2000筑波大学附属駒場論集第40集

関数は関数を生む

―恒等式を核として―

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
駒野　　誠

「関数は関数を生む」
― 恒等式を核として ―

筑波大学附属駒場中・高等学校　駒野　誠

要旨：　数学学習が、「項目」偏重であったために、多くの学習者が項目の関連を学習することなく卒業してしまう。個々の項目それ自体を学習することが本来の数学学習の最終目的ではないはずである。事柄に内在する主張を獲得できることで、普遍化が図られる。ここでは、数学学習の中で中心的な役割をする「式」に焦点をあて、「式」を多角的に見たり、揺り動かしたりすることで関数の理解をより充実したものになるようにする指導のあり方を示す。その核となるのが「恒等式」であり、その基礎となるのが「記数法」である。「恒等式」という視点によって、式をフレキシブルに扱い得るようになる。すると、式を視覚化するために関数へ、また、恒等式を媒介とすることで、関数自身に関数を見出し、方程式もある関数（和や差）で表現することでその零点と解釈可能になり、項目間に一貫した風が通りぬける。関数はテーラー展開で統一をみる。

キーワード：カリキュラム，恒等式，記数法，テーラー展開，平方完成，立方完成

1．はじめに

(1)学習者のおかれている社会状況

現在､高度に発達した科学技術社会で生活している。しかしながら、そのなかにあって日常的に排気ガス問題、ダイオキシン問題、環境ホルモンの問題、遺伝子組み替え食品の問題などなど数多くの諸問題を抱えて生活している。学習者は、否応無しに消費者であり、時に生産者になる。問題意識を持たせることも学校の重要な課題になってきている。

一方、カリキュラムでは学習時間は減少する流れであり、科学技術立国としての日本の将来を杞憂する声もきかれるようになった。ところが、数学はとかく受験のための手段として扱われやすく、学習者がパターン問題解きに追い込まれがちであるという現実もある。

(2)数学の果す役割

なぜ数学を勉強するのかという、原初的な問題がある。論理的思考などが一般的に言われてきたことであるが、本校の教育研究会の助言者でもある筑波大学の渡邊公夫先生は、「数学の有用性は数学を用いることによる認識の確かさである。」という。また、「ものごとが分かるというのは抽象論ではわからない。　学びは具体的な事象の中から学び取ったかどうかであり、次に抽象へと向い、再び具象へと行き来する。この面白さが数学の一つの面白さである」と。さらに、「学んだことを語ることが大切で、自分の言葉を用いて自分の潜在意識まで持ち上げるようにすることを忘れてはならない」と。このお話を聴いて理解ということの本質を数学の学習において学習するのだと感じた。すると、『納得』は、自分がそれまでに持っていた認識が変化すること、として捉えることができるし、概念の獲得といってもよい。「認識の変化」を算数・数学の学習の果す役割の要として考えたい。「認識の変化」は他の教科では得がたい心的充足感でもある。これは、学習者個々人が皆共通に享受できうることであるからである。好き嫌いの感想にある『数学はやっと解けたときが嬉しい。』は、実はある１つの認識が得られるということではないか。それまで自分になかった他者の視点を獲得できたともいえる。そうであるならば、「２次方程式の解の公式は社会に出て役に立たない」などと言うことはでてこないだろう。しかし、数学教育が項目主義に陥りがちな関連性の欠如したドリル型授業展開をしている限り、批判は免れない。先の渡邊先生の言葉を引用させてもらうなら、「知識の質がちがう」ということになる。

「認識を変化」をさせるための手段として考えられることにしばしば登場するのが、異なるものを分類し区別する一方、一見すると異なるものを如何にして包括し受容するかということがある。この小論では、こ

Function has functions in itself.

のことに関しての研究の一端を紹介する。

2．無限を把握する数学学習

(1)同じとみなすこと

日常社会でも、一見異なる事柄が、ある視点に立って考えると同じものに属すことに気づいてはっとすることがある。いじめにしたって、考えてみれば同じ学校、同じクラスの人間を相手に行っている行動である。おかしな話である。同じ仲間とみなすことの大切さとすばらしさを数学を通じて感じさせたい。

数学では同じとみなすことを常に行っていて、そのことで思考範囲を拡張している。同じとみなす最大の良さは、無限を有限、しかも一つの代表で考察可能になることである。数学の認識による確かさのすごさは、無限を相手可能にすることだと考えている。逆に、無限からある一つを抽出することを可能にすることもすごいことである。

