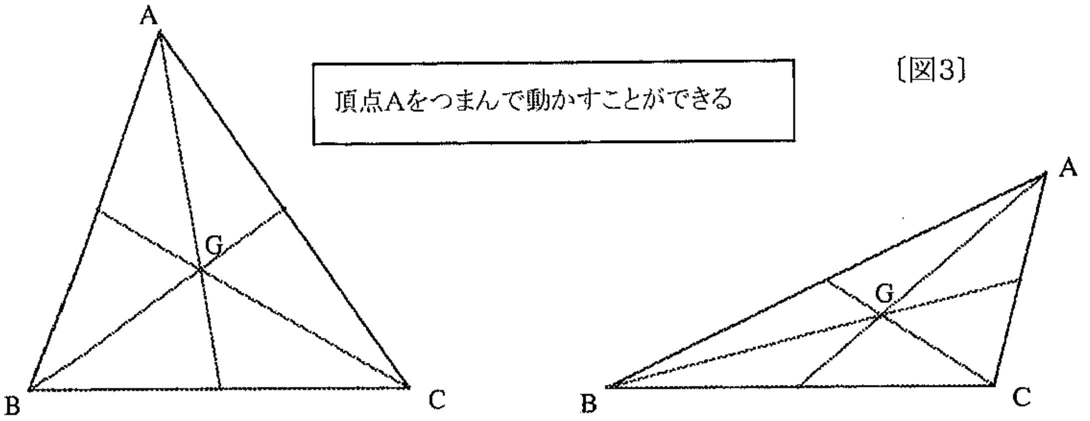
CabriGeometryII は作図ツールである。この作図ツールは条件作図された図形を変形でき，しかもその条件から導き出し得る性質を変形によって普遍にする機能がある。たとえば，三角形の重心を作図したとき，三角形の1つの頂点をつまんで動かしても，その動きに追随して重心は動いてゆく。宮川は，「変形から意識される普遍性質は，証明したい図形の性質だから，作図ツールの利用は，証明のアイデアを得る機会を生み出す。」と指摘している。ぜひ，数学教育で活用したいソフトである。

ここでは，中学3年次(51 期)の数学の図形領域の指導に CabriGeometryII を用いた授業実践を報告する。

この実践では，最初は CabriGeometryII を学習内容の補助として利用するつもりであったが，操作性の

簡単さもあり，CabriGeometryIIを主体的に活用して，レベルの高い内容まで言及する生徒が相次いだ。

【作図例】 CabriGeometry II では，定規とコンパスを使うのと同じ感覚で作図することができる。さらに，その図形を動かすことが可能である。次の重心の場合を例に図をかいてみる。



〔図3〕

頂点Aをつまんで，動かしてみると上の図3のようになり，三角形の3つの中線は1点で交わることが実感できる。この経験から，どんな三角形でも3つの中線は1点で交わることが直観的に予想できる。

CabriGeometryII で作図し，1つの頂点をつまんで動かすことによって，外心，内心，垂心についても同様に，1点で交わることが直観的に予想できる。

2．2．1　　中学1年次　図形指導について（作図の課題学習として）

小学校での図形指導は，観察や構成など視覚や操作によって理解させることが中心である。図形考察においても作業や操作的な活動を取り入れ直観的に理解させていくことが多い。そのため，中学1年次における図形指導においては，小学校で学習した内容をまとめるとともに，直観的な取扱を中心にした操作的活動に重点を置き，中学2年次以降の論証指導の基礎固めという橋渡し的な役割を担う。これにもとづき中学1年次の図形指導の目標は，次のようになっている。

(1)　直線，角，円に関する用語・記号について理解させ，それらを用いることができるようにする。
(2)　2直線の位置関係のうち，平行，垂直について理解させ，平行線や垂線をかくことができるようにする。
(3)　図形を点の集合と考え，それがある条件を満たす点の集合であると見ることができるようにする。
(4)　角の2等分線，線分の垂直2等分線，垂線の意味を理解させ，それらを作図することができるようにする。
(5)　平行移動，対称移動，及び，回転移動の意味を理解させ，図形の移動を通して，図形の性質を見いだしたり，確かめたりすることができるようにする。

さて，作図の指導では，基本的な作図の指導とともに，ぜひ三角形の重心，外心，内心，垂心に触れたい。それは，生徒にとっても感動的な内容だからである。

(1)　線分の垂直2等分線・・・・三角形の重心の作図，外心の作図
(2)　垂線の作図・・・・・・・・・・・・三角形の垂心の作図

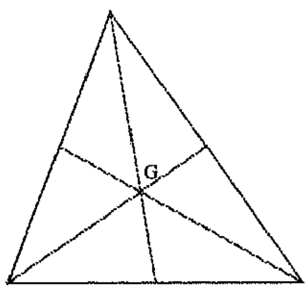
(3)　角の2等分線・・・・・・・・・・三角形の内心の作図

そこで，コンパスと定規を使った，この作図に習熟した後に，CabriGeometryII を使って作図の指導を試みた。

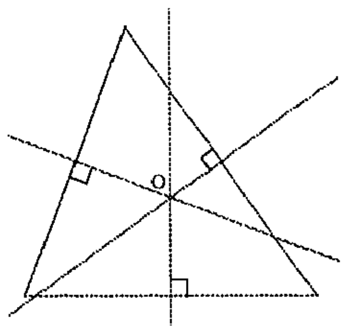
【テーマ1】: 三角形の五心を作図することを通して，作図になれる。

三角形の五心とは，重心，外心，内心，垂心，傍心のことをいうが，一般的な定義は次の通りである。〔図4〕

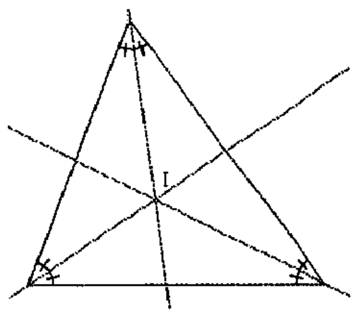
重心：三角形の 3 つの中線は 1 点で交わる。
外心：三角形の 3 つの辺の垂直 2 等分線は 1 点で交わる。
内心：三角形の 3 つの内角の 2 等分線は 1 点で交わる。
垂心：三角形の 3 頂点から対辺におろした垂線は 1 点で交わる。
傍心：三角形の 2 つの内角について，それぞれの外角の 2 等分線と他の 1 つの内角の 2 等分線は 1 点で交わる。



