

数学史を取り入れた授業実践
—算額の教材化と総合的な学習—

筑波大学附属駒場中・高等学校 数学科
牧下 英世

数学史を取り入れた授業実践

—算額の教材化と総合的な学習—

筑波大学附属駒場中・高等学校

数学科 牧下 英世

要約：数学史には、生徒の興味・関心を引く内容が多い。これらを授業で活用することは有効である。

本稿は、算額を教材化し、中学3年の授業や本校のテーマ学習で実践した内容についての報告である。

授業では、校外学習で訪問する岩手県平泉の中尊寺や遠野市内に掲額されている算額や本校から近い渋谷の金王八幡宮に掲額されている算額について取り上げ指導した。この指導では、フィールドワークや総合的な学習を意識した。

また、地理的に本校から出かけられる場所にある算額で、調査研究された算額についても報告する。

キーワード：数学史、和算、算額、テーマ学習、総合的な学習、円と接線、三平方の定理、相似、零約術、累円術、中尊寺、駒形神社、早池峰神社、金王八幡宮、大國魂神社、算額用語

1. はじめに

数学史上の多くのトピックスの中には、生徒の興味・関心を引く題材が多い。これらを教材化し授業で活用することはとても有効であると考える。

本稿では、江戸時代の和算家たちが取り組んだ算額の問題を、現代の中学生の授業や本校のテーマ学習で取り入れた実践と地理的に本校から出かけられる場所にある算額についてレポートする。同時に、校外学習を利用して地方に出ていく場合も想定し、掲額されている算額についてもレポートする。

2. 和算について

江戸時代に発達した和算と算額について簡単に紹介する。

飛鳥時代に朝鮮半島から大陸の多くの文化が伝わり、その中に中国の数学もあった。新しい律令制度に基づく国家建設のため、税の徵収、管理などに数学が必要であったのであろう。これが、平安、鎌倉、室町と時代がすすみ、これらの文化は日本人流にアレンジされていった。室町になると中国から「そろばん」が入ってきた。江戸時代には、そろばんの使い方を示した数学書

How I managed the mathematics class with SANGAKU that is an old Japanese mathematics.

がつくられている。現存するものとして、龍谷大学の「算用記」が最も古く、毛利重能の「割算書」は有名である。1627年には、吉田光由の「塵劫記」が刊行された。この塵劫記は、生活に密着した内容の数学書で寺子屋や塾で教科書としても用いられた。この塵劫記に、後世の研究者が内容を補遺・追加していったが、発行された年を冠に「〇〇塵劫記」としている。江戸時代に庶民にも算術が普及していく中、数学の問題や答、その算法を記した絵馬が神社やお寺に奉納された。このような絵馬を算額という。本校から近い目黒不動に算額が掲げられたことの記述が1670年代の数学書にある。

剣術や柔術でもいくつかの流派があったとの同じで、和算も流派があり、関流、最上流、宅間流、至誠贊化流の4流派が主なものだ。関流とは関孝和を祖とする流派である。それぞれの流派の和算家たちは、切磋琢磨し論争を交わしながら発展していった。その研究成果を和算家たちは、算額に記し神社仏閣に奉納し、自分たちの研究を一般の人たちに公開した。算額の最初に、例えば「関流八伝 安倍保定門人」とあるのは関流の証である。明治維新により日本政府が学校数学を西洋数学としたことで、和算は衰退をしていったが、算額の中には大正時代のものもある。最近の調査によると、現存する算額はおよそ1000枚ある。

さて、算額の問題は、漢文（白文）で書かれているため、難しいと感じたり、実際難解であったりする。江戸時代の日本で出版された科学の本の多くが漢文で書かれていたという事実からするとどうなずける。また、数学の記述ゆえに、独特の言い回しや特有の用語があり、慣れるまではとても大変な思いをする。ただ、ほとんどの問題には図がついているので、どういう内容の問題であるか、おおよその見当はつくだろう。また、答はついているが、答えに至る途中の計算がないのが普通である。

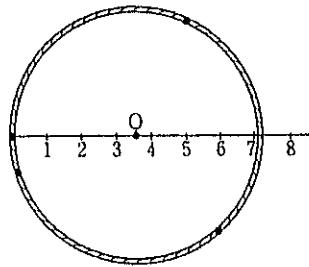
3. 算額と学校数学

数学の歴史を調べてみると先達たちのすばらしいアイディアに出会うだろう。円周率の計算もその一つである。

さて、生徒たちに円周率について問えば、3.14という答えが容易に返ってくるが、円周率とは何か、その定義とは何かということを聞くと、かなりあやしい状況である。もし、4000年前の人たちが円周率を意識していたという事実やどのように見つけだしたのかを紹介することで、円周率を指導したらどうだろうか。

すなわち、

1. 自分がかいた円の直径の長さ分のひもを用意して、その円周上に張り付けていけば、円周は直径の3個分と残り少し。
2. その残り分の長さのひもを用意して、今度は、直径に張り合わせていけば、7個分より多く8個分より少ない。



以上の結果から、視覚的に $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$ が見え、円周率が 3.14 と実感できるし、円周率が円周の長さと直径の長さの比であることも体感できる。これは、数学的な話題のほかに数学的な活動が入った取り組みではあるが、円周率の 3.14 と円周の長さと直径の長さの比であることが生徒には見えてくるのではないかと考える。このように、数学史を取り入れた授業は、生徒の興味・関心をかきたて、生徒を授業に引きつける。そういう観点からすると、和算も着目点がとてもユニークで、数学教育の素材として活用できるのではないだろうか。算額を芸術的な文化遺産として鑑賞するだけでなく、数学教育に活かしていくことはとても重要である。算額の問題は、ユーリッド幾何と密接な関係にあり、中学・高校の数学で解けるものがある。「三平方の定理」、「円と接線の関係」、「相似」を学習した後であれば、課題学習として算額の問題を取り上げることも可能である。高校で学ぶ三角比を導入すると、表現として非常に簡単になる問題もある。

4. 洋算と和算の着眼点について

(1) 線分の長さの求め方

洋算と和算の着眼点のちがいについて、次の例をみてみよう。図1の $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 5$ である直角三角形ABCにおいて、頂点Bから斜辺CAに垂線の足をDとするとき、BDの長さを求める問題で、現代の解き方（洋算）と和算の解き方（図2）を紹介する。

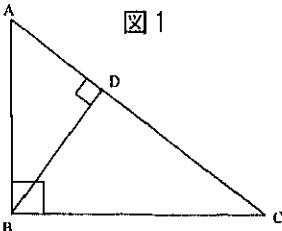


図1

現代の解法（図1）

$\triangle ABC$ と $\triangle ADB$ は相似だから
 $AC : AB = CB : BD$ より
 $BD = 2.4$

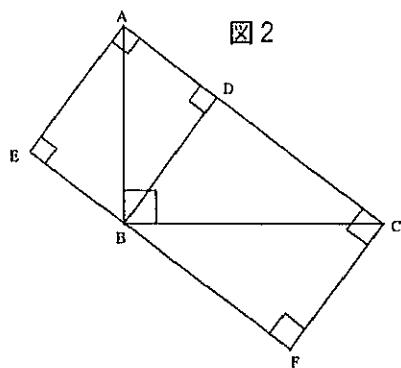


図2

和算の解法（図2）

図2のように、A, Cを通じ、BDに平行な直線をひき、長方形AEFCをつくる。
 三角形の面積に着目すると
 $\triangle AEB = \triangle ABD$, $\triangle BCD = \triangle BCF$
 より、長方形AEFC = $2 \triangle ABC$
 よって、 $5 \times BD = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4$
 より $BD = 2.4$

(2) 和算における橿円の面積の求め方

次に、和算における橿円の面積の求め方をみてみよう。（下の図参照）

【求め方】 円柱ABCDを2点B, Dを通る平面で同じ大きさの2つの立体に分ける。切り口は橿円になる。

点Aから、その橿円に垂線を下ろすしその足をHとする。

また、この円柱を上方に延長し、Aを通って、橿円BDに平行な平面で切ったときの面を橿円EAとする。

$AB = a$, $BD = b$, $AD = h$ 橿円の面積をSとする。

$$\text{円柱ABCDの体積} = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \times AD = \frac{\pi a^2 h}{4}$$

また、 $AH = h_1$ とすると、橿円柱AEBDの体積 = Sh_1

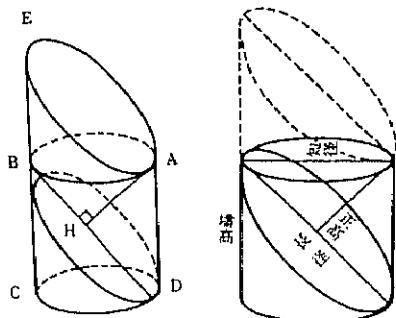
橿円柱AEBDの体積 = 円柱ABCDの体積だから

$$Sh_1 = \frac{\pi a^2 h}{4}$$

ところが、 $\triangle ABD$ と $\triangle HAD$ は互いに相似であるから
 $AB : BD = HA : AD$

$$HA = \frac{AB \times AD}{BD} \quad \text{より} \quad h_1 = \frac{ah}{b}$$

$$\text{よって}, S = \frac{ab\pi}{4}$$



関孝和の「求積」による

←このように、和算の解法は、面積や体積に関連づけた解き方が多い。橿円の面積を円柱の体積に結びつけて求めたことは特筆に値するだろう。なにか算数的な発想に近いのではないかと思うほどだ。