ア）分数が等しいことの定義：同じとみなすよい例である。

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad=bc$$

イ）同じ余りをもつこと。カレンダーにみるように、ある視点に立つと異なるものでも同じ仲間にすることによって、世界が広がり、扱う数の自由さが広がる。無限に伸びる螺旋のイメージを有限な数に置き換えて考えればよいことを教えてくれる。

ウ）図形の合同：位置が異なっても形が同じならば、位置を無視することを考えて、無限をある一つで代表できることになる。なんとすごいことか。

エ）図形の相似：相似比を決めれば一つの図形から無数の図形が生まれる。しかも、相似比１なら合同と、合同までも取りこんでしまう。

オ）三角比：定義で、相似な２つの三角形の辺の比が等しいことから、その比に名称をつける。この定義が well-defined であるから、その後単位円を描いて済ませることになる。

この他いたるところで、定義をすることで、無限に開いた世界を考察可能にすることが出来るのである。

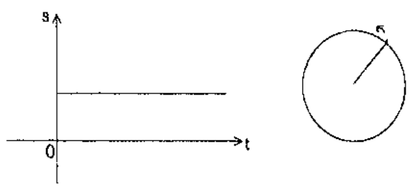
(2)データの読み取り

データから真実を掴まえることは容易ではない。その理由の多くは、「青い鳥」に似て、人間身近にある限られた世界の中からそれを探そうとすることに原因があることが多い。数学を学習することによって、無限を見る視点が養われると考える。ここでいうデータとは、数の集まりだけに限定していない。情報と言い換えてもよい。御茶ノ水女子大学の藤原正彦先生は「論理的思考は必ず破綻する」という。その理由の第１は、人間の理性や知性には大きな限界があるということ。第２に、人間にとって最も重要なことの多くが、論理的に説明できないこと。（例として、何故人を殺してはいけないか。）　第３に、論理には出発点が必要であること。つまり、出発点がある限り、出発点を誤って選択すれば結論は間違う。

第４に、一般の世の中では論理が長くならないということ。そもそも論理というものは非常に長い鎖を踏んで初めて深みに至るものであるが、１歩２歩では深い結論は論理では得られない。この話も傾聴に値する。数学教育において論理的思考の重視をうたっているが、この論理的思考の注意点を心に止めておかなければならない。

具体的な指導事例を示してみよう。

s-t グラフで、一定なグラフは、物体が止まっている、と勘違いしやすい。ところが、これは単に基準点から物体までの距離が時間とは無関係に常に一定であることを意味している。この問題を中２と高３で調査したところ、中２はほとんどが平面（円）に限定していたのに対し、高３は思考範囲を空間（球や円柱・その他）にまで広げていたのが印象的であった。



図で示したように、円上をぐるぐる回っていても中心から円上のその点までの距離はつねに一定である。球でも OK であるし、２点がある距離を保存しながら動き回っていても、一定なグラフは得られるのである。この教訓は、どんな条件の元でデータを取得したかである。無限にある状況にどうしたら切り込むことができるかでもある。仮定が間違っていて議論している場合は、論理が正しくてもその結論は真に意味あるものとはならない。

3．教科書と基礎・基本

(1)合本の意義

科目と教科書は一対一対応でなければならないものなのか。学習指導要領があり、それを具現化したものの代表が教科書である。教科書は、必要最小限の事柄

がコンパクトにまとめられた大変優秀なテキストであることには間違いない。しかし、学習指導要領の精神（数学全体に関わるもの）が抜け落ちがちである。本来学習は有機的につながっていて、認識が深くなるはずのものであるのに、章・単元・項目ごとの独立性が強過ぎて、関連性が生徒には見えにくいものとなっているために、数学学習は労多くして身につきにくい。項目主義を如何にして脱するかである。（これは、教科書に限らず指導要領改訂の折には必ずどの項目を入れるかはずすかの議論が行われるが。）高校では数学Ⅰ，数学 A，数学Ⅱ，数学 B，数学Ⅲ，数学 C と6種類の教科書があるが、学習指導要領の精神を生かすならば、数学Ⅲまでを学習する生徒のための、6種類の学習内容がすべて入った、教科書があっても不思議ではない。A 判にして2分冊位になればと考える。そうすれば、学習内容の関連性を示すための図（チャート）や説明文や「p.～参照」「関連事項～」など全体を見通すことができるような工夫を加えることが可能になる。このようないくつかの合本の教科書を作ることはそう難しいことではないと考えるがどうだろうか。多くの合本が発行されることを望みたい。