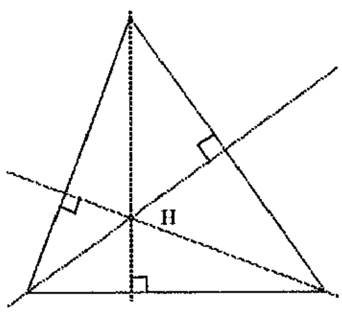
【重心G】



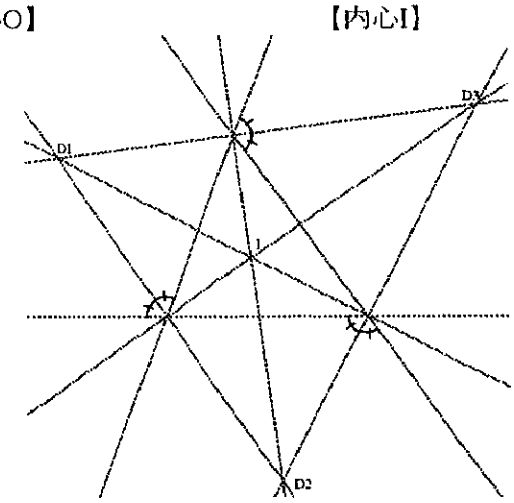
【外心O】



【内心I】



【垂心H】



〔図4〕

【傍心 D1,D2,D3】

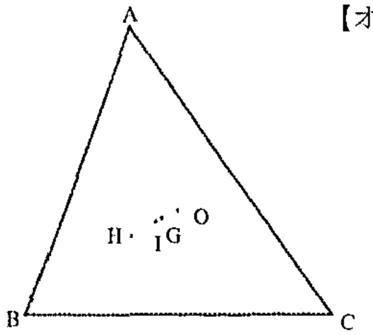
2. 2. 2 オイラー線

続いて，生徒に三角形ABCの傍心Dを除いた4心を CabriGeometryII で作図した図を観察させた。図5のような三角形ABCの4心をかいてみた。

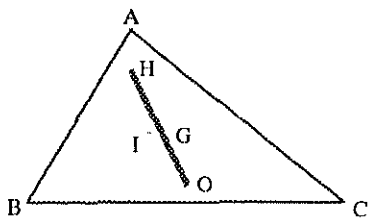
図5からは，なにかしら4点が1直線上にありそうな気がするが心許ない。しかし，2. 2. 1の体験から，生徒はある頂点をつまんで頂点を動かしながら，4点垂心H，重心G，外心O，内心Iの動きを観察するのである。その結果，内心Iだけが，別の行動をし，H，G，Oは頂点の動きにあわせていつも1直線上に並ぶということが実感できる。この直線をオイラー線と呼ぶ。

〔図6〕のオイラー線について，重心Gは線分HOを2:1に内分することが知られている。中学1年生（51期）の中には，CabriGeometry II 上で，頂点をいろいろと動かす過程で，その事実を予想する生徒が何人かいたことからも，このソフトウエアを使うことで，生徒の創造性を養えることが分かる。この取り組みでは，何人かの生徒がオイラー線の性質を初等幾何を用いて証明した。このように図形を動かすことは，現象を証明しようとする態度の原動力となることは確かである。

【オイラー線の考察】



〔図5〕



〔図6〕

中学1年生段階では全員に，このオイラー線の証明を必修化することは数学の系統性からもいくつかの問題があるが，ここでは，図形を動かすことでオイラー線のもっている図形の普遍性を予想する態度が身に付けばよいと考える。

2. 2. 3 傍心三角形の予想 ―現象を予想できる―

前項では，図形の動きをもとに生徒の気づきや予想を大切にした取り組みについて述べた。ここでは，数学的な系統性を重視した視点から，学年が上がり数学的な武器を手に入れたとき，この予想や気づきを取り入れた教材により，生徒の証明に向く態度はよくなるという仮説のもと実施したが，満足のいく結果を得ることができた。いや，それ以上の生徒の数学的な活動が予想から出てきた。

三角形の五心のうち傍心を除く4心は，1点で交わるという生徒の興味関心をかき立てる不思議な内容であるが，重心以外の「心」については中学校ではあまり触れることはない（平成14年からの改訂学習指導要領では高校の内容となる）。しかし，この CabriGeometry II を使って三角形の五心を作図すると，例えば三角形の1つの頂点を動かしても，作図した内容は保存されたまま表示される。そのため，1点で交わるということが，一般の三角形でも成り立つことが納得できるし，証明しようという態度の原動力となる。

上で述べた三角形の傍心は3つできるが，便宜上，次のような課題を設定した。

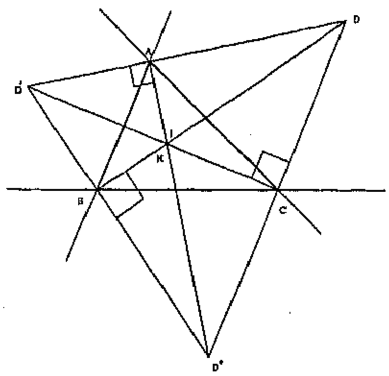
課題:「三角形ABCの3つの傍心を D, D′, D″とする。そのとき，三角形ABCの五心と三角形 DD′D″の五心について何か成り立つことはないだろうか。予想してみよう。」

【考察】 紙にコンパスと定規を用いて作図させることに対しての教育的な意義は大きいが，その作図線の複雑さ故に成り立つことを予想すること自体を困難にさせる。

それが，CabriGeometry Ⅱを用いると必要な作図，線と不要な作図線を適宜選択して表示したり非表示にしたりすることができるので，数学的な思考に専念できる。次の図を参照されたい。

数学ではこのような現象を予想して，それを証明するという活動がとても重要な意味を持つ。生徒からは次のような予想が出され，その証明について次のようなレポートが提出された。

なお，授業では三角形 DD′D″を傍心三角形とよんだ。



三角形ABCの内心 I と傍心三角形DD′D″の重心Hについて

[仮定] $\triangle ABC$の傍心、D, D', D''をつくり、$\triangle DD'D''$の垂心H'と
$\triangle ABC$の内心 I をつくる.