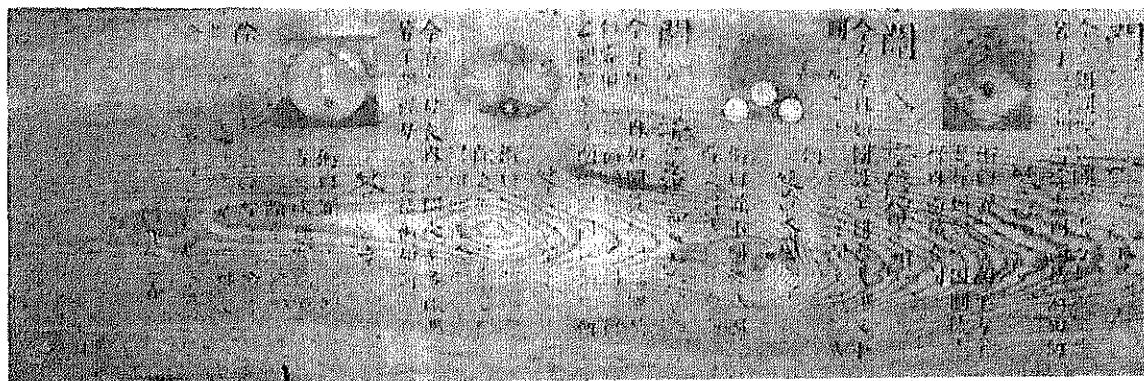
5. 中学3年修学旅行での取り組み「数学を発見する旅に出よう」

平成11年度、中学3年生（51期生）の数学とテーマ学習「テーマ：数学を発見する旅に出よう」を担当した。校務分掌として新教育課程を考える教務部であったこともあり、「総合的な学習」を視野に入れた取り組みが、何かできないだろうかという思いがあった。そこで、5月に行われる東北方面の修学旅行を通じた、今回の取り組みとなった。

授業に先立ち、算額関係の文献にあたったり、和算の研究者にお話を伺ったりした。その結果、何と東北地方には算額が多いこと、しかも、修学旅行で訪問する平泉の中尊寺や遠野市にもあることがわかった。これらの算額は、すでに研究者によって調査研究されており、文献もいろいろと刊行されていた。そのため、和算研究家の佐藤健一氏から岩手県の和算研究者の安富有恒氏を紹介していただき、今回の取り組みについて相談したところ、快諾いただき多くの資料を貸していただいた。算額の内容は漢文で書かれており、内容を解釈するまでに時間がかかった。内容（漢文）を理解することが大変である。

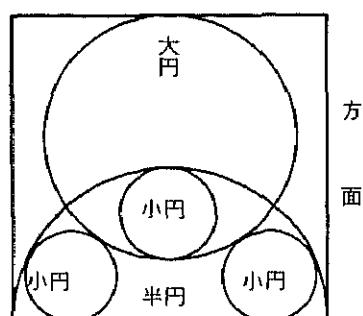
早速、平泉や遠野の寺社に掲げられている算額のうち、中学3年生までの内容で解ける問題をみていく。

（1）中尊寺阿弥陀堂の算額



写真の算額には、図から問題が4題あることがわかる。写真に向かって右から、「正方形と橢円」、「正方形と円」、「橢円と円」、「正方形と円」の問題がならんでいる。

ここでは、写真に向かって、右から2番目の「正方形と円」の問題を取りあげる。



数学の用語
方：正方形
容：入れる
径：直径

中尊寺阿弥陀堂 算額	
管理者	円乗院
大きさ	縦四五・五センチ 横一三九センチ
問題数	全四題のうちの二代目
術	関流八伝 安倍保定門人
今有	方内如図設半円容大円及小円三個其小円
方	三寸間大円径幾何
面	答曰大円径八寸

解答例

正方形の1辺の長さを $2a$ 、大円、小円の半径をそれぞれ R 、 r とする。ただし、 x は左の小円の中心から半円の直径に垂線を下ろしたと足と半円の中心との長さを表す。まず、

大円と小円が接していることから、

$$(a-r)^2 = x^2 + r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

小円と半円が接していることから、

$$(r+R)^2 = x^2 + (2a - R - r)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

また、正方形の1辺の長さを半円、大円と小円の直径で表すと

$$2a = 2R + a - 2r \quad \dots \textcircled{3}$$

これらの①、②、③式と条件式 $2r = 3$ より
大円の直径 $2R = 8$ を得る。

現代語訳

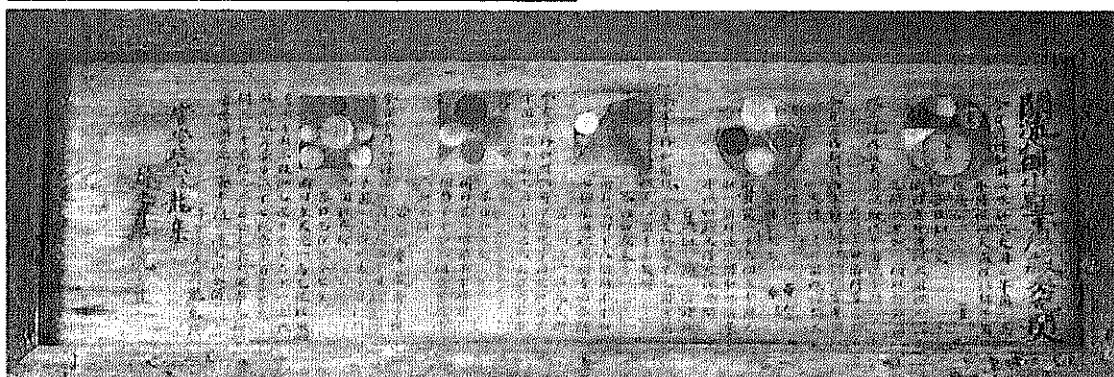
いま図のように、正方形の中に半円があり、大円と小円を三個内接させる。小円の直径を三寸とするとき、大円の直径を求めなさい。

答 大円の直径は八寸である。

術（次の場合による）

小円の直径を八をかけて三で割るとこの大円の直径を得る。この直径は問題に合う。

(2) 中尊寺地蔵院の算額(その1)

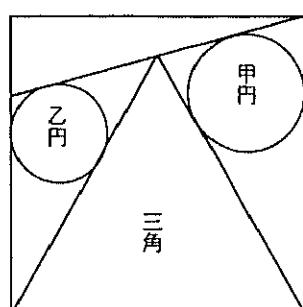


この算額には、問題が5題ある。写真に向かって右から、「円と内接円」、「円と内接円」、「正方形と正三角形と内接円」、「正方形の対角線と内接円」、「正方形と橿円と円」の問題がならんでいる。

地蔵院の問題は、解けそうで解けない手強い問題が揃っている。ここでは、三題目の「正方形の対角線と内接円」に触れてみよう。

今有方内如図設三角及斜容甲乙円
其円径差若干問方面幾何
答曰如左文
術曰置四十八個開平方加七個乘円
徑差得方面合問

岩渕慶治充義撰



数学の用語

三角：正三角形

斜：斜線（直線）

円径差若干：円径の差が与えられている

現代語訳

図のように、正方形の中に正三角形と直線の部分があり甲円と乙円がそれらに内接している。甲円と乙円との直径の差が与えられたとき、正方形の一辺の長さを求めなさい。

【解答例】

正方形の一辺を x 、甲円、乙円の半径をそれぞれ R 、 r とする。

条件より、 $2R - 2r = a \cdots \textcircled{1}$ とおく

$$\text{図において}, AG = \frac{1}{2}AF$$

$\triangle BHE$ は直角三角形だから、

$$GB = EH = \sqrt{BE^2 - BH^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\text{したがって}, AG = \frac{1}{2}AF = x - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって}, AF = 2x - \sqrt{3}x = (2 - \sqrt{3})x \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{よって}, FD^2 = AD^2 + AF^2 = x^2 + (2 - \sqrt{3})^2 x^2 = (8 - 4\sqrt{3})x^2$$

$$\text{ゆえに}, FD = \sqrt{2(8 - 4\sqrt{3})x^2} = \sqrt{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}x$$

$$\text{ここで}, \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 \quad \text{だから}$$

$$FD = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)x = (\sqrt{6} - \sqrt{2})x$$

$$\text{よって}, FE = \frac{1}{2}FD = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}x \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{また}, FB = AB - AF = x - (2 - \sqrt{3})x = (\sqrt{3} - 1)x$$

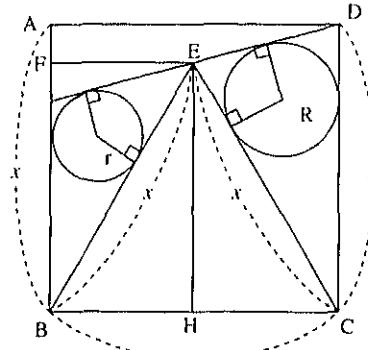
$$\triangle CDE \text{において}, \triangle CDE = \frac{1}{2}CD \cdot CE \sin 30^\circ = \frac{1}{4}x^2$$

$$\text{また}, \triangle CDE = \frac{1}{2} \left(xR + xR + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}xR \right) = \frac{1}{2}Rx \frac{4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{よって}, \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}Rx \frac{4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{これより}, R = \frac{x}{4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{8 - 3\sqrt{6} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{4}x$$

$$\text{よって}, 2R = \frac{8 - 3\sqrt{6} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{2}x \cdots \textcircled{4}$$