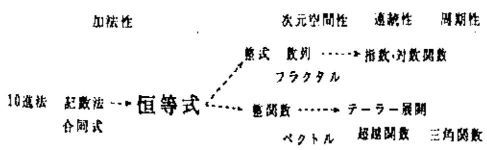
(2)基礎・基本と学力

基礎・基本から受ける事柄は各人各様で、一般的には「易しいこと」と誤解されやすいことである。生徒や保護者の想起する事柄と授業者のそれとでは異なるものだろう。学力とは、ある一つの学び（これまで述べた概念であり，認識の変化など）から、多くの事を生徒自ら学び取りうる可能性を持った力と考えるとき、その核となるべきものが基礎・基本ではなかろうか。そのためにも、個々の事柄とその関連性と背景を把握するよう努め、導入・発展で認識の変化を生徒にもたらすような授業者でありたいと考えている。

4．数学学習の関連性の具体例

中・高一貫の流れの中での「式」を中心として、学習内容を検討してみる。

式に関するチャート



そこにどんな関連性が潜んでいて、それを具体化させるために、どんなプログラムがあるのが、中高生への授業実践をするなかで少しずつ見えてきた。現時点で式に関する認知地図を描いてみた。

<式の見方>

式を多角的に見る視点を養うことの大切さをまず強調しておきたい。

式そのものをそのままで扱うだけではなく、式を「揺り動かす」ことで、式そのものに隠れた姿・性質を見出だすことが出来るようにしたい。そのことで、対象を見る目に変化が現れ、式に関する認識の変化が得られる。これが、式に関する基礎・基本と考える。

言いかえれば、式の『極意』ということである。

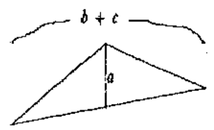
①分配公式 $a(b+c)=ab+ac$

学習者は、これをはじめて学習するとき、【目】（思考）は左から右へと流れる。当然のことである。しかし、いったん等式が出来あがると、逆の話が出てくる。

$ab+ac=a(b+c)$ この逆を学習することによってはじめて分配法則が理解できたことになる。

この等式を見る【目】の指導は、中1では極めて大切であると感じている。

小学生は、「＝」を左辺の結果としての「は」としての認識が強い。ところが、円柱の表面積のときは、共通な 3.14 を利用したり、また2つの三角形の面積の合計を求めるときに、各々の高さが分からなくてもその合計が明示されていれば求められることをを経験していることもある。これらを利用しながら、両辺を



意識することを徹底させたい。同類項をまとめることの第1歩でもある。

よく、間違えるものに、a(b+c)=ab+c がある。

ここには、＋を飛び越して積が出てくる不思議さがある。

$(-1)\times(-1)=1$ の誤った証明に、次のようなものがある:

$(-1)\times(1+(-1))=0$ だから、$(-1)\times 1+(-1)\times(-1)=0$

よって、$(-1)\times(-1)=-(-1)\times 1$　$\therefore(-1)\times(-1)=1$

これは、負の数について分配法則が成りたつかどうかを意識していないところに間違いがある。分配法則は易しくない。

②恒等式

『式の極意は、恒等式なり。』

ア）因数分解との関連

恒等式の指導は、「数学 A」の式と証明のところで扱うが、他の章・項目ではその述語は取り上げられることはまれである。恒等式は、因数定理の証明のとき用いているが、それ以前の因数分解になると、恒等式

の考えは引っ込んでしまうことが多い。例えば、

$6x^2-13x+6$　の因数分解で、「たすきがけ法」がよく用いられる。ところが、１次式と１次式の積に分解するということであるから、

(( )x+( ))(( )x+( ))のようになることの理解は難しくない。これによって、

$\begin{matrix}2 & & -6\\ & \times & \\ 3 & & -1\end{matrix}$　のような計算は不要になる。２と６に共通因数２があるからで不適である。この授業をするとき、思考錯誤のたすきがけ法を知っている生徒は、はじめのうちは分かりにくいような顔をする。しかし、理解すると、その後は思考錯誤のたすきがけはしなくなる。両辺の係数等を比べる習慣が、その後の２項定理の理解を容易なものにする。

等式の見方を、「左辺から右辺へ」から「両辺を同時に」という一方向でない認識の変化を促すことの重要性を強調したい。

イ）関数との関連

「数学Ａ」の教科書の等式の証明のところには、次のような問題が必ずといってよいほど載っている。

次の式が恒等式となるように、a, b, c を決定せよ。 $2x^2+4x+3=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

しかし、これを恒等式の利用のときだけにしてしまっているのではないか。「数学Ⅰ」で２次関数を学習するとき、この式にｘ＝１での接線が見える目を持たせてやりたい。２次関数はいろいろな変形ができるんだ、とみせてやりたい。関連性があることを知ることで、式の扱い方が徐々に養成させる。もちろん、それ以前に、中学での１次関数も、ｙ＝ ax+b で終わらせてはならない。(これについては後に詳しく述べる。)