[結論] I と H'は重なる

[証明] I と B、I とA をそれぞれ結ぶと

仮定より、$\angle IBA = \angle IBC$ となり、また $\angle ABD' = \angle CBD''$ となり、
$\angle IBD' = \angle IBD'' = 90°$ となる …①
同様に $\angle IAD = \angle IAD' = 90°$となる …②
同様に $\angle ICD = \angle ICD' = 90°$
①と②より $\angle AD'B + \angle AIB = 180°$ …③
$\angle AIB + \angle AID = 180°$ …④
③と④より $\angle AD'B = \angle AID$ …⑤
①、②、⑤より、$\triangle DAI$ と $\triangle DBD'$ は相似となる
これより $\angle IDA = \angle D'DB$ となるので
DB は一直線になり、しかも I をとおる.
同様にして $D'C$ も $D''A$ も一直線になり、しかも I で交わる.
よって、I は $\triangle DD'D''$ の垂心でもある.
(Q.E.D)

2．2．4 **CabriGeometryⅡ**でプレゼンテーションする

次の内容は52期高校1年生に指導した内容であるが，CabriGeometryⅡをプレゼンテーションソフトとして活用した。

課題:放物線を折り紙でつくってみよう。

この教材を，東京都練馬区立大泉西中学校の1年次の生徒に，図形の作図内容を終了した後の課題学習として取り上げた。90分の授業であったが，生徒はとてもよく最後まで食らいついてきてくれた。授業のまとめとして，放物面の近似面であるが中華鍋を互いに向かい合わせ，一方の焦点には蝋燭に火をつけ，他方の焦点では体育科の競技ピストルを鳴らしその爆風と爆音で蝋燭の火を消す実験を行った。みごと消すことができ，生徒から拍手喝采を受けた。詳しくは平成13年度東京都中学校数学教育研究会の研究報告書を参照されたい。

教材観

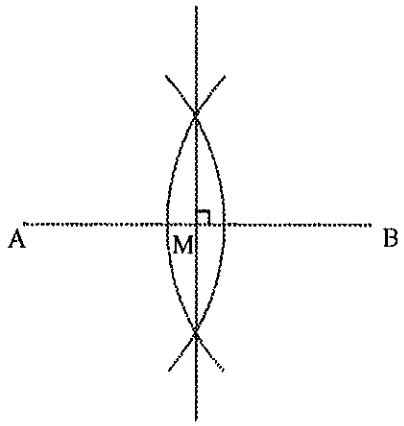
身の回りには放物線を利用したものが多いといわれている。たとえば，BSアンテナやサーチライトなどがある。

しかし，生徒からどうしてとか，証明はということを聞かれると，指導していない内容を多く含むため窮することが多い。

そこで，生徒に決まりに従って，実際に紙を折って行くという作業をさせることによって，放物線を実感させるとともに，その作業で得た折り目の線がそれらの理屈を説明してくれる。

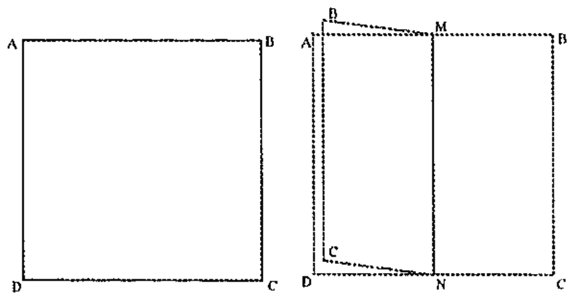
復習と準備

コンパスと定規で線分ABの垂直2等分線を作図してみよう。〔図7〕



〔図7〕

折り紙で線分の垂直2等分線を折る(1)



〔図8〕

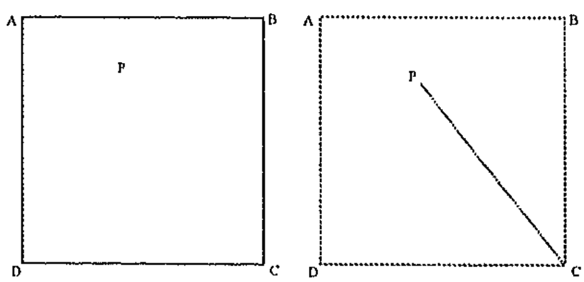
上の図のように，正方形ABCDの頂点AとBを重ねて折ったときの折り目の線が線分ABの垂直2等分線になる。(図8の線分MN)

折り紙で線分の垂直2等分線を折る(2)

2点を結ぶ線分の垂直2等分線を折ってみる。

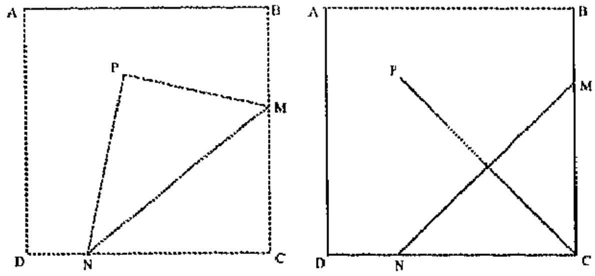
まず，図のように点Pを正方形内にとる。線分CPの垂直2等分線を折る。

点Pに頂点Cを合わせて折る。折り目の線MNが線分CPの垂直2等分線になる。



ここでは関係ないが，折り紙で角の2等分線を折るには，その角をはさむ辺を重ね合わせて折ればよい。

たとえば，右の図で∠MNCの2等分線は辺NMと辺NCが重なるように折ればよい。



さて，本題に戻って，紙を折って放物線をつくってみよう。授業では正方形の紙でなくてもよい。長方形の紙でよい。B5版なら必ずあるだろう。ここでは，B5版の紙を使う。

数学的には，定点からの距離と定直線からの距離が等しい点の集まりは放物線になる。

【紙を折る手順】

①x軸，y軸を折る。〔図9〕

②y軸上に定点F(0, f)を設定する。

$f>0$(焦点になる)

③長方形を下にしたときの辺を定直線ℓとする。

(準線になる)