次に、 $\triangle BEF$ において

$$\triangle BEF = \frac{1}{2}BE \cdot BF \sin 30^\circ = \frac{1}{2}x(\sqrt{3}-1)x \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}x^2$$

$$\text{また、 } \triangle BEF = \frac{1}{2}(rBE + rFE + rFB) = \frac{1}{4}rx(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2\sqrt{3})$$

$$\text{よって、 } \frac{\sqrt{3}-1}{4}x^2 = \frac{1}{4}rx(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2\sqrt{3})$$

$$\text{これより、 } r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2\sqrt{3}}x = \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 6}{4}x$$

$$2r = \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 6}{2}x \quad \dots \textcircled{5}$$

①, ④, ⑥より

$$a = 2R - 2r = (7 - 4\sqrt{3})x$$

よって、正方形の一辺 x は、

$$x = \frac{a}{7 - 4\sqrt{3}} = (7 + 4\sqrt{3})a \quad \text{となり、}$$

正方形の一辺の長さが、甲円と乙円の直径の差で表すことができる。

【参考】 術文には正方形の一辺の長さ = $(\sqrt{48} + 7) \times (\text{甲円の直径} - \text{乙円の直径})$
= $(\sqrt{48} + 7) \times (\text{円径差})$ とある。この
ことからも、この問題の作者も正しい答を導いていることを示すものであろう。

中尊寺地蔵院（その2）

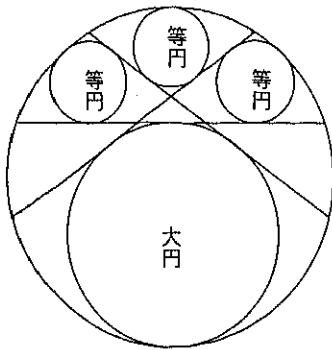


写真1に向かって一番右の問題

現代語訳

正方形の内部を図のように、角斜（対角線）と甲斜に接するように子円（半円）及び四円を入れる。正方形の一辺が与えられたとき、甲斜と乙、丙、丁、戊、己、の円の直径の和を求めなさい。

中尊寺地蔵院 算額

西磐井郡平泉町字衣ノ関

管理者 地蔵院

大きさ 縦六八センチ 横一九五センチ

問題数 全五問のうちの一

閑流八伝小野寺周蔵秀充門人

術曰置外内径二段内減大内径余得等円径合問
今有円内如図隔界斜容大円一個等円三個其外円
径若干大内径若干間等円径幾何

答曰如左文

岩渕嘉右衛門藤岱撰
問合得六面

中尊寺地蔵院（その3）

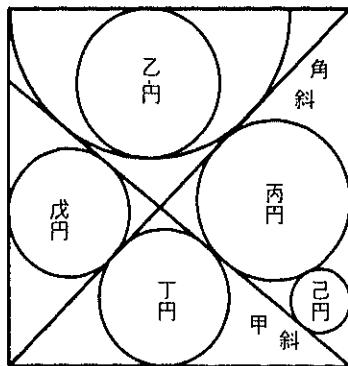


写真2の算額の左から2番目の図

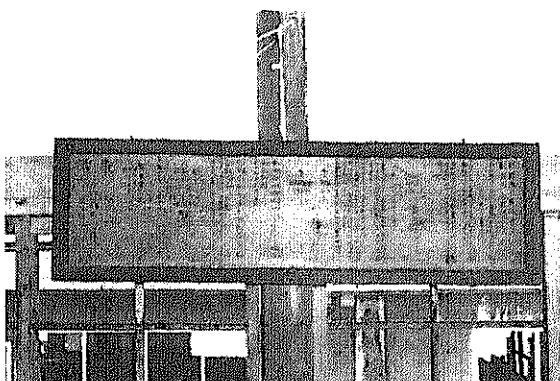
現代語訳

正方形の内部を図のように、角斜（対角線）と甲斜に接するように半円及び四円を入れる。正方形の一辺が与えられたとき、甲斜と乙、丙、丁、戊、己、の円の直径の和を求めなさい。

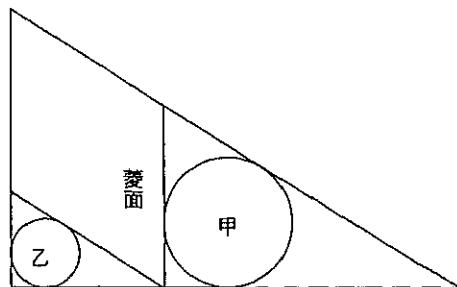
今有方内如図隔角甲斜容半円及四円其方面
若干間甲斜乙丙丁戊己之円径六和而幾何
答曰如左文

面得六和合問
岩渕慶蔵秀章撰

(3) 駒形神社の算額 (その1)



上の写真で、左の問題は、図形の問題である。
右の問題は、平方根を求める問題である。



問題数 二題のうちの一
今如図鈎股弦内容菱面甲円乙円ニ円ニ円尺
云菱面一尺五寸亦云甲円径乙円径和一尺六
寸問乙円径幾何
答曰乙円径得六寸

(参考) 本問は天元術を用いて算木で解いていることがこの算額に記されている。ここでは、省略した。

現代語訳

図のように、直角三角形の内部にひし形と甲円、乙円が内接するように入れてある。ひし形の1辺の長さが1尺5寸で、甲円と乙円のそれぞれの直径の和が1尺6寸である。そのとき、乙円の直径を求めなさい。

答 乙円の直径は6寸。

解答例

図のように、

$$BE = a, BF = b, FC = c, CD = d$$

甲円、乙円の半径をそれぞれ R, r とする。

$AE = EF = FD = DA = 15$ である。 A

条件より、 $2R + 2r = 16 \cdots \textcircled{1}$

$\triangle ABC, \triangle EBF, \triangle DFC$ は

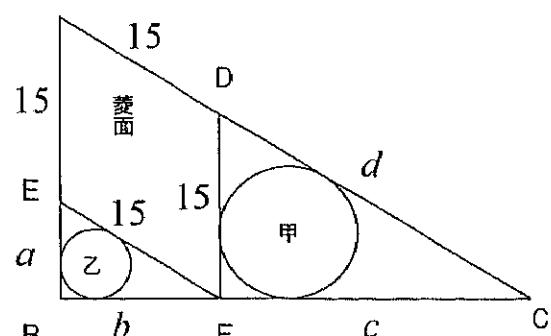
それぞれ相似だから

$$a:b = 15:c \quad \therefore ac = 15b$$

$$c = \frac{15b}{a} \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } b:15 = c:d \quad bd = 15c$$

$$\therefore d = \frac{15c}{b} = \frac{15^2}{a} \cdots \textcircled{3}$$



次に、 $\triangle DFC$ において $c - R + 15 - R = d$
 $\triangle EBF$ において $b - r + a - r = 15$
 より、 $c + 15 - 2R = d \dots \dots \textcircled{4}$
 $a + b - 2r = 15 \dots \dots \textcircled{5}$
 $\textcircled{4} + \textcircled{5}$ より、 $a + b + c - (2R + 2r) = d$
 よって、 $a + b + c = 16 + d \quad (\because 2R + 2r = 16)$
 この式に、 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ を代入して

$$a + b + \frac{15b}{a} = 16 + \frac{15^2}{a}$$

$$\therefore a^2 + ab + 15b = 16a + 225$$

$$\text{より、 } b = \frac{225 + 16a - a^2}{a + 15} \dots \dots \textcircled{6}$$

$$\text{また、 } a^2 + b^2 = 15^2 \text{ だから、}$$

$\textcircled{6}$ 式を代入して整理すると

$$2a^4 - 2a^3 - 194a^2 + 450a = 0,$$

$a \neq 0$ だから

$$a^3 - a^2 - 97a + 225 = 0 \text{を得る。}$$

$$(a - 9)(a^2 + 8a - 25) = 0$$

$$\text{よって、 } a = 9, a = -4 + \sqrt{41}$$

(i) $a = 9$ のとき、 $b = 12$

$\triangle EBF$ の内接円（乙円）に注目すると、

$$\frac{1}{2}(12r + 15r + 9r) = \frac{1}{2} \times 9 \times 12$$

$$r = 3$$

よって、乙円の直径は $2r = 6$ 寸を得る。

←答をみると、6寸だけを採用している。

(ii) $a = -4 + \sqrt{41}$ のときは、同様にして、

乙円の直径は約2.2寸である。

【参考】

6寸だけを答に採用しているのは、江戸時代において、直角三角形は、3 : 4 : 5の比のものが多かったためであろうと、安富有恒氏は解説されていた。

駒形神社（その2）

前ページの駒形神社の算額の写真で、最初の問題である。
神社内に掲額してあり、保管状態もよい。

駒形神社	遠野市綾織町字向
管理者	総代 佐々木 優
大きさ	縦四十六センチ横一六一センチ
問題数	二題のうちの一
難関流之算法固陋而不至端緒為求神之助問然 一、今七十三ヲ平方除ハ不尽多故分母子ニ約メ シテ而問其數ヲ	