③記数法

実は、恒等式という術語は、高校１年である。しかし、そのルーツは、記数法である。ところが、次期改訂で記数法は中学校からはずされる。残念なことである。このことは、恒等式を利用する因数定理に支障をきすので、式と計算の前に学習させたい事柄である。

$3\times10^4+2\times10^3+7\times10^2+5\times10+6$ と 32756

この２つは教師にとって当たり前のことであるが、中学生にとって別物のようである。例えば前者で 10^3 で割った余りを求めよと、後者で 1000 で割った余りを求めよ、とでは全く受け止め方が違うようである。それは、つぎのように底を７に変えた７進法の問題

$$1\times7^4+2\times7^3+3\times7^2+4\times7+5$$

において、同様に 7^3 で割った余りを求めよと問うと、急に元気がなることから判断できる。この困難性は、『和の形』にあると感じている。つまり、①で指摘した分配法則の未熟さでもある。剰余の定理も全く同様であり、　$2x^2-5x+7=(x-1)(2x-3)+4$

など、　$x-1$　で割った余りを求めるのは苦手であり、ましてや次のような場合には、

$$2x^2+4x+3=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

$(x-1)^2$　で割った余りを求めるのはより難しくなる。ここで、ｘ＝ 11 とすれば、11 進法から 10 進法への変換である。このことからみても「式」の多角的な見方がその後の数学学習にどれほど大きな影響を与えているかが見て取れる。高校数学で重要な因数定理や剰余の定理を理解するためには、生徒にとって具体的な数を扱う、10 進法からの準備が欠かせない。

これからがこの小論の本題である。

５．式から関数・方程式へ

(1-1)「関数は関数を生む」

これは、関数自身に関数が組み込まれていることをさしている。組み込みの見方はいろいろ考えられる。

具体的に２次式を例にとって見てみよう。

２次式を利用した内容として、２次関数，２次方程式，２次不等式などがあり、次の自然な流れが考えられる。

２次式⇒（２次元座標平面へ：視覚化）⇒２次関数

⇒（関数のある値を与える変数を探る）⇒２次方程式

⇒（関数のある値の範囲を与える変数の範囲を探る）

⇒２次不等式

$y=ax^2+bx+c$　の右辺を「揺り動かす」と、いろいろな変形が考えられ、それぞれ意味のあるものになる。式を恒等式によって、いろいろ変形することで、一つの関数から比較対象関数群が得られる。見かけ一つであるが、そこから第２・第３の関数をゲットすることができる。それらを視覚化したグラフを考えることで、種々の相対的な位置関係が把握できることになる。この認識の変化が、解決したい事柄に適するように、方程式や不等式から関数を作り出すこと等、元の式を「揺り動かす」変形を促すことになる。つまり、たった一つの式が複数になることで、思考の手掛りが手に入れられることになる。

２次関数を例として、具体的に見てみよう。

$y=2x^2-4x+5$　　について、

ア）　$y=2x^2-4x+5$　　そのものを扱う：

これは、これで価値がある。グラフの基本は、ｘに値を入れそのときのｙの値とのペアを点としてプロットすればグラフは描けること。(グラフの定義そのもの)

イ）　$y=2x^2-4x+5$　　から次の３つの基本関数を

作る：　$y=2x^2$　　$y=-4x$　　$y=5$

つまり、元の関数は、３つの関数の「和」として考える。これは、教科書にもよくある変化の表：

x	………	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x^2$	………	8	2	0	2	8	18
$y=-4x$	………	8	4	0	-4	-8	-12
$y=5$	………	5	5	5	5	5	5
$y=2x^2-4x+5$		21	11	5	3	5	11

これによって、対称性の予想が出来る。

ウ）　$y=2x^2$　と　$y=-4x+5$

とに分解する：

$y=-4x+5$　のグラフに　$y=2x^2$

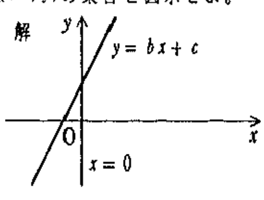
の関数の値を加算していく方法である。

このことについては、１９９５年日数教東京大会（早稲田大会）において、『２次関数のグラフの構造』と題した発表を行った。イ）の数値の計算は省略して、グラフの概形を描く方法として、それまでなかった方法と自負しているものであるが、まだ全国的には知られていない。

> $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$….①のy切片での接線は、
> $y=bx+c$…..②である。
> ②と$y=ax^2$の関数の値の合計を作図すること。
> 微分を利用することなく、①が②を元にして
> 描くことが可能になる。
> ①と②を連立すると、$x=0$（重解）を得るから、
> y切片のみ共有点（接点）である。

教員になってからずっと、１次の係数ｂの働きを微分を用いずに視覚化できないものかと考えてきたので、大変嬉しかったことを思い出す。ここでは、バージョンアップして、これを「恒等式」と「比較対象関数の創出」という観点から、まとめることが出来ると考えている。関数自身に比較対象関数が埋め込まれていることの認識が大切である。

次の問題は、このことを理解させる良問である：

> 定数b，cが一定であるときに、
> $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$…①
> aの値を変化させたとき、①が通過しない
> 点(x,y)の集合を図示せよ。
> 解
> 
>

この分解は、後の３次関数からテーラー展開まで関連する。

エ）　$y=2x^2+5$，$y=-4x$　　と２つの関数を比較対象とする：ウ）と同様。グラフの合成がウ）より工夫がいる。

オ）　平方完成　$y=2(x-1)^2+3$　：

これについても　$y=3$　という比較対象関数が存在している。しかし、多くの指導ではこのグラフを利用することは多くないと予想される。頂点の座標はもちろん大切であるが、曲線と直線の位置関係を代数的に[重解]であることから理解することの大切さがその後の学習に幅を持たせるのである。つまり、このｘ軸に平行な直線と２次関数のグラフとの共有点から、後の一般化した接線へと発展する。

ところが、オ）の学習には注意点がある。

２次関数のグラフの特徴としての頂点の座標(1,3)がわかる標準形と、１次関数のグラフの特徴である通過点がわかる式の形は、それぞれ「恒等式」として考えれば全く同様である。しかし、教科書では、中学２年で１次関数を学習する際、傾きとｙ切片だけである。２次関数の式変形を１次の変形練習なしに、いきなりであるから難しいものになってしまう。

高２の「数学Ⅱ」<図形と方程式>での直線を学習する以前に、２次関数を先行して学習することになっている。ここでも関連性の重要性を指摘しておきたい。平方完成ができても頂点の座標(1,3)が読み取れないというのことは珍しいことではないからである．１次関数について、　$y=2x+1$，$y=2(x-1)+3$

のような変形とその図形的な意味することを学習することが２次式を学習する準備して大切である。上記第１の式は表出している（目で確認できる）２つの数が、傾き２とｙ切片１であることは言えるが、中学２年生の多くは、ｙ切片がｘ＝０のときの値であることを確認していない。それが証拠に、第２の式が通る点を１つ挙げよと問うても、(1，3)の即答が困難であることがある。この困難さは、生徒にとって関数のグラフの定義「ｙ＝２ｘ+１を満たす点(x,y)の集合」が使えないこと、つまり、グラフと点の情報処理について関連性を認識していないこと。また「この直線上の格子点をすべても求めよ。」という問題に、「無限にあるから」と答えが一つなら答えられるが、無理だと言わんばかりである。これももっともな話で、(a,2a+1)（a は整数）と自然に答えられまで文字の働きの指導が必要である。その理由の一つには、１次方程式や連立１次方程式の応用問題での未知数としての文字の使用と概念が異なるからである。パラメータとしての文字の経験が、高校へとつながっていく。格子点という整数でなく、

すべての数とすればグラフの定義そのものの言い換えである。「認識の変化」によって無限さえも掴まえられる。　しかも、結果は見かけ代表の一つの座標の(a , 2a+1)であること。

いずれにしても、２次関数を平方完成する変形は、生徒にとって躓きやすいところである。そこで、

＜生徒の誤答を生かす指導＞

カ)　　$y = 2x^2 - 4x + 5 = 2x(x-2) + 5$

生徒によっては、平方を作らず一部を因数分解した式に変形したりする。ここでは、この式を利用し、どうすれば平方完成が得られるかの授業展開をしたい。ｙ＝５を考えると、交点のｘ座標２つが容易に見出せるということがわかる。〈これによって、交点のｘ座標の平均が頂点のｘ座標であることを利用した平方完成もよく用いられる。〉　ここでは、頂点とはｘ軸に平行なグラフとの交点であり、しかも唯１つである場合である. このことを利用して、変形をどうすればよいか考えよ、と生徒全員に問いかける。

２次の係数を除いたｘ(x-2)にある２つの１次式ｘとｘ-2 の平均であるｘ-1 を採用すれば、１次の係数は不変である。　$y = 2(x-1)^2 + (\quad)$　ここで､再び｢恒等式｣の考えを用いて、ｘ＝１のときの値を確認して( )内の数を確定することになる。左辺の２次式をある一方向に変形していくことも大切であるが、両辺を同時に見ることの大切さも学習させたい。変形の方法は無限にあり、平方完成はそのなかの単なる一つに過ぎないと理解させたい。

一般に、$y = 2(x-p)(x+p-2) + 2p^2 - 4p + 5$と変形することで、$y = 2p^2 - 4p + 5$との関係が見えてくる。

キ)　　$y = 2(x-1)(x-2) + 2(x-1) + 3$

のような変形：これは、２点(1,3) , (2 ,5)を通ることが容易に確認できる良さがある。もちろん、比較対象関数として、ｙ＝ 2(x-1)+3　を利用するのもよい。

ク)　　$y = 2(x-2)^2 + 4(x-2) + 5$

これは、オ）の平方完成の一般化である。

一般化とは、オ）では、(x-1)の １ 次の項が欠損していたのである。逆にいえば、平方完成は、

「ｘ-1 の１次のべきの欠損」

といえる。つまり、頂点での接線の傾きは０であることを確認したい。比較対象関数が平方完成と異なり、ｘ次に平行な直線からｙ＝4(x-2)+5　と傾いたのであるが、これがク）のｘ＝２での接線であることの理解は、これまでのグラフの準備からそれほど困難ではない。微分を用いずに接線が考えられることの素晴らしさを感得させたい。

ケ）３点(-1,11),(1,3),(2,5)を通過する２次関数のグラフ：２点(-1,11),(1,3)を通過するのは、

$$y = a(x+1)(x-1) - 4(x-1) + 3$$

である。ここで、y=-4(x-1)+3 は、２点(-1,11),(1,3)を通過する直線である。点(2,5)を通過することから、

a=2.　　よって、y=2(x+1)(x-1)-4(x-1)+3

この他に、次のような式もよく用いられる：

$y = a(x+1)(x-1) + b(x-1)(x-2) + c(x-2)(x+1)$

以上、比較対象関数を利用した式の姿を眺めてきた。

(1-2)方程式は関数の切り口

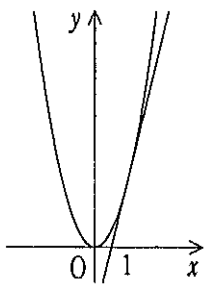
２次方程式を解決する方法に、関数を利用し、視覚的に捉えることがある。いかに関数を考えるかが課題になる。式から関数を創出したように、

方程式 f(x)＝０は、関数 y=f(x)の零点問題である。ここで、関数 y=f(x)の変形によって、如何に視覚化を容易にし、解析しやすくするかが課題であるが、(1-1)で示してきたように、関数を「和」に分解したり、「差」に分解したりと自由にできる。零点を求めるのであるから、「差」の分解による方が創出関数っを視覚化したとき考察しやすい。

例えば、　$x^2 - a(x-1) = 0$　の実数解の個数と定数ａの値については、多くは判別式を用いるが、関数を利用してみる。　$y = x^2$, $y = a(x-1)$

この２つの関数を比較し、ｘ＝ｔ（実数）に対し、それぞれの関数の値が同じであると、与えられた方程式を満たすことになる。ｔが存在（交点の存在）するようなａの値の範囲を調べることになる。

図のようになり、(1,0)を通る直線との位置関係に帰着される。



a<0 であれば必ず交点をもつ。a=0 のときは接するのでＯＫ. 残るは、a ＞ ０の場合であるが、これも接するときが限界であるから、第２のパラメータｐを用いた、

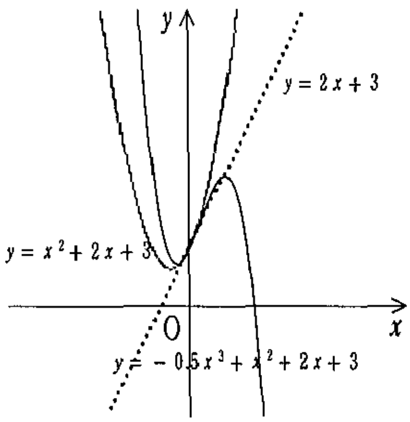
$y = x^2 - a(x-1) = (x-p)^2$　　という恒等式を利用することになる。これより、p=0 or p=2 つまり、a=0　or　a=4　よって、ａは４以上または０以下。

(2-1)３次式と３次関数

これについては、「1998 年度第 30 回数学教育論文発表会」(大阪教育大学）にて、『整関数のグラフの構造―関数のカリキュラム改革に関する一考察―』と題して発表した。２次式の準備が、３次式・３次関数へと生きる。これを、「関数が関数を生む」という観点で見直してみる。２次関数より、組み込まれている関

数は多くなる。

3次関数のグラフで、ある条件を満たすようなグラフを描かせたいが、その関数の式をどのようにしておけばよいかという場面がある。
例えば、[極大が第1象限、極小は第2象限にある]⇒（大雑把に）⇒[まず第1に、3次の係数は負で、y切片での接線の傾きは正でなければならない。、例えば3次関数に含まれる1次関数部分を $2x+3$ とする。次に、極小が第2象限にある安全策として、3次関数に含まれる2次関数部分を x^2+2x+3
とする。理由は、 $y=x^2+2x+3$ がx軸と交わらないため。すると、 $y=-0.5x^3+x^2+2x+3$ のグラフは、3次の部分 $-x^3$ だけ、 $y=x^2+2x+3$ より上にくるからである。グラフを描くと：



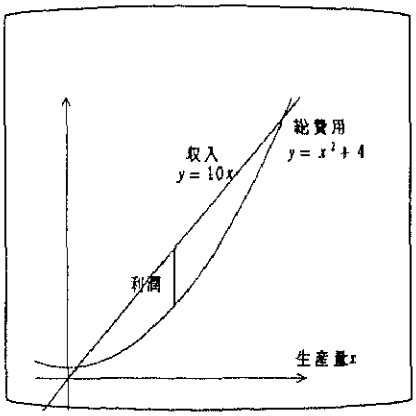
これについては、生徒にグラフ電卓を与え3次関数のグラフの構造を探らせるのも面白い。

これは、関数の和を自分で構成させる方法である。
$y=2x+3$, $y=x^2+2x+3$,
$y=-0.5x^3$
前の2つの関数（1次・2次）を比較対象関数として、それに3次部分を加算する作業である。これによって、大雑把（極大値・極小値は不明）なグラフが描けることになる。極値は別の恒等式（べき展開）の利用で求められる。この3次関数の描画法によって、生徒のグラフが正しいか否かが（極値の数値は除く）瞬時に判定できるようになる。

関数による値の変化を読むためには、新たな関数を補助とするために、微分によって、導関数を創出してきた。しかし、導関数以外にも、関数それ自身に関数が組み込まれていることをもっと重要視することが関数理解に必要である。慶応大学の経済学部の藤田康範先生が本校の中3「テーマ学習」に経済を数学を用いた授業をして下さった。

「文化祭でたこ焼きを作るときの利潤について」
条件：固定費用4円，生産量x個，1個当たりの価格＝10円，可変費用 x^2 円とする。　このもとで考察することになった。問題：「利潤が最も大きいのはどれくらい生産すればよいか」

まず総費用＝ x^2+4 円，収入＝ $10x$ 円を計算する。すると、「利潤＝収入－総費用が最大となる生産量xを求めよ」という問題になるが、グラフは図のようになる。が、生徒は、即座に、「収入直線に平行な直線を曲線へ接線で引いたところの値xが求めたい生産量である」と。藤田先生は、生徒の理解の良さに驚いたと話をして下さった。



計算なら、次のようになる。上の式は平方完成であり、下の式はx＝5での接線が 10 xのグラフと平行であることを示している。

$$10x-(x^2+4)=-x^2+10x-4=-(x-5)^2+21$$
$$x^2+4=(x-5)^2+10(x-5)+21$$

数学を使うことで、予想できないことがわかるのである。この数学認識の変化こそ、これからの数学教育で重要なテーマである。

(2-2)べき展開と極限値とテーラー展開

$$y=f(x)=2x^3-5x^2+4x+1$$
$$=2(x-p)^3+(6p-5)(x-p)^2+(6p^2-10p+4)(x-p)+f(p)$$

これを、x-pでのべき展開（テーラー展開）と呼ぶ。べきが1次の係数 $(6p^2-10p+4)$ がx＝pでの接線の傾きであるから、極値は、 $(6p^2-10p+4)$ が0となるところを探すことになる。x－pの1次のべきの項を欠損したものを「立方完成」と呼ぶことにする。この恒等式利用は、記数法でも学習した割り算を利用する。（簡便法としては、組み立て除法がある）
また、極限値（微分係数）を求める際にも、この恒等式は活躍する：

$$y=f(x)=2x^3-5x^2+4x+1$$
$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=2(x-p)^2+(6p-5)(x-p)+(6p^2-10p+4)$$