④定直線ℓと定点Fが重なるように折る。

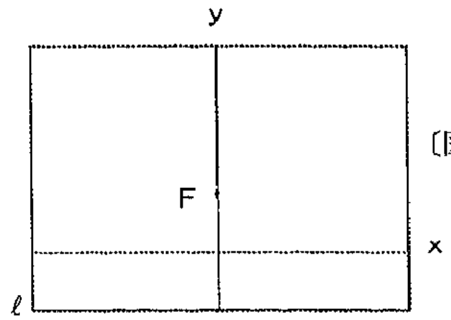
そのときの折り目の線がx軸になる。

②より，この定直線ℓは$y=-f$となる。

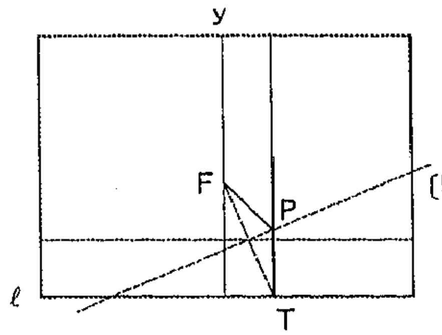
⑤y軸と平行な直線を折る。$x=p$

⑥ℓと$x=p$との交点は$(p, -f)$

⑦線分FTの垂直2等分線と$x=p$との交点がPになる。〔図10〕



〔図9〕

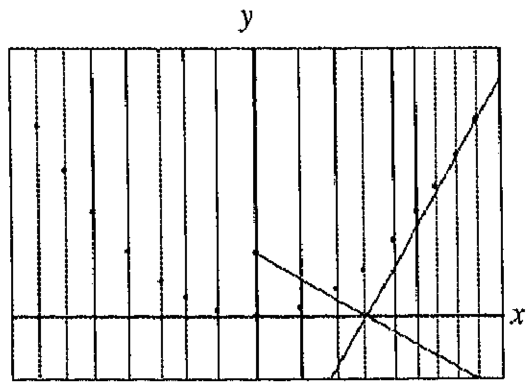


〔図10〕

長方形の紙にこの操作をくり返していけば，右の図11のような点Pが得られる。

これらの点は，定点からの距離と定直線からの距離が等しい点である。すなわち，PF＝PTである。

2次曲線の定義から，これらの点の集合は放物線となるが，右の図11からも直感的にわかる。



〔図11〕

放物線になる証明を載せておく。

$\boxed{\text{証明}}$ $P(x,y)$とする。$FP=\sqrt{x^2+(y-f)^2}$，$PT=y+f$

$FP=PT$より，両辺を2乗すると

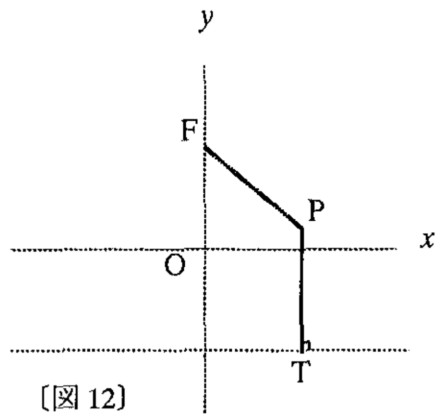
$$x^2+(y-f)^2=(y+f)^2$$

$$y=\frac{1}{4f}x^2$$

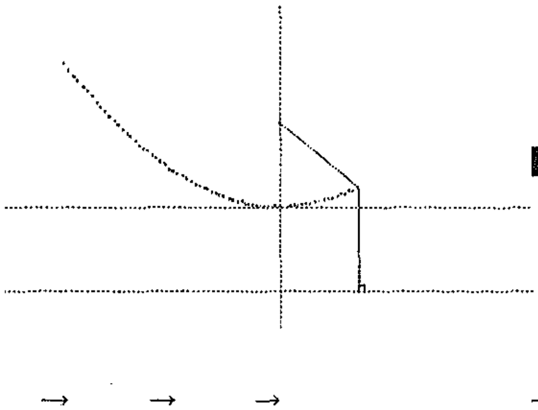
よって，定点からの距離と定直線からの距離が等しい点の集まりは放物線になる。

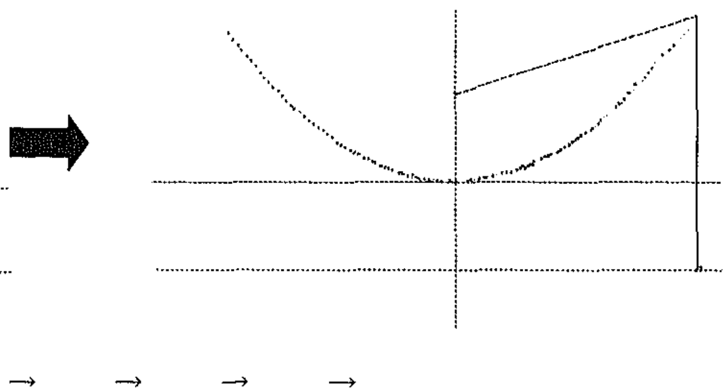
2．2．5 **CabriGeometryⅡ**でアニメーションする

2．2．4 で考えた図を CabriGeometryⅡでアニメーションしてみよう。右の図 12 を CabriGeometryⅡ上で作成した後に，トレースを選択して，点Pを指定する。次に，アニメーションを選択し，動かす点Tを指定する。その後，ポインターを選択し，点Tを持ち上げて動かす方向と反対側に引っ張ればよい。印刷物で，動きを見せるのはきびしいが，次の図 13，14 を見て欲しい。