答曰百二十五歩ノ千令六十八

術曰七十三ヲ平方を平法開ハハ五分四厘四毛不尽
捨是ヲ右ニメ一ヲ左ニメ零約術ニヨリ百二十五
分千令六十八得合問

奉文化五戌辰歳 綾織村長岡
掛 四月八日 菊池治兵衛
加好

現代語訳

73の平方根を近似分数で表せ。

答. $\frac{1068}{125}$

数学の用語

陋：せまい（ろう）

平方：平方根

令：0

零約術：下記参照

解説

零約術のルールを用いると、

$$\sqrt{73} = 8.5440\cdots \text{より}, 8.5 < \sqrt{73} < 8.6$$

すなわち、

$$\frac{17}{2} < \sqrt{73} < \frac{43}{5} \quad \leftarrow \frac{17}{2} \text{を少率}, \frac{43}{5} \text{を多率という}$$

ルール1：少率の分母分子に多率の分母分子を加える。
(分母は分母どうし、分子は分子どうしを加える)

ルール2：1で求めた値が $\sqrt{73}$ より小さいときは、

すぐ前にある多率の分母分子を加える。

以下同様

ルール3： $\sqrt{73}$ より大きくなれば、すぐ前にある少率の
分母分子を加える。

零約術の原理とは

a, b, c, dが正の数で

$$\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \text{ のとき}$$

$$\frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$$

になることである。

解答例

零約術で、分数の数列をつくっていくと

$$\frac{17}{2}, \frac{43}{5}, \frac{60}{7} = (8.57\cdots), \quad \frac{77}{9} = (8.555\cdots), \quad \frac{94}{11} = (8.545\cdots),$$

少, 多, 多, 多, 多

$$\frac{111}{13} = (8.538\cdots), \quad \frac{205}{24} = (8.541\cdots), \quad \frac{299}{35} = (8.542\cdots), \quad \frac{393}{46} = (8.543\cdots),$$

少, 少, 少, 少

$$\frac{487}{57} = (8.543\cdots), \quad \frac{581}{68} = (8.5441\cdots), \quad \text{より}$$

少, 多

$\frac{1068}{125}$ を得る。

少は少率, 多は多率を表す

この方法は、 $\sqrt{73}$ の値が分かるときに役に立つ。

この問題の場合、術で $\sqrt{73} = 8.544\cdots$ であるからとなっているので、

$$\sqrt{73} \doteq 8.544 = \frac{8544}{1000} = \frac{1068}{125} \text{で求まってしまう。}$$

なお、江戸時代の人々は、そろばんで開平計算ができたので
上のような術文になっていると思われる。

【参考】 $\sqrt{73}$ の値（近似値）が分からぬときの解法

$8 < \sqrt{73} < 9$ は成り立つ

$$\frac{8}{1} < \sqrt{73} < \frac{9}{1}$$

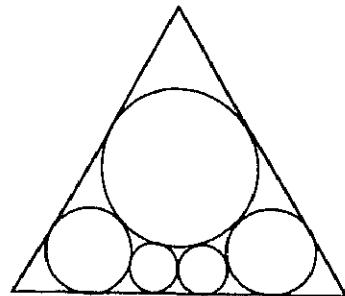
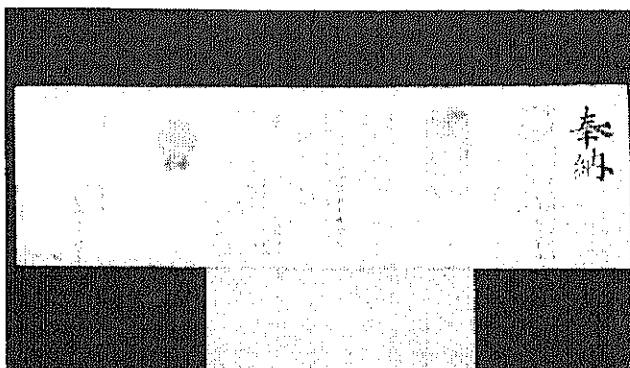
$$\frac{8}{1}, \frac{9}{1}, \frac{17}{2} \quad \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 72.25 \text{より}, \quad \frac{17}{2} < \sqrt{73} \text{で少率}$$

少, 多, 少

$$\frac{26}{3} \quad \left(\frac{26}{3}\right)^2 = 75.11 \text{より}, \quad \frac{26}{3} \text{は多率}$$

以下同様にして計算すればよい。

(4) 早池峯神社の算額



早池峯神社は老朽化しているため、現在算額は遠野市立博物館で保管されている。

本問は、左の図の問題

早池峯神社 算額	
遠野市附馬牛町上附馬牛	
管理者 総代 大橋 仁	
大きさ 縦三三・五センチ 橫一一・五センチ	
問題数 全二問のうちの一	
今有如図三角面内容大中小円各無動只云三角 面三寸及大中小円径各問幾何	
答曰大円径一寸四分四厘九毛一今有奇 中円径七分八厘四毛一三弱	
小円径四分五厘一毛六四三強	
術曰置三個平方開之乘三角面内減大円径名天 天二段乘大円径平方開之名地天内減地得小円 径倍之大円径和為中円径三段	
置三個商九十四段内減一十二個平方開之加入	
三個商二十三段内減二十七個乘三角面得數五 十二個以除之得大円径合問	
維時弘化三年丙午六月十八日	
願主 菊地長右衛門義方	
千蔵	

現代語訳

【解答例】 大円、中円、小円の半径をそれぞれ

a, b, c とすると、次の連立方程式ができる。

$$\begin{cases} \left\{ 3 - \sqrt{3}(a+b) \right\}^2 + (a-b)^2 = (a+b)^2 \\ \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}b - c \right)^2 + (b-c)^2 = (b+c)^2 \\ \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2a - c \right)^2 + c^2 = (a+c)^2 \end{cases}$$

この方程式を解くことは難しいが、円と直線が接するときの関係を式で表す練習になる。

6. 漢文による決まり文句

現代の数学の問題でもそうであるように、算額を読むとき、いわいる漢文の決まり文句がわかると問題の意味がよく分かる。国語の先生に指導してもらう方法もあるだろうが、算額における決まり文句について、多くの問題にあたって分かったことや、文献を調べた結果明らかになったことを次のようにまとめた。数学の述語や用語でもそうであるが、生徒たちと一緒にになって問題にあたり、図から使われている用語や言葉の意味について研究する方法もあるだろう。

算額の問題をみていく段階で、いろいろなことがわかり次第、こういった決まり文句を整備していくとよい。

問題について

今有如図……の如きの書きはじまる部分は、たいていが図形または問題の説明。

仮令 …… 「たとえば」の意味。

只云 …… 第一条件のこと

只何々というとは、これだけの条件が与えられていることである。

「只云数」は術中のその条件の数をいう。

又云 …… 第二条件のこと

別云 …… 第三条件のこと

甲乙丙丁……図形の名称に使う。順番も表す。

ほかに、大中小、天地人、子丑寅、乾坤（けんこん：天地の意）等がある。

甲乙丙丁戊己庚辛……と続く。

問 …… 幾何（いくばくぞ、と読む）は求める答は何であるかを示す。

問の説明ではない。

合問 …… 術の終わりの結びに用いる。答えが問い合わせていること。

答曰 …… 答を示す。

術曰 …… 解法の手順を示したものであるが解答ではない。

用語について

有奇 …… 割りきれない、開ききれない。奇は「はした」の意。余りがあること。

鈎股 …… 直角三角形

直角をはさむ2辺のうち小さいほうの辺を鈎、大きい方の辺を股という。

鈎股弦の法 …… ピタゴラスの定理、三平方の定理のこと

三角 …… 正三角形のこと。三方ともいう。

圭角	二等辺三角形。普通は圭形という。
五角	正五角形のこと
三斜	三角形で一边を斜といふ。斜は与えられた図上で斜線になっているもの、例えば、対角線、弦などをいう。四斜は四角形。 斜とは、斜の部分。一般的には、不等辺三角形のことである。
个	個または箇
員、圓	円のこと
方	正方形のこと
面	正多角形の一辺
直	矩形（くけい）直角四辺形すなわち長方形をいう。 さしがたともいう
平	長方形の短い方の辺
長	長方形の長い方の辺
中鈎	三角形の高さ 直角三角形で、直角の頂点から対辺に下ろした垂線のこと
梯	等脚台形のこと。上底を「上頭」、下底を「下頭」という。
積	面積または体積の意。
至多	極大の意。極小は「至少」
甲内減レ乙	甲から乙をひくこと
甲以減レ乙	乙から甲を引くこと
三レ之	3倍すること。三段も同じ意
甲因乙	甲と乙をかける
自レ之	2乗すること 再自乗は3乗、平方は巾、立方は再乗巾、四乗は三乗巾
商	根数
側円	橢円
平方	平方根

7. 駒場の近辺の算額

本校から出かけられる場所の算額について紹介したい。紙面の関係で2つの神社について記したが、東京都内にある算額について、その場所、名称を資料として載せたので活用されたい。

(1) 金王八幡宮

渋谷駅から徒歩で約7分ほどの場所で、渋谷警察署とJRAの渋谷WINSの裏手に、金王八幡宮がある。この神社には、3面の算額が現在も保存されている。とても鮮やかできれいな算額である。また、そのうちの1面は扇形の算額であり、初学の生徒は、とても美しいと感じるだろう。問題の内容も、円の図形の問題、正方形と内接円と内接する橙円についての問題、異なる3球が平面上で外接する問題、本校の中学生には適当な課題となる。