これによって、x→pは容易に求めれる。

また、２次関数での変形ク）の恒等式との関連で、

$y=f(x)=2x^2-4x+5$ の $x=2$ での接線の傾き？

$$f(x)=2(x-2)^2+4(x-2)+5$$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=2(x-2)+4 \longrightarrow 4 \quad (x \longrightarrow 2)$$

$y=f(x)=2x^2-4x+5$ の $x=0$ での接線の傾き？

$$f(x)=2(x-2)^2+4(x-2)+5=2(x-2)x+5$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2(x-2) \longrightarrow -4 \quad (x \longrightarrow 0)$$

ｙ＝５との交点での接線の傾きは２次関数のグラフの対称性から絶対値４と等しい。

(3) 不等式・近似式と関数

「数学Ⅲ」で学習する１次近似式や２次近似式で、べき展開の威力が発揮される。

不等式の証明においても、関数を利用することが可能になる。生徒自分で関数を作れるようになれば素晴らしい。その基本が、

ｘのある範囲Ｄにおいて、f(x)＞g(x)

不等式の証明において、差をとることがよくあるが、それは、F(x)=f(x)－ g(x)をＤで考えていることになることで関連性が出てくる。

６．終わりに

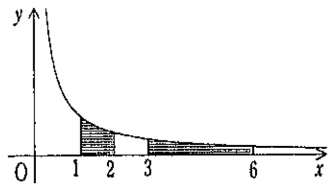
この小論は、中・高の生徒を12年間指導してきて、基礎・基本となるためにどんなことが関連しているかに焦点を当ててみたものである。生徒は、自分で学習することの楽しさを忘れているかのようである。時代なのか、多くの刺激がありすぎるのか。他者との付き合い方が苦手でストレスがたまりつかれているのか。

認知心理学的には、数学を暗記科目と言われないために、いかに「長期記憶」に絶えれるもの、すなわち「数学認識の変化」を学習するかでもある。日本史を例に挙げるなら、歴史上の人物や戦争など時代ごとの話が数学では項目に相当するだろう。一貫した風が通り抜けるテーマとして、例えば＜税と為政者と民の関係＞が歴史認識として面白い。時代と共にどんな変化をし、不変なことは何かを学習することの大切さが数学にも欠かせない。渡辺先生のお話を示したように、具象から何かを獲得し、数学を用いて抽象化することでの認識の変化を数多く経験させることであろう。その意味で、先の経済モデルのような授業はその効果が大きいと感じている。

参考文献・その他

*1　高等学校数学指導資料
「指導計画の作成と学習指導の工夫」平成４年文部省
このなかで、基礎基本は固定的なものではないとしている。　数学学習で不変なものを見出したい。

*2　渡邊公夫　　本校の数学教育研究会でのお話
教育研究会 2000 報告書（2001.3 月発校予定）



ｙ＝１／ｘのグラフで、打点部の面積は、どんな関係にあるか？という問題を出された（積分計算は不可）。即答できず無念。

*3　藤原正彦　「教育の原点」
発言者　Vol. 80　秀明出版社

*4　駒野　誠　「２次関数のグラフの構造」1995
日本数学教育学会（東京大会）

*5　駒野　誠　「整関数のグラフの構造」1998
日本数学教育学会論文発表会（大阪教育大）

*6　小松彦三郎から、「テーラー展開を新指導要領に導入することを考えた」とお聞きする。「数学Ⅱ」４単位を勝ち取った先生、現在東京理科大学教授

*7　教科書　　出版者としては、販売部数が気になるとか。「数学基礎」が新しく出てくるが、採用する学校は少ないようだ。教科書は、本文よりも章末問題等でどこまで入れるかに勝負の感があるかも。

*8　概念　　本校の生徒は、「入試問題の研究」を授業でしてくれることを期待していない。生徒曰く、「他では学べないようなことを授業でやって欲しい」という。初めて本校に赴任した年に高３の統計の授業（入試科目ではない）を受け持った。そこで、君は何を目的として授業を選択したかと問うと、「統計の概念、特に分散の概念を知りたい」と、これには本当に驚いたことを昨日のように覚えている。よく「駒場は受験指導で大変でしょう」と聴かれる。この誤解は、学校生活に参加してもらわない限り、外からでは解消されないないことかもしれないと感じている。

*9　大学教育　　大学生の学力低下が叫ばれている。しかし、大学では、定義と定理の個々の証明が授業の中心で、その「概念」を掴むことなく次々と先へ進んで行く。これが、問題であると、今考えている。きっと今学生だったら、質問が山ほどあるのにと思う。多くの現役学生は、どうなのだろうか。