〔図 12〕


〔図 13〕


〔図 14〕

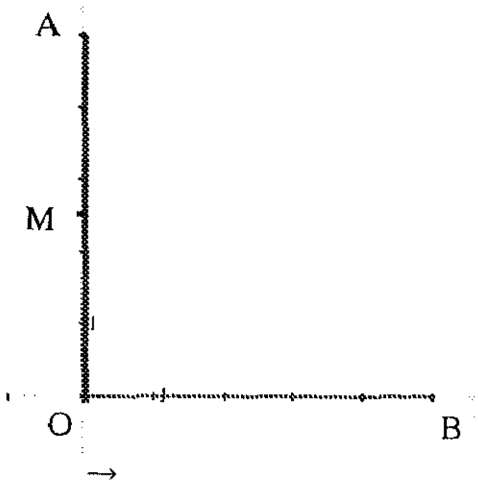
さすが，図形の動きを見た生徒（52 期生）たちの歓声は大きかった。

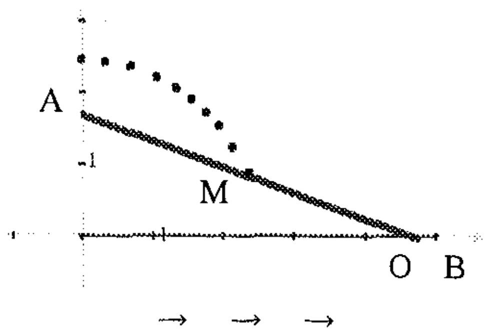
授業で，こんなことを演示するだけで，生徒の授業への参加する態度がかわってくる。

〔他の例〕 下の図のように，棒OAが壁に立てかけてある。この棒が，床OBを滑るようにして倒れるとき，棒OAの中点Mの描く軌跡はどうなるか。

$\boxed{\text{解説}}$ この例を生徒に出すと，反比例のグラフになるとか双曲線になると答える生徒が多い。

ところが，CabriGeometryⅡでアニメーションすると円を描く。不思議さを，なぜ？という観点で考えようとするのである。



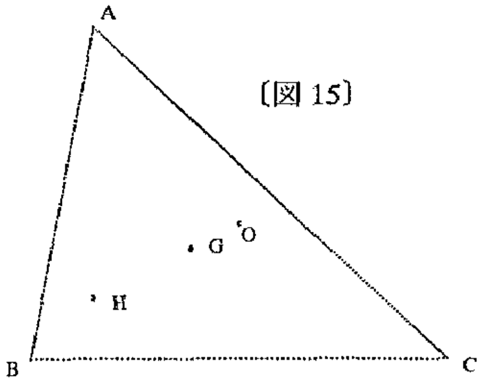


2．2．6 **CabriGeometryⅡがなければ見えない内容**

ここまでに，CabriGeometryⅡで図形に動きをもたせた内容について報告した。ここでは，CabriGeometryⅡがなければ見えないことを紹介する。

2．2．2でオイラー線については紹介した。

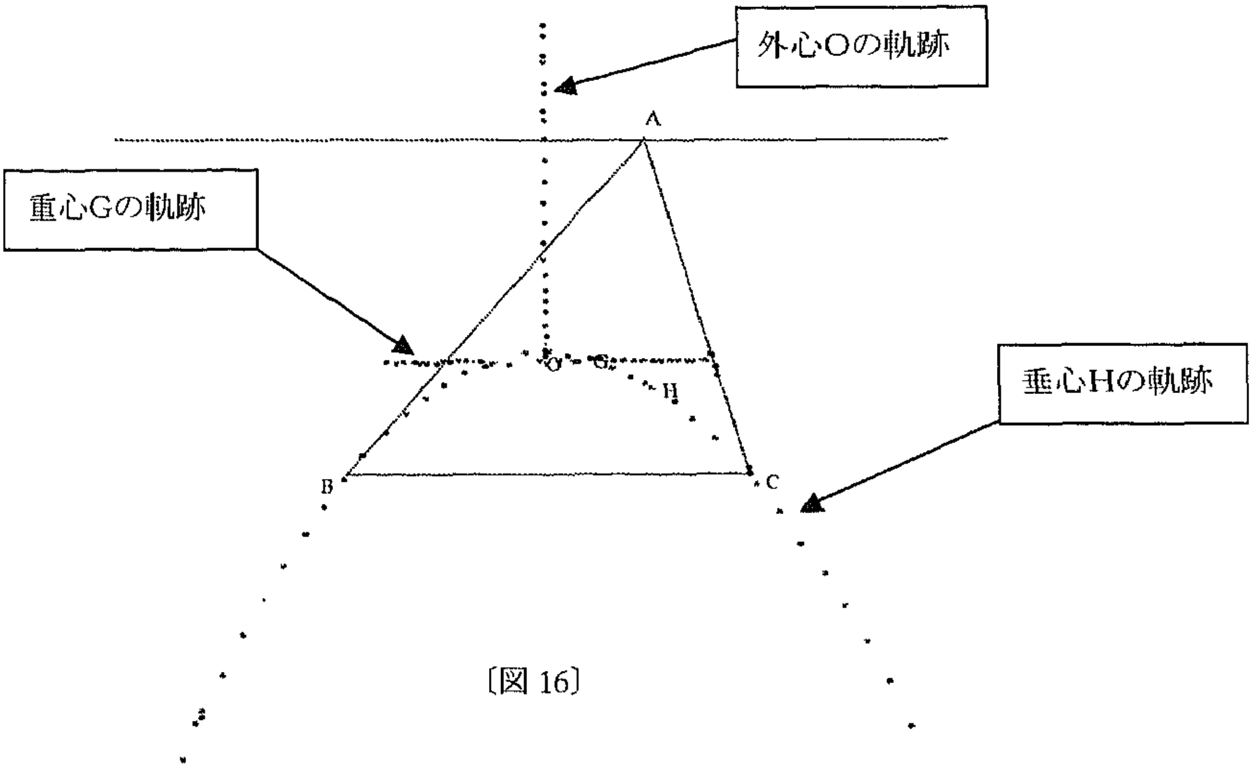
ここで，紹介したいことは右の図15の点Aをあるきまりをもった動きをすることで，重心G，外心O，垂心Hがどういった動きをするのかということである。



〔図15〕

例　点Aを辺BCに平行な直線上を動かせるとき，重心G，外心O，垂心Hの動きを考察せよ。

「論より証拠」ということで，実際に動かしてみよう。次の図16のようになる。



〔図16〕

生徒の反応

生徒にこれを見せたとき，垂心Hの軌跡が不思議だという意見が多く聞かれた。重心Gと外心Oの軌跡についてはは考えやすいのだろう。

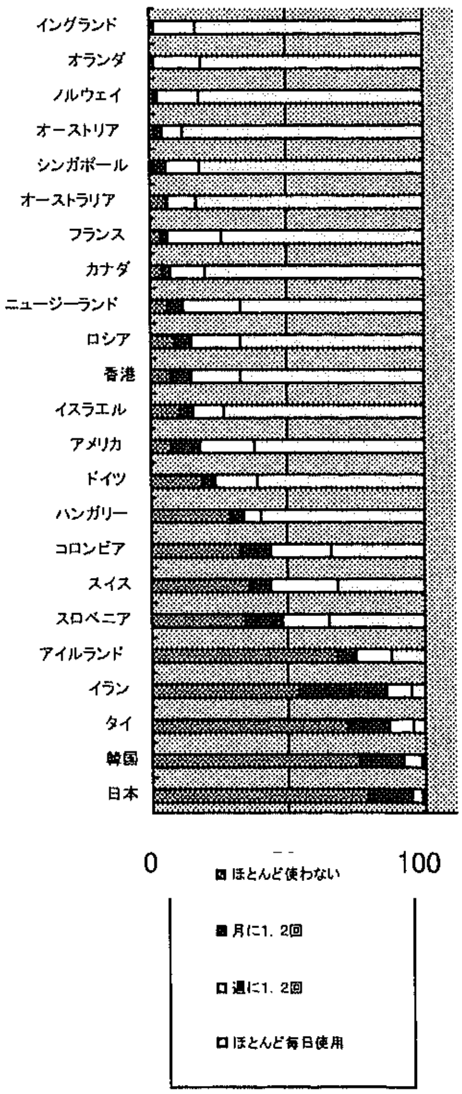
この経験から，生徒の中には，点Aを辺BCの垂直2等分線上を動かしたときを考えようとする生徒がいた。

このように，図形を動かすことは生徒の創造性を養う大変興味深い行為であると考える。ただ，動きを見て歓声を上げているだけでは発展がない。しかし，この歓声が，数学を計量的にとらえていく原動力になることは間違いない。事実，生徒の中から上の垂心Hの軌跡が放物線になることを証明した生徒が出た。

3. グラフ電卓

テクノロジーの進展に伴い教育機器の小型化・高性能化が進み，グラフ電卓という教具が誕生した。アメリカをはじめオーストラリアでは中学生，高校生，大学生がまるで日本の小学生がもっている算数セットと同じような感覚で個人個人が所有している。このことは，アメリカやオーストラリアでの数学の授業ではグラフ電卓をいつも使える環境のもと，現実世界に近い授業を行っていることを意味する。どうしても，現実世界の事象を扱うことを好まない？日本の教師にとっては，これまでの授業をいろいろな意味で考える機会になると思うがいかがだろうか。これらの国では，大学入試でもグラフ電卓を使うことが前提となっている。わが国日本では，「計算力が低下する」とか，大学入試での機種の違いからくる「不公平感」が先に立ち，大学入試はいうに及ばず，中学校，高等学校へのグラフ電卓の導入は進んでいない。このように日本でテクノロジー活用や教育の情報化が進まないのは，「標準的なプラットホーム」づくりが欠如していることが原因であると，飯島は指摘している。

電卓使用頻度(中2)



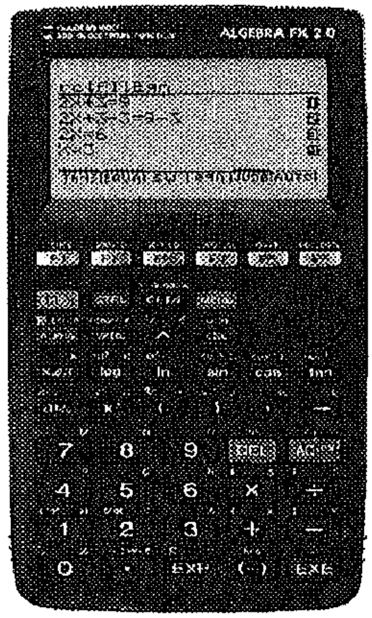
テクノロジーを活用した算数・数学教育について，目を世界に向けてみよう。グラフ電卓を利用した「新しい教育」が世界各国でどの程度実施されているか，IEA(国際教育到達度評価学会)の第3回国際数学・理科教育調査(TIMSS)の結果をみておこう。TIMSSでは，参加各国の電卓使用頻度も調査されているが，電卓を用いない国の中で，日本と韓国は突出して使用頻度が低い。両国はいずれも成績優秀国である。一方，注目すべき点はシンガポールや香港は成績最優秀国であるにも関わらず，以前から電卓を非常によく使用していることである。TIMSS 調査時点(1995)で，これらの国では計算力を損なわず，電卓を用いて効率的に高度な数学教育が行なわれていることが推定される。

私は，1999 年の夏にオハイオ州立大学の Dr.FranklinDemana 教授から招聘を受け，10 日間ほど同大学でのワークショップや研修会に参加する機会を得た。そこには，テクノロジーを活用した数学教育の中心であるアメリカ各州，アジア，中米，南米，欧州の諸国から約 200 人の先生が参加していたが，盛んな討論が夜遅くまで行われた。私はその中で，日本の数学教育がこのまま変わらないでいったとしたら，生徒の情意面を養うという面で諸外国において いかれるのではないかという危機感を感じた。

このような経験から，私はそういった諸外国のテクノロジーを活用した算数・数学教育の話題に触れるにつけ，とくに日頃の授業実践の中でそれらの活用によって，生徒がいかに変容したのかを見いだし検討しておく必要があると考えた。幸い，46 期高校1年生の生徒と 47 期中学3年生のテーマ学習(数学)選択者に対して，グラフ電卓をいつでも使える状態で取り組んだ授業の機会に巡り会えた。ここでは，そのときの生徒の気づいた内容や，51 期

中学3年のテーマ学習でテクノロジーを活用した実践について報告する。

3．1　グラフ電卓による指導



野村は，グラフ電卓を使用する意義と目的を次のように指摘している。

グラフ電卓の主な利用方法は，以下の2通りである。

(1)　教員の学習指導の補助として利用する。

(2)　生徒による探求・発見学習活動の道具として利用する。

当然のことであるが，グラフ電卓を使うことが前提になっていて，それを使って何をしたいのかが曖昧であれば，教育的効果など期待できるはずがない。安易なグラフ電卓利用は，教育目標を阻害することもある。

例えば，グラフを速く正確にかいてくれるということだけを理由にグラフの作成にグラフ電卓を使用すれば，省力化はできるが，同時にそこで学習するはずであったものを失い，「グラフ電卓という他人が作業をしてくれるのを眺めるだけ」という態度しか生まない。このようなグラフ電卓任せの「学習」は，本来の学習とは全く意味の違うものであり，教育とは呼べない。

グラフ電卓は脇役に徹する使い方が教育にとって最も健全な利用のあり方である。

3．1．1　グラフ電卓を利用する利点

野村も指摘しているように，最近の生徒は，映像に対する理解度，順応性が発達している。生徒がVisual なものに慣れ親しんでいるのであれば，学校における数学の学習にもその要素を取り入れ，生徒に興味を持たせた上で，そこから生徒自身に考えさせるように働きかけることも可能である。このようなアプローチによって，数学に興味を持つ生徒をより増やすことができると考える。

野村は，グラフ電卓を使用する利点として，次の(1)ー(4)を指摘している。

(1)　授業の多様性が増す

具体例から帰納的に結論を導き，いろいろなことを試すことにより解への糸口を探る，グラフなどからイメージを作り上げる，など数学的事実，相互関係，定理を具体例による体験や視覚的理解と納得を得るための道具として活用することができる。これまで以上に様々な工夫が可能となり，教師と生徒がともに創りあげていく授業が展開できる。

(2)　個に応じた取り組みの工夫がしやすい

グラフ電卓を活用することで最も重要なことは，計算や式変形の煩わしさから解放され，解に至る過程や論理的な展開などに集中できるようになり，数学本来の楽しさ，美しさを味わえるようになることである。そして，どのような学力段階の生徒でも，その学力段階に応じた数学的な思考の展開ができるようになる。

(3) 探求・発見学習がより行いやすい

様々な観点から広く，深く事柄を考察する探求的思考や発見的考察が可能となる。それにより，数学を考えることの素晴らしさを実感できる。この実感は，数学に対する良い印象，良い理解，そして数学に対する自信へと繋がる。この体験は，次の学習への意欲・探求心を育てる。