また、数列の問題の算額では、28宿なるもので順番と名前を決めて、それらの球の周の長さが数列になっているという問題である。この数列を等差数列とみるか等比数列と見るかで問題が当然異なってくるが、とても面白い問題である。28宿とは何かを、問題の近くで示したが、甲乙丙丁・・・など順番や名前にいろいろな知恵が伺える。

3面の算額の内、四国伊予西條藩の江戸詰の藩士山本庸三郎が奉納した算額がある。歴史的には、西條藩の屋敷が金王八幡宮の近くにあったことなどの地理的な環境であろう。このような、話を生徒にできると算額の異なった見方が出来だろう。これは、上の28宿と同じ次元であり、数学以外の先生の目があると、生徒に対して意義深い話ができると考える。

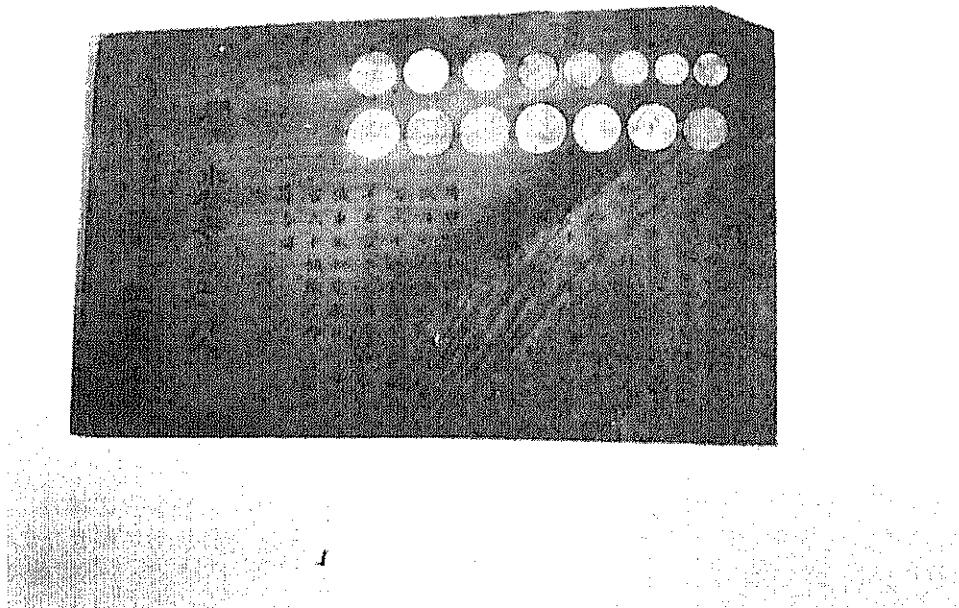
さて、見学に先立っては、あらかじめ神社の用紙で拝観許可書が必要であったので、その申請書を提出しておくとよいだろう。ちなみに、拝観料は無料であった。

早速、算額の問題を見てみよう。

金王八幡宮の算額は、どれも保存状態がよく、問題文も判読しやすいし、描かれた図もとても美しい。

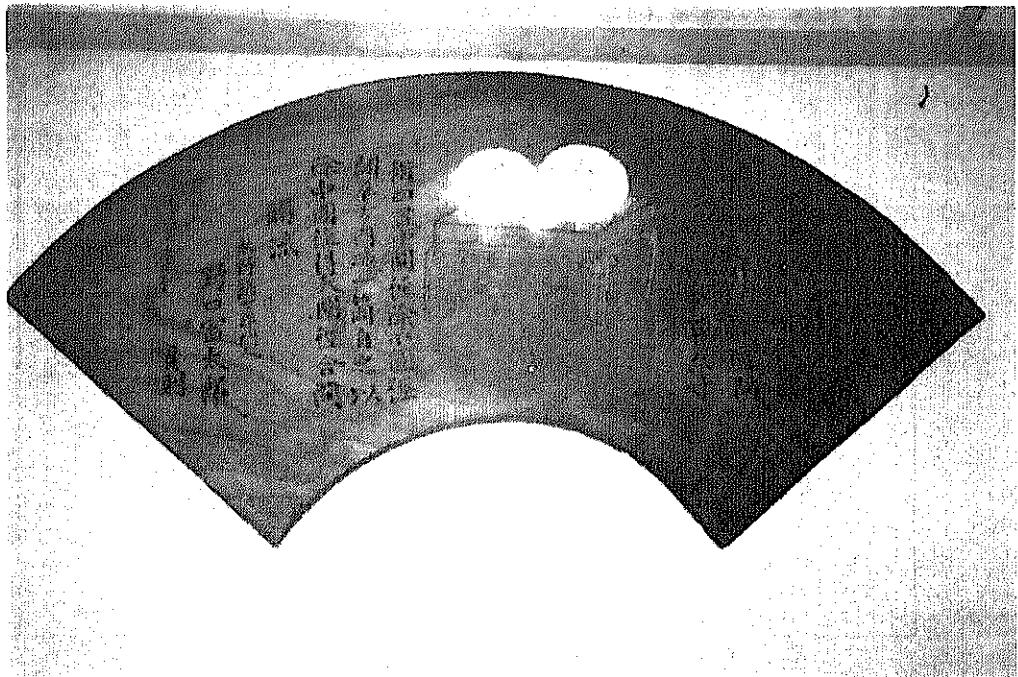
【金王八幡宮】 寛治6年(1092)に創建された、渋谷、代々木、赤坂、飯倉、麻布、一ツ木、今井など谷盛七郷の産土神であった。江戸八所八幡の一つであり、春日局を始め幕府要人の崇敬が厚かった。渋谷区内では最古の木造建築物である。

[写真5]



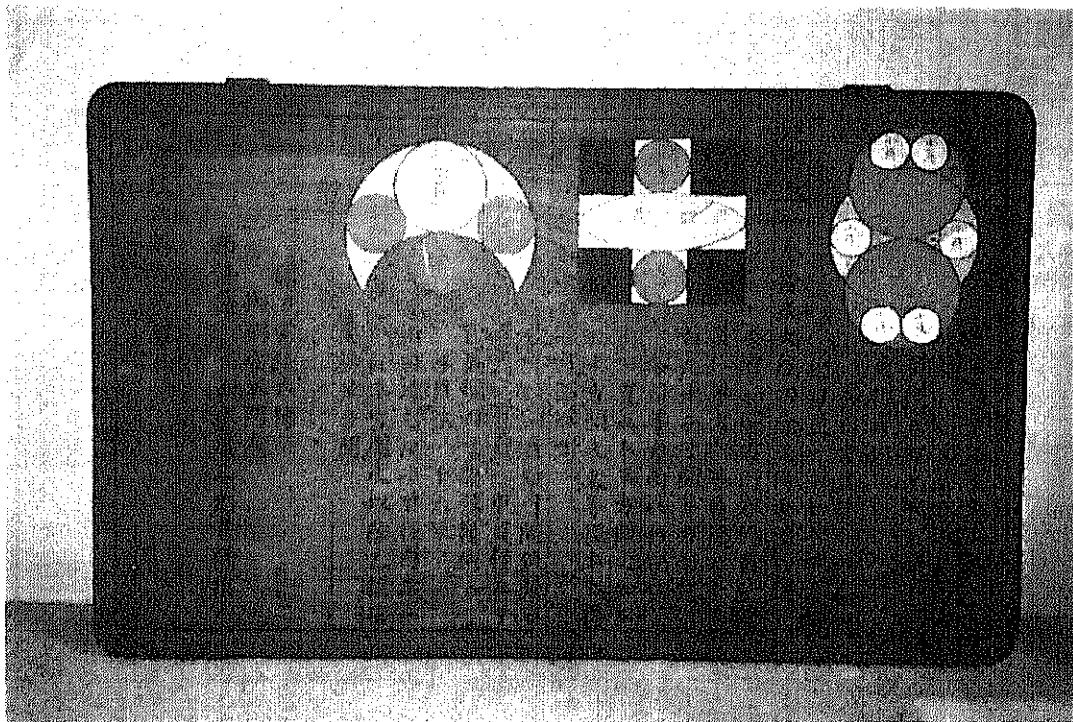
[数列の問題である。]

[写真 6]



[扇の形をした算額はめずらしい]

[写真 7]



[色鮮やかな算額である]

