高校と大学をつなげるカリキュラム開発の基礎研究（3年次）

＜データに潜む特徴をつかむ／微少な変化をとらえる＞

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科

更科元子・井上正允・駒野　誠

鈴木清夫・深瀬幹雄・牧下英世

高校と大学をつなげるカリキュラム開発の基礎研究（3年次）
<データに潜む特徴をつかむ／微少な変化をとらえる>

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
更科元子・井上正允・駒野　誠
鈴木清夫・深瀬幹雄・牧下英世

本年度は、昨年度までに実施した「高校と大学をつなげるカリキュラム開発の基礎研究」（１／２年次）の結果を踏まえ、大学での学びにつながるような新しいカリキュラムについて研究した。昨年までの卒業生アンケートからは、『統計』と『微分方程式』の重要性が浮かび上がってきている。大学に入学すると、『統計』の考えはどの分野に進んでも必要不可欠であり、『微分方程式』は理系では当然のように用いられている。これら２つの基本的な概念を高校以前に学習することは,大学での学びにつながるものだと考えられる。
そこで今年度は、初頭に実施した、「在校生の『統計』に関する基本的なアンケート調査」をふまえて、大学の学びにつながるような新しいカリキュラムを作成に取り組んだ。

キーワード：統計，微分方程式

１．　研究テーマについて

「ゆとり」の学習の路線により，鳴り物入りで施行されたの学習指導要領であるが，学力低下の問題によりに中教審から新たなる答申が出され，「ゆとり」路線への訣別と「総合的な学習の時間」の一層の充実が求められた。

また一方で，大学の授業についていけない学生のために補習授業が行われているという事実がある。その主な原因は，高校での学習内容の削減や変更，また生徒の学習に対す意欲の低減などと考えられているが，高校での授業も，教科書の内容を教えることやそれを理解させる指導だけに追われ，学習内容の発展や大学で学ぶ内容とのつながりをあまり考えずに行われてきたという感は否めない。

本校は平成 14 年文部科学省によりスーパーサイエンスハイスクール(略称：ＳＳＨ)事業の指定を受けた。数学科では，平成 14 年度に研究プロジェクト「創造的な教材・指導法とカリキュラムの実践的研究ー大学での学びにつながる数学の教材作成と指導法についてー」を立ち上げ，中・高でのカリキュラム・指導法の改善，数学教材の開発，高大連携など諸問題についての研究を行ってきた。

２．　１・２年次の研究

高校と大学の学習をスムーズにつなげるための中学・高校の数学カリキュラムの開発を目指して，１年次は，一部の卒業生を対象に予備調査を実施した。

２年次は，その予備調査の結果を踏まえ，本アンケート本調査を実施した。アンケートの対象は，直近６年間の卒業生（本校 46 期生～51 期生）のうち，大学に進学した約 800 名である。約 800 名のうち約 30%の 232 名から回答を得た。このアンケートの分析と考察の抜粋は次の通りである。詳しくは，「筑波大学附属駒場論集第４２集」に報告がある。

(1) 高等学校だけでなく，中学校の教育課程も視野に入れた統計カリキュラムのあり方を考えることが必要である。
(2) 現在，統計を履修できるのは高３年次の文系クラスだけであるが，これを理系にも広げる必要がある。
(3) 新カリキュラムから複素数平面が削除されたが，複素数平面の内容の楽しさに支点を置いた指導内容の工夫が必要である。
(4) 文系の学系によっては，行列が必要と考える者がいる。現在のカリキュラムでは数学Ｃを履修しないと学習しない内容なので，駒場のカリキュラムを考えるときに考慮する必要がある。
(5) 理系，文系ともに，確率を必要と考える者がいる。

Basic Research of Development of Curriculum linking High School to University
<Based on the Questionnaires Conducted to the Graduates of Our School>

現行のカリキュラムでは，条件付き確率の内容を学習することはないので，駒場のカリキュラムでは考慮する必要がある。少なくとも，昭和57年改訂（前々回）の確率・統計が必要である。

(6) 理系では，微分方程式の内容を必要とする者が6割を越える。そのため，駒場のカリキュラムでは考慮する必要がある。

(7) 文系でも，超越関数の微積分や微分方程式を必要と考える者がいるので，駒場のカリキュラムで「数学Ⅲ」を履修できるように配慮する必要がある。

(8) 初等幾何の内容が今回の改訂で，中学と高校に分断され，しかも内容が軽くなってしまった。このままだと，大学でもまともに幾何を学ぶことがない。駒場では中学における図形カリキュラムを含めて，初等幾何の取り扱いを議論する必要がある。

(9) 解析幾何は，改訂を重ねるたびに扱いが軽くなっている。特に，軌跡を中心に独自のカリキュラムを検討する必要がある。

(10)ベクトルは，空間のベクトル方程式を扱わなくなったが，それを考慮に入れた駒場のカリキュラムを検討する必要がある。

3. 本年度の研究

『統計』は“データの散らばり”をいかにしてとらえるか。そこに隠されているもの，潜んでいるものを他者に見えるように表現できる見方や考え方を学ぶ大切な内容がある。また，は‘微分とは何か’の原初的な問題を，“微小な変化”をどのようにつかまえるかを主題として扱うもので，微分法の理解の基礎となるものである。両者とも数学の有用性を感得できるものである。

しかし，学習指導要領では『統計』に関する内容は中学から一切なくなり，また，『微分方程式』も「数学Ⅲ」から消えてから久しい。

大学に入学すると，『統計』の考えはどの分野に進んでも必要不可欠であり，『微分方程式』は理系では当然のように用いられている。アンケートから，これら2つの基本的な概念を学習することなく大学でいきなり数式を扱うことの苦労がみえる。

そこで，3年次初頭に実施した，「在校生の『統計』に関する基本的なアンケート調査」をふまえて，大学の学びにつながるような新しいカリキュラムを作成すべく研究してきた。ここでは，『統計』『微分方程式』の内容で，中学・高校で何を扱うのが望ましいのかの素案をまとめた。それは次の通りである。

S：集団に潜む特徴をつかむ

（S1；コア，S2；オプション）

- S1－1　資料の整理
- S1－2　集団を特徴づける値
- S1－3　確率分布と推測の考え方
- S1－4　相関係数と回帰直線
- S2－1　推定・検定
- S2－2　主成分分析

D：関数の微小な変化から微分方程式まで

- D1－1　関数の微小な変化
  - [1]最大・最小
  - [2]包絡線
- D2－1　基本的な微分方程式
  - [1]面積
  - [2]体積
  - [3]曲線の長さ
  - [4]極座標での面積，曲線の長さ
- D2－2　微分方程式の応用
  - [1]流体の流出速度
  - [2]重力による最速落下
  - [3]鬼ごっこでの追跡
  - [4]製品の寿命
  - [5]母関数を利用した微分方程式の解法

4. 扱いたいと考える素材

ここでは，統計（*Statistics*）と微分方程式（*Defferential equation*）において扱いたいと考えている内容について述べる。なお，Sは統計を，Dは微分方程式を表す。また，S１，D１は全員に学習させたい内容（コア）を，S２，D２は発展的な内容（オプション）と考えている。

S１－１　資料の整理

いろいろな調査，観察，実験などによって得られたデータから，全体的な特徴や傾向，法則などをとらえるためには，まずデータの整理をすることからはじめなければならない。さらに，整理されたデータを表やグラフに表すと，その傾向がわかりやすくなる。

さて，一般に，調査する資料の内容を数値で表したものを変量という。とくに，テストの点数や出生数，交通事故の件数などのように，とびとびの値しかとらないものを離散変量という。これに対して，身長，体重などのように，ある範囲のどんな値でもとりうるものを連続変量という。

連続変量の資料を整理する場合は、変量の範囲をいくつかの小区間に分け、各小区間に入る資料の個数を調べるとよい。この小区間を階級といい、階級の中央の値を階級値という。

また、階級に含まれる資料の個数を度数といい、各階級に度数を対応させた表を度数分布表という。度数の分布を柱状のグラフで表したものをヒストグラムという

また、度数を資料の総数で割ったものを相対度数という。各階級に相対度数を対応させた表を相対度数分布表という。

［1］　度数分布表

上で述べたように、度数分布表は，データを適当にグループ分けし，各グループ（階級）内のデータを同一視して各グループ内にあるデータの数（度数）を表にしたものである。度数分布表は大量のデータの特徴を大局的に眺めるのに有効である。

東京都の気温のデータを整理して度数分表をつくるとき，階級をどうするかということが大きな意味を持つ。

ここでは，n個のデータ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$（ここでは，身長や体重等ような連続変量で考える。）から度数分布表をつくるときの手続きについて考えていこう。

(1)　データの範囲（R）

最大値（$x_{\max}$）と最小値（$x_{\min}$）の差 $x_{\max} - x_{\min}$ をデータの範囲（*Range*）という。

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

<注意>　データの範囲を考えるとき、集団の中で異常値（飛び抜けて大きな値や小さな値）であるデータを除いて範囲を考える場合がある。

(2)　階級と階級値

階級の数は 10 前後を考える。データが多いときは 10 より多めにし，データが少ないときには 10 より少なめとする。ここでは 10 を目安に階級の数をきめる。

$h = \dfrac{R}{10}$　を求め，この値をもとに階級の幅（h）（階級の幅はデータの測定単位の整数倍にする。）を決める。

また、そのとき、階級値が、整数値となるように階級の幅を工夫することもある。。

<注意>　異常値がある場合、～以上、～未満などのようにすることもある。

(3)　度数のかぞえ上げ

データをみて，各階級に含まれるデータの個数（度数）を重複なく正確にかぞえあげる。

なお例 1.1 のように，a_1 の値はデータの最小の値に関係なく、階級のバランスを考えるなど，区切れのよい値を採用するとよい。

<参考>　階級の境界の決め方

階級の境界を決めるために、最初の階級の下側境界の値は

$$（最初の階級の下側境界の値）= x_{\min} - \frac{測定単位}{2}$$

$$（上側境界値）=（下側境界値）+ h$$

ただし、データは測定単位の1桁下で四捨五入してあるものとする。

次の階級の下側境界値は，最初の上側境界の値で，上側境界値は（下側境界値）＋h にする。以下，このことを繰り返して，$x_{\max}$ を含むまで，階級の境界の値を決めていく。階級値はその階級の真ん中の値とする。

$$（階級値）=（階級の下側境界値）+ \frac{h}{2} となる。$$

［2］ヒストグラムと度数折れ線

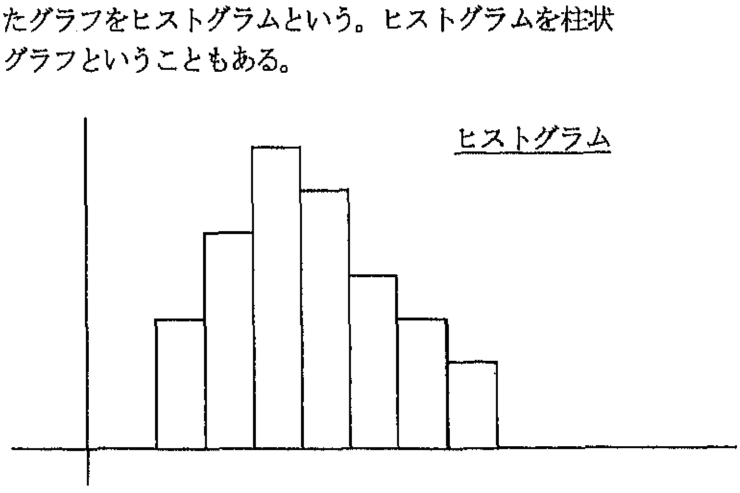
資料の分布の特徴を知るために，度数分布表をもとに，ヒストグラムや度数折れ線に表す方法がある。とくに，大量のデータの特徴を大局的に眺めるときには有効である。