(4) 理解をより深めやすい

探求，調査，表現，創造といった学習活動の豊富さを生かし，基礎的・基本的な内容からより高度な内容まで，多角的な学習をすることができる。

3．2 生徒の反応

そこで，グラフ電卓を用いた指導を行ったときの生徒（46 期高1，47 期中3）の反応を，次の4点にまとめ報告する。

(1) 公式のあてはめから帰納的まとめ
(2) 理論だけでなく数値で確かめる
(3) 方程式をグラフ的に解く
(4) 思考の幅を広げ深める

<u>(1) 公式のあてはめから帰納的まとめ</u>

【問題1】 関数$y=f(x)$があるとき

(1) xのかわりに$x-c$　(2) xのかわりに$c-x$

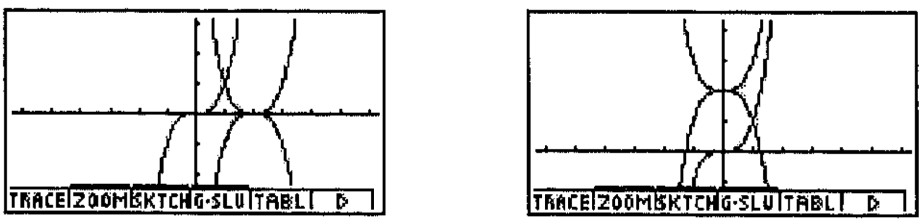
(3) yのかわりに$y-c$　(4) yのかわりに$c-y$

を$y=f(x)$に代入すると，もとのグラフはどのように変化するか。(47 期中学3年生テーマ学習)

【解答】①x軸にcだけ平行移動　②$x=\frac{c}{2}$の軸で対称移動

③y軸にcだけ平行移動　④$y=\frac{c}{2}$の軸で対称移動

となるが，これをレポートした生徒は，この性質を，関数$f(x)=x$，$f(x)=x^2$，$f(x)=x^3$にあてはめ，グラフ電卓を使いながら，帰納的に上記①ー④の性質を確認した。



〔図 17〕

上の図17は，生徒が$f(x)=x^3$を例にあげて，確認したときのものである。

その後，この生徒は一般化に向けた証明を行った。

(2) 理論だけでなく数値で確かめる

【問題2】 四面体ABCDがある。動点Pははじめ点Aにあり，1秒ごとに別の頂点に移動している。ただし，どの頂点に移動するかはすべて同様に確からしいものとする。n秒後に点PがDにある確率をP_nとするとき，次の問いに答えよ。

(1) P_1を求めよ。　(2) P_{n+1}とP_nの関係式を求めよ。

(3) P_nを求めよ。　(4) $\lim_{n\to\infty} P_n$を求めよ。

【解答】 (1) $P_1=\frac{1}{3}$　(2) $P_{n+1}=-\frac{1}{3}P_n+\frac{1}{3}$

(3) $P_n=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$　(4) $\lim_{n\to\infty} P_n=\frac{1}{4}$

さて，この問題で大学受験的には(3)の漸化式を解くということが大きな視点になる。

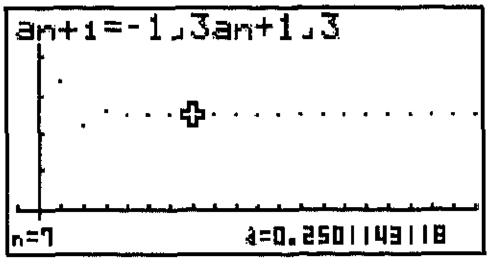
しかし，私は，(2)の漸化式をつくるという観点に立った指導が大切であると考える。

なぜならば，

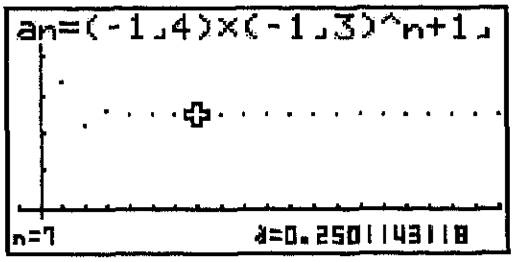
① 漸化式をつくるという観点に立つと，いろいろな視点で漸化式が何通りもできること

② 漸化式をグラフ電卓に入れれば，その漸化式の現象が視覚的にみることができること

では，②の観点で，グラフ電卓を用いて(2)と(3)，(4)の場合をみてみよう。



【漸化式で表した場合】

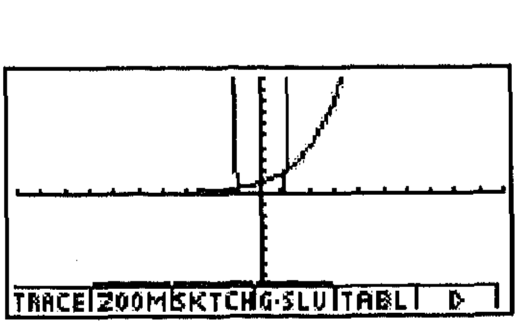


【漸化式を解いた場合】

どちらの場合も，その現象を数学的に把握することができるだろう。すなわち，$\lim_{n\to\infty} P_n=\frac{1}{4}$が視覚的にみえてくるのである。

(3) 方程式をグラフを用いて解を考える

【問題】$x^{10}=2^x$を満たす解の値を求めよ。 (46期高1)

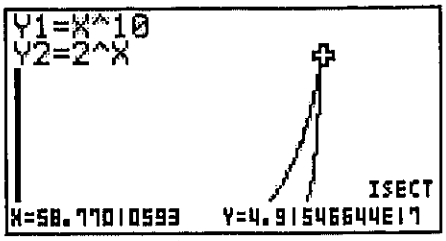


【考察】グラフ電卓に，$y=x^{10}$，$y=2^x$として入力する。すると，右の画面が表示される。この結果から，方程式の解は，共有点が2個あり，おおよそ，$x=\pm 1$であると見えるかもしれない。

しかし，ここで特筆しておきたい生徒の疑問は，

(1) 「$y=2^x$の方が$y=x^{10}$よりも，はやく大きくなるのではないか」

(2) $y=x^{10}$を11回微分する i.e $y^{(11)}=0$であるが，$y=2^x$は，
何回微分しても0になることがない



だから，xの値が大きくなったとき，もう一度交わるだろうという予想を立てることができた。

すなわち，グラフ電卓の Trace 機能と G-Solve 機能を使えば，右の画面から，自分が立てた予想が正しかったことがわかるのである。このような学習は，グラフ電卓がなければできないだろう。すなわち，$y=2^x$はxの値が少し大きくなるだけでyの値が驚くほど大きくなるので，普通の電卓では無理である。

この生徒は，感想として「指数関数恐るべし」と記していた。また，次のようにも続けている。高1の授業で，紙を半分に折る操作において，「何回紙を折ると富士山の高さを超すのだろうか」という内容でも指数関数の偉大さを感じたと。

グラフ電卓と聞くと，すぐに式を入力してグラフをかくというふうに考えられるが，グラフをかくだけの中に閉じこもってしまっては何ら発展はない。生徒の数学的創造性を高めるためには，こういった教材の工夫が必要であるといえる。

(4) 思考の幅を広げ深める(数学と物理とのクロス)

高校生に伝えたいことの1つに，身の回りの事象の数学化がある。理科は数学についての内容を多く含んでいる。次の内容は，高校1年次に2次関数の学習を終え，三角比の初歩を学んだあとに2次関数の課題学習として取り上げたものである。

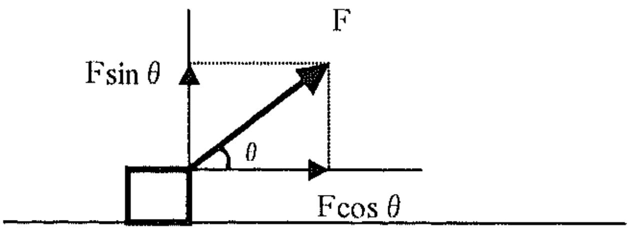
【課題1】 下の図のように物体が矢印の方向に運動するとき，水平方向と垂直方向に
その運動による力関係を表示するとしたらどのように表せるか?

[考察]水平面と力Fがなす角をθとすれば，

水平方向は $F\cos\theta$

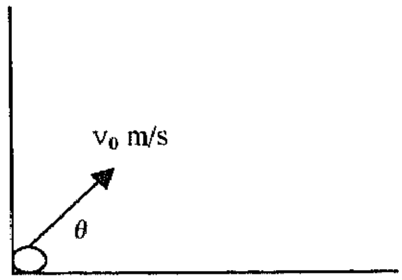
垂直方向は $F\sin\theta$

となる。



中学で学ぶ合力は，図のように平行四辺形を使って考える。生徒は中学で学んでいるので，結構すんなりと理解した。

【課題2】(1)　放物線はなぜ2次関数になるのか？
(2)　45° が最も遠くへ飛ぶのか？(46期高1)



［考察］

(1) 水平面とθをなす斜め上方投げ上げ運動（初速度v_0）によると，水平方向，垂直方向の力の作用を分解してみると

垂直方向には，重力加速度が働き，垂直方向の速度は徐々に落ちていくことが実感でき，時間tにおける垂直方向の速度について，次の式が成り立つ。

$$v_y = v_0 sin\theta - gt$$

また，水平方向には空気抵抗を除いて何の力も働かない。よって，水平方向の速度は一定である。すなわち，

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

次に，距離について考える。その場合，積分を使ってもよいが，v-tグラフより面積を考えればよい。水平方向x，垂直方向yで次が成り立つ。

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = v_0 sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

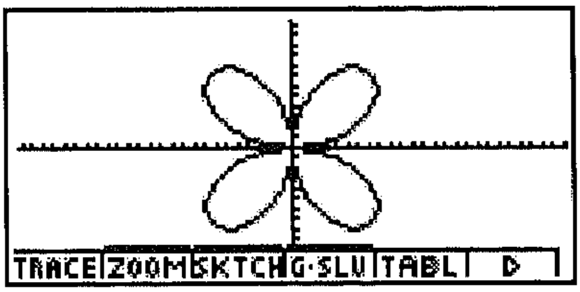
この式から，tを消去すると，次の式が成り立つ。

$$y = tan\theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

これは，yはθを含んだxの関数である。よって，放物線は2次関数で表せることが分かる。

(2) 次に，最長到達距離は，$y=0$とおけばよい。

$x=0$または$x = \dfrac{2v_0^2 tan\theta \cdot \cos^2\theta}{g}$　第2式を極座標で表し，グラフ電卓により次のグラフを得る。



すなわち，極座標でxが$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$で最も大きいのは，グラフより$\theta = \dfrac{\pi}{4}$のときであることが視覚的に分かるだろう。

授業では，この時点では弧度法には触れず60分法を用い，生徒にはグラフから直感的に最長到達距離が45° で投げ上げたときであることが分かればよいと考えた。

4. まとめにかえて

本校のコンピュータスペースに，1クラスの生徒分のコンピュータが設置されて5年が経過した。途中コンピュータの入れ替えがあったりしたが，生徒中心の使用は概ね活発な状況であると思う。このことは，本校以外のコンピュータの使用状況とは大いに異なった状況である。

しかし，コンピュータスペースに設置されている Mathematica や CabriGeometryII の使用状況は多いとは

いえない。その一因は，我々教師が授業でなかなか使わないからだろう。私自身 CabriGeometryII で作図に働きかける（操作する）ことによって，いろいろなことを教えてもらった。この経験により，幾何の世界の深いことを改めて再認識した。

Mathematica の紹介が少なかったことが気にかかるが，今後生徒たちがすぐに使えるようになるコンテンツを増やしていく必要があると思う。

グラフ電卓にはセンサーを使って，たとえば，人が歩く様子をグラフ電卓に取り込んでグラフ化することができる。しかも，回帰機能を使えば近似グラフの関数式を表示してくれる。水温がさめる様子を記録することもできる。最近では，CAS (Computer Algebra System) 機能が充実し定積分などは，分数，根号，π 混じりの表示で答えを返してくれる。今回は，ICME9（国際数学教育会議 2000 幕張）で発表した内容などを紙面の都合で紹介できなかったのが残念である。

本校でのスーパーサイエンスハイスクール（SSH）は今後どうなるのかはわからないが，この小論がその一助となればと思い筆をおく。

【参考文献】

これからの数学教育と電卓の役割　藤田　宏著

文科省スーパーサイエンスハイスクール構想　正木　春彦著

Mathematica その無限の可能性・応用編（実教出版）　石田　晴久監修

算額を用いた授業実践（筑波大学附属駒場論集 2000）　牧下　英世著

筑波大学附属学校における情報教育のあり方の研究（プロジェクト研究５）

同「数学科におけるコンピュータ利用について」（研究代表真野勝友筑波大学学校教育部）　牧下　英世著

大学入試問題演習におけるグラフ電卓の利用（東京理科大学数学教育研究会会誌第 43 巻 2 号）　野村　仁紀著

数学的思考力を培う創造的な教材の実証的研究（第 34 回日数教数学教育論文発表会口頭発表）　牧下　英世著

中学校数学指導事典（とうほう）　編集代表　杉山　吉茂

平成 13 年度　東京都中学校数学教育研究会研究発表報告書　教育課程委員会

先行事業としての O-Math 数学教育 No.523（明治図書）　飯島　良之著

テクノロジーによる証明指導の近未来数学教育 No.523（明治図書）　宮川　健著

なお，本研究は，平成 12 年度文部省科学研究費補助金奨励研究（B）（課題番号 12913011）「数学的活動の観点に立った教材開発の実証的な研究」の研究の一部である。

【登録商標】