金王八幡宮（その1）

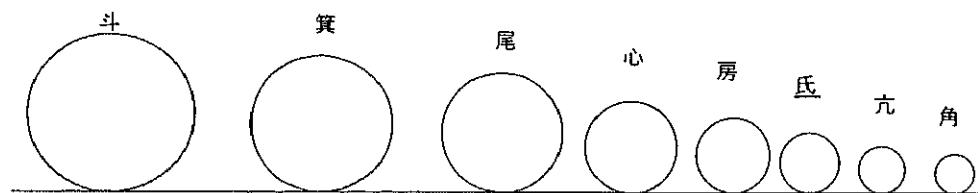
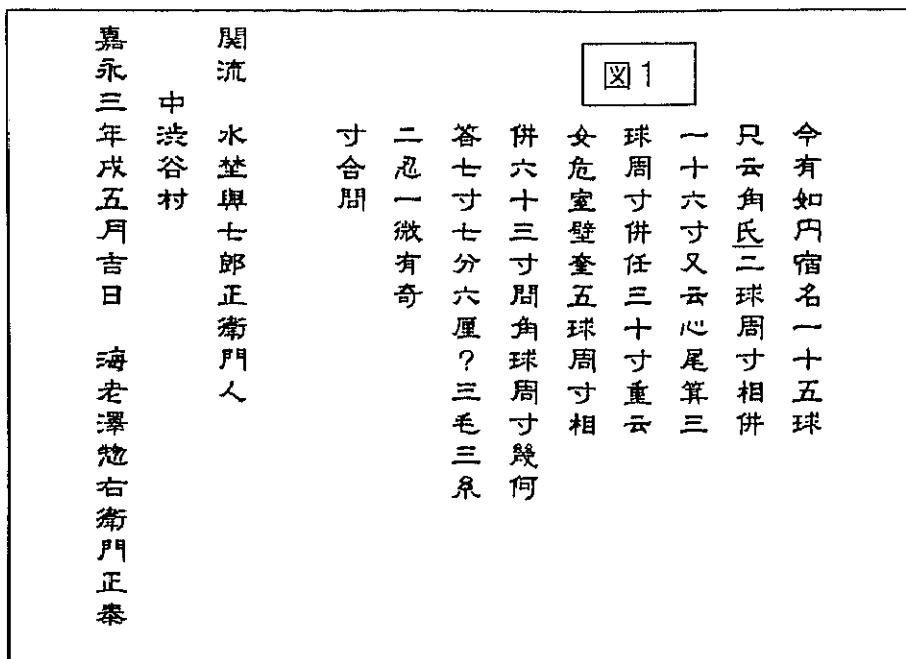
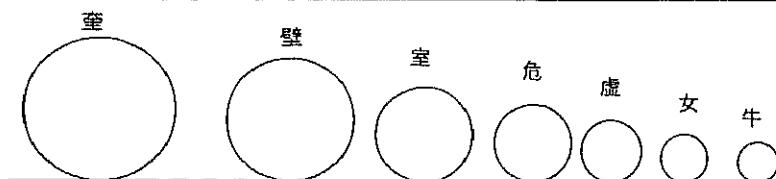


図1
(写真5)



用語

二十八宿：黄道に沿って、天球を28に区分し、星宿（星座）の所在を明瞭にしたもの。太陰はおよそ1日に1宿ずつ運行する。中国では蒼龍（東）・玄武（北）・白虎（西）・朱雀（南）の四宮に分け、さらに各宮を七分した。

東は、角（すぼし）、亢（あみほし）、氐（とも）、房（そい）、心（なかご）、尾（あしたれ）、箕（み）

北は、斗（ひきつ）、牛（いなみ）、女（うるき）、虛（とみて）、危（うみやめ）、室（はつい）、壁（なまめ）

西は、奎（とかき）、婁（たたら）、胃（えきえ）、昴（すばる）、畢（あめふり）、觜（とろき）、參（からすき）

南は、井（ちぢり）、鬼（たまほめ）、柳（ぬりこ）、星（ほとほり）、張（ちりこ）、翼（たすき）、（みつかけ）

現代語訳

28宿のうちの15宿の名前である角亢氐房心尾箕斗牛女虛危室壁奎の名称の15球の周が数列をなしている。角と亢の周の和16寸、心尾箕の周の和が30寸、虛危室壁奎の周の和が60寸であるとき、角の周を求めよ。

答 7. 763321…寸

【解説】

この数列を $\{a_n\}$ とする。

条件から

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 16, \\ a_5 + a_6 + a_7 = 30, \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 63 \end{cases}$$

(i) $\{a_n\}$ を等差数列とみる

(ii) $\{a_n\}$ を等比数列とみる
の2通りの解答が可能となろう。

金王八幡宮（その2）

次のうぎ形の算額はめずらしいという。美術的な価値もあるらしい。

さて、問題の内容は、大中小3つの球が同一平面上で互いに接していて、中、小の球の直径が与えられたとき、大球の直径を求める問題である。

次の図は、私が、図形ソフト「カブリ」で作成したが、条件通りに中円、小円の直径をそれぞれ9, 4寸として作図したところ、大円の直径がソフト上36寸になった。当たり前とはいえる驚きであった。図形ソフト「カブリ」の、このような問題再現的な使い方は面白いと思う。

図2
(写真6)

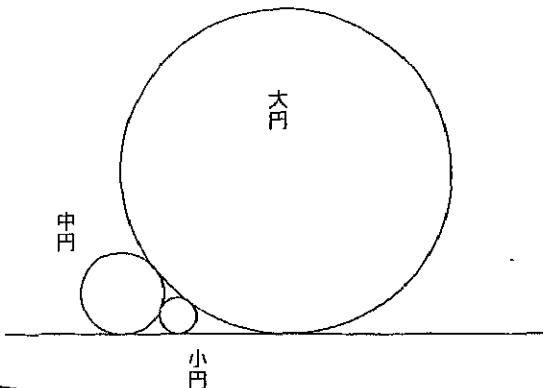
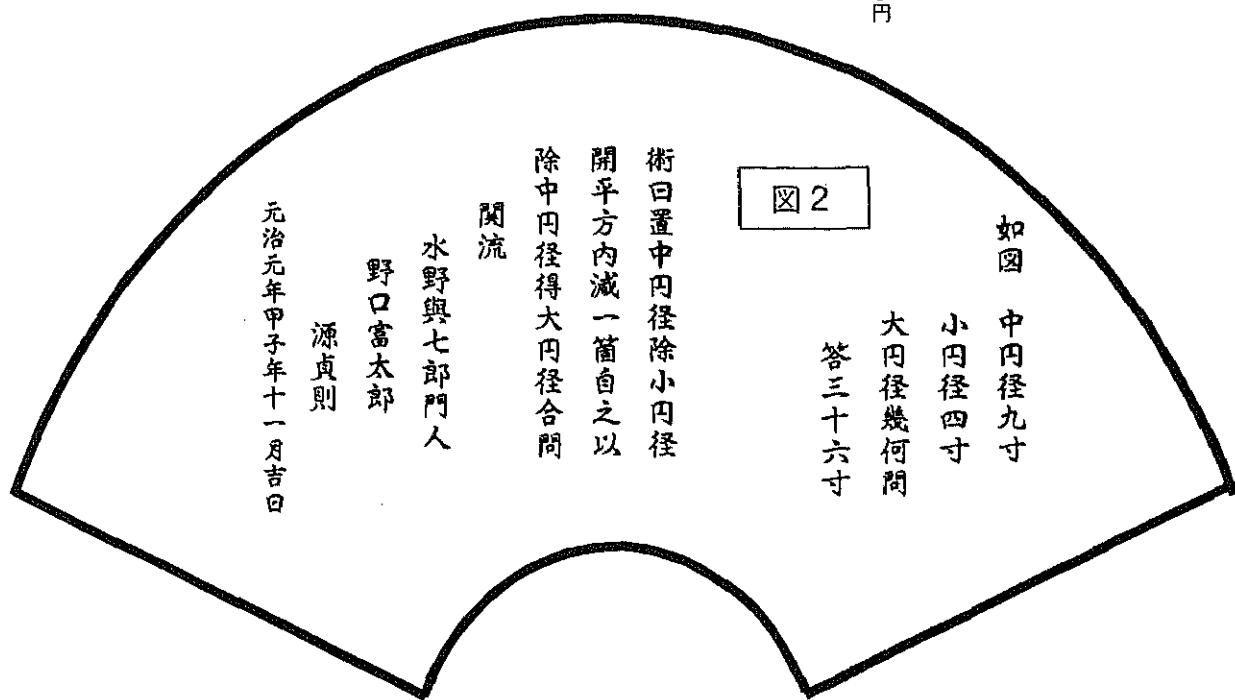


図2

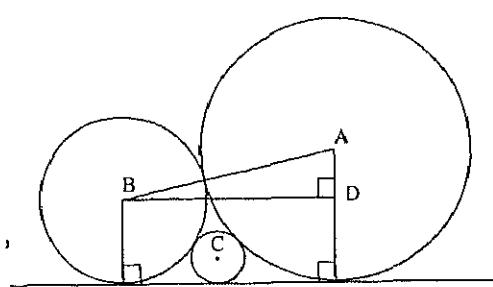


問題 図如く、中円の直径が9寸、小円の直径が4寸であるとき、大円の直径を求めなさい。
答 36寸。

解説 右の図のように、2円A, Bのすき間に円Cを内接させたとき、3円A, B, Cの半径の相互関係を考えた問題である。

この問題は、「累円術」とよばれる和算の「円と接線」についての理論の入門的な問題であり、大円、中円、小円の半径をそれぞれ a, b, c とすると、つぎが成り立つ。

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$



方針

大円、中円、小円の半径を
それぞれ x , R , r とする。
また、大円と小円、小円と中円の
台上の接点間の距離をそれぞれ y , z とする。
大円と小円の関係より

$$(x+r)^2 = y^2 + (x-r)^2$$

小円と中円の関係より

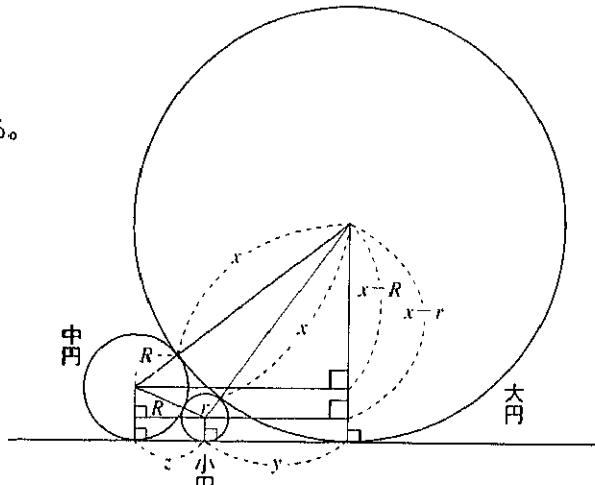
$$(r+R)^2 = z^2 + (R-r)^2$$

大円と中円の関係より

$$(x+R)^2 = (y+z)^2 + (x-R)^2$$

が成り立つ。

y , z を消去し、 $2R = 9, 2r = 4$ であることから
大円の半径 x を求めることができる。



金王八幡宮（3）

奉納年 安政六年

西條藩 山本庸三郎貴隆撰

関流

今有如図方内容積円一個等
円二個等方四個等円徑七千
三百九十二寸問等方圓幾何
答曰等方面七千六百七寸有奇
術曰置五個平方開之加二個平方
開之乘等徑半之得等方面合問

今有如圖交畫大円一個中
円二個而其罐容小円六個
大円徑五百九十三寸問中
円徑幾何
答曰中円徑四百六十三寸有奇
術曰置一十七個平方開
之內減一個乘大徑四除之得中徑合問

現代語訳

図3
(写真7)

図のように、交差した大円1個と中円2個と
そのすき間に小円6個を内接させる。大円の直
径が593寸であるとき、中円の直径を求めよ。

答 中円の直径は463寸と有奇（はした）で
ある。

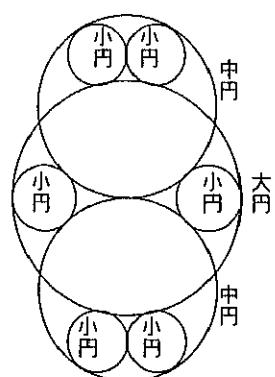


写真7に向かって、右の
図の問題である

【方針】

大円の半径を R 、小円の半径を a 、中円の半径を x 、
2小円の接点と中円の中心の距離を y とする。

小円が中円と大円に接していることから

$$(R - a)^2 + x^2 = (x + a)^2$$

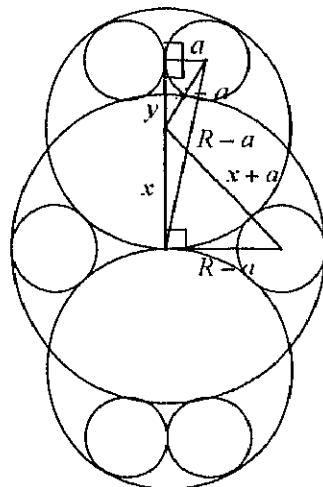
小円が大円に外接していることから

$$(x + y)^2 + a^2 = (R + a)^2$$

小円が中円に内接し大円に外接していることから

$$y^2 + a^2 = (x - a)^2$$

が成り立つ。

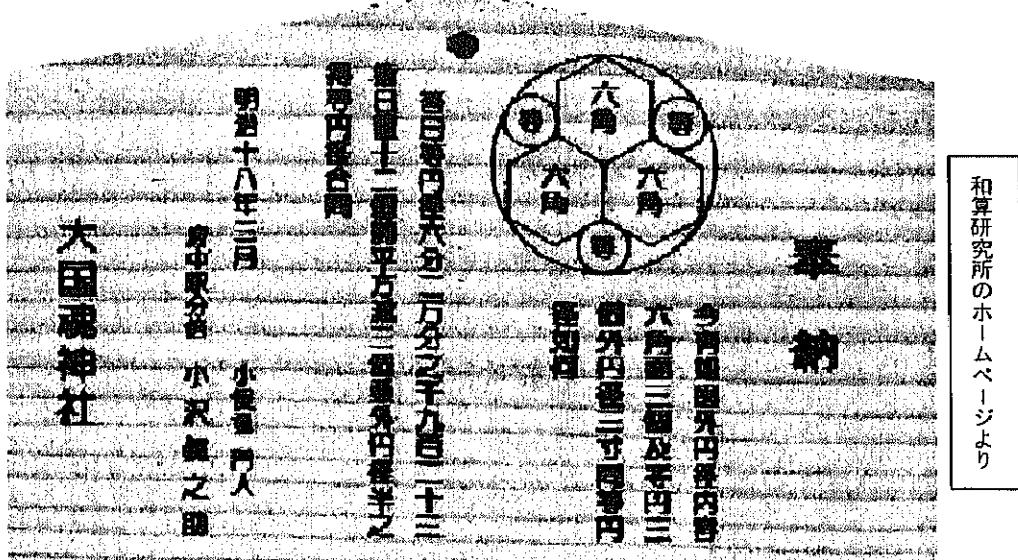


(2) 大國魂神社の算額

本校から出かけられる場所にある算額として、府中市の大國魂神社の算額を紹介しよう。

日曜と祝日に見学ができる。事前に見学の件を申し出ておけば対応していただける。
拝観料が生徒は100円、教官は200円必要である。

この問題は、学校図書版の教科書にも載っている。



和算研究所のホームページより

【解答例】右の図で

$$OC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$CD = \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

等円の半径を x とすると

$$OA = \frac{3}{2} - x, AB = \frac{3\sqrt{3}}{8} + x$$

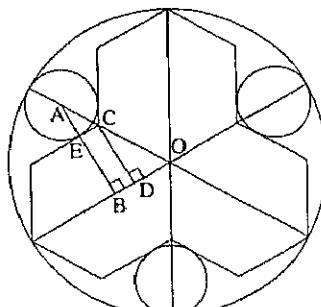
$\triangle AOB$ は、 $\angle A=30^\circ$, $\angle B=90^\circ$

の直角三角形だから

$$\frac{3}{2} - x : \frac{3\sqrt{3}}{8} + x = 2 : \sqrt{3}$$

$$\text{より } x = \frac{6\sqrt{3} - 9}{4}$$

よって、等円の直径は $2x = \frac{6\sqrt{3} - 9}{2}$ 寸である。



(3) 都内の主な算額のアドレス

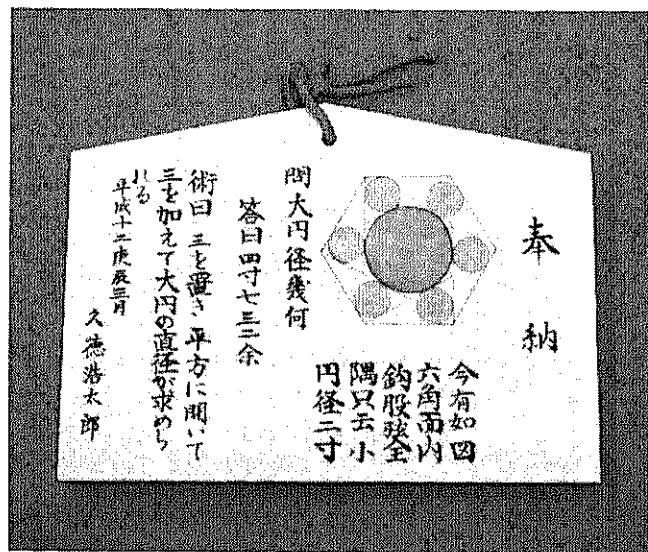
テーマ学習などで、駒場から出かけられる場所にある算額について、レポートする。

NO	寺社名等	奉納年	西暦年	住所	参考文献
1	住吉神社	嘉永4年	1851	八王子市片倉	多摩の算額
2	穴沢天神社	明治10年	1878	稻城市矢野口	多摩の算額
3	大國魂神社	明治18年	1885	府中市宮町	多摩の算額
4	東淵寺	明治2年	1869	台東区池之端2-4	
5	清水観音堂	昭和42年	1967	台東区上野公園1-29	
6	大鷲神社	慶応4年	1868	足立区花畠	
7	二宮神社	寛政6年	1794	あきる野市	秋川市の算額
8	西蓮稻荷神社	嘉永5年	1852	武蔵野市	多摩の算額
9	松原神社	天明5年	1785	小田原市	神奈川県算額集
10	谷津大稻荷神社	嘉永4年	1851	小田原市	神奈川県算額集
11	總願寺不動堂	弘化5年	1848	加須市不動岡	埼玉の算額
12	氷川神社	嘉永5年	1852	浦和市西堀	埼玉の算額
13	秋葉神社	天保11年	1840	大宮市中釣	算額を解く
14	氷川神社	嘉永5年	1852	大宮市高鼻（現和算研究所蔵）	
15	愛宕山（元東京都港区）	寛政元年	1789	現在白河市歴史民族博物館保管	福島の算額
16	薬師堂（元東京都中央区）	寛政元年	1789	現在白河市歴史民族博物館保管	福島の算額

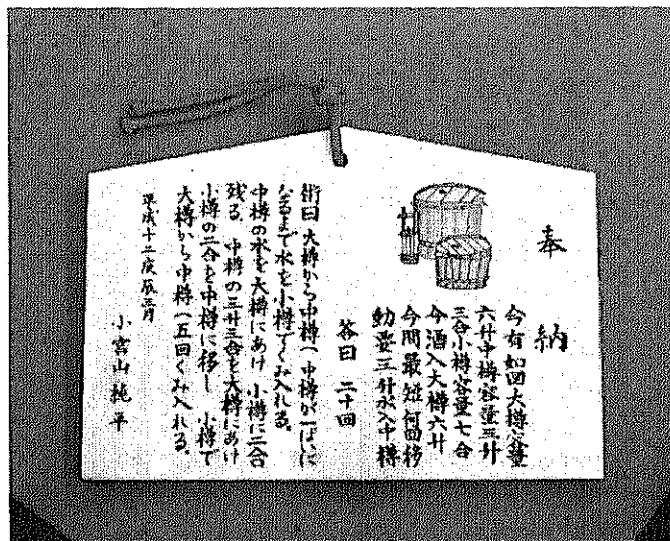
8. 生徒の作品（「算額をつくろう」コンクールに出展）する

和算研究所は毎年「算額をつくろう」コンテストを実施している。自分がつくった問題を算額にして応募するのである。くわしくは、巻末の参考文献等にある和算研究所のホームページを参照願いたい。

さて、51期テーマ学習後期受講者は、全員和算コンクールに挑戦した。その結果、2名の生徒が見事金賞を射止め、江戸東京博物館において表彰があった。副賞は、次の写真のような生徒がつくった算額の問題を実際の絵馬にしたものであった。この副賞には、生徒たちは大いに喜んでいた。



生徒の作品：問題をつくるとき、「カブリ」を使い、図形を動かして成り立つことを発見していた。図形ソフトの意外な使い方である。



生徒の作品：油分けの問題に似ている。

9. おわりに

今回の取り組みで、生徒は何を得たのであろうか。数学を通じて「地方の文化」に触れたり、何かを発見したりできたであろうか。

算額や和算のことを調べれば調べるほど、多くの謎や疑問にであった。

例えば、

1. これらの問題を、先人たちはどうのように解いたのか。
2. なぜ東北地方に算額が多いのか。

1については、これらの問題の教材化を通じて、今後の授業の中で活かしていきたい。中にはとても難しい問題もあり、手強いだろう。今回は取りあげなかつたが、楕円の問題などかなり難しいものがある。作図を通して、予想することもできるだろう。そういう面で、本校のコンピュータースペースに導入してある図形ソフト「カブリ」を活用した取り組みも今後の課題となるだろう。ちなみに、今回の図形はすべてカブリで作成して、ワープロソフトに張り付けたものである。また、円周率の計算など、和算と洋算の解法の比較を教材化すると面白い課題ができるのではないだろうか。

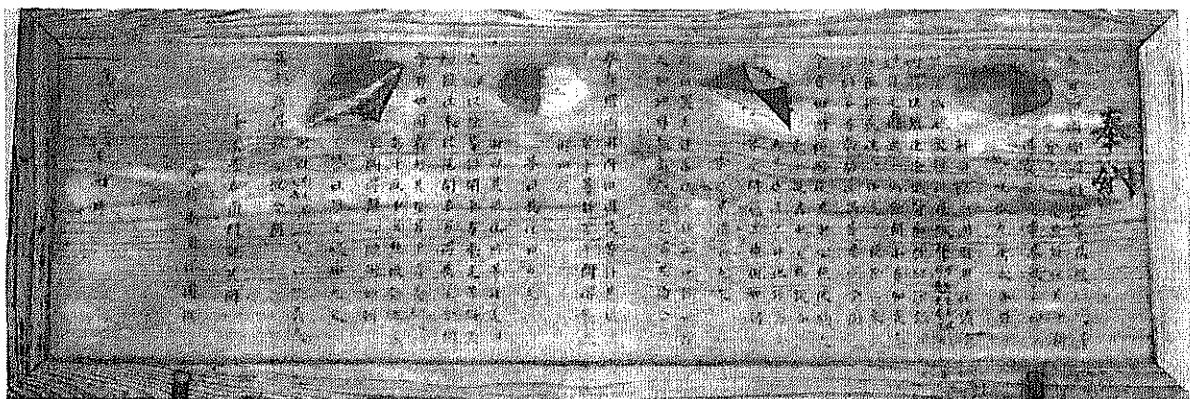
2については、数学科だけでなく他の教科と連携を取りながら研究していくことも考えられるだろう。このようなクロスカリキュラムの取り組みは、今後の本校における総合的な学習の1つになり得ないだろうか。

今回の取り組みは数学のフィールドワークを含んだものであるといえる。新学習指導要領で打ち出された「数学的活動」にもなるだろう。また、高等学校数学科の新科目「数学基礎」における数学史の教材となり得るだろう。

日本史の丸浜昭教官によると、江戸時代の農民一揆を和算家が率いていた例があるそうだ。これもとても興味ある話題である。何かの機会に、教科の枠を越えた取り組みをしたい。

最後に、今回の調査研究は、多くの方々の指導・助言があってなしえたものであることを申し述べたい。とくに、岩手県一関市在住の和算研究家である安富有恒先生には、ご自身の研究著書「和算一岩手の現存算額のすべて」を貸していただいた。算額の漢文と図が合わず何度も電話でご指導いただいたりした。今回の論集の執筆にあたり、先生のいろいろな資料の掲載を快く許可もしていただいた。先生ご自身がお持ちの中尊寺、駒形神社、早池峯神社の写真の掲載も許可いただいた。

また、日本数学史学会会長の佐藤健一先生には、平成11年度のテーマ学習で前期・後期を通じて講師を引き受けさせていただき、渋谷の金王八幡宮の算額見学では現地で丁寧な説明をしていただいた。今回この論集の和算と洋算の解法の比較等の原稿では、先生の著作からの引用を快く許可いただいた。また、本論集の原稿を細部にわたり査読していただき、ご指導いただいた。この場をお借りしてお礼申し上げたい。



中尊寺地蔵院 算額（その2）

大きさ 縦44cm横32.8cm（こりうち白井5.8四方）
問題数 4

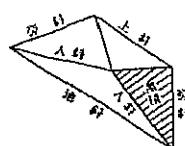
奉納

今有如因側円内設等界線二段各分為二積其短
徑若干間得長徑及等界線術如何



答曰依左術求各分

術曰以一個圓內徑意設弦依術求難徑及弧背
乃之徑少餘徑者以難徑除弧背加弦以除難徑名克
自之內減一個余開平方加定乘短徑得長徑以定
二段除之乘短徑開平方乘難徑得等界線合問



答曰黑積如左文

術曰置上斜巾以上斜与地斜和除之加地斜乘高
六除之得黑積合問

今有環側円内如因設等斜其短徑若干等斜若干

問得長徑術如何

答曰長徑如左文

術曰置短徑与等斜差四之多以除等斜開平方
乘定等斜差加短徑乘短徑開平方得長徑合問



今有如因扇形其弦若干扇長若干取中心点
使鈎之正平間得難心線術如何

答曰難心線如左文

術曰割扇三之以除扇長巾乘弦得難心線合問

千葉暮右衛門胤英圖

安倍助司保円 横

嘉永二年四月

山村善夫著「現存岩手の算額」によれば、
二面とも分厚堂算額となっているが、現在は
地蔵院内に掲額保管されている。保存状態も
良く、きれいな算額である。

印

【参考文献および引用文献】

- 安富 有恒著（昭和62年） 「和算一岩手の現存算額のすべて」（青磁社）
花巻市教育委員会（昭和59年） 「花巻市文化財調査報告書」 （花巻市教育委員会）
小倉金之助著（昭和10年） 「数学史研究 第一集」 （岩波書店）
平山 諦著（昭和34年） 「関 孝和」 （恒星社厚生閣）
平山 諦著（昭和48年） 「東西数学物語」 （恒星社版）
萩野 公剛編（昭和39年） 「郷土数学の研究法」 （富士短大出版部）
萩野 公剛編（昭和40年） 「郷土数学の文献集（1）」 （富士短大出版部）
萩野 公剛編（昭和41年） 「郷土数学の文献集（2）」 （富士短大出版部）
遠藤 利貞著（昭和56年） 「増修 日本數學史」 （恒星社）
佐藤 健一他著（昭和51年） 「東京都及びその周辺の算額」その1
佐藤 健一著（昭和63年） 「和算家の旅日記」 （時事通信社）
佐藤 健一著（平成元年） 「数学の文明開化」 （時事通信社）
佐藤 健一著（平成6年） 「日本人と数 江戸庶民の数学」 （東洋書店）
学校図書版（平成12年） 「中学校数学3」 （学校図書）
深川 英俊（平成3年） 「日本の幾何 何題解けますか？」（森北出版）
ダン・ペドー共著
中尊寺・駒形神社・早池峯神社の算額の写真：安富 有恒氏所蔵
金王八幡宮の算額の写真：渋谷区教育委員会
【その他】
小寺 裕氏ホームページ：「和算の館」 <http://www.asahi-net.or.jp/~nj7h-ktr/>
榎本民夫氏ホームページ：「江戸東京散歩」 <http://www3.jusinet.ne.jp/~tamio-enomoto/top.html#ekimae>
和算研究所ホームページ：<http://www.shigaku.or.jp/wasan/index.htm>

なお、本研究は平成12年度文部省科学研究費補助金奨励研究（B）「数学的活動の観点に立った教材開発とその実証的な研究－数学基礎における考察－」（課題番号12913011）の研究の一部である。