さらに，度数分布を表すヒストグラム，度数折れ線は，原理的にはある区間に属する度数がグラフ上で囲まれる部分の面積に比例するという重要な性質をもつ。

ここでは，ヒストグラムと度数折れ線について述べる。

(1)　ヒストグラム

次の図のように、度数分布表における階級の幅を横、度数を縦とする長方形をすき間なくあけずに順にかいたグラフをヒストグラムという。ヒストグラムを柱状グラフということもある。



(2)　度数折れ線

ヒストグラムの各長方形の上の辺の中点を順に結んだグラフを度数折れ線という。度数折れ線を度数分布多角形ということもある。

(3)　ヒストグラムと度数折れ線と面積の関係

階級値をx軸，度数をy軸にしたときにできるヒストグラムについて，度数折れ線とx軸によって囲まれた多角形の面積は，ヒストグラムにおける柱の全面積と同じである。

例えば，階級値の軸における柱の幅を１とすると，これらの面積は度数そのものを表すことになる。

［3］累積度数分布

ある階級までの度数を調べたり，ある値の資料が全体の資料の中で何番目ぐらいか、また真ん中にくる資料の値はいくらぐらいかなどを調べたりすることがある。そういうときには，資料が累積度数分布で表しておくと有効である。

(1)　累積度数分布表

次の表のように、度数分布表に累積度数を付け加えた表を累積度数分布表という。

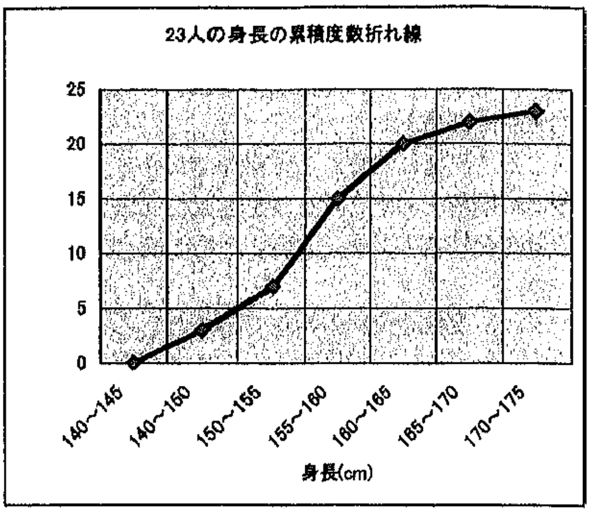
累積度数は、その階級までの度数の合計である。

（例 3.1）次のデータはある部活の生徒の身長を調査した結果を整理して度数分布および累積度数分布の表に整理したものである。

階級 身長(cm)	度数 （人）	累積度数 （人）
140～145	0	0
140～150	3	3
150～155	4	7
155～160	8	15
160～165	5	20
165～170	2	22
170～175	1	23

(2)　累積度数折れ線

次の図のように、累積度数を示す点を順に結んでつくったグラフを累積度数折れ線という。



（例 3.2）上の身長の結果を累積度数折れ線で表したものである。

累積度数の分布のグラフは，必ず単調増加をし，分布の特徴を識別しにくいから，累積度数分布から資料の平均値や資料全体の特徴をとらえようとすることは適切ではない。

［4］相対度数

２つの資料で，資料の数にちがいのあるとき，それらの分布のようすを比べるには，各階級の度数を総度数で割った値を比べると有効である。

(1)　相対度数

２つの資料のように，資料の数のちがいが大きいとき，それらの資料の分布のようすを比べるには，各階級ごとにそこに入る度数が総度数に対して，それぞれどれほどの割合になるのかを調べるとよい。

一般に,各階級ごとに $\dfrac{\text{階級の度数}}{\text{総度数}}$ をその階級の相対度数という。

（例 4.1）次は，A社，B社の２つの会社のある月の給料を整理して度数分布表と相対度数分布表にまとめたものである。

度数分布表

階級	度　数	
(万円)	A会社(人)	B会社(人)
16未満	0	0
16以上～22未満	4	3
22 ～ 28	7	5
28 ～ 34	11	2
34 ～ 40	6	0
40 ～ 46	0	4
46以上	0	0
計	28	14

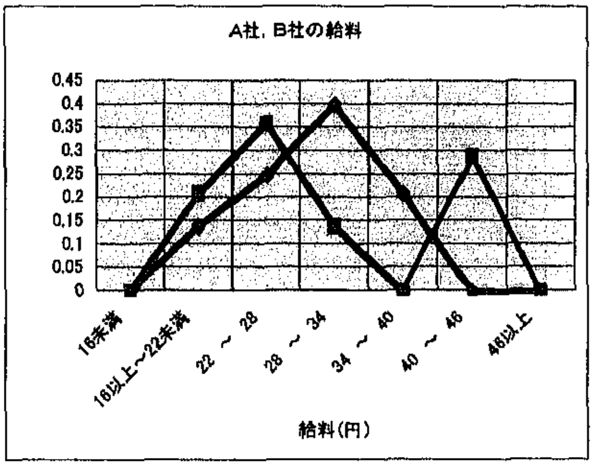
相対度数分布表

階級（万円）	相対度数 A会社（人）	相対度数 B会社（人）
16未満	0	0
16以上～22未満	0.14	0.21
22 ～ 28	0.25	0.36
28 ～ 34	0.40	0.14
34 ～ 40	0.21	0
40 ～ 46	0	0.29
46以上	0	0
計	1	1

<注意>　割合の判断について

上の相対度数分布表の場合，A社の 0.25 とB社の 0.36 の違いが，どういう意味をもつのかを考えるためには，後に出てくる統計的推測の考えが必要である。

(2)相対度数分布のグラフ



度数分布のグラフでは，その面積は度数に比例するから，x 軸とグラフによって囲まれた面積（全面積）は全度数を表す。よって，相対度数分布のグラフでは，x 軸とそのグラフによって囲まれる全面積は１になる。

これは，グラフのある区間が占める部分の面積が，その区間の事象が起こる確率を表すことを意味する。

S１-２　集団を特徴づける値

資料全体の特徴を表す１つの数値を，その資料の代表値という。

代表値は，資料の特徴をとらえるだけでなく，他の資料と比較するために使われる。

一般に代表値としては，平均値を用いることが多い。統計的には中央値（メジアン），最頻値（モード）のほうがよい代表値と考えられる場合もあるが，数学的には扱いにくい。

平均値は資料の全体をならして表そうというもので，異常値がない場合には集団を特徴づける優れた代表値になる。しかし，資料全体の特徴を数値で表すには平均値だけでは不十分である。そこで，資料全体の特徴や集団の性質がよりいっそう明確にするために，代表値とともに資料の散らばりの度合いを考えることがある。この資料の散らばりの度合いを散布度という。

散布度としては，分散や標準偏差，範囲，平均偏差などがある。

[１] データの中心を表す値

資料全体の特徴を表す代表値は，資料の特徴をとらえるだけでなく，他の資料と比較するために使われる。

ここでは，代表値のうち，平均値（*mean*），中央値（*median*），最頻値（*mode*）について述べる。

(1)　平均値（*mean*）$\bar{x}$

集団のデータを x_k $(k=1,2,\cdots n)$ とするとき，

この集団の平均値 $\bar{x}$ は $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

(2)　中央値（*median*）Me

データを大きさの順位並べたとき，その中央にある値を中央値（メジアン）という。

データ数が偶数のときには，中央の値が一意的には定まらないので，中央２つの値の平均を中央値と決める。

(3)　最頻値（*mode*）　Mo

データの最も多い値または頻度が最も高い値を最頻値という。

(4)　度数分布表の平均値

ある資料の度数分布表の階級値が x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_n，であり，それぞれの階級値の度数が f_1，f_2，$\cdots\cdots$，f_n であるとき，この資料の平均値 $\bar{x}$ は

$$\bar{x}=\frac{x_1f+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

<参考>　生徒の中には平均値を求めるためには，必ず生のデータが必要であると思っている者が少なくない。

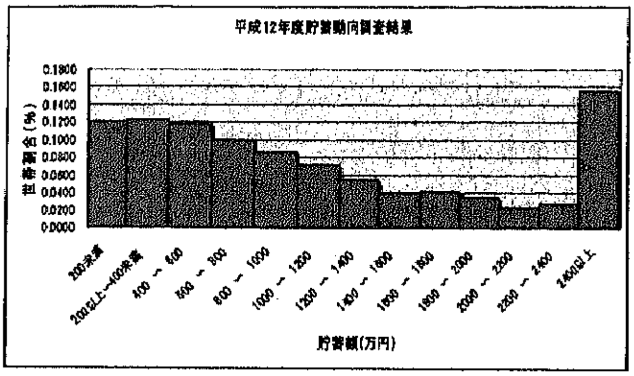
度数分布表による平均値を求めることにおいては，階級値をどのように決めるかがとても重要になる。

平均値 $\bar{x}$ は，データの分布が左右対称に近い場合には分布の中心的の位置を表すことになる。

＜参考＞　データの分布が，偏りのある場合には平均値より，別の数値の方がデータをよく説明できることがある。

（例 1. 2）　次は，平成 12 年度勤労世帯の貯蓄額を表す相対度数分布表とその分布図である。

階級(万円)	相対度数
200未満	0.1210
200以上～400未満	0.1235
400 ～ 600	0.1183
600 ～ 800	0.1003
800 ～ 1000	0.0861
1000 ～ 1200	0.0725
1200 ～ 1400	0.0551
1400 ～ 1600	0.0401
1600 ～ 1800	0.0412
1800 ～ 2000	0.0351
2000 ～ 2200	0.0235
2200 ～ 2400	0.0282
2400以上	0.1551
計	1.0000



この場合の，平均値貯蓄額は 1,356 万円でその高さに違和感を覚えると思うが，これは少数の高額な貯蓄を持った世帯に引っ張られて平均の値が大きくなってしまった結果である。

このような分布の場合には，特徴を表す値として，中央値と最頻値が使われる。この場合の中央値は，900 万円であり，最頻値は 265 万円と平均値から大幅に下がるが，実感としては上から順番につけた全体の真中の貯蓄額である。

一般に，中央値を $\tilde{x}$ とすると，$x_k \geq \tilde{x}$ となる x_k の個数も，$x_k \leq \tilde{x}$ の x_k の個数もともに $\dfrac{n+1}{2}$ 以上になる。すなわち，上の例では，中央値は 900 万円となり，貯蓄高が 265 万円の勤労世帯で一番多い（最頻値）ことになる。

一般に、平均値，中央値，最頻値の関係は、データの分布が図 1 のように，右の裾が長い分布では，

最頻値≧中央値≧平均値

となる。また，図 2 のように，左に裾が長い分布では

最頻値≦中央値≦平均値

となる。また，図 3 のように分布が山が 1 つで左右対称に近い場合には，3 つの値はほぼ等しくなる。

図 1

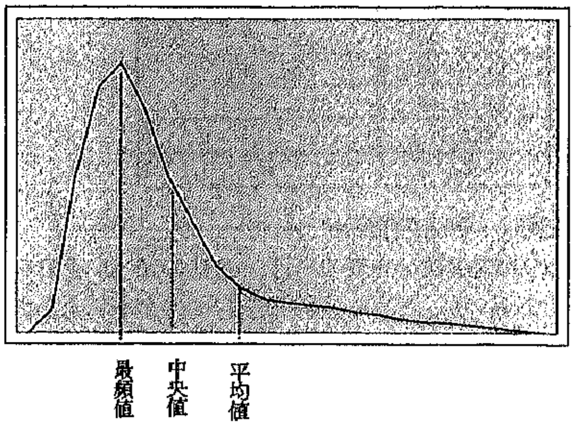


図 2

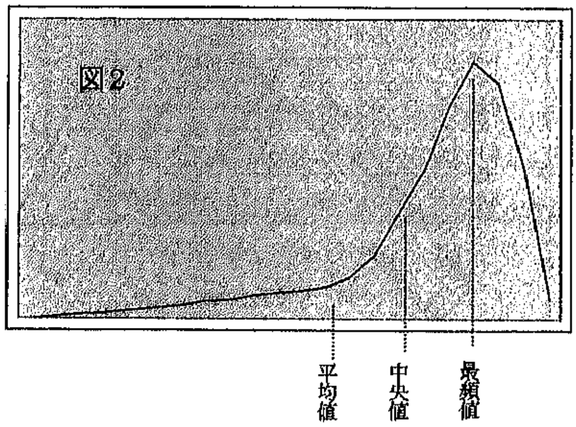
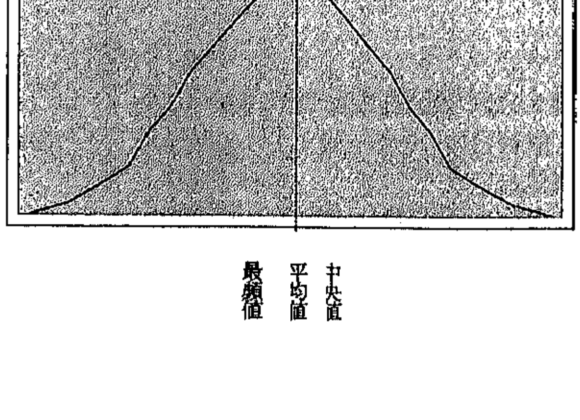


図 3



［2］　データの散らばり具合を表す値

次の度数分布表は，２つのあるクラスの数学のテスト得点を整理したものである。

２つのデータの比較を考えてみよう。

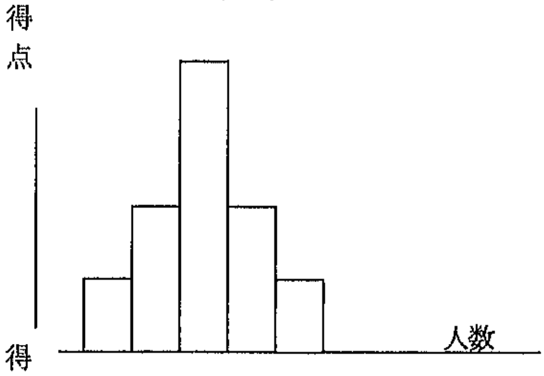
データA

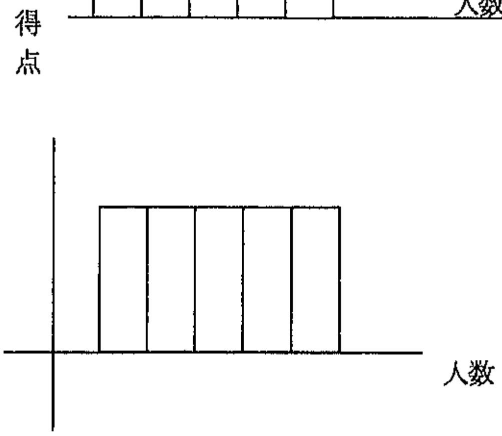
得点	40	50	60	70	80	計
人数	2	4	8	4	2	20

データB

得点	40	50	60	70	80	計
人数	4	4	4	4	4	20

データA　のヒストグラム





データBのヒストグラム

この２つのデータの平均値を計算するとデータAでは

$$\overline{x_A}=\frac{40\times2+50\times4+60\times8+70\times4+80\times2}{20}=60$$

データBでは,

$$\overline{x_B}=\frac{40\times4+50\times4+60\times4+70\times4+80\times4}{20}=60$$

共に，60点である。平均値では，この２つのデータAとBの違いを表すことはできない。

そこでデータx_k（$k=1,2,\cdots,n$）が平均値$\overline{x}$からどの程度離れているかを表す数値を考える。

(1)　平均偏差(*Mean deviation*)（MD）

平均偏差は平均値からの差の絶対値を用いて，次のように定義される。

$$\mathrm{MD}=\frac{1}{n}(|x_1-\overline{x}|+|x_2-\overline{x}|+\cdots+|x_n-\overline{x}|)$$

Aの平均偏差：

$$\frac{1}{20}(|40-60|\times2+|50-60|\times4+|60-60|\times8+|70-60|\times4+|80-60|\times2)=8$$

Bの平均偏差：

$$\frac{1}{20}(|40-60|\times4+|50-60|\times4+|60-60|\times4+|70-60|\times4+|80-60|\times4)=12$$

（Aの平均偏差）＜（Bの平均偏差）より，Aの方がBよりも平均値（$\overline{x}=60$）の周りにデータの分布していることが数値から分かる。

統計では，この平均偏差はあまり使われていない。

(2)　分　散(*Variance*)（s^2）

分散は平均値からの差の２乗を用いて，次のように定義される。

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

Aの分散：

$$\frac{1}{19}\{(40-60)^2\times2+(50-60)^2\times4+(60-60)^2\times8+(70-60)^2\times4+(80-60)^2\times2\}=105.26$$

Bの分散：

$$\frac{1}{19}\{(40-60)^2\times4+(50-60)^2\times4+(60-60)^2\times4+(70-60)^2\times4+(80-60)^2\times4\}=210.52$$

(3)　標準偏差（*Standard deviation*）（s）

分散の単位は２乗（データがcmであるなら，分散の単位はcm²）になっているので，分散の正の平方根を求め，これを標準偏差と定義する。

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\}}$$

分散で計算した値より，

Aの標準偏差：$\sqrt{105.263}=10.26$

Bの標準偏差：$\sqrt{210.526}=14.51$

（Aの標準偏差）＜（Bの標準偏差）より，Aの方がBよりも平均値（$\bar{x}$=60）の周りにデータの分布していることが数値から分かる。

統計では，この標準偏差がよく使われている。

一般に，平均値が同じ２つの分布A，Bについて，分布Aの標準偏差をs_A，分布Bの標準偏差をs_Bとするとき，

$s_A < s_B$ ならば，Aの分布の方がBの分布より，平均値$\bar{x}$のまわりに多くのデータが集まった形になる。

(4) 範　囲（*Range*）（R）

最大のデータ（x_{max}）から最小のデータ（x_{min}）を引いたものを範囲という。

$$R=x_{max}-x_{min}$$

範囲は最大値と最小値のデータを使い，他のデータも持っている情報を使っていない。したがって，データ数が多いときには，範囲は効率がよくないので使われない。データ数の少ないときに限り，使われている。

（参考）　分散と平均値との関係

分散は平均値からの散らばり具合を表す数として

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\bar{x}\right)^2 f_k$$

で定義されるが，なぜ，$\bar{x}$を基準にして考えるのか。

いま，任意の数aをとり，

$$f(a)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\bar{x}\right)^2 f_k$$

とおいて，aについて微分すると，

$$f'(a)=-\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)f_k=-2\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}x_kf_k-\frac{a}{N}\sum_{k=1}^{n}f_k\right)=-2(\bar{x}-a)$$

となり，$f(a)$は$a=\bar{x}$のとき最小となる。

分散を平均からの偏差の平方の和の平均とする理由のひとつはここにある。

S１－３ 確率分布と推測の考え方

変数Xのとる値がx_i である確率をP(X＝x_i)と表す。

Xの確率分布がP(X＝x_i)＝p_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

のとき，Xの平均値（期待値）E(X)を

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$$

と定める。E(X)＝mとして，Xの分散V(X)を

V(X)＝

$$(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i$$

と定める。

Xの標準偏差σを　$\sigma=\sqrt{V(X)}$ と定める。

［１］二項分布

事柄 A が起こる確率がp，起こらない確率が$1-p$ である試行を，独立にn回繰り返し行ったとき，事柄Aが起こる回数をXとすると，X＝kである確率は

P(X＝k)＝

$${}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n)$$

となり，この分布を二項分布B(n,p)という。

二項分布B(n,p)の平均はnp，分散は$np(1-p)$である。

例１．１個のさいころを120回投げたとき，１の目が出た回数をXとすると

Xの分布は二項分布B$(120,\frac{1}{6})$に従う。

Xの平均値 $E(X)=120\times\frac{1}{6}=20$,

分散 $V(X)=120\times\frac{1}{6}\times(1-\frac{1}{6})=\frac{50}{3}$ である。

例2．内閣の支持率が 0.45 であるとする。無作為に有権者 10 人を選んだときの，内閣を支持する人数を X とする。

$P(X=k)=\frac{10!}{k!(10-k)!}(0.45)^k(0.55)^{10-k}$ となり，

X は二項分布 B(10, 0.45) に従う。

具体的に計算すると，

X=0	0.0025	X=6	0.1596
X=1	0.0207	X=7	0.0746
X=2	0.0763	X=8	0.0229
X=3	0.1665	X=9	0.0042
X=4	0.2384	X=10	0.0003
X=5	0.2340	計	1

次のように二項分布 B (n, p) の平均と分散を求めることができる。

二項定理 $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k x^k y^{n-k}$ ・・・・・①

を用いて，二項分布の平均値，分散を求める。

二項定理より，

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}=\{p+(1-p)\}^n=1$$

・・・・・②

①の両辺を x で微分して，

$$n(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\,{}_nC_k x^{k-1}y^{n-k}$$

両辺に x をかけて

$$n(x+y)^{n-1}x=\sum_{k=0}^{n}k\,{}_nC_k x^k y^{n-k} \quad \cdots\cdots③$$

$x=p, y=1-p$ とすると，

$$np=\sum_{k=0}^{n}k\,{}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$$ ゆえに

$E(x)=np$ ・・・・・④

$V(X)=$

$$\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}(k^2-2npk+n^2p^2)\ P(X=k)$$

②，④より

$$=\sum_{k=0}^{n}k^2\,{}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}-n^2p^2 \cdots\cdots⑤$$

③の両辺を x で微分して，

$$n(n-1)(x+y)^{n-2}x+n(x+y)^{n-1}=\sum k^2\,{}_nC_k x^{k-1}y^{n-k}$$

両辺に x をかけて

$$n(n-1)(x+y)^{n-2}x^2+n(x+y)^{n-1}x=\sum_{k=0}^{n}k^2\,{}_nC_k x^k y^{n-k}$$

$x=p, y=1-p$ とすると，

$$n(n-1)p^2+np=\sum_{k=0}^{n}k^2\,{}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$$

ゆえに，⑤より

$V(X)=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np(1-p)$

したがって，二項分布 B (n,p) の平均値は np ，分散は

$np(1-p)$ である。

［2］正規分布

資料を整理して，相対度数分布表を作り，グラフに表してみると，多くのデータ

（例えば，身長など）は近似的に左右対称な山型の分布（正規分布）に従うことが知られている。その意味でも，統計においては，正規分布は非常に重要な分布である。

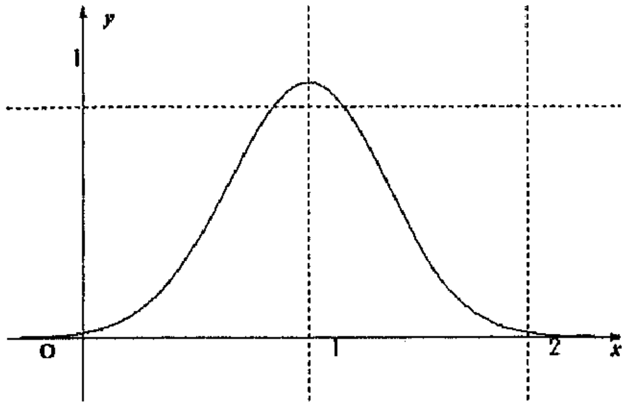
連続的な確率変数 X が $a\leqq X\leqq b$ の範囲の値をとる確率 $P(a\leqq X\leqq b)$ が

$$\mathrm{P}(a \leqq \mathrm{X} \leqq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad m, \sigma \text{ 定数}$$

と求められるとき，Xは正規分布に従うといい，この正規分布を$N(m,\sigma^2)$と表す。このとき，Xの平均値E(X)$=m$，分散V(X)$=\sigma^2$である。

例1.　正規分布$N(1,0.5)$　$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-2(x-1)^2}$

のグラフは下のようになる。



統計でよく使われる次のような，正規分布の性質がある。

確率変数Xの分布が正規分布$N(m,\sigma^2)$であるとき，

①$\mathrm{P}(m-\sigma \leq \mathrm{X} \leq m+\sigma) \fallingdotseq 0.68$　②

②$\mathrm{P}(m-2\sigma \leq \mathrm{X} \leq m+2\sigma) \fallingdotseq 0.95$

③ $\mathrm{P}(m-3\sigma \leq \mathrm{X} \leq m+3\sigma) \fallingdotseq 0.997$

これらの数値は覚えておく値打ちがあるものである。

例2. 試験の得点Xの分布が正規分布$N(m,\sigma^2)$するという仮定のもとで，平均が50点，標準偏差が10点になるように得点を下のように変換したものが，いわゆる偏差値である。

$$\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-m}{\sigma} \times 10 + 50 \qquad \mathrm{Z}\text{ の分布}$$

は正規分布$N(50,10)$である。

したがって，得点の分布が$N(60,15^2)$のとき，90点を偏差値で表すと

$$\frac{90-60}{15} \times 10 + 50 = 70$$

となる。

また，偏差値が60以上ということは，

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} \geqq 60) = \frac{1}{2}\{1-\mathrm{P}(50-10 \leq z \leq 50-10)\} \fallingdotseq$$

$$\frac{1}{2} \times (1-0.68) = 0.16$$

より，上位16%以内であるということになる。

［3］二項分布と正規分布の関係

1個のさいころをn回投げたとき，1の目が出る回数Xの分布は二項分布B$(n,\frac{1}{6})$である。

$$\text{分布 } \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = p_k = {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n)$$

nが大きくなると，折れ線グラフは左右対称の形になり，E(X)$=\dfrac{n}{6}$，V(X)$=\dfrac{5n}{36}$

であるから，その分布は正規分布$N(\frac{n}{6},\frac{5n}{36})$に近づくことになる。

一般に，nが大きくなると二項分布 B(n,p)は，近似的に正規分布$N(np,np(1-p))$と見なせる。

［4］連続変数の確率分布およびその平均値と分散

変数Xの取る値が連続的な値であり，定数a,bに対して

$a \leq \mathrm{X} \leq b$となる確率$\mathrm{P}(a \leq \mathrm{X} \leq b)$が

$$\mathrm{P}(a \leq \mathrm{X} \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

となる関数$f(x)$を考えると，$y=f(x)$のグラフがXの確率分布を表す曲線になっている。

この関数 $f(x)$ をXの確率密度関数という。

確率の性質から　$f(x) \geq 0$，　$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$　である。

例．正規分布 $N(m,\sigma^2)$ の確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

である。

連続変数の確率分布の平均と分散をとのように求めたらよいか調べてみる。

変数Xの取りえる範囲（$\alpha \leq \mathrm{X} \leq \beta$）を細かく分割すると

Xの平均値E（X）は，

$$\sum_k t_k \mathrm{P}(t_k \leq \mathrm{X} \leq t_k + \Delta t_k) = \sum_k t_k f(t_k)\Delta t_k$$

で，近似できる。

よって，E（X）$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_k t_k f(t_k)\Delta t_k = \int_\alpha^\beta x f(x)dx$

同じように，Xの分散V(X)は

$$\mathrm{V(X)} = \int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)dx$$

，E（X）＝ m　と定める。

例．変数Xの取りえる値の範囲が 0≦X≦2 で確率密度関数 $f(x)$ が，次のように定める。

$0 \leq x \leq 1$ のとき，$f(x) = x$

$1 \leq x \leq 2$ のとき，$f(x) = -x + 2$

$f(x) \geq 0$ で，

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (-x+2)dx = [\frac{x^2}{2}]_0^1 + [-\frac{x^2}{2} + 2x]_1^2 = 1$$

E(x)＝

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(-x+2)dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 + [-\frac{x^3}{3} + x^2]_1^2 = 1$$

$$\mathrm{V(x)} = \int_0^1 (x-1)^2 xdx + \int_1^2 (x-1)^2(-x+2)dx = \frac{1}{6}$$

［5］推測の考え方

赤球と白球が入っていることが知られている袋の中の，赤球と白球の比率を調べるのに，袋の中を十分によく混ぜ合わせてからいくつかの球を取り出す。

取り出された球（標本）の赤球と白球の比率が袋の中の球（母集団）の赤球と白球の比率に近いと考えられる。

このことを使って，大きな水槽に入っている金魚の数を次のように推測することができる。水槽の中から k 匹の金魚を捕まえて，印をつけてから水槽の中に放す。放した金魚が水槽の中で一様に散ったころに，n 匹の金魚を捕まえ，印のあるものが m 匹であるとする。

標本（n 匹）の中の印のついた金魚の割合が，水槽（母集団）の中の k 匹の金魚の割合に近い。

したがって，水槽の中の金魚の総数を N とすると

$$\frac{k}{N} \fallingdotseq \frac{m}{n}$$

よって，$N \fallingdotseq \frac{kn}{m}$　と推測できる。

例1．最初に金魚の数を150匹捕まえ，印を付けてから水槽に放す。次の250匹捕まえたところ，印がついて金魚だ14匹いた。水槽にいる金魚の総数を N 匹とすると

$$\frac{150}{N} \fallingdotseq \frac{14}{250} \quad \text{より，} \quad N \fallingdotseq \frac{150 \times 250}{14} = 2678.57$$

したがって，水槽の中には約2700匹の金魚がいると推測できる。

事象の起こりうる確率を利用して，統計的な推測（判断）をすることが行われる。

日常の事象では，n が大きいとき，二項分布 $B(n,p)$ は正規分布 $N(np, np(1-p))$ と見なせることを利用して，統計的な推測（判断）することがある。

例2. 1991. 4. 1〜1992. 3. 31 に生まれた者 121 名について，誕生した日の曜日を調査したところ，火曜日生まれが 24 名いた。この期間に生まれた者の中で火曜日生まれが多いといえるかを統計的な推測(判断)をする。

確率的には，この期間に生まれる者が火曜日である確率は $\frac{1}{7}$ であると考えられから，生まれたｎ人うち，火曜日に生まれる者の人数 X は二項分布 B$(\frac{n}{7}, \frac{6n}{49})$ とする。$n=121$ が大きいから，火曜日生まれの者の人数 X は正規分布 $N(17.3, 14.8)$ すると見なして計算する。

121 人中で，火曜日に生まれが 24 人以上起こる確率を求めると，

$$\frac{24-17.3}{\sqrt{14.8}} = 1.74 \text{ より，}$$

$$P\left(\frac{X-17.3}{\sqrt{14.8}} \geqq 1.74\right) = 0.409$$

（正規分布の数値表を利用）

したがって，火曜日に生まれる確率を $\frac{1}{7}$ とすると起こりうる確率が非常に少ない事象が起きたことになる。

このことを次の２通りに考えることができる。

① たまたま起こりうる確率が少ない事象が起きた。

② めったに起こることがない事象が起きたのは，確率を計算する仮定が正しくない

（ここでは火曜日に生まれる確率が $\frac{1}{7}$ である）。

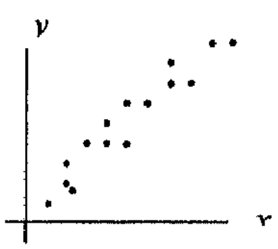
このことについて，統計的推測（判断）では，通常ならば起きないことが起きたということは，仮定が正しくなかったと解釈するのが普通である。すなわち，火曜日に生まれた者が多いことになる。

Ｓ１－４　相関係数から回帰直線

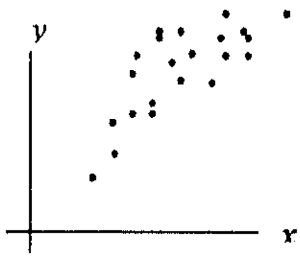
［1］散布図

２つの変数の関連をみるには，どうしたらよいだろうか。まず、2変量のデータ (x_i, y_i) $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ を $x-y$ 平面上にプロットして散布図（二変数を縦軸・横軸にとり観察されたデータをカテゴリー化しないでプロットしたもの）をつくることが重要である。散布図を眺めることにより，x と y とのおおよその関係を知ることができる。

①

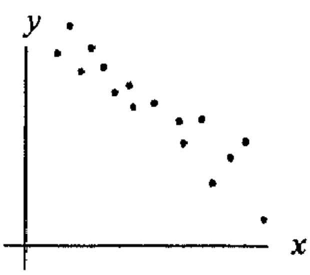


②

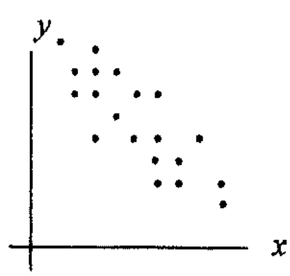


③

④



⑤



①x が増えると y は直線的に増加する傾向が強い。

（x と y との間には正の強い相関がある。）

②x が増えると y は直線的に増加するが，その関係は

①より弱い。

（x と y との間には正の弱い相関がある。）

③x と y との間には増加減少の関係が見られない。

（x と y との間には相関がない，または x と y とは無相関である。）

④x が増えると y は直線的に減少する傾向が強い。

（x と y との間には負の強い相関がある。）

⑤x が増えると y は直線的に減少するが，その関係は

④より弱い。

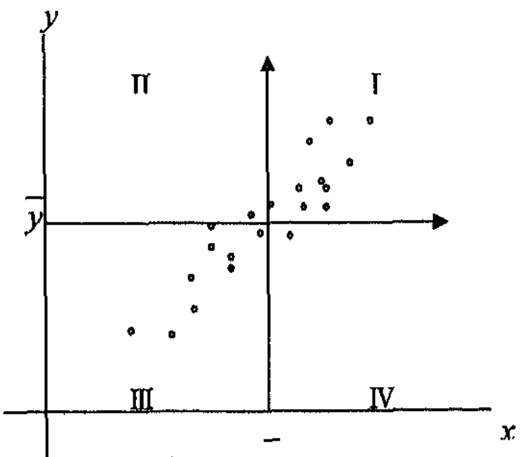
（x と y との間には負の弱い相関がある。）

一方が決まれば他方が決まるという関数に比べて、非常にゆるやかな関係である。

正の相関、負の相関という言葉は、直線の傾きと感じが似ている。

［2］ 相関係数

散布図から，x と y との間に直線的な関係があると認められたとき，直線的な関係の強さを１つの数値表すことを考えてみる。



第Ⅰ象限内の点については，

$(x_i-\bar{x})>0, (y_i-\bar{y})>0$ であるから

$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})>0$

第Ⅱ象限内の点については，

$(x_i-\bar{x})<0, (y_i-\bar{y})>0$ であるから

$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})<0$

第Ⅲ象限内の点については，

$(x_i-\bar{x})<0, (y_i-\bar{y})<0$ であるから

$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})>0$

第Ⅳ象限内の点については，

$(x_i-\bar{x})>0, (y_i-\bar{y})<0$ であるから

$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})<0$

ゆえに，x と y に正の相関がある場合には，n 個のデータの多くは第Ⅰ象限と第Ⅲ象限内にあり，第Ⅱ象限と第Ⅳ象限内の点は少ないと考えられる。

したがって，$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ の値は正で大きいと考えられる。

x と y に負の相関がある場合には，n 個のデータの多くは第Ⅱ象限と第Ⅳ象限内に
あり，第Ⅰ象限と第Ⅲ象限内の点は少ないと考えられる。

したがって，$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ の値は負で絶対値が大きいと考えられる。

また，x と y との間に相関がない場合には，４つの象限内にほぼ均等に分布していると考えられるから，

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ の値は０に近いと思われる。

これらのことから，

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\cdots\cdots(ア)$$

の値の大きさによって，x と y の直線的な関係の強さを知ることができる。

しかし，(ア)の値は，データの数nに依存してしまう。

よって，(ア)をデータ数で割った値

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\cdots\cdots(イ)$$

で，x と y の直線的な関係の強さをはかる目安とすることができる。

(イ)の値は，x と y の単位の取り方によって値が変わってしまう。それを避けるために(イ)の値を

x と y のそれぞれの標準偏差

x $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$ で割った値を考える。

すなわち，$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$ の値で x と y の直線的な関係の強さをはかることができる。この値を x と y の相関係数 r とよばれている。

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

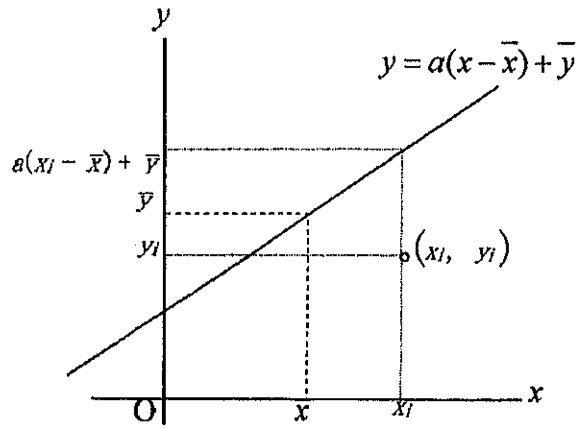
［3］　相関係数の値の範囲

データ (x,y) の平均 $(\overline{x},\overline{y})$ を通る直線 $y=a(x-\overline{x})+\overline{y}$ 直線を考える。

下図のような，点 (x_i,y_i) と点 $(x_i,a(x_i-\overline{x})+\overline{y})$ の距離の2乗の和Lとすると，

$$L=\sum_{i=1}^{n}\{a(x_i-\overline{x})+(\overline{y}-y_i)\}^2=$$

$$a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2-2a\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$$



a の値にかかわらず $0\leqq L$ であるから，Lを a の2次式と考えると，判別式は0以上

になるから，

$$\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\}^2\leq\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\}\{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\}$$

ゆえに，$r^2=\dfrac{\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\}^2}{\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\}\{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\}}$

よって，$-1\leq r\leq 1$

r^2 が1に近いほど，データ (x_i,y_i) は直線に近いことがわかる。したがって，r の値が1に近いほど正の相関が強く，－1に近いほど負の相関が強い。また，r の値が0に近ければ，x と y との間に相関はない。

[4] 回帰直線

2つの変数xとyとの間に直線的関係があることが見られるとき，データに最も適合する直線を求めてみよう。

データ	x	y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
・	・	・
・	・	・
n	x_n	y_n
平 均	$\bar{x}$	$\bar{y}$

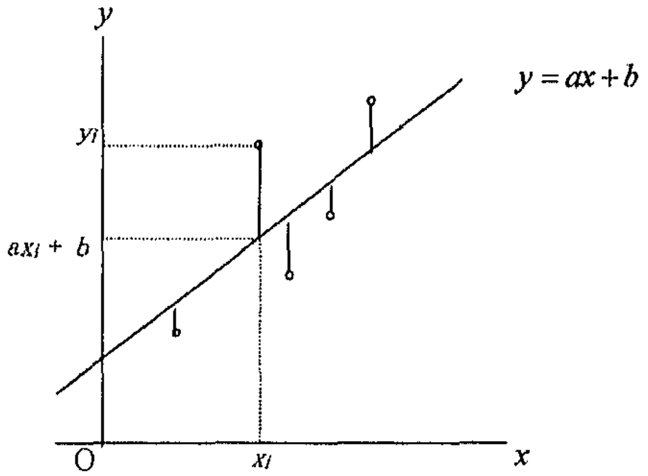
求める直線を $y=ax+b$ とするとき，

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-(ax_i+b)\}^2$$

を最小にするa,bを求めることになる。(最小2乗法)

Q=

$$a^2\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+nb^2-2a\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+2ab\sum_{i=1}^{n}x_i-2b\sum_{i=1}^{n}y_i$$



微分法を用いると次のようになる。

a,bを求めるためにQをa,bで微分して0とおく。

$$\frac{dQ}{da}=2(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)a+2(\sum_{i=1}^{n}x_i)b-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0 \text{ より，}$$

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)a+(\sum_{i=1}^{n}x_i)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \quad \cdots\cdots①$$

$$\frac{dQ}{db}=2(\sum_{i=1}^{n}x_i)a+2nb-2(\sum_{i=1}^{n}y_i)=0 \quad \text{より，}$$

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)a+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i \quad \cdots\cdots②$$

連立方程式①，②を解いて，

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\times\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$\cdots\cdots③$

②より，$b=\bar{y}-a\bar{x}$　となる。 よって，求める直線は　$y=a(x-\bar{x})+\bar{y}$

(aは③から求められる。)

注：a，b についての 2 次式であるから，平方完成を利用して求めることもできる。微分を学んでいない学年で取り扱う場合は、平方完成で説明する。

S2－1　推定・検定

[1] 推　定

統計では，得られた標本（データ）から母集団を特徴づける値を推測することが行われる。そのとき，特徴づける値を得られたデータから1つの数値で推定することを点推定といい，特徴づける値がある区間の中に入るというように区間で推定することを区間推定という。

例1．卵の重さが正規分布N(m，3.0)に従うことが知られている。この母集団から 10 個の卵を取り出し，重さを測定したところ次のようであった。平均 m を推定してみよう。(単位 g)

48.1	50.4	51.5	47.6	50.2
54.5	48.6	50.3	51.2	49.6

(1) 点推定

取り出された 10 個の卵の重さの平均値は

$$\bar{x}=\frac{48.1+50.4+51.5+47.6+50.2+54.5+48.6+50.3+51.2+49.6}{10}$$

$=50.2$

であるから，平均mの点推定の値は 50.2 g である。

(2) 区間推定

95%の確率で m が中に入る区間を推定する。

卵 10 個の重さの分布は正規分布N(m, $\frac{3.0}{10}$)に従うから

$$P\left(-2\leq\frac{50.2-m}{\sqrt{\frac{3.0}{10}}}\leq 2\right)=0.95$$

$$P\left(50.2-2\times\sqrt{\frac{3.0}{10}}\leq m\leq 50.2+2\times\sqrt{\frac{3.0}{10}}\right)=0.95$$

$$50.2-2\times\sqrt{\frac{3.0}{10}}=49.1$$

$$50.2+2\times\sqrt{\frac{3.0}{10}}=51.3$$

ゆえに，卵の重さの平均mは 95%の確率で区間 $[49.1, 51.3]$ の中にある。

n個の標本の平均 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ の分布は，nが大きいとき，正規分布$N(m,\frac{\sigma^2}{n})$に従うとみなせる。mは母集団の平均，σ^2は母集団の分散である。

例2．K 内閣の支持率を調査するために，無作為に選んだ有権者 3000 人にK内閣を支持するか，支持しないかを聞き取り調査した。その結果 1290 人が支持すると答えた。

この結果，K内閣の支持率を点推定すると，

$$\frac{1290}{3000}=0.43$$

であり，支持率の推定値は 43%として表される。

しかし，この調査はたまたまの 3000 人の値であり，同様な調査をもう一度行えば違った値が得られると考えられる。調査毎に支持率についての違った値が得られるが，本来の支持率はどの程度であるかを知りたい。すなわち，本来の支持率がある確率 95%でどの範囲にあるかを区間推定する。

確率変数$X_k\,(k=1,2,\cdots,3000)$で支持するときは$X_k=1$，支持しないときには$X_k=0$とし，支持率をpとすると，有権者 3000 人で支持する人数

$X=\sum_{k=1}^{3000}X_k$ は

二項分布$B(3000,p)$に従うことになる。二項分布$B(n,p)$でn が大きいと正規分布になるから，

$N(3000p, 3000p(1-p))$を用いて計算する。

正規分布の性質から

$$P\left(3000p-2\sqrt{3000p(1-p)}\leq X\leq 3000p+2\sqrt{3000p(1-p)}\right)=0.95$$

X=1290 であるから，

$$P\left(3000p-2\sqrt{3000p(1-p)}\leq 1290\leq 3000p+2\sqrt{3000p(1-p)}\right)=0.95$$

ゆえに，次の不等式を解けばよい。

不等式

$$3000p-2\sqrt{3000p(1-p)}\leq 1290\leq 3000p+2\sqrt{3000p(1-p)}$$

$$\frac{1290}{3000}-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{3000}}\leq p\leq\frac{1290}{3000}+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{3000}}$$

$$0.43-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{3000}}\leq p\leq 0.43+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{3000}}$$

この不等式を電卓を利用して解くと，

$0.412 \leq p \leq 0.448$

したがって，支持率 p は95%の確率で，41.2%から44.8%の間であることになる。

［2］検　定.

仮説 H_0 が真であるか，真であるとはいえないかを手にしたデータ（実験値）をもとに判定をしたい場合が多くある。次のように考えてその判定を行う。

検定の論理

①仮説 H_0 が真であるとして，データに対応する理論的な結果を出す。理論的な結果とは，H_0 を真としたときの値の分布である。

② 論的な値と実験値を比較する。

実験値はデータから計算される１つの数値である。

現実に得られた実験値が，①で求めた分布において起こりやすい値であるか，非常に起こりにくい値であるかを見て，非常に起こりにくい値であれば，理論な結と実験値は食い違っていると判断し，H_0 を真とはいえないとする。

具体的には，ある小さな確率 α（0.05 とか 0.01 を用いること多い）を考え，起こる確率が高々 α であるような領域を H_0 を真としたときの値の分布に設定しておく。この領域を 棄却域とよぶ。

この棄却域は，H_0 が真であれば実験値がこの棄却域の中に入り確率は高々 α であって，この中に入ることはほとんどないという領域である。

したがって，次のように判定することになる。

『実験値が棄却域に入れば，H_0 を真とはいえないと判断し，棄却域に入らなければ H_0 を真として受け入れる』・・・この検定を有意水準 α の検定という。

例. さいころを作って 600 回振ってみたところ，1 の目が 120 回出た。このさいころは正しいかとうかを検定してみよう。

仮説 H_0：さいころは正しい

（1 回ふったとき，1 の目のでる確率は $\frac{1}{6}$）。

600 回中に 1 の出る回数を X とすると，X の分布は二項分布 $B(600, \frac{1}{6})$ である。

$n = 600$ が大きいから，X は正規分布 $N(100, \frac{250}{3})$ するとみなせる。有意水準 5%の検定すると，棄却域は $P(|X-100| \geqq 2 \times \sqrt{\frac{250}{3}}) = 0.05$ である。

$$2 \times \sqrt{\frac{250}{3}} = 18.3$$

実際には,1 の目が 120 回出たので,

$|X-100| = |20-100| = 20 > 18.3$

よって,X=120 の値は棄却域に入る。

したがって,仮説 H_0 は真とはいえないから,このさいころは正しいとはいえない。

S２－２ 主成分分析入門

［１］ 主成分分析の考え方

多変量からなるデータから少数の変量を合成し，それによってデータを分析するのが主成分分析である。多変量から少数の変量への合成は，多変量のデータを分散ができるだけ大きい方向を見つける。その方向からデータを眺めるのが，個々のデータの特徴が一番よく見えることになる。

〇考え方のモデル

９種類の観戦スポーツの好み

	野球	バスケ	相撲	陸上	バレー	サッカー	テニス	卓球	水泳
A君x	1	6	4		3	2	5	9	8
B君y	2	3	5	6	4	1	7	8	9

データ全体の散らばり量

$S^2 = S_x^2$（x の分散）$+ S_y^2$（y の分散）$= 15$

変量 $z = ax + by$ を考えて,

9個のデータ

$a+2b, 6a+3b, 4a+5b, 7a+6b, 3a+4b, 2a+b, 5a+7b, 9a+8b, 8a+9b$

の分散が最大になる a, b を条件 $a^2+b^2=1$ のもとで求める。これらのデータの平均 $\bar{z}$ は $\bar{z}=5a+5b$

分散を計算すると， $S_z^2=\dfrac{1}{2}(15a^2+25ab+15b^2)$

$$a^2+b^2=1 \cdots\cdots ①$$

となる。

ラグランジュの定数変化法を用いて，S_z^2 を最大にする a,b を求める。

$\mathrm{L}=\dfrac{1}{2}(15a^2+25ab+15b^2)-\lambda(a^2+b^2-1)$ 　とおく。

$\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial a}=15a+\dfrac{25}{2}b-2\lambda a=0$ より $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial a}=\dfrac{15}{2}a+\dfrac{25}{4}b=\lambda a$

$\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial b}=\dfrac{25}{2}a+15b-2\lambda b=0$ より $\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial b}=\dfrac{25}{4}a+\dfrac{15}{2}b=\lambda b$

これを行列表現して

	野球	バスケ	相撲	陸上	バレー	サッカー	テニス	卓球	水泳
第一主成分	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	$\frac{9}{\sqrt{2}}$	$\frac{13}{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{12}{\sqrt{2}}$	$\frac{17}{\sqrt{2}}$	$\frac{17}{\sqrt{2}}$
第二主成分	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{2} & \frac{25}{4} \\ \frac{25}{4} & \frac{15}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

これは，行列の固有値と固有ベクトルを求めることを意味する。

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2}-\lambda & \frac{25}{4} \\ \frac{25}{4} & \frac{15}{2}-\lambda \end{bmatrix}=0 \quad \text{より，} (\frac{15}{2}-\lambda)^2-(\frac{25}{4})^2=0$$

よって， $\lambda=\dfrac{55}{4}, \dfrac{5}{4}$

固有値 $\lambda_1=\dfrac{55}{4}$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$

（すなわち， $b=a$ ）

固有値 $\lambda_2=\dfrac{5}{4}$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$

（すなわち， $b=-a$ ）

○固有値の和＝データ全体の散らばり量 S^2 であり，

$b=a$ のとき，

$$S_z^2=\frac{1}{2}(15a^2+25ab+15b^2)=\frac{55}{2}a^2=\frac{55}{4}=\lambda_1$$

$b=-a$ のとき，

$$S_z^2=\frac{1}{2}(15a^2+25ab+15b^2)=\frac{5}{2}a^2=\frac{5}{4}=\lambda_2$$

である。また，異なる固有値に対する２つのベクトルは垂直になる。

分散が最大になるような並べる軸方向を第一主成分という。

①より，S_z^2 を最大にする (a,b) は，$(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ である。

それと垂直な (a,b) は，$(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ である。

（A君 x，B君 y ）を

$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ 　に代入する。←第一主成分

$z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ 　に代入する。←第二主成分

第一主成分方向の数値の並びをみると，第一主成分は「テレビの放映率」と解釈できる。スポーツ観戦では，実際に試合を観戦することは少なく，テレビと通して観ることが多いことがあって当然の結果であるかも知れない。

第一主成分がデータの情報をどのくらい説明していくかの目安を与える，寄与率を

計算すると，寄与率＝$\dfrac{\text{第一主成分の分散}}{\text{資料全体の散らばり量}}$.

$$=\frac{S_z^2}{S^2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{55}{60}=0.917 \quad (91.7\,\%)$$

したがって，スポーツ観戦の順位は，「テレビの放映率」で91.7%説明することできる。

第二主成分方向の数値の並びをみると，「攻守がはっきりしているかいないか（個々の選手の動きが明確）」と解釈できそうである。

寄与率＝$\dfrac{\text{第二主成分の分散}}{\text{資料全体の散らばり量}}$

$$=\frac{S_z^2}{S^2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{5}{60}=0.83 \quad (8.3\,\%)$$

参考：基本的な量

(1) 1変量の平均と分散

統計では，得られたn個のデータ$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$からいろいろなこと判断する。

データを特徴付ける値（標本平均）

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

←データの中心を表す値

データの散らばり具合（分散）

$$S_x^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$(n-1)$で割るのは，母分散の不偏推定量になるためである。

$S_x=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ は標本標準偏差という。

(2) 2変量，3変量の散らばり量

n個のデータ(x_i, y_i)　$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$とき，

データ全体を散らばり量S^2＝各変量（x, y）の分散の総和と定義する。すなわち

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\bar{x})^2+(y_i-\bar{y})^2\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\}$$

$$=S_x^2+S_y^2$$

n個のデータ(x_i, y_i, z_i)　$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$とき，

データ全体を散らばり量S^2＝各変量（x, y, z）の分散の総和と定義する。すなわち，

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\bar{x})^2+(y_i-\bar{y})^2+(z_i-\bar{z})^2\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2\}$$

$$=S_x^2+S_y^2+S_z^2$$

(3)情報量

データの分散が小さいということは，そのデータは均一的（同じよう）なものの集まりであり，分散が大きいということは，そのデータはいろいろなものが混じりあっているものの集まりと考えられる。

したがって，分散が大きいデータの方が，小さいデータより情報量が大きいと考えられる。

［2］ 主成分分析（3変量）

変量全体の散らばり量S^2は

資料	x	y	z
1	x_1	y_1	z_1
2	x_2	y_2	z_2
⋮	⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n	z_n
平均	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\bar{x})^2+(y_i-\bar{y})^2+(z_i-\bar{z})^2\}$$

$$=S_x^2+S_y^2+S_z^2$$

変量x,y,zに対して,

$u=ax+by+cz$ （a,b,cは定数）

という合成変量を作成し，その分散S_u^2が条件$a^2+b^2+c^2=1$のもとで，最大になるように，係数a,b,cを決定する。

$$\bar{u}=a\bar{x}+b\bar{y}+c\bar{z}$$

$$S_u^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{a(x_i-\bar{x})+b(y_i-\bar{y})+c(z_i-\bar{z})\}^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\{a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2+b^2\sum_{i=1}^{m}(y_i-\bar{y})^2+c^2\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2$$

$$+2ab\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})+2bc\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(z_i-\bar{z})+2ca\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})(x_i-\bar{x})$$

$$=a^2S_x^2+b^2S_y^2+c^2S_z^2+2abS_{xy}+2bcS_{yz}+2caS_{zx}$$

ただし

$$S_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

$$S_{yz}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(z_i-\bar{z})$$

$$S_{zx}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})(x_i-\bar{x})$$

$$\mathrm{L}\ =a^2S_x^2+b^2S_y^2+c^2S_z^2+2abS_{xy}+2bcS_{yz}+2caS_{zx}$$

$$-\lambda(a^2+b^2+c^2-1)$$

$\dfrac{\partial L}{\partial a}=2aS_x^2+2bS_{xy}+2cS_{zx}-2\lambda a=0$ より

$$aS_x^2+bS_{xy}+cS_{zx}=\lambda a$$

$\dfrac{\partial L}{\partial b}=2aS_{xy}+2bS_y^2+2cS_{yz}-2\lambda b=0$ より

$$aS_{xy}+bS_y^2+cS_{yz}=\lambda b$$

$\dfrac{\partial L}{\partial c}=2aS_{zx}+2bSyz+2cS_z^2-2\lambda c=0$ より

$$aSzx+bS_{yz}+cS_z^2=\lambda c$$

行列を用いて表現すると,

$$\begin{pmatrix}S_x^2 & S_{xy} & S_{zx}\\ S_{xy} & S_y^2 & S_{yz}\\ S_{zx} & S_{yz} & S_z^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

$\mathrm{S}=\begin{pmatrix}S_x^2 & S_{xy} & S_{zx}\\ S_{xy} & S_y^2 & S_{yz}\\ S_{zx} & S_{yz} & S_z^2\end{pmatrix}$ とする。

λはSの固有値, $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$は固有ベクトルとなっている。

$$S_u^2=a(aS_x^2+bS_{xy}+cS_{zx})+b(aS_{xy}+bS_y^2+cS_{yz})+c(aS_{zx}+bS_{yz}+cS_z^2)$$

$$=\lambda(a^2+b^2+c^2)=\lambda$$

したがって，固有値λは分散と一致し，最大固有値λ_1対する固有ベクトル$\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}$を求めればよいことになる。第一主成分は，$u_1=a_1x+b_1y+c_1z$で求めることができる。

また，異なる固有値λ,μに対する固有ベクトルをそれぞれ$\overline{a_\lambda}=\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\\ c_1\end{pmatrix}$，$\overline{a_\mu}=\begin{pmatrix}a_2\\ b_2\\ c_2\end{pmatrix}$とすると,

内積は　$\lambda(\overline{a_1},\overline{a_2})=(\lambda\overline{a_1},\overline{a_2})$

$=$

$(a_1S_x^2+b_1S_{xy}+c_1S_{xz})a_2+(a_1S_{xy}+b_1S_y^2+c_1S_{yz})b_2+(a_1S_{zx}+b_1S_{yz}+c_1S_z^2)c_2$

$=a_1(a_2S_x^2+b_2S_{xy}+c_2S_{zx})+b_1(a_2S_{xy}+b_2S_y^2+c_2S_{yz})+c_1(a_2S_{zx}+b_2S_{yz}+c_2S_z^2)$

$=(\overline{a_1},\mu\overline{a_2})=\mu(\overline{a_1},\overline{a_2})$

ゆえに, $(\lambda-\mu)(\overline{a_1},\overline{a_2})=0$

$\lambda\neq\mu$ より, $(\overline{a_1},\overline{a_2})=0$

よって, 異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに垂直であることがわかる。

したがって, Sの異なる固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ $(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\lambda_3\geq0)$ とすると, 資料全体の散らばり量 S^2 は $S^2=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ となる。

このことから, 第一主成分の寄与率は $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ であることがわかる。

第二主成分を求めるには, 値固有 λ_2 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$ から, $u_2=a_2x+b_2y+c_2z$ で求めることができる。

また, 第二主成分の寄与率は $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ である。

第三主成分も同様に, 固有値 λ_3 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}$ から, $u_3=a_3x+b_3y+c_3z$ と求めることができる。第三主成分の寄与率は $\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$ である。

D　関数の微小な変化から微分方程式へ

関数の変化については中学校から『変化の割合』などを取り上げており、高校の微分法では、関数 $y=f(x)$ について、x の微小な変化量 Δx に対する y の変化量を Δy として、その比の極限 $\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ に注目する。

微小な変化に注目し、関数の性質を知ろうとする考え方は近代的であり、応用範囲が広い。実際、自然科学はもちろん社会科学の分野でも、この考えに基づいて微分方程式を導き、関数にせまっている。

関数の微小な変化に注目する事から始めて、微分方程式を導くことや、簡単な微分方程式の解法まで進めていく。

D1　関数の微小な変化

D1－1　関数の微小な変化

関数の微小な変化に注目すると、その関数の性質が簡単に見えてくることがある。そのような例を以下に挙げるが、この考えは微分方程式に繋がるものであり、関数を扱う様々な場面で、常に意識して指導したい。

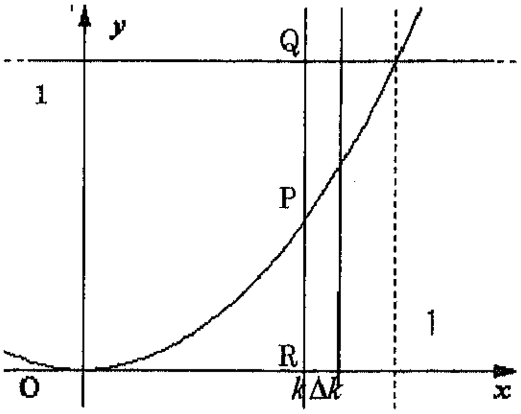
[1]　最大・最小

関数を取り扱うとき、増加減少などの変化の様子は重大な関心事であり、当然最大最小は最も注目する事柄である。増減の切り替わり、即ち極大極小がどのようなときに起きるかが、微小な変化に注目すると見えてくる。

関数 $S(k)$ について、k の微小な増加量 Δk に対する $S(k)$ の変化量を ΔS とすると、
$\Delta S>0$ のとき $S(k)$ は増加し、$\Delta S<0$ のとき $S(k)$ は減少する。したがって、$S(k)$ が極大・極小となるとき、$S(k)$ が連続であるならば、$\Delta S=0$ である。このことや ΔS を近似的に求めることについては直感的に納得させ、最大・最小となる場合を、$\Delta S=0$ から考える。

$S(k)$ として様々な関数を取り上げることができるが、面積を表す場合の例を以下に示す。

例1．$y=x^2$ 及び直線 $y=0, y=1, x=\mathrm{k}$ （k は定数で、$0\leqq\mathrm{k}\leqq1$ ）で囲まれる２つの部分の面積の和を $S(k)$ とする。$S(k)$ を最小にする k の値は？



（k の微小な変化を考えて、$\Delta S=0$ となるのは、PQ=PR　のときである。）

解）k の微小な増加量 Δk に対する $S(k)$ の変化量を ΔS とする。

$S(k)$ の変化に注目して、ΔS の増加する部分と減少する部分の面積が等しくなるときが最小。

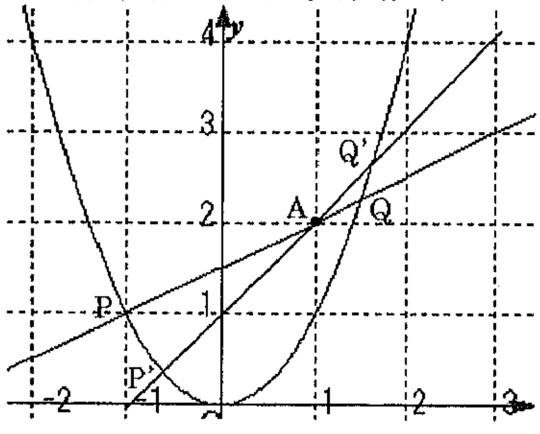
Δk が微小であることから、それぞれの部分を長方形と考えて、

$$k^2\cdot\Delta k=(1-k^2)\Delta k$$

$$k^2=1-k^2 \qquad (\rightarrow \text{即ち、PQ=PR})$$

$$\therefore\quad k=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例２．$y=x^2$ と点 A(1,2)を通る直線mで囲まれる部分の面積が、最小となるような直線 m は？



（直線mの微小な変化を考えて、$\Delta S=0$ となるのは、AP=AQ のときである。）

解）直線 m を微小に変化させるので、m と x 軸との作る角を θ として、面積を $S(\theta)$、θ の微小な増加量 $\Delta\theta$ に対する $S(\theta)$ の変化量を ΔS とする。

$S(\theta)$ の変化に注目して、ΔS の増加する部分と減少する部分の面積が等しくなるときに最小となる場合がある。

$\Delta\theta$ が微小であることから、それぞれの部分を三角形と考えて、AP=a ,AQ=b , AP'=a',AQ'=b' とすると、

$$\frac{1}{2}a\cdot a'\cdot\sin\Delta\theta=\frac{1}{2}b\cdot b'\cdot\sin\Delta\theta$$

より、$a\cdot a'=b\cdot b'$

$\Delta\theta\fallingdotseq 0$ のとき、$a\fallingdotseq a'$, $b\fallingdotseq b'$ であるから、

$$a^2=b^2, a=b \quad (\rightarrow \text{即ち、AP=AQ})$$

このことから、P (α,α^2),Q(β,β^2) とすると、

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=1,\quad \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=2$$

これを解いて、P (0,0) ,Q(2,4)。

最小の時の直線mは、$y=2x$

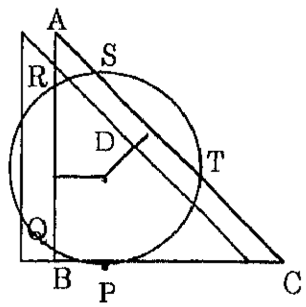
（補足）ΔS の増加する部分と減少する部分を三角形ではなく、扇形に近似して、

$$\pi a^2\frac{\Delta\theta}{360^\circ}=\pi b^2\frac{\Delta\theta}{360^\circ}$$

などから導いても良い。

例３．AB＝BC＝3、∠ABC＝90° の△ABC と、半径１の円 D があり、辺 BC 上の点 P で、円 D が辺 BC に接している。

△ABC と円 D の共通部分の面積が最大となるような P の位置は？



解）PB＝k 、共通部分の面積を $S(k)$ として、k の微小な増加量 Δk に対する $S(k)$ の変化量を ΔS とする。$S(k)$ の変化に注目して、ΔS の増加する部分と減少する部分の面積が等しくなるときに最大となる場合がある。

円Dと△ABC の交点を、Q,R,S,T とすると、

$$\text{QR}=2\sqrt{1-k^2}\ \text{、ST}=2\sqrt{1-\left(\frac{2-k}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

であり、Δk が微小であることから、それぞれの部

分を長方形と考えて、

$$2\sqrt{1-k^2}\cdot\Delta k = 2\sqrt{1-\left(\frac{2-k}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{\Delta k}{\sqrt{2}}$$

$$(1-k^2)=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{2-k}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$

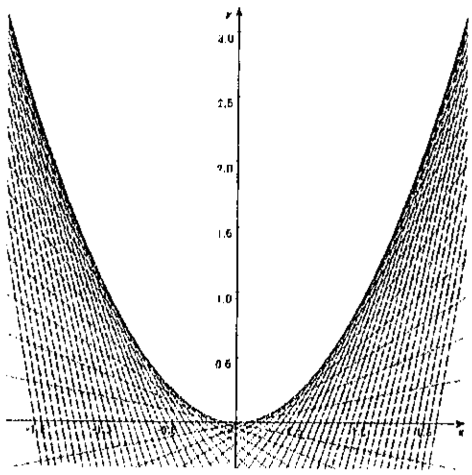
整理して、　$3k^2+4k-6=0$

従って、$k(=BP)=\dfrac{-2+\sqrt{22}}{3}$　のとき面積最大。

［2］ 包絡線

例えば、$y=x^2$ 上の点 (t,t^2) における接線の方程式は、 $y=2tx-t^2$ である。

逆に、直線 $y=2tx-t^2$ で、t を実数全体で変化させたとき、直線群全体でできる図形の縁（ふち）は、$y=x^2$　を描く。

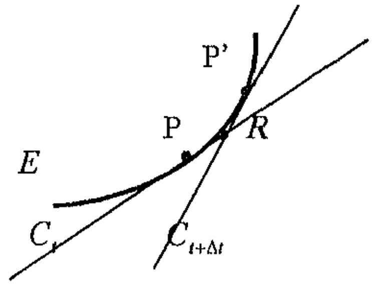


このような、曲線群全体でできる図形の縁で描かれる図形が包絡線である。

曲線群 $C_t : f(x,y,t)=0$ の包絡線 $E : g(x,y)=0$ は、C_t を t の方程式ととらえて実数解を持つ条件から求めることが多いが、C_t の微小な変化に注目して、次のように包絡線を求める。

包絡線は C_t と E の接点 P の軌跡と考えられる。したがって、包絡線 E を求めるには、接点 P（の t による媒介変数表示）を求めればよいことになる。

C_t 上の接点を $P(x,y)$、C_t を Δt 変化させた曲線 $C_{t+\Delta t}$ 上の接点をP'、また、C_t と $C_{t+\Delta t}$ の交点を R とすると、



$\Delta t \to 0$ のとき、$P' \to P$ であるから、$R \to P$

従って、C_t と $C_{t+\Delta t}$ の交点 R の極限が、接点 P である。

例1．【直線群の包絡線】

(1) $C_t : y=2tx-t^2$ のとき、

$C_{t+\Delta t} : y=2(t+\Delta t)x-(t+\Delta t)^2$

2式より交点は

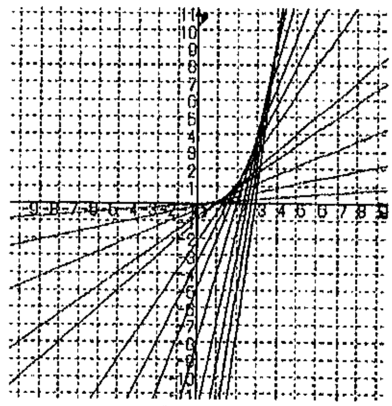
$$R : x=\frac{2t\Delta t+(\Delta t)^2}{2\Delta t}=t+\frac{\Delta t}{2}\ \to t,\ y\to t^2$$

$(\Delta t \to 0$ のとき$)$

したがって、$P(t,t^2)$　であり、包絡線は　$y=x^2$

（参考）2次方程式 $t^2-2xt+y=0$ の実数解条件より $D/4=x^2-y\geq 0,\ \ y\leq x^2$

(2) $C_t : y=t^2x-t^3$　（ただし、$t>0$）のとき、



$C_{t+\Delta t} : y=(t+\Delta t)^2x-(t+\Delta t)^3$

2式より交点は

$$R : x=\frac{3t^2+3t\Delta t+(\Delta t)^2}{2t+\Delta t}\ \to \frac{3}{2}t(>0),$$

$$y\to\frac{1}{2}t^3$$

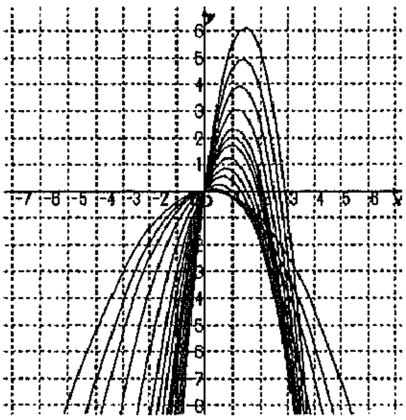
$(\Delta t \to 0$ のとき$)$

したがって、$P(\frac{3}{2}t, \frac{1}{2}t^3)$ であり、

包絡線は　$y = \frac{4}{27}x^3 \quad (x > 0)$

例２．【放物線群の包絡線】

(1)$C_t : y = tx^2 + t^2 x$　（ただし、t<0）のとき、



$C_{t+\Delta t} : y = (t + \Delta t)x^2 - (t + \Delta t)^2 x$

２式より交点は

$R : x = -2t - \Delta t \to -2t (> 0),$

$y \to 2t^3 \qquad (\Delta t \to 0$のとき)

したがって、$P(-2t, 2t^3)$ であり、

包絡線は　$y = -\frac{1}{4}x^3 \quad (x > 0)$

(2)　（原点から、$\tan\theta$ 方向に、初速v_0(定数)で投げ上げられた物体が描く放物線群の包絡線（ドーム球場の屋根の曲線？））

運動の法則より、

$$C_\theta : x = v_0 \cos\theta \cdot t, \quad y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

tを消去して、

$$C_\theta : y = x\tan\theta - \frac{g}{2{v_0}^2}(1 + \tan^2\theta)x^2 \quad \cdot\cdot ①$$

したがって、

$$C_{\theta+\Delta\theta} : y = x\tan(\theta + \Delta\theta) - \frac{g}{2{v_0}^2}(\,1 + \tan^2(\theta + \Delta\theta)\,)x^2$$

２式より、交点は、

$$R : x = \frac{2{v_0}^2}{g(\tan(\theta + \Delta\theta) + \tan\theta)} \to \frac{{v_0}^2}{g\tan\theta} \qquad (\Delta\theta \to 0)$$

このとき、$\tan\theta = \frac{{v_0}^2}{gx}$ であるから、

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2{v_0}^2}(1 + \tan^2\theta)x^2$$

$$= -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2 + \frac{{v_0}^2}{2g}$$

包絡線の方程式は、$y = -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2 + \frac{{v_0}^2}{2g}$

（参考）$\tan\theta = m$ として、①より

$$gx^2m^2 - 2{v_0}^2xm + 2{v_0}^2y + gx^2 = 0$$

$$D/4 = {v_0}^4x^2 - gx^2(2{v_0}^2y + gx^2)$$

$$= {v_0}^4 - g(2{v_0}^2y + gx^2) \geq 0$$

よって、$y \leq -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2 + \frac{{v_0}^2}{2g}$

D２　微分方程式

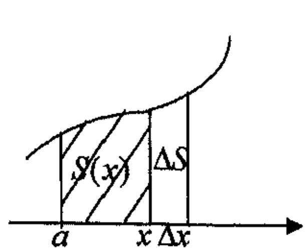
微小な変化に注目して等式（近似式）を作り、微分方程式を導く事から始めて、様々な具体的事象にかかわるものへ進める。微分方程式の解法については、簡単に求積できる変数分離型にとどめ、深入りしない。

D２－１　基本的な微分方程式

関数$y = f(x)$について、xの微小な変化量Δxに対するyの変化量をΔyとして、Δyの近似式から$\frac{dy}{dx}$の式を導くことは、面積を求めることに関連して、数学Ⅱでも行っている。体積や長さについても同様の方法で求められることまで確認しておきたい。

［1］面積

曲線$y = f(x)(\geq 0)$とx軸の間で、aからxまでの部分の面積を$S(x)$とする。xの微小な変化量Δxに対する$S(x)$の変化量をΔSとすると、Δxが微小であるから長方形で近似して、



$\Delta S \fallingdotseq \Delta x \cdot f(x)$　より、$\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \fallingdotseq f(x)$

$\Delta x \to 0$ のときを考えて、

$$S'(x) = \frac{dS}{dx} = f(x) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

上の①は微分方程式であり、これから関数$S(x)$を求めることができる。

①より、$S(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$　（Cは積分定数）とすると、

$S(a) = F(a) + C = 0$　より、$C = -F(a)$

よって、$S(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$

［2］ 体積

座標空間にある立体について、平面$x = a$から平面$x = k$までの間にある部分の体積を$V(k)$、平面$x = k$での切り口の面積を$S(k)$とする。

kの微小な変化量Δkに対する$V(k)$の変化量をΔVとすると、Δkが微小であるから底面積$S(k)$の柱体で近似して、

$\Delta V \fallingdotseq \Delta k \cdot S(k)$　より、$\dfrac{\Delta S}{\Delta k} \fallingdotseq S(k)$

$\Delta k \to 0$ のときを考えて、$V'(k) = \dfrac{dV}{dk} = S(k)$

これより、面積の場合と同様に、

$$V(k) = \int_a^k S(k)dk \quad \text{を得る。}$$

［3］ 曲線の長さ

曲線$y = f(x)$のaからxまでの部分の長さを$L(x)$とする。

xの微小な変化量Δxに対する$L(x)$の変化量をΔL、yの変化量をΔyとすると、Δxが微小であるから線分で近似して、

$\Delta L \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ より、$\dfrac{\Delta L}{\Delta x} \fallingdotseq \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

$\Delta x \to 0$ のときを考えて、

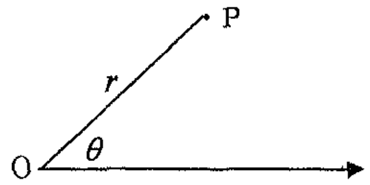
$$L'(x) = \frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

これより、面積の場合と同様に、

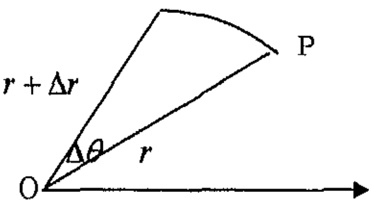
$$L(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad \text{を得る。}$$

［4］ 極座標での面積、曲線の長さ

座標平面上の点Pに対して、線分OPの長さをr、x軸の正の部分と線分OPの作る角をθとする。



方程式$r = f(\theta)$を満たしながらPが動くとき、αからθまでの範囲で、線分OPが通過する部分の面積を$S(\theta)$、Pが描いた線の長さを$L(\theta)$とする。



θの微小な変化量$\Delta\theta$に対する$r, S(\theta), L(\theta)$の変化量をそれぞれ$\Delta r, \Delta S, \Delta L$とすると、$\Delta\theta$が微小であるから、$\Delta S$は三角形、$\Delta L$は線分で近似して、

$\Delta S \fallingdotseq \dfrac{1}{2}r(r + \Delta r)\sin\Delta\theta$　より、

$$\frac{\Delta S}{\Delta\theta} \fallingdotseq \frac{1}{2}r(r + \Delta r)\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}$$

$\Delta\theta \to 0$ のとき、$S'(\theta) = \dfrac{dS}{d\theta} = \dfrac{1}{2}r^2$

従って、$S(\theta) = \int_\alpha^\theta \dfrac{1}{2}r^2 d\theta$

$$\begin{aligned}(\Delta L)^2 &\fallingdotseq r^2 + (r + \Delta r)^2 - 2r(r + \Delta r)\cos\Delta\theta \\ &= 2r(r + \Delta r)(1 - \cos\theta) + (\Delta r)^2 \\ &= 4r(r + \Delta r)\sin^2\frac{\Delta\theta}{2} + (\Delta r)^2\end{aligned}$$

よって、

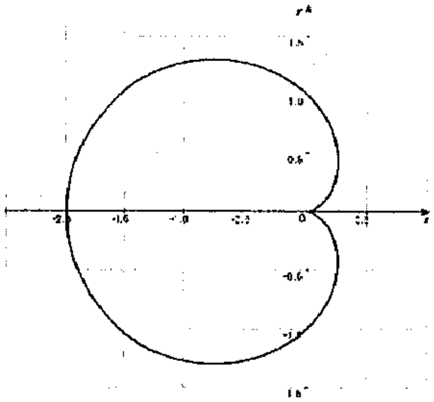
$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta\theta}\right)^2 \fallingdotseq r(r + \Delta r)\left(\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2$$

$\Delta\theta \to 0$ のとき、$\left(\dfrac{dL}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

従って、$L(\theta) = \int_\alpha^\theta \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

例.

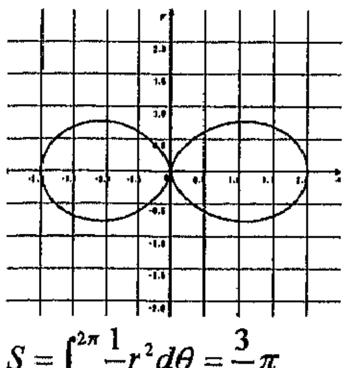
(1) 極方程式$r=1-\cos\theta$ ($0\leqq\theta\leqq 2\pi$) が描く曲線で囲まれた部分の面積をS、
また、曲線の長さをLとする。



$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\pi$$

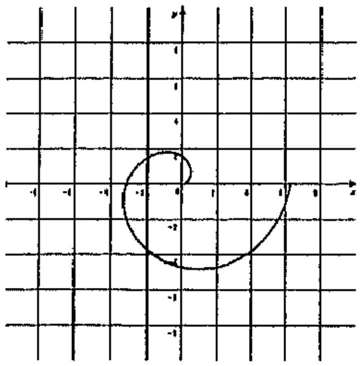
$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8$$

(2) 極方程式$r=1+\cos 2\theta$ ($0\leqq\theta\leqq 2\pi$) が描く曲線で囲まれた部分の面積をSとする。



$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{3}{2}\pi$$

(3) 極方程式$r=\theta$ ($0\leqq\theta\leqq 2\pi$) が描く曲線をFとする。Fとx軸の正の部分で囲まれた部分の面積をS、またFの長さをLとする。



$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{4}{3}\pi^3$$
$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{1+4\pi^2}+2\pi\right)+\pi\sqrt{1+4\pi^2}$$

D2－2　微分方程式の応用

微分方程式を利用して解決できる事柄は多い。興味深く、また解法が比較的容易な例のいくつかを以下にあげる。

[1]　液体の流出時間

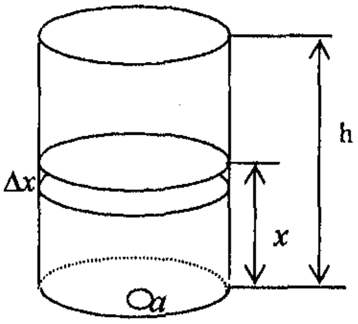
$\boxed{\text{準備}}$

液体の入った容器に、面積aの穴をあけて、液体を流出させる。時間の微小変化Δtに対する体積の変化をΔVとすると、流出速度vは単位面積について考えた変化率　$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{a\Delta t}$　であり、液面と穴の高低差をh、重力加速度をgとすると、通常、　$v=\sqrt{2gh}$ が成り立つ。

(これは液面の高さから落下した物体が穴の地点で得る速度と同じであり、エネルギー保存則 $\frac{1}{2}mv^2=mgh$ (mは質量) から得られる。)

例1.底面積S cm^2 の直円柱型の容器に、深さh cmまで水が入っている。底面にある面積a cm^2の穴から水流出させるとき、すべての水が流れ出るまでにかかる時間は？

なお、重力加速度をg cm/s^2とする。



解) 水が流出し始めてからの時間をt (秒(s))、そのときの水深をx (cm)とすると、底面にある穴からの流出速度は$\sqrt{2gx}$ (cm/s)。

tの微小な変化量Δtに対するxの変化量をΔxとすると、$\Delta t \cdot \Delta x < 0$であり、$\Delta t$での容器内の水の変化量$\Delta V$に注目して、

$\Delta V = -S \cdot \Delta x \fallingdotseq a\sqrt{2gx}\Delta t$ より、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \fallingdotseq -\frac{S}{a\sqrt{2gx}}$$

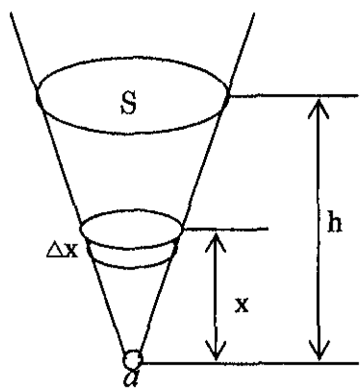
$\Delta t \to 0$のときを考えて $\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{S}{a\sqrt{2gx}}$

したがって、 $t = -\displaystyle\int_h^x \frac{S}{a\sqrt{2gx}}dx$

すべての水が流れ出るまでの時間は、

$$t = -\int_h^0 \frac{S}{a\sqrt{2gx}}dