数学教育を通して取り組んだ総合的な学習とその実証的な研究

― 算額を用いた課題学習とそのフィールドワークの実践から ―

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
牧下　英世

数学教育を通して取り組んだ総合的な学習とその実証的な研究

-算額を用いた課題学習とそのフィールドワークの実践から-

筑波大学附属駒場中学校・高等学校
数学科　　牧下　英世

要約

本校の高校の修学旅行は高校1年次の夏休み前後から準備がはじまり，高校2年次の5月に実施している。生徒は4～6名で班を構成して，それぞれの班ごとに研究テーマを定め，そのテーマに沿って調べ学習が行われる。教官サイドからは通常の教科活動の中で，関西地域の地理，歴史について，また文学作品なども関西地域に由来するものを意識して取り上げた授業を行っている。このような日々の活動を通して，生徒たちは自分たちの修学旅行のテーマや行動計画を作り上げ，当日のフィールドワークによって，それまでの学びを生徒自身の五感で確認することに繋げていく。『百聞は一見に如かず』である。

本校52期の修学旅行では，1日目の行動で名古屋から吉野山にかけて，算額コース，伊勢コース，伊賀コースの3方面のコースが設定された。

平成15年度から本校では，校外学習における地域研究を総合的な学習の時間の大きな柱として位置づけている。

本論は，上記3コースのうち算額コースにおいて実践した内容であるが，高等学校の総合的な学習の時間での事例を意識しながらまとめたものである。

【キーワード】総合的な学習，課題学習，算額，円満寺，弘仁寺，耳成山口神社，庚申堂，反転法

1　はじめに

総合的な学習の時間が，「各学校が，地域や学校，生徒の実態等に応じて，横断的・総合的な学習や生徒の興味・関心等に基づく学習など創意工夫を生かした教育活動を行う時間」として，新しく学習指導要領に位置づけられた。総合的な学習の時間の内容については示されていないが，

(1)　国際理解，情報，環境，福祉・健康などの横断的・総合的な課題

(2)　児童・生徒の興味・関心に基づく課題

(3)　地域や学校の特色に応じた課題

などが例示として挙げられ，今年度の4月より全国の小学校，中学校において，これらの課題を中心に総合的な学習の時間が実施されている。

「生きる力」を育むという目的を実現するために，総合的な学習の時間が加えられたが，社会には「学力低下問題」もあり，総合的な学習の時間についての否定的な声も聞かれる。それは総合的な学習の時間の新設により，教科の内容が減り，児童・生徒の基礎・基本になる教科の学習が阻害されているのではないかという懸念である。

学習指導要領では，総合的な学習の時間（以下，「総合学習」と略す）のねらいを

- 「自ら課題を見付け，自ら学び，自ら考え，主体的に判断し，よりよく問題を解決する資質や能力」
- 「問題の解決や探究活動に主体的，創造的に取り組む態度」

を育むと掲げている。私はこの能力や態度は，問題解決能力そのものであると考えているが，総合学習のねらいが教科の学習のねらいと合致する部分が多くあることからも明らかである。

そのために，児童・生徒が興味・関心をもてる対象

Empirical Research of Integrated Study through Mathematics Education
- Task-based Study in Mathematics with the Sangaku and its Fieldwork -
Hideyo Makishita　Junior high and Senior high School at Komaba, University of Tsukuba

を見つけ，それに関わることができる十分な時間を，教師が与える，つくることが必要である。

今回の学習指導要領の改訂により，数学では「数学的活動の楽しさ」が追加され，具体的事例や研究が発表されている。私は，「児童・生徒の興味・関心に基づく課題」による総合学習を活用すれば，これまでの教科の授業だけではどうしてもできなかった活動を補完したり，教科の内容をより深めたりすることができると考えている。

2　本校の総合学習

本校では新しい教育課程について，幾度となく議論を積み重ねてきた。特に総合学習については，これまでに培ってきた教育活動を学校5日制のもとでも継承し，総合化することにし，中学校では今年から実施している。

〔中学校〕

1年次は水田稲作と東京地域研究

2年次は東京地域研究と東北地域研究

3年次は東北地域研究とテーマ学習ほか

を行っている。

〔高等学校〕

1年次は水田稲作と関西地域研究

2年次は関西地域研究と卒業ゼミナール

3年次は卒業企画

を予定している。

本校の「地域研究」は，これまで校外学習で培われた本校の大きな教育的な財産であり，総合学習の大きな柱として位置づけられている。

3　研究方法

江戸時代に発展した日本の数学を和算とよび，数学（洋算）と区別している。江戸時代には数学が得意だからといって，わずかの例外を除くと，職につけるとか生活が豊かになる，などといったことはほとんどなかったにもかかわらず，日本中のどんな村でも数学好きの人がいたことが様々な文献や資料から明らかに残されている。そこで明らかになったことの一つに，江戸時代の庶民は数学が一般に好きであったことが挙げられる。彼らは自分のつくった数学の問題を絵馬にして社寺に奉納し，成果を発表していた。この絵馬を「算額」という。

私は，平成13年度より本校52期生の担任となり，数学の授業を担当している。そこで，「生徒の興味・関心に基づく課題」という観点により，関西地域研究において「算額」を総合学習化することを試みた。

そこで，私は，「数と式」，「図形と計量」の課題学習として算額の問題を取り上げ，教科と総合学習との関わりを課題として研究を行った。

また，校外学習（修学旅行）で奈良県の現存算額に取り組んだ。

4　授業での取り組み

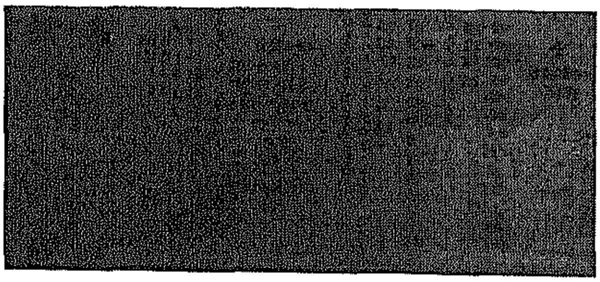
高校1年の数学科の授業において，単元ごとの内容を終えた後に，課題学習として現存する算額の問題を提示して取り組ませた。

「数と式」では，岩手県遠野市の駒形神社の算額を取り上げた。これは，不等式の証明を含む内容で，無理数を近似分数で表示する問題であり，和算ではこの術を零約術（れいやくじゅつ）という。

また，「図形と計量」では，岐阜県郡上八幡の八幡神社の算額の問題を取り上げた。これは，三角形における余弦定理と三角形に内接する円についての内容である。この問題を余弦定理による方法と初等幾何による方法で問題解決にあたった。

4．1　岩手県遠野市の算額

岩手県遠野市の駒形神社には，次のような算額が奉納されている。そこで扱われている内容は，幾何とこ



【駒形神社の算額：文化五年(1808)菊池治兵衛奉納】

こで取り上げる零約術についての問題である。

岩手県遠野市は，本校の中学3年生が東北地域研究で訪れる地でもあり，本校の生徒にとってはなじみの深いところである。

次に挙げるのは，零約術の問題について，その原文と現代文である。

授業では，原文を渡した上で算額の写真を投影し，私が問題を読みながら取り組んだ。

奉納

雖関流之算法学固陋而不至端緒為求神之助問然

一、今七十三ヲ平方除八不尽多故分母子ニ約メシテ而問其数ヲ

答曰　百二十五歩ノ千令六十八

術曰　七十三ヲ平方ヲ平法開八五分四厘四毛不尽拾

是ヲ右ニメ一ヲ左ニメ零約術ニヨリ百二十五分千令六十八得合問

奉　文化五戊辰歳　綾織村長岡

掛　四月八日　菊池治兵衛

加好

> **問題**　$\sqrt{73}$ を近似分数で表せ。
>
> 答　$\dfrac{1068}{125}$

この問題は術文にあるように，$\sqrt{73}=8.544\cdots$ を知っていて，零約術というアルゴリズムによって，$\sqrt{73}$ を近似分数で表す問題である。

零約術は分数の数列をつくり，両側からその分数で挟み込んでいく算法である。

この場合，$\sqrt{73}=8.544\cdots$ より

$$\frac{8}{1}<\sqrt{73}<\frac{9}{1}$$

であるから，挟み込んだ両側の分数について，分母は分母どうしを，分子は分子どうしをそれぞれ加える演算を行う。

この場合，その結果は $\dfrac{8+9}{1+1}=\dfrac{17}{2}=8.5$ となり，$\sqrt{73}=8.544\cdots$ より小さいから，次は大きくするために，結果 $\dfrac{17}{2}$ の分母と分子に $\dfrac{9}{1}$ を使って計算する。これは上の計算結果より，$\dfrac{17}{2}<\sqrt{73}<\dfrac{9}{1}$ であるから，$\dfrac{17+9}{2+1}=\dfrac{26}{3}$ と計算し，$\dfrac{26}{3}=8.6666\cdots$ となり，$\sqrt{73}=8.544\cdots$ より大きいから，小さくするために，結果 $\dfrac{26}{3}$ の分母と分子に $\dfrac{8}{1}$ を使って同様の計算をする。すなわち，$\dfrac{8}{1}<\sqrt{73}<\dfrac{26}{3}$ より $\dfrac{8+26}{1+3}=\dfrac{34}{4}$ と計算する。

同様に，計算した結果が $\sqrt{73}=8.544\cdots$ より，大きいときは小さくするために $\dfrac{8}{1}$ を，小さいときは大きくするために $\dfrac{9}{1}$ を，それぞれ使って計算していく。

4．1．1　先人の知恵(1)

このアルゴリズムを和算では関の零約術といっている。関とは関孝和のことである。

このアルゴリズムに従って計算すると，答えの $\dfrac{1068}{125}$ へは確かに到達するが，計算回数が 100 回を越えてしまうという難点がある。

この零約術のアルゴリズムに対して，和算には次のようなアルゴリズムもある。

$$\frac{8}{1}<\sqrt{73}<\frac{9}{1} \Rightarrow \frac{17}{2}<\sqrt{73}<\frac{9}{1} \Rightarrow \frac{17}{2}<\sqrt{73}<\frac{26}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{17}{2}<\sqrt{73}<\frac{43}{5} \Rightarrow \frac{17}{2}<\sqrt{73}<\frac{60}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{17}{2}<\sqrt{73}<\frac{77}{9} \Rightarrow \frac{17}{2}<\sqrt{73}<\frac{94}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{111}{13}<\sqrt{73}<\frac{94}{11} \Rightarrow \frac{205}{24}<\sqrt{73}<\frac{94}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{299}{35}<\sqrt{73}<\frac{94}{11} \Rightarrow \frac{393}{46}<\sqrt{73}<\frac{94}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{487}{57}<\sqrt{73}<\frac{94}{11} \Rightarrow \frac{487}{57}<\sqrt{73}<\frac{581}{68} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{487}{57} < \sqrt{73} < \frac{581}{68} \quad \text{より}$$

$$\sqrt{73} \fallingdotseq \frac{487+581}{57+68} = \frac{1068}{125}$$

駒形神社の問題は関流の零約術であるが，このアルゴリズムは，関流から分かれ最上流の祖となった会田安明により考案された零約術である。

生徒の中には，会田の零約術に気づいた者もいた。中学2年（55期）に対しても，この年から始まった総合的な学習の時間を担当したこともあり，この零約術を紹介してみたが，中学生の何人かは会田の零約術のアルゴリズムに気づいた生徒がいたことを記しておく。

さて，私はこの問題を解くにあたって，岩手県在住の和算研究家の安富有恒先生から，一関図書館所蔵の安島直圓による「平方零約解」に，$\sqrt{73}$を零約術により求める問題があることを教えていただき，その写しを手に入れた。その中では，関の零約術による解答であった。東北地方の算額は関流の流れをくむものが多く，当時会田のアルゴリズムはどのくらい流行っていたのかということに興味を覚えた。

また，東北帝国大学の林鶴一先生の和算研究集録の上巻（p633）にも同じ$\sqrt{73}$の近似分数を求める問題があり，この問題はもしかしたら有名な問題なのかもしれない。

算額を奉納する者は，こういった当時の数学専門書を参考にしたのではないだろうか。

なお，つぎの不等式を使うことで零約術の考えを現代数学的に説明することができる。

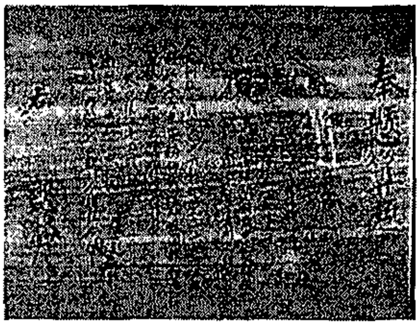
正の数a，b，c，dについて

$$\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$$

数学Aの数と式の中で取り上げられることが多いが，この式により零約術が保証されるのである。

4．2　岐阜県郡上郡八幡町の算額

岐阜県郡上郡八幡町の八幡神社には次のような算額が奉納されている。「図形と計量」の単元を学習した後，課題学習としてこの算額の問題に取り組ませた。



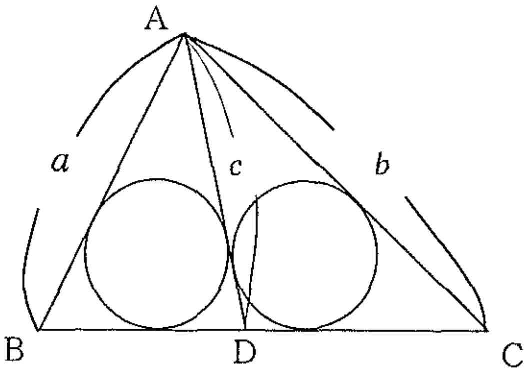
【八幡神社算額：嘉永3年(1850)高木允胤ら奉納】

八幡神社の算額には4つの問題があるが，そのうち，上の写真の問題に取り組んだ。生徒へはこの写真と原文を渡した。

（原文）

奉懸算題

今有如図三斜之内隔界斜容二円等各径只云
中斜二百五十七寸小斜六十八寸界斜四十
零寸問大斜幾何
答曰大斜三百一十五寸
術曰置中斜加小斜自乗之而得数之内減界
斜巾四段平方開之得大斜合問
右　神谷直縄



【問題】 図のように，三角形ABCにおいて，BC上に点Dをとる。△ABD，△ACDに同じ直径の内接円を入れる。AB＝a，AC＝b，AD＝cとするとき，BCをa，b，cで表しなさい。

（答え）　BC＝$\sqrt{(a+b)^2-4c^2}$

算額の術では，「中斜加小斜自乗之而得数之内減界斜巾四段平方開之得大斜」と書いている。

これを数学記号で表すと次のようになる。

$$大斜=\sqrt{(中斜+小斜)^2-4\times界斜^2}$$

実際の問題は，三角形の中斜（2番目に長い辺）が AC = 257，小斜が AB = 68，界斜（三角形を2つに分ける線）が AD = 40（寸）であるとき，大斜 BC の長さを求める問題である。

これを $a=68$，$b=257$，$c=40$ を代入して，BC = 315（寸）になり，当時の人々が正確に答えを導き出していることがわかる。

授業では，生徒が取り組みやすいように，AB = a，AC = b，AD = c として，BC = $\sqrt{(a+b)^2-4c^2}$ を導いた。

この問題は余弦定理の応用問題として取り上げたが，初等幾何の問題として生徒に証明などの考察をさせることも可能である。

参考までに，この算額の問題は学校数学ではパップスの定理（中線定理）の一般形であるスチュワートの定理を意識した問題である。なお，スチュワートの定理は次の形で表すことができる。

【スチュワートの定理】
△ABC で，辺 BC を $m:n$ に内分する点を D とするとき，次が成り立つ。
$$nAB^2+mAC^2=(m+n)AD^2+nBD^2+mCD^2$$
これをスチュアートの定理という。

スチュワートの定理は，幾何のいろいろな問題に対応できるので，高校数学のカリキュラムの中に，パップスの定理の応用としてぜひ取り入れたいと思う。

5　奈良県の算額

奈良県には円満寺，弘仁寺，耳成山口神社，庚申堂に算額があり，今回のフィールドワークでは，円満寺，弘仁寺，耳成山口神社の算額を，次の順に見学した。

【算額コース】

第1日目　東京駅＝＝＝＝＝（東海道新幹線）＝名古屋

名古屋＝＝＝＝＝（近鉄特急）＝伊勢中川＝＝＝＝＝（近鉄特急）＝大和八木（12：48着）

大和八木（12：48着　バス13:00発）－－－－－－－－－円満寺（13：50着　14：10発）－－－

－－－弘仁寺（14：25着　15：20発）－－－－耳成山（15：50着　登山道7分）・・・・・耳成山口神社（16：20発）

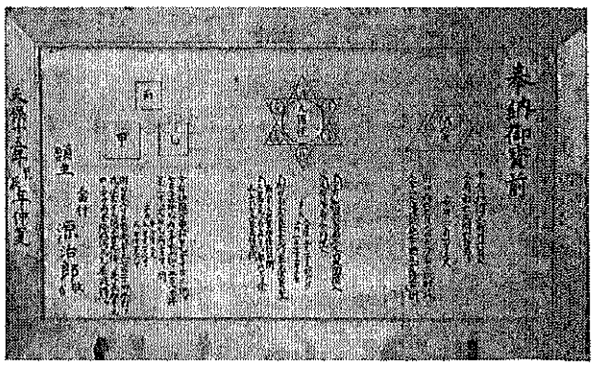
下山後　休憩（16:35）－－－－－－－－吉野（泊）（17：35着）

（凡例）　＝＝電車，－－バス，・・徒歩

5．1　円満寺の算額

現在円満寺は存在しないが，円満寺の算額は，奈良市下山町の八坂神社に復元されたものが掲げられており，だれもがいつでも見学することが出来る。本物の算額は奈良市の指定有形民俗文化財に指定されており，別の場所で管理されている。

円満寺の算額は，この地の源治郎により天保 15 年（1844 年）に奉納されたものである。算額には名字がなく源治郎とあるだけなので，源治郎は町人であったと思われる。算額の研究では裏面を見ておく必要があるが，本物の算額の裏面には「細工人安左ヱ門」という署名がある。この算額をつくった職人である。



【円満寺の算額　作者の名前は，源治郎とある】

問題は，三角・六角の問題で大変簡単であり暗算でも求められるものであるが，術文のアルゴリズムに着

目して解法を考えると面白いだろう。どの問題も術文に注目すると，なにやらある定数（433，2598）を掛けたり割ったりすることで答えを導いている。

和算では，求めるものの単位系について，次数（Dimension）を上げてから次数を下げることによって答えにたどり着こうとする算法がある。円満寺の算額の問題は，２次元の面積を求めてから，１次元の長さを求めている。

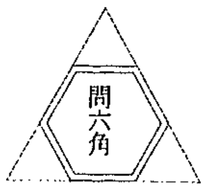
はじめ，生徒たちに円満寺の算額の白文と図を見せたところ，簡単な問題だから円満寺は“パス”とうそぶいていた生徒たちであったが，算額の術文にあるアルゴリズムに注目させることで，先人たちの智恵に感動していた。当時の人たちが，いかに工夫を凝らした解き方に重点を置いたかを垣間見ることができる。

５．１．１　円満寺の問題

円満寺の算額の問題を紹介しよう。

問題１	今有如圖三角内入六角三角面六尺問六角面ヲ 答曰六角一方二尺 術曰面六尺自之四三三ヲ乗三除術ヲ減 止余二五九八以除是止余開平方得合問

（現代訳）図のように，正三角形の中に正六角形が内接していて，正三角形の一辺が６尺のとき，正六角形の一辺の長さを求めなさい。



<考え方>

術のアルゴリズムに着目すると次のようになる。

術曰面六尺自之四三三ヲ乗三除術ヲ減

止余二五九八以除是止余開平方得合問

術：$6^2\times433\div3=5196$

止余（その差）：

$$\{6^2\times433-6^2\times433\div3\}\div2598=4$$

開平方：$\sqrt{4}=2$（尺）

<生徒への発問>

生徒には問題のアルゴリズムについて考えさせた。

①　433は何か　　　　②　2598は何か

<解答>

①　１辺aの正三角形の面積

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\fallingdotseq\frac{1.732}{4}a^2=0.433a^2$$

②　１辺aの正６角形の面積

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times6\fallingdotseq0.433a^2\times6=2.598a^2$$

なお，和算では小数点を使わなかったので，上の術文のように433や2598という記述になる。

<アルゴリズムの検証>

このアルゴリズを現代的数学で表すと次のようになる。すなわち，もとの正三角形の一辺の長さをaとすると，

術：$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\div3=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

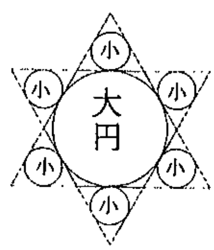
止余：$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$

開平方：$\sqrt{\frac{a^2}{9}}=\frac{a}{3}$

これより，一辺の長さをaの正三角形に内接する正六角形の一辺の長さは$\frac{a}{3}$である。本問は，$a=6$だから，求める正六角形の一辺の長さは$\frac{a}{3}=\frac{6}{3}=2$（尺）である。

問題２	今有如圖六角面三尺内大圓徑 入又有外角小円徑入 答云　大円徑五尺一寸九分六厘 　　　小円徑一尺七寸三分二厘 術曰　面三尺自乘二五九八乘三除實置 　　　面半之以實除得円合問 　　　又曰面三尺ヲ自之四三三ヲ乗以三ヲ除 　　　其上以七五除是得合問

（現代訳）図のように，１辺３尺の正６角形に大円が内接している。また，正６角形の１辺と隣辺の延長とでできる正三角形に小円が内接しているとき，大円および小円の直径を求めなさい。



＜考え方＞

術曰面三尺自乘二五九八乘三除實置

実：$3^2 \times 2598 = 23382$，$23382 \div 3 = 7794$

面半之以實除得円合間

面半之：$7794 \div (3 \div 2) = 5196$

←面（3尺）を半之（半分＝2で割る）

よって，大円径は5.196（尺）

又曰面三尺ヲ自之四三三ヲ乘以三ヲ除

$3^2 \times 433 = 3897$，$3897 \div 3 = 1299$

其上以七五除是得合間

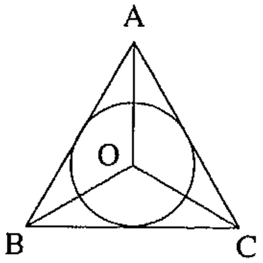
$1299 \div 75 = 1732$　よって，小円径は1.732（尺）

＜生徒への発問＞

75は何を意味するのか？

＜解答＞

右の図は，△ABC は小円に外接する正三角形とその内接円 O を示す。題意より，BC＝3だから，



$\triangle ABC = 3^2 \times 0.433 = 3.897$

$\triangle OBC = 3.897 \div 3 = 1.299$

また，小円の半径を r（直径は2 r だから）とすると

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 3 \times r = \frac{3}{2} r = \frac{3}{4} \cdot 2r = 1.299$$

$$\text{よって，} 2r = \frac{1.299}{\frac{3}{4}} = 1.299 \div 0.75 = 1.732$$

これより，0.75 すなわち 75 で割っている。

＜術文＞

＜アルゴリズムの検証＞

術曰面三尺自乘二五九八乘三除實置

与えられた正六角形の1辺の長さをaとする。

$3^2 \times 2598 = 23382$，実：$23382 \div 3 = 7794$

$$2598 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\text{実} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \div 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

面半之以實除得円合間

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \div (a \div 2) = \sqrt{3} a$$

面半之：$7794 \div (3 \div 2) = 5196$

←面（3尺）を半之（半分＝2で割る）

よって，大円径は5.196（尺）

又曰面三尺ヲ自之四三三ヲ乘以三ヲ除

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \div 3 = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2$$

$3^2 \times 433 = 3897$，$3897 \div 3 = 1299$

其上以七五除是得合間

$$\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \div \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{9} a^2$$

$1299 \div 75 = 1732$

$a = 3$より

よって，小円径は1.732（尺）

$$\frac{\sqrt{3}}{9} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{9} \times 3^2 = \sqrt{3}$$

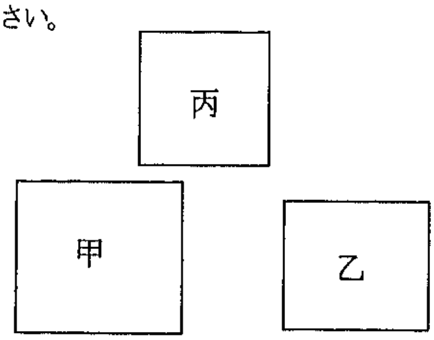
問題3　今有如圖方面三和甲乙方寸巾二和シテ七百二十四坪　乙丙方寸巾二和シテ五百八十坪

差二寸ニ定甲乙丙方寸ヲ問　答曰甲方寸二尺　乙方寸一尺八寸　丙方寸一尺六寸

術曰差二寸自乘是ヲ半之七百二十四坪内ヲ減シ止余半之開平方是ヲ倍シテ是ニ差□半之

甲ノ方寸丙差□□得又□□□得ル

（現代訳）　図のように，甲乙丙3つの正方形がある。甲と乙の面積の和は 724 坪，乙と丙の面積の和は 580 坪で，3つの正方形の辺についてそれぞれの差が2寸のとき，3つの正方形甲乙丙の1辺の長さをそれぞれ求めなさい。



＜考え方＞　□は不明のため，上に加筆

術曰差二寸自乘是ヲ半之七百二十四坪内ヲ減シ

$2^2 \div 2 = 2$，止余：$724 - 2 = 722$

加
止余半之開平方是ヲ倍シテ是ニ差□半之

止余半：722÷２＝361，$\sqrt{361}=19$

$(19\times2+2)\div2=20$ (寸)‥‥甲

倍減　　乙差減
甲ノ方寸丙差□□得又□□□得ル

$20-2\times2=16$ (寸)‥‥丙

$20-2=18$ (寸)‥‥乙

<アルゴリズムの検証>

術文で述べられているアルゴリズムを検証してみよう。ただし，甲と乙の面積の和をＳ，甲と乙の一辺の長さの差をｄとする。

術曰差二寸自乗是ヲ半之七百二十四坪内ヲ

$$d^2\div2=\frac{d^2}{2},\quad S-\frac{d^2}{2},$$

加
止余半之開平方是ヲ倍シテ是ニ差□半之

$$\frac{S-\frac{d^2}{2}}{2}=\frac{2S-d^2}{4},\quad \sqrt{\frac{2S-d^2}{4}},$$

$$\frac{2\times\sqrt{\frac{2S-d^2}{4}}+d}{2}=\frac{\sqrt{2S-d^2}+d}{2}\quad\cdots\cdot甲$$

倍減　　乙差減
甲ノ方寸丙差□□得又□□□得ル

$$\frac{2\times\sqrt{\frac{2S-d^2}{4}}+d}{2}-2d=\frac{\sqrt{2S-d^2}-3d}{2}\cdots\cdot丙,$$

$$\frac{2\times\sqrt{\frac{2S-d^2}{4}}+d}{2}-d=\frac{\sqrt{2S-d^2}-d}{2}\quad\cdots\cdot乙$$

乙の一辺の長さをxとすると甲の一辺の長さは$x+d$になることが，上のアルゴリズによると

$$S=x^2+(x+d)^2=2x^2+2dx+d^2$$

よって

$$2S-d^2=4x^2+4dx+2d^2-d^2=4x^2+4dx+d^2$$

だから

$$\frac{2S-d^2}{4}=\frac{4x^2+4dx+d^2}{4}=\frac{(2x+d)^2}{4}$$

ゆえに，$\sqrt{\frac{2S-d^2}{4}}=\sqrt{\frac{(2x+d)^2}{4}}=\frac{2x+d}{2}$

$\left(\frac{2x+d}{2}\times2+d\right)\div2=\frac{2x+2d}{2}=x+d$ 甲の辺の長さ

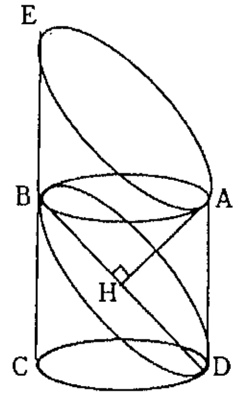
乙と丙についても同様なことがいえる．

5．2　先人の知恵(2)

和算では，次数（Dimension）を上げてから次数を下げることによって答えにたどり着こうとする算法があるが，学校数学でも同じような発想によって問題解決を図る場合がある。円満寺の算額の問題を解き終えたあとに，次の楕円の面積を体積から求める算法を生徒に示した。先人の知恵に生徒たちは感動し，目の前の課題に対して問題解決にあたる原動力になった。

＊楕円の面積を体積から求める

関孝和（寛永 17 年（1640）頃～宝永５年（1708））は，楕円（和算では側円）の面積を次のように求めている。図のように，円柱ＡＢＣＤを２点Ｂ，Ｄを通る平面で同じ大きさの２つの立体に分けると，切り口は楕円になる。点Ａから，その楕円に垂線を下ろし，その足をＨとする。



また，この円柱を上方に延長し，Ａを通って，楕円ＢＤに平行な平面で切ったときの面を楕円ＥＡとする。 $AB=a$， $BD=b$，$AD=h$ とし，楕円の面積をＳとすると，

円柱ＡＢＣＤの体積$=\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2\times AD=\frac{\pi a^2h}{4}$

また，$AH=h_1$ とすると，

楕円柱ＡＥＢＤの体積$=Sh_1$

楕円柱ＡＥＢＤの体積＝円柱ＡＢＣＤの体積だから

$$Sh_1=\frac{\pi a^2h}{4}$$

一方，△ＡＢＤと△ＨＡＤは互いに相似であるから

ＡＢ：ＢＤ＝ＨＡ：ＡＤ

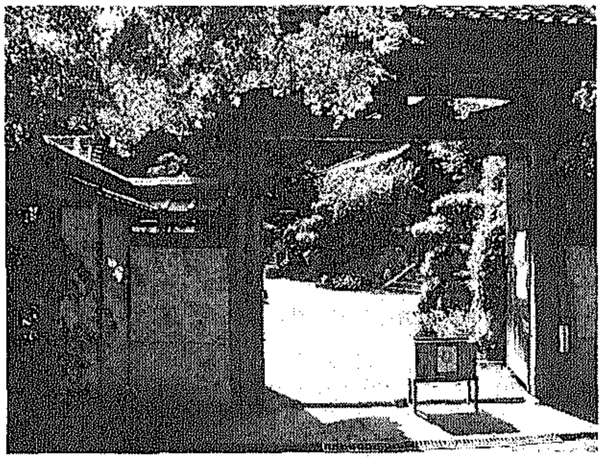
$HA=\frac{AB\times AD}{BD}$　より　$h_1=\frac{ah}{b}$

よって　$S=\frac{\pi ab}{4}$

6　弘仁寺

6．1　弘仁寺縁起

東大寺要録によると，弘仁寺は大同2年（807 年）に天から星が降って（明星零落地）開基されたと伝えられている。以前には，虚空蔵寺とよばれ「虚空蔵」は現在の地名にもなっている。



後に，弘仁5年（814 年）に勅命により，弘法大師と小野篁によって寺域を整えられ，本尊虚空蔵菩薩を安置し，当時の年号をとって弘仁寺と称せられた。

堂塔は元亀3年（1573 年）に松永弾正の大和攻めにあい，兵火に罹り炎上した。現在の堂塔は，僧宗全により寛永6年（1629 年）に再建されたものである。

6．2　旅行手帳

円満寺の次に，弘仁寺を訪れた。円満寺からは直線距離ではおよそ2km ほどであるが，国道（天理街道）から山の方へ細い道をバスは対向車をとくに気にしながら 15 分ほどかけて上っていった。程なく，弘仁寺

の駐車場が見えてきた。弘仁寺へ行くためにはさらに参道を上らなければならないが，五月のさわやかな風をいただきながら竹林の中を生徒とともに歩をすすめることができた。

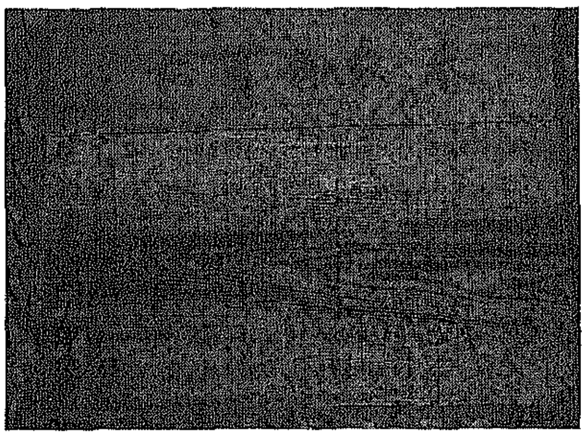
山門に到着して，早速寺の住職に参観の許可を申し出て算額とのご対面になった。事前に旅行委員会が連絡をとっていたこともあり，住職も資料をさっと用意され十分に見ていってくださいと声をかけていただいた。

弘仁寺の算額は2面あるが，どちらも本堂の軒下に掲げてある。靴を脱ぎ境内にあがり見学を開始。今日は早朝から，しかも長時間にわたる電車の旅をしてきたこともあり，多くの生徒は境内の縁側に座りすがすがしい風に当たりながら算額の問題を考えることができた。とても心地よいひとときであったときであった。境内の縁側でこの寺の算額の問題の1つでもある $\sqrt[9]{38443359375}$ を計算するアルゴリズムを考える生徒たちの姿は，普段の教室での授業とまた趣を異にした感じであった。

弘仁寺には2面の算額が奉納されている。2面とも保存状態は悪くないが，一部判読できない文字もある。奉納された算額の年代は，文政 10 年（1827 年），安政5年（1858 年）である。こちらの算額は奈良市指定有形民俗文化財に指定されている。また，後者の算額は重要文化財美術品に指定されている。

名刹弘仁寺は，大和青垣国定公園に残された万葉の道“山の辺”の足跡を辿る旅人たちに，千余年来の四季おりおりの色彩をそえる美しい自然と寧刹のイメージは訪れる者の心の対話を待っている．

6．3　弘仁寺の算額



【文政 10 年　奥田政八門人による9乗根を求める算額】

この算額は欅でできており，額の周りは蓮華を形取った素朴な算額である。北柳生村（現在の大和郡山市横田町）の奥田政八の門人（弟子）26 名により奉納された算額である。問題の内容は，一定の法則により，38, 443, 359, 375 の 9 乗根（$\sqrt[9]{38443359375}$）を求める計算である。当時計算をするときに使用していた算盤に算木を配した計算過程の一部が額のほとんどを埋めつくしている。算額の下部には，奥田政八の門人（弟子）26 名の名前が列記されている。また，弟子の名前の最後にこの算額を造った細工師（喜兵衛と読める）の名前が見える。

さてこの問題に関して，平方根や立方根は現在でも日常生活においてよく使われる。しかし，一般に専門家以外は４乗根以上の累乗根を日常生活で使うことは考えられない。なのに，この算額では９乗根を求めることを問題にしたのは何故なのか？

私なりの答えをこの算額の前文にみつけた。

「和漢の算数多世に行はる廃すへきにあらす唯惜むらくは高遠の理を解たるに初心の見るへきにあらず上方にて作れる書は永代のかきおく式は一を挙て其の二といわす端として自ら楽しむ故に師伝なくして自得する事あたはす今此書は一つ一つに其事を挙一覧して覚え安からしむ　　　　　　　　　奥田政八」

それは，算盤をひろくすすめる内容とこのような９乗根の計算の法則を後世に残すための前書きである。

大和の国のこの山間の地の和算塾で，このような立派な数学を教えられていたということはとてもすてきなことである。

日本の数学教育では，現在の学習指導要領では開平法についての記述がない。以前は中学校で指導していたが，現在では発展的トピックス的な取り上げとしても教科書では取り上げられなくなった。私が，中学校のときにも教科書の正式な内容として指導を受けたという記憶がない。一度調べてみたい。

さて，根を求めることがいつ頃からあるのかを東書文庫の文献で調べてみた。明治時代に，尾関　正求により和訳された問題集「数学三千題　下」（明治 12 年）の 13 ページに開立法の計算問題があった。その中では，「立方積千七百廿八個あり根数幾何　答　十二」すなわち，$\sqrt[3]{1728}=12$ を筆算により求めている．他に，$\sqrt[3]{421875}=75$，$\sqrt[3]{1953125}=125$，$\sqrt[3]{164206490176}=5476$ などがある．

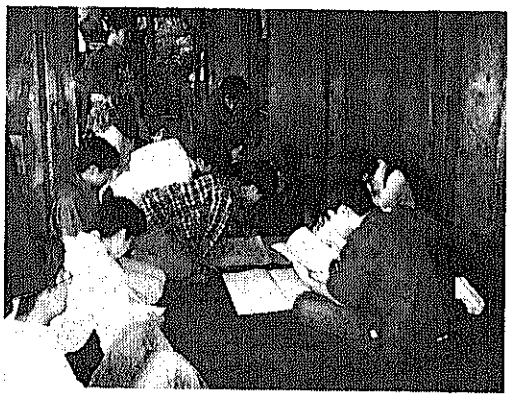
また数学三千題には，６乗根を求めさせる問題 $\sqrt[6]{729}=3$ や９乗根を求めさせる問題 $\sqrt[9]{19683}=3$ が見られる。

これらは，$\sqrt[6]{729}=\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3]{\sqrt{(27)^2}}=\sqrt[3]{27}=3$

また，$\sqrt[9]{19683}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{19683}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{(27)^3}}=\sqrt[3]{27}=3$

と n 乗根の考えで計算できることが記されている．

弘仁寺の算額は，どちらも本堂の軒下に掲げてある。靴を脱ぎ本堂にあがり見学を開始。今日は早朝から，しかも長時間にわたる電車の旅をしてきたこともあり，多くの生徒は疲れている様子だったが，本堂の縁側に座りすがすがしい風に当たりながら算額の問題を考えることができ，とても心地よいひとときであった。



【本堂の縁側で算額に取り組む生徒】

本堂の縁側でこの寺の算額の問題の１つでもある $\sqrt[9]{38443359375}$ を計算するアルゴリズムを考える生徒たちの姿は，普段の教室での授業とまた趣を異にした感じであった。

６．３．１　算木による開平計算

この算額では，算木により９乗根 $\sqrt[9]{38443359375}$ を求めている。数学三千題の解答と同じようにして，n 乗根の考えから

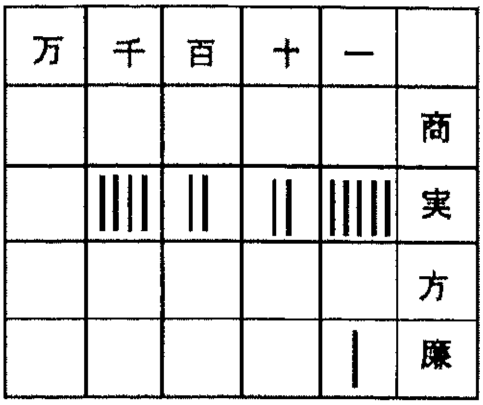
$$\sqrt[9]{38443359375}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{38443359375}}$$

としてから，根号の中を素因数分解して $38443359375=3^9\times5^9$ としてから計算するだろう．ここでは，算木による開平計算と開立計算について，記しておこう。

６．３．２　平方根の開平計算

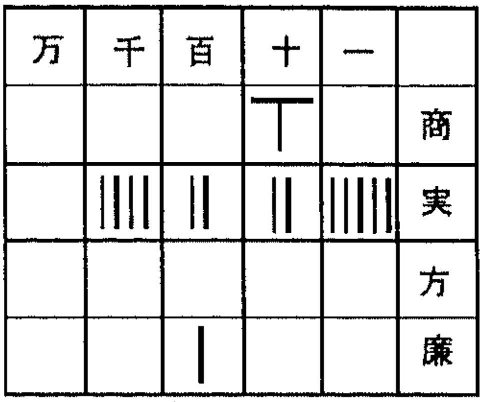
例　$\sqrt{4225}$ を開平しなさい。

①
↓



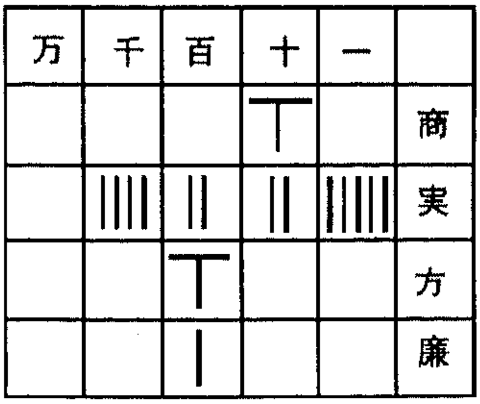
4225 を実に，1 を廉に置く。

②
↓



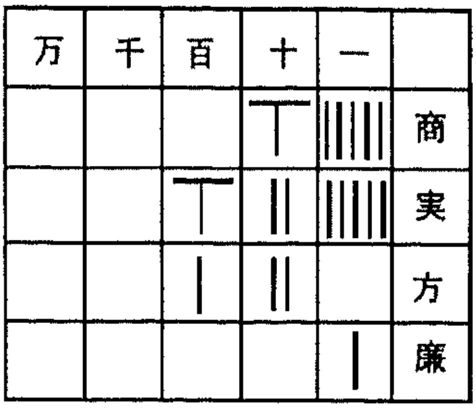
商60を立て，廉の位を2桁上げる．
(商が十位のときは 2 桁，百位のときは 4 桁上げる)

③
↓



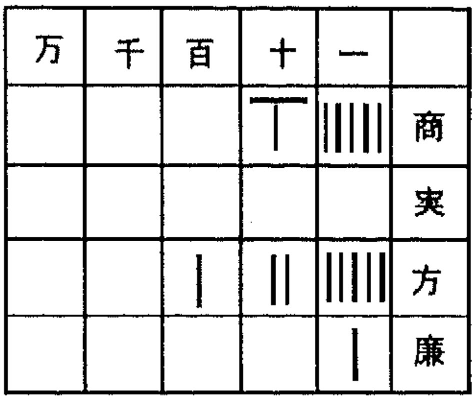
商の6と廉の1を掛けた6を方の百位に置き，
60×60=6300を実から引き，実625になる。

④
↓



商の6と廉の1を掛けた6を方に加え，方1200とする．廉を2桁，方を1桁下げ，商5を立てる。

⑤



商の5と廉の1を掛けた5を方に加え，方125となる．
5×125=625を実から引いて0となる。

答　65

６．３．３　立方根の開平計算

次に，算木を使って立方根を求めてみよう。

例２　$\sqrt[3]{42875}$

①

万	千	百	十	一	
			3		商
1	5	8	7	5	実
	9				方
	3				廉
	1				隅

②

万	千	百	十	一	
					商
4	2	8	7	5	実
					方
					廉
				1	隅

③

万	千	百	十	一	
			3		商
4	2	8	7	5	実
					方
					廉
	1				隅

④

万	千	百	十	一	
			3	5	商
1	5	8	7	5	実
	2	7			方
			9		廉
				1	隅

⑤

万	千	百	十	一	
			3	5	商
1	5	8	7	5	実
	3	1	7	5	方
			9	5	廉
				1	隅

⑥

万	千	百	十	一	
			3	5	商
					実
	3	1	7	5	方
			9	5	廉
				1	隅

以上より

答　$\sqrt[3]{42875}=35$

6．4 大数

【安政５年　石田算楽軒門人による算額】

> **問題**　芥子之積四方八方累積此間之数何程
>
> 　　但，一尺四方以面二千七百万数

（現代訳）　立方体の中に植物の種子が一杯つまっている。その立方体の一辺の長さ（間数）を求めなさい。ただし，一立方尺について種子が 2, 700 万個入っているとする。

＜考え方＞　問題の補足として，種子の総数が示されている。また，江戸時代は

　　1間＝６尺５寸＝6.5 尺　であった。

条件から，種子は１尺あたり

　　$\sqrt[3]{27000000}=300$（個）並んでいる。

そこで，求める立方体の一辺の長さを x 間とすると，種子の総数が

2, 296, 905, 976, 716, 334, 628, 377, 778, 600, 164, 435, 427, 328, 000, 000, 000 個であるから

$$(300\times 6.5x)^3=2{,}296{,}905{,}976{,}716{,}334{,}628{,}377{,}778{,}600{,}164{,}435{,}427{,}328{,}000{,}000{,}000$$

よって，

$x=6{,}766{,}225{,}401{,}695.5$（間）・・・・・・（答）

＜検算から考える＞

答えのほうから逆算してみると，立方体の一辺が，6 兆 7, 662 億 2, 540 万 1695 間と 5 尺ある立方体の中に全部の種子が収まっている。

１間＝６尺５寸＝6. 5 尺であるから，これを尺数に直して表示すると，

　6 兆 7, 662 億 2, 540 万 1695×6. 5＋5（間）

　＝43 兆 9, 804 億 6, 511 万 1017. 5＋5　　（尺）

　＝43 兆 9, 804 億 6, 511 万 1022. 5　　　（尺）

この結果に，300 を乗じて 3 乗すると

　　　　← $(300\times x)^3$

種子の個数は，

（300×43 兆 9, 804 億 6, 511 万 1022. 5）^{3}

＝2, 296, 905, 976, 713, 592, 784, 618, 893, 712, 186, 614, 480, 751, 296, 875, 000（個）

算額では種子の個数は

　2, 296, 905, 976, 716, 334, 628, 377, 778, 600, 164, 435, 427, 328, 000, 000, 000（個）

であり，この結果は，算額の答えの最初の 12 桁はあっているが，以下は一致していない。

これは，種子の総数か答のどちらかの間違いである。どちらにせよ，算額の答えを真と仮定するならば，立方体の一辺に並んでいる種子の数がもう少し多いはずである。

＜大数のおもみ＞

弘仁寺の算額の答えのように，大きな数字を天文学的数字ということがあるが，中国の元の時代の朱世傑が著した「算学啓蒙」（1299 年）の中でこのような数を大数と記述し，次のように説明している。

大数の類：「凡そ数の大なるものは天もよくこれを蓋うことなく，地も亦これを載せることが出来ぬ，その数を極めることが出来ぬ故これを大数という。」

弘仁寺の算額では石田算楽軒が自ら描いた植物の種子（芥子）を蓄える立方体を天文学と比較して考えてみると，67, 661, 225, 401, 695 間と５尺＝約 130 億 km だから，冥王星の軌道直径が約 120 億 km だから，算楽軒が描いていた立方体の中に太陽系がごっそりと入れられるのである。そう考えればこれは大数である。

＜授業における大数＞

授業において，大数の重みをかみしめる例として，新聞紙を次々に半分に折っていく。新聞紙の厚みが 0. 1mm であるとき，折ってできた新聞紙の厚みが富士山を越えるためには，何回ぐらい折る必要があるか。これは指数関数の導入でよく使う例である。

＜数の単位の命位＞

この算額ででてきた数の単位の命位について，念のため記す。

一，十，百，千，万，億，兆，京（けい），垓（がい），秭（し）（杼（じょ）），

穣（じょう），溝（こう），澗（かん），正（せい），載（さい），極（ごく）

＊算額あれこれ

(1)　算額の奉納年について

安政５稔戊午姑洗日とは，安政５年，戊午は（つちのえ うま と読む），姑は故（旧いこと），洗は鮮（新しいこと）をあらわし，「万物旧を去りて新につく」という意味で，旧暦の３月の称である。

(2)　石田算楽軒の末裔は今？

温故知新「ふるきを訪ね新しきを知る」活動を行うと，必ずこの系図に関わる話題に出くわすが，いただいた資料によると，この算額に列記されている石田姓をたずねて神殿村（こどのむら）を調査したところ，この村に石田姓は３軒，しかし，２軒は家紋が「丸にかたばみ」であったそうだ。算額にある「三ツ柏葉」紋の石田家の子孫の方は現在ある地方で生活されているそうだ。

墓石を調査することも末裔を知る手だての一つである。資料では，万延元年六月に石田利三郎という人が亡くなった記述の墓石を発見している。石田算楽軒は算額では安政５年に 78 歳とあるので，安政５年の２年後の万延元年に 80 歳で没した石田利三郎氏と考えられる。

このように，１面の算額から奉納した人たちの人生や末裔の人たちの現在など，研究する過程でいろいろなことが見えてくる。

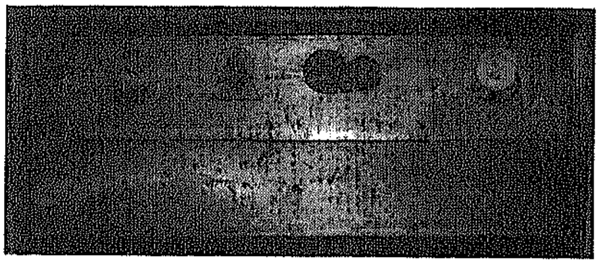
生徒たちへは，一方的な話になってしまった感は否めないが，これからいろいろなことを調査したり研究するとこの参考になったのではないだろうか。

しかし，この種の問題を扱う場合はプライバシーに配慮した指導が必要である。

7　耳成山口神社

奈良盆地の南部にある３つの山を古代より大和三山とよぶ。この大和三山は，古代の都"藤原京"を囲み，北にある山を耳成山（標高 140m），東を香具山（標高 152m），西を畝傍山（標高 199m）とよんだ。万葉集にはこれらの山の名を織り込んだ歌がある。

管理者の佐伯氏から教えていただいたが，耳成山口神社は雨乞いの神様らしく，雨乞いの絵馬が算額よりも有名であるそうだ。



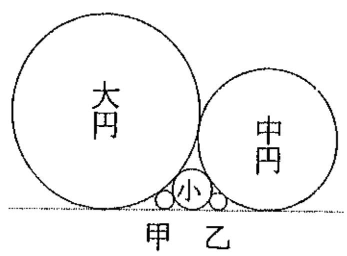
【耳成山口神社　嘉永７年　梨原喜右衛門ら奉納】

さて，耳成山口神社の算額の問題は円に関する問題で，結構難しい。幾何に「反転法」という現代の解法があるが，その方法を用いると解決が早い。江戸時代末期には，法導寺善という和算家が算変法という術を考案している。これは現代の反転法に通じる術である。

7．1　耳成山口神社の算額

$\boxed{\text{問題}}$ 2　今有如圖直線載大中二圓其交蝕容小甲乙三圓
只言圓径七尺乙圓径六寸四分問得各圓径幾何
術為何
答云大圖徑六尺八寸三分六厘五毫三絲有奇
中圖徑五尺二寸三分七厘九毫零九忽一微有奇
小圖徑一尺五寸一分二厘零五絲八忽有奇
術云列甲径以乙径除之名天開平方　名地加入一箇
自乗之為小径加入天　三段内減地六
段止余為中径率加三箇内減天三段止餘為大径
率置
甲径九段為通實以其率皈之得各　圓径合問

（現代訳）　図のように，互いに外接する大中２円が直線に接している。この２円と直線との間に大中２円に接する小円をかき，大円と小円と直線に接するように甲円を，中円と小円と直線に接するように乙円をかく。



甲円と乙円の直径がそれぞれ7寸，6寸4分であるとき，大中小3円の直径を求めなさい。

答えは，大円の直径が六尺八寸三分六厘五毫三絲

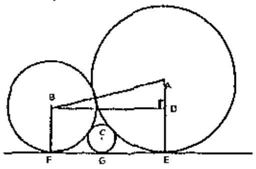
中円の直径が五尺二寸三分七厘九毫零九忽一微

小円の直径が一尺五寸一分二厘零五絲八忽

＜考え方＞

右の図の大円，中円，小円の直径をそれぞれD_1，D_2，D_3とすると，次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{\sqrt{D_3}}=\frac{1}{\sqrt{D_1}}+\frac{1}{\sqrt{D_2}}$$



和算ではこれを「累円術（るいえんじゅつ）」という。

累円術の証明については，拙著「数学史を取り入れた授業実践－算額の教材化と総合的な学習－」（1999年　筑波大学附属駒場論集第40集）をご参照していただきたい。なお，

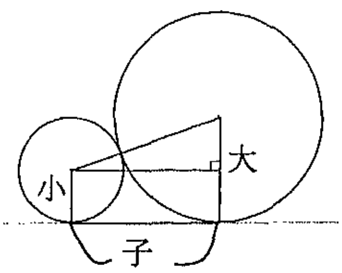
$\frac{D_1}{2}=r_1$，$\frac{D_2}{2}=r_2$，$\frac{D_3}{2}=r_3$とおくことで，

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

を導ける。

和算では，累円術を次のように書くことがある。

次の図で，大円，小円の直径をそれぞれ大，小と書き，2接点間の距離を子とすると，次が成り立つ。



$$\sqrt{\text{子}}=\sqrt{\text{大}\times\text{小}}$$

【証明】三平方の定理より

$$\left(\frac{\text{大}}{2}+\frac{\text{小}}{2}\right)^2=\text{子}^2+\left(\frac{\text{大}}{2}-\frac{\text{小}}{2}\right)^2$$

よって　$\text{子}^2=\text{大}\times\text{小}$

ゆえに　$\sqrt{\text{子}}=\sqrt{\text{大}\times\text{小}}$

＜術文に注目した解法＞

問題2を術文に気をつけて解いていくと次のようになる。ただし，甲，乙，大，中，小の各円の直径を，それぞれ，甲，乙，大，中，小とかくことにする。

$$\text{丑}=\sqrt{\text{天}\times\text{小}}\qquad\text{寅}=\sqrt{\text{小}\times\text{中}}$$

上の式から

子＝丑＋寅より　$\sqrt{\text{天}\times\text{中}}=\sqrt{\text{天}\times\text{小}}+\sqrt{\text{小}\times\text{中}}$

同様にして　$\sqrt{\text{天}\times\text{小}}=\sqrt{\text{天}\times\text{甲}}+\sqrt{\text{甲}\times\text{小}}$

また　$\sqrt{\text{小}\times\text{中}}=\sqrt{\text{小}\times\text{乙}}+\sqrt{\text{乙}\times\text{中}}$

よって　$\sqrt{\text{天}}=\dfrac{\sqrt{\text{小}\times\text{甲}}}{\sqrt{\text{小}}-\sqrt{\text{甲}}}$

$$\sqrt{\text{甲}}=\frac{\sqrt{\text{小}\times\text{乙}}}{\sqrt{\text{小}}-\sqrt{\text{乙}}}$$

を得る。　$\sqrt{\text{小}}=\dfrac{3\sqrt{\text{甲}\times\text{乙}}}{\sqrt{\text{甲}}+\sqrt{\text{乙}}}$

ゆえに　$\text{小}=\dfrac{9\text{甲}\times\text{乙}}{\left(\sqrt{\text{甲}}+\sqrt{\text{乙}}\right)^2}=\dfrac{9\text{甲}}{\left(\dfrac{\sqrt{\text{甲}}}{\sqrt{\text{乙}}}+1\right)^2}$

$\text{天}=\dfrac{\text{甲}}{\text{乙}}$　　$\text{地}=\sqrt{\text{天}}$　とおくと

$$\text{小径（率）}=\left(\frac{\sqrt{\text{甲}}}{\sqrt{\text{乙}}}+1\right)^2=\left(\text{地}+1\right)^2$$

ここで　$\sqrt{\text{甲}}=\dfrac{3\sqrt{\text{甲}}}{2\sqrt{\dfrac{\text{甲}}{\text{乙}}}-1}$　　$\text{中}=\dfrac{9\text{甲}}{\text{小径率}+\dfrac{3\text{甲}}{\text{乙}}-6\sqrt{\dfrac{\text{甲}}{\text{乙}}}}$

さらに

$$\text{中径率}=\text{小径率}+\frac{3\text{甲}}{\text{乙}}-6\sqrt{\frac{\text{甲}}{\text{乙}}}=\text{小径率}+3\text{天}-6\text{地}$$

$\sqrt{\text{天}}=\dfrac{3\sqrt{\text{甲}}}{2-\sqrt{\dfrac{\text{甲}}{\text{乙}}}}$　　$\text{大}=\dfrac{9\text{甲}}{\text{中径率}+3-\dfrac{3\text{甲}}{\text{乙}}}$

$$\text{大径率}=\text{中径率}+3-\frac{3\text{甲}}{\text{乙}}=\text{中径率}+3-3\text{天}$$

このように各径率を求めて，9×甲径　をそれぞれの径率で割れば，各円径を得ると術文で述べられている。すなわち

$\text{小円径}=\dfrac{9\times\text{甲径}}{\text{小径率}}$　　$\text{中円径}=\dfrac{9\times\text{甲径}}{\text{中径率}}$

$$\text{大円径}=\frac{9\times\text{甲径}}{\text{大径率}}$$

この結果は，算額の答えとは若干ではあるが一致しなかった。

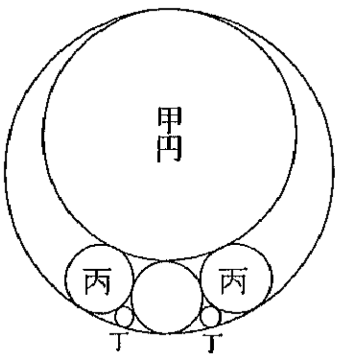
＜反転法を使った解法＞

問題4　今有如圖平圓内容甲乙丙丁六圓只言甲径五尺二寸丁径七寸　問得外圓径幾何術如何

答曰　七尺四寸三分七厘零四絲三忽弱

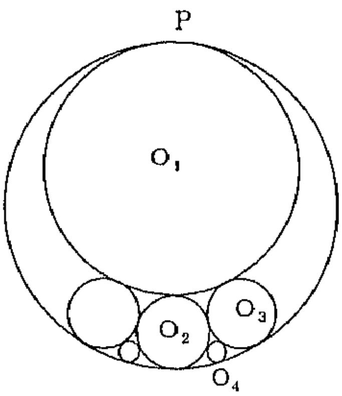
術曰　列甲圓径内減丁径止余以除飯丁径一十六段加入一箇開平方加一箇半之以甲径乘之得外圓径合問

（現代訳）　図のように，平円の内側に甲円，乙円，丙円，丁円が接するように入れてある。



甲円の直径が５尺２寸。丁円の直径が７寸のとき，外円の直径を求めなさい。

［解説］この問題を反転法を利用して解いてみよう。反転法については，長くなるので，本問題に必要なもののみを次ページの補題で述べ，それを利用した。

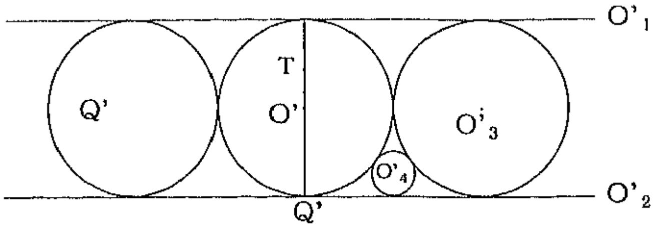


問題の甲円，乙円，丙円，丁円をそれぞれO_1，O_2，O_3，O_4とする。

外円をO，題意よりO_1の直径は5.2，O_4の直径は0.7である。O_2の直径をaとおく。

ここで，反転法を次のように使う。

まず，図のように中心T，半径１の円で反転させる。



【解答】　図のように，中心T，半径１の円で反転する。

円O_1，O_2は２つの平行円に反転され，３つの反転円は図のような接解関係にある。

円O_4'の半径をｒとおく。

ここで，次の補題を示す。

補題　円Ｐが円Ｐ'に反転されたとすれば，円Ｐの半径ｒと円Ｐ'の半径ｒ'について次の式が成り立つ。

$$\frac{r}{r'}=\frac{k^2}{t^2}$$

ここで，kは反転定数（つまり反転に使う円の半径）

tは反転の中心から円O'に引いた接線の長さである。

証明　円Oの直径 AB から反転の中心Tを通り，T，B，Aの順に並んでいるとする。

このとき，

$$2r=TA-TB=\frac{k^2}{TA'}-\frac{k^2}{TB'}=\frac{(TB'-TA')k^2}{TA'\cdot TB'}$$
$$=\frac{2r'k^2}{t^2}$$

Tが線分 AB 上にあるときも同様に証明される。補題より，円O_4，円O'_4について

$$\frac{0.35}{r}=\frac{1}{t^2}\cdots\cdots(1)$$

また，

$$t^2=\left(\frac{1}{a}-r\right)^2+\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{5.2}\right)\right\}^2-r^2\cdots\cdots(2)$$

さらに，下の図より，

$$\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}+2r\right)^2=\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}-2r\right)^2+\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}\right)^2$$

が導ける。

これより，$8r\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}+\right)=\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}+\right)^2$

$\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}\neq 0$ より，

$$8r=\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}\cdots\cdots(3)$$

$\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}=x$ とおくと　(2)，(3) より

$$r=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{5.2}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{8}x \qquad \text{だから}$$

$$t^2=\frac{1}{a^2}-\frac{2r}{a}+\frac{1}{4}x^2$$

$$=\left(x-\frac{1}{5.2}\right)^2-\frac{x}{4}\left(x-\frac{1}{5.2}\right)+\frac{1}{4}x^2$$

$$=x^2-\frac{35}{104}x+\frac{25}{26^2}$$

(1) より　$\frac{2.8}{x}=\frac{1}{x^2-\frac{35}{104}x+\frac{25}{26^2}}$

よって　$x^2-\frac{35}{104}x+\frac{25}{26^2}=\frac{5}{14}x$

整理すると次の２次方程式を得る。

$$x^2-\frac{505}{728}x+\frac{25}{676}=0$$

$$x=\frac{505\pm 15\sqrt{785}}{1456}$$

$$\frac{1}{a}=x-\frac{1}{5.2}\ \text{より}$$

$$\frac{1}{a}=\frac{505\pm 15\sqrt{785}}{1456}-\frac{1}{5.2}$$

よって　$\frac{1}{a}=\frac{225+15\sqrt{785}}{1456}$　　$\because \frac{1}{a}>0$

ゆえに　円O_2の直径は

$a=\frac{13(\sqrt{785}-15)}{75}=2.256427585$（尺）　である。

ゆえに，求める円Oの直径は

2.256427585+5.2=7.456427585（尺）　となる。

この結果は，算額の答えと若干ではあるが一致していない。

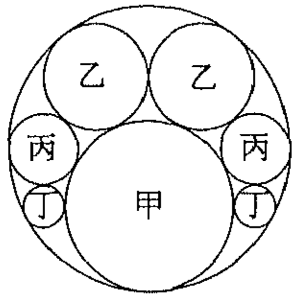
<反転法と算変法>

反転法は西洋で考えられた算法であるが，日本でも幕末に法道寺善（観山）（文政３年（1820）～明治元年（1868））が考案した『算変法』は，反転法とほぼ同じ趣向で，円と直線の接触関係を追求したものであった。

奈良県大和郡山市の庚申堂の算額の問題を反転法で解いてみよう。

問題	今大円徑内容如圖段々小円徑ヲ 只云大円徑一尺六寸 亦云甲円徑九寸六分間乙丙丁円徑ヲ 乙円徑六寸 答曰　丙円徑四寸 丁円徑二寸四分

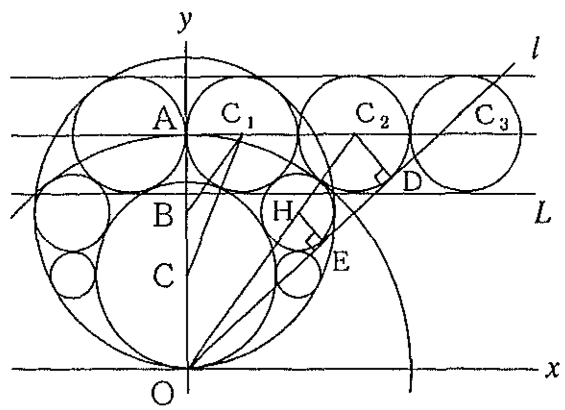
（現代訳）図のように大円の内に次々に小円を入れる。大円と甲円の直径がそれぞれ１尺６寸，9.6 寸のとき，３円乙，丙，丁の直径をそれぞれ求めなさい。



<解法>

乙，丙，丁円をそれぞれ$C_1(r_1)$，$C_2(r_2)$，$C_3(r_3)$とする。大円(R)と甲円(r)の交点Oを中心とし，半径$OA(=a)$の円で反転すると，大円(R)と甲円(r)は，それぞれ平行な２直線L，lに反転される。

この反転によって円$C_2(r_2)$は２直線L，lと$C_1(r_1)$に，$C_3(r_3)$は２直線L，lと$C_2(r_2)$にそれぞれ接している。これを座標平面上に次のように表す。



各点の座標は，$r_3 = r_2 = r_1$であることに注意すると，次のようになる。

A(0, a)，B(0, R)，C(0, r)

$C_1(r_1, a)$ $C_2(3r_1, a)$，$C_3(5r_1, a)$

また，直線$L : y = a - r_1$　直線$l : y = a + r_1$ である。

三角形ACC_1より　$(r_1 + r)^2 = r_1 + (a - r)^2$‥①

三角形ABC_1より　$(R - r_1)^2 = r_1^2 + (a - R)^2$‥②

①より　$2Rr_1 = 2Ra - a^2$

よって　$a = \dfrac{4rR}{R + r}$‥‥③

②より　$2r_1 r = a^2 - 2ar$

よって　$r_1 = \dfrac{4rR(R - r)}{(R + r)^2}$‥‥④

$\triangle OHE \backsim \triangle OC_2D$であるから，丙円の半径を$y$とすると，

$(r_1 + a) : (a - y) = r_1 : y$　よって　$y = \dfrac{ar_1}{a + 2r_1}$

③，④より　$y = \dfrac{ar_1}{a + 2r_1} = \dfrac{\dfrac{4rR}{R + r} \cdot \dfrac{4rR(R - r)}{(R + r)^2}}{\dfrac{4rR}{R + r} + 2 \cdot \dfrac{4rR(R - r)}{(R + r)^2}}$

ゆえに　$y = \dfrac{4rR(R - r)}{(3R - r)(R + r)}$

$R = 8$（寸），$r = 4.8$（寸）だから，丙円の半径は

$y = \dfrac{4 \times 4.8 \times 8 \times (8 - 4.8)}{(3 \times 8 - 4.8) \times (8 + 4.8)} = 2$　（寸）

ゆえに　丙円の直径は4（寸）

乙円，丁円についても同様にして求めればよい。

＊反転法とスーパーサイエンスハイスクール＊

平成14年度より本校では文部科学省のスーパーサイエンスハイスクール（略称ＳＳＨ）事業をスタートさせた。

詳細については，数学科の論集を見ていただきたいが，私はＳＳＨの特別講座教材例としてこの反転法の内容を特別講座Ｉに掲載した。

耳慣れない内容なので最初はとまどうが，このように具体的な事例をもとにして取り組むとよいだろう。

7　算額コース担当の生徒旅行委員の感想

生徒　M. Y

ぼくは，1日目のコース別行動のうちの一つである，「算額見学」を担当した。　算額見学はそもそも，担任団の牧下先生が授業中に算額を使った授業をしてくれ，奈良県には算額が多くあるということを思い出したから，1日目のコースに入れようということで，その計画を僕が担当することになった。

担当を引き受けたまでは良かったが，何をすればよいのかわからない。とにかく算額があるところを探そうと思って図書館で本を借りた。それでその中に「現存算額一覧表」があったので，そこで近畿地方の現存算額を探した。牧下先生にも相談して訪問するところを決めた。

奈良市役所に電話し，地域の自治会長さんの電話番号を教えていただいた。自治会長さんに電話するととりあえず案内してくれることを約束いただいた。これで円満寺のメドは立ったが，住職のかたや檀家のかたにもお願いしておいた方が良いだろうと思い，再度市役所に電話したが，詳しいことはわからないといわれ，自治会長さん頼みになった。

【佐伯氏より耳成山口神社の話を聴く生徒】

次に，耳成山口神社の電話番号を「104」で聞いたが，ここの電話には誰も出なかった。市役所に電話したが，同じ番号しか教えてくれない。何回か市役所に電話するうちに市役所の人が違う連絡先（管理者）を教えていただき，耳成山口神社の段取りもついた。また，弘仁寺は，すぐに連絡がついた。

一応，訪問するところには全て手紙を出して事前準備は終わった。

（中略）　当日はかなり慌ただしい見学となったが無事に終わった。改めて，聞くことよりも，本物を見ることは違うなと感じた。

学校に戻ってからは校長先生の名前で礼状を書き，先生にも見てもらい，余白に僕が一言ずつ書いて投函した。

（中略）また，円満寺はバスを止めるところが無くて困った。旅行委員としては，そういうところまで考えなくてはと思った。

最後になるが，先生が見せてくれた算額の写真やインターネットの情報より本物を自分の目で見ることはすばらしいと思った。授業で，先生がいっていたユークリッドの原論の本がどこかの大学の図書館にあるそうだが，一度本物を見てみたいと思う。だけど，修学旅行でも数学するなんて，「数学恐るべし」。

8　おわりに

これまでに私は，本校の中学3年次の東北地域研究に利用できるように，岩手県の算額を中心に教材化してきた。現在，平成14年度の中学2年次の後期の総合学習（東北地域研究）でその教材を活用している。

私は，かねがね高校の校外学習における算額のモデルコース化を考えていた。平成13年度から高校1年（52期）の担任教官となり，今回の修学旅行での総合学習を意識した取り組みとなった。

算額の問題は，白文（漢文）で書かれている。総合学習では他教科とクロスさせて取り組む課題が多い。本研究も漢文や古典など国語科とのクロス，関西地域における歴史など地歴科とのクロスが考えられる取り組みである。

今回の取り組みを実施するに当たり，旅行委員会の担当の生徒が算額の問題を文献を参考にして白文づくりをしたり，訪問先の神社やお寺との連絡調整を正確にしてくれたこともあるが，それぞれの訪問先で，算額の管理者である住職，町内会長さんなど，また奈良市役所や橿原市の観光センターの係の方に大変お世話になった。また，奈良の現職の和算研究家よりお借りした資料を，事前学習の指導，当日の指導，事後指導に生かせたこともあり今回の取り組みは成功したと思う。また，総合学習をよりよい教育活動にするためには，学校以外の人たちの協力は必要不可欠であることを，今回の取り組みから実感するとともに，教科教育においても総合学習を取り入れていく必要性や有用性を感じた。

しかし一方で，新しい学習指導要領でこれまでの学習内容の3割が削除されたことによるいわゆる学力低下への危惧がマスコミや新聞紙上で論ぜられ，総合学習が不要であるとの意見も聞く。

私は，「生きる力」を育むためにはこの総合学習をそれぞれの学校の教育課程の中によりよき形で位置づける必要があると考えている。そのためには，教師や学校が総合学習を教材化するとともに，総合学習によって，児童・生徒たちの学びがどのように変わったのかということを評価する視点を教師や学校がもつ必要があると考える。

【算額所在地】

1　円満寺　奈良県奈良市下山町109番地八坂神社内
2　弘仁寺　奈良県奈良市虚空蔵寺46番地
3　耳成山口神社　奈良県橿原市木原町490番地

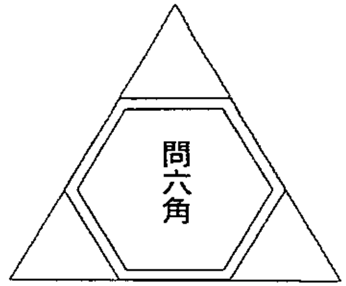
【参考文献】

1）岩橋義雄：大和の算額　1989年
2）近畿数学史学会編：近畿の算額　1992年
　（大阪教育図書）
3）小寺　裕：和算の館（http://www.wasan.jp/）
4）桑原秀夫編著：美しい幾何図形シリーズ
　「弘仁寺の算額について」（日本数学史学会）
5）虚空蔵山弘仁寺編：弘仁寺の算額について
6）虚空蔵山弘仁寺編：和算における多乗根の開方
7）牧下英世：数学史を取り入れた授業実践
　－算額の教材化と総合的な学習－
　1999年（筑波大学附属駒場論集第40集）
8）牧下英世ら：算額道場　2002年（研成社）
9）佐藤健一：日本人と数　江戸庶民の数学
　（東洋書店）1994年
10）米山忠興：反転法　　1998年（東洋大学紀要）
11）米山忠興：反転法つづき1999年（東洋大学紀要）
12）岩田至康編『幾何学大辞典3』1982年（槇書店）

（参考文献）近畿の算額　近畿数学史学会編著　大阪教育図書 1992 年

円満寺の算額

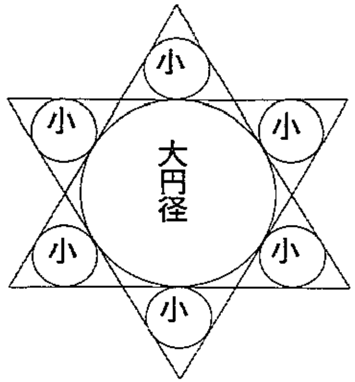
奉納御寶前



今有如圖三角内入六角三角面六尺問六角面ヲ

答曰六角一方二尺

術曰面六尺自之四三三ヲ乗三除術ヲ減止余二五九八以除是止余開平方得合問



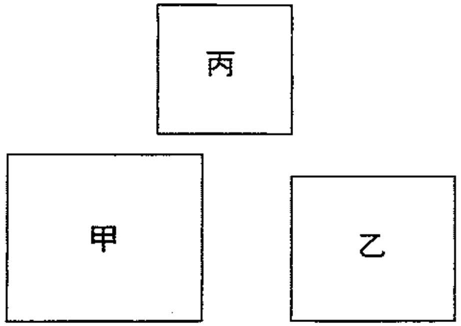
今有如圖六角面三尺内大圓徑入又有外角小円徑入

答云

大円徑五尺一寸九分六厘

小円徑一尺七寸三分二厘

術曰面三尺自乗二五九八乗三除實置面半之以實除得円合間
又曰面三尺ヲ自之四三三ヲ乗以三ヲ除其上以七五除是得合問



今有如圖方面三和甲乙方寸巾二和シテ七百二十四坪乙丙方寸巾二和シテ五百八十坪差二寸ニ定甲乙丙方寸ヲ問

甲方寸二尺
答曰乙方寸一尺八寸
丙方寸一尺六寸

術曰差二寸自乗是ヲ半之七百二十四坪内ヲ減シ止余半之開平方是ヲ倍シテ是ニ差□半之甲ノ方寸丙差□□得又□□□得ル

當村

願主　源治郎　白敬

天保十五年甲辰年仲夏

一　和漢の算数多世に行はる處□□□べきあら□□□□□
唯惜むらくは高遠の理を解く□□□初心の□□□あらず
　上方□□□書く永代のかきおく式は一を挙て□□□□
自ら楽しむ故に師伝なくして目的□□□あらば□□□今
此書は一つ一つ□□□一、一覧して覚え安からしむ

奥田政八

	五分	七十	三百	九千	五万	三十	三百	四千	四億	八十	三百	一	十	百	千	万	十	百	千	億	十	百
商																						
實																						|||
法																						
廉																						
隅																						
三乗																						
四乗																						
五乗																						
六乗																						
七乗																						
八乗	○																				○	

文政丁亥年四月吉辰
北柳生村　奥田門人中敬白

（参考文献）近畿の算額　近畿数学史学会編著　大阪教育図書 1992年

弘仁寺の算額１

北柳生村　森　八郎
南柳生村　森　祐治
北柳生村　森　七郎
同　同　六良
同　三良兵衛
同　磯右衛門
同　孫兵衛
同　忠　七
同　源治郎徳右ヱ門
南柳生村　弥八郎
同　大兵衛
同　新　助
同　甚　蔵
横田村　奥幸四郎
同　向井忠太郎
同　庄　七
同　惣　助
新庄村　平　蔵
北柳生村　伊兵衛
同　喜四良
同　与四良徳兵衛
同　庄治良久助
同　作次郎
同　新兵衛
同　源　七
南柳生村　清　介
細工　喜兵衛

壽 七十八齢
石田算楽軒
門弟中

絵

芥子之積四
方八方累積
此間之数何程

実三
九
法三

但
一尺四方以面
二千七百万数

実九
一尺四方以面
二千七百万数

貳極二千九百六十九載零五百
九十七正六千七百十六澗三千
三百四十六講二千八百三十七
穣七千七百七十八秭六千零零
一垓六千四百四十三京五千四
百二十七兆三千二百八十億万
数奈利
六兆七千六百六十二億二千
五百四十零千六百九十五間
五尺那利

安政五戊午姑洗日

（参考文献）近畿の算額　近畿数学史学会編著　大阪教育図書 1992 年

弘仁寺の算額2

九州豊後田崎姓
盤石舎不朽上人筆耕
伊豫 小松藩
森島姓 範十郎
大坂相模屋舗
幾田姓 源之輔
河州上田原村
楠田姓 伊左衛門
城稲八妻村
菊好亭 京女 楽
豊前小倉藩
烏丸 左近将監

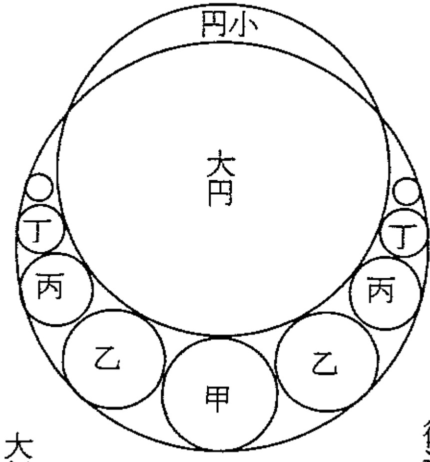
奈良清水町 岩本嘉左衛門
額田部村 油屋嘉蔵
南永井村 遊田久吉
森本村 村井甚治郎
京終村 松本屋甚兵衛
上三橋村 一二店算楽
飯田長蔵 口笛留蔵
北之庄村 中窪源助
竹村直吉 山中栄蔵
西九条村 木村勇吉
神殿村 石田龍左衛門
口笛甚兵衛 北田捨吉
大西彦六 石田由右衛門
北田孫兵衛 中村善右衛門
松田甚三良 中田栄治良
松井久二良 杉田亀蔵
石田安太郎 西村玄助
北田左兵衛 吉田丑松
石田鶴吉 米屋周松
坂井弥七郎 吉田善三良
和邇村 宮前宇八
奥谷忠三郎 谷脇久三良
稲葉重三良 中窪清三良
後藤久二良 堀田飛佐吉

（参考文献）近畿の算額　近畿数学史学会編著　大阪教育図書 1992 年

印

算圖敬標榜

耳成山口神社の算額

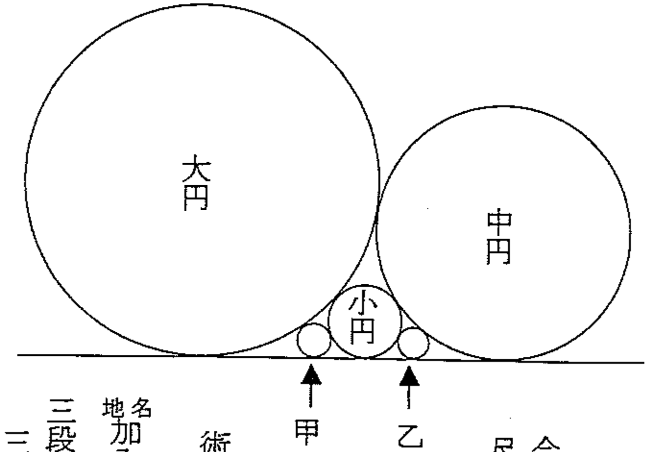


今有如圖以大小圓画輪透其交罅挿甲圓其従両脇容累圓只言大圓径七尺二寸小圓径六尺一寸甲圓径一尺七寸問得累圓径術通如何

答曰　乙径一尺五寸五分五厘零三絲三忽弱
丙径一尺二寸二分九厘二毛有奇
丁径八寸八分三厘二毛八絲弱
戊径八寸零三厘八毛一絲有奇

術云列甲径加小径乗大甲径差為甲率置大径乗小径名天四倍之以甲率畈之内減一箇餘為地列天加入甲径巾為乙率内減甲率余乗地加乙率為丙率内減乙率余乗地加甲率為丁率内減丙率余乗地加乙率為戊率逐如斬求之置甲径乗甲率爲通緣實以其率除歸之得累圓径合問

松岡門弟
梨原喜右衛門義信敬誌

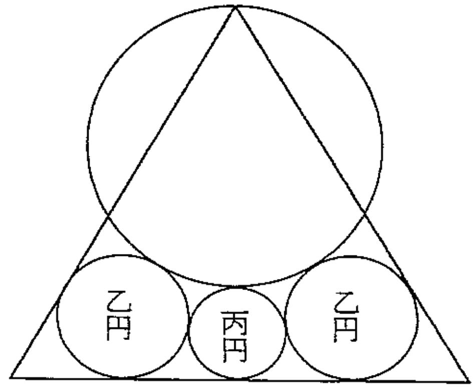


今有如圖直線載大中二圓其交罅容小甲乙三圓只言圓径七尺乙圓径六寸四分問得各圓径幾何術為何

答云　大圓径六尺八寸三分六厘五毫三絲有奇
中圓径五尺二寸三分七厘九毫零九忽一微有奇
小圓径一尺五寸一分二厘零五絲八忽有奇

術云列甲径以乙径除之名天開平方加入一箇自乗之為小径加入天名地三段内減地六段止余為中径率加三箇内減天三段止餘為大径率置甲径九段為通實以其率畈之得各圓径合問

枩岡門弟
松井平四郎親久謹誌



今有如圖三角内容乙丙三圓其上載甲圓其圓周交三角尖只言
三角面六尺問得各圓径幾何術如何

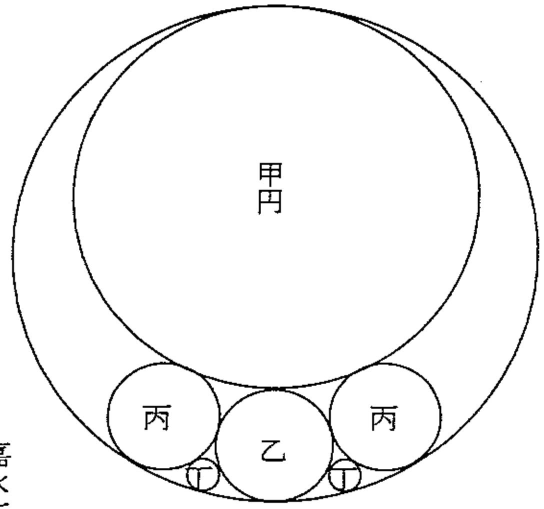
答云

甲径三尺八寸八分六厘七毫五絲有奇
乙径一尺六寸四分二厘三毫二絲有奇
丙径一尺二寸四分二厘四毫八絲有奇

術云列八箇為甲法加入一十箇為乙法加入
六箇為丙法列只言巾三段開平方三倍之為
通實以其法除皈之得各圓径合問

西邑門弟

梨原喜藏義則敬誌



今有如圖平圓内容甲乙丙丁六圓只言甲径五尺二寸丁径七寸
問得外圓径幾何術如何

答曰　七尺四寸三分七厘零四絲三忽弱

術曰列甲圓径内減丁径止余以除皈丁径一
十六段加入一箇開平方加一箇半之以甲径
乘之得外圓径合問

西村門弟

木村惣兵衛重盛謹誌

嘉永七年歳次甲寅秋之仲月吉旦仲越

立峯篤謹識　印印

木原の里

氏子

細工人　北八木驛

大工次郎吉謹造之

庚申堂の算額

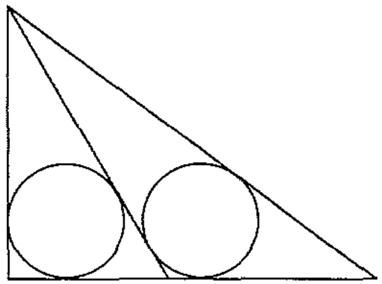
大和国二大区三小区式下部
三川村　安村清一郎
同部結崎邨　森内彌三郎

一	第
○	

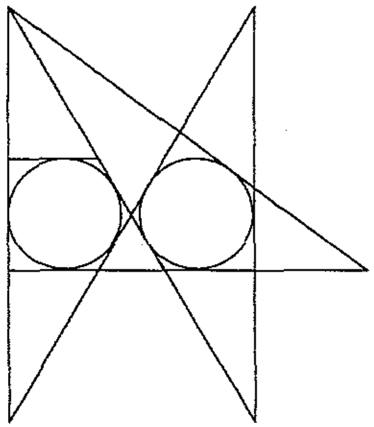
一		第
○		
三		第
○		
○		
○		○

術曰依
圖布算

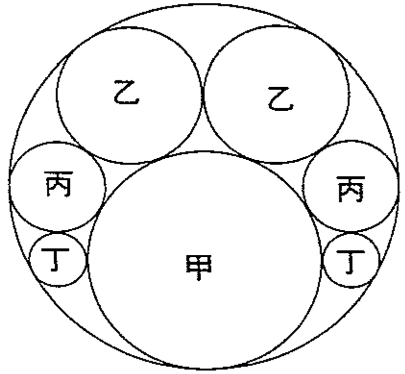
物数銀数ノ正負算準上式
相消スル也適足トイフ物ハ空也



勾三寸　股四寸
両円徑同寸ニシテ問斜ト及円徑ヲ
答
円徑　一寸二分六厘八余
斜　三寸四分六四一余

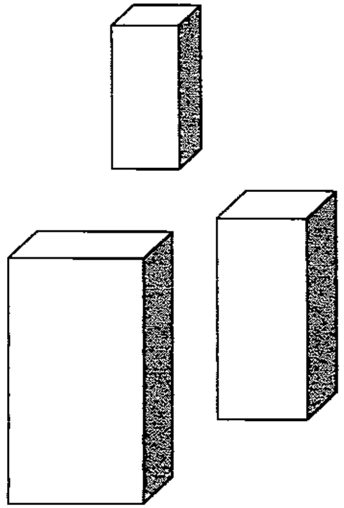


術曰以勾股求弦勾股和内減弦余リ以て勾ヲ
乗之甲位列甲巾内減甲位余開テ平方得数
乙位列勾内減乙位余リ為円徑□列甲位ヲ
以乙位二段ヲ除之得数加入シ
勾ノ内減円徑余　□□斜□見割ノ圖如上

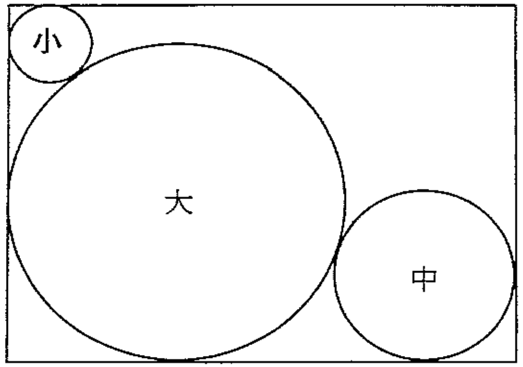


今大円徑内容如圖段々小円徑ヲ只
云大円徑一尺六寸亦云甲円徑九寸
六分問乙丙丁円徑ヲ

答曰　乙円徑六寸
　　　丙円徑四寸
　　　丁円徑二寸四分

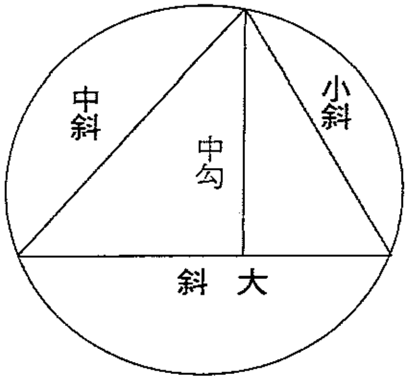


今有立方不
知段数其積
和若干只云
面和若干又
云同差若干
問末之小方



今有長平内容三円徑ヲ中円徑四寸五
分小円徑二寸長平和二尺一寸二分五
厘大円徑與長平

答曰　大円徑八寸
　　　長一尺二寸
　　　平九寸



今有如圖円徑内三斜只云円徑巾大斜
巾和百四十一歩九三六四亦云小斜巾
中斜巾和百十四歩六九四々別云大斜
巾中勾巾ノ差二十一歩七六々四問於
大斜

（参考）　庚申堂の算額は読みとれないため、
「近畿の算額」近畿数学史学会編を参考にした。

Empirical Research of Integrated Study through Mathematics Education
- Task-based Study in Mathematics with the Sangaku and its Fieldwork -

MAKISHITA Hideyo
Junior High and Senior High School at Komaba, University of Tsukuba

Key word: integrated study, task-based study, the Sangaku

Abstract

The class of integrated study was newly established by the government guidelines for teaching as "The time when each school performs the educational activities, which used originality and creativity, such as study covering the area beyond each subject and integrated study, based on students' interests, concern". This study takes into consideration the situations of regions, schools and the actual state of the students. Although the contents of the time of integrated study are not shown, the following issues are enumerated as some examples of the content.

(1) Such integrated issues as international understanding, information, and so forth environment, welfare, which healthy across boundaries and integrated subjects.

(2) Issues based on children's or students' interest and concern.

(3) Issues based on the characteristics of the area or school.

The integrated study has been carried out focusing on these issues in elementary schools and the junior high schools in April, 2002.

Although the time of integrated study was newly established in order to realize the purpose of cherishing the power of living, there have been some criticisms toward the establishment of the integrated study in the curriculum. This is because students' academic ability may be lowered by the introduction of the integrated study. It is a concern that the contents of the subject will be decreased and the study of the foundation of academic achievement of children and students will be hindered by establishing the integrated study.

The aims of integrated study in the government guidelines for teaching are as follows.

Fostering

(1) such qualities and abilities as make it possible for children or students to find tasks, study, think, judge, and solve tasks better, by himself

(2) such attitudes as encourage students to solve problems and make research positively and creatively

I think that these qualities and abilities are the same abilities to find tasks by oneself. It is clear from the fact that the aims of the integrated study often agree with the aims of each subject. Therefore, it is necessary for the teachers to provide students with enough time when children or students can find the object with their interests.

In the revised course of study a new aim "Pleasure of mathematics activity" was included. I think that the activity which is never attempted in the lessons of each subject can be complemented, or the contents of a subject can be deepened by introducing the integrated study which based on interest and concerns of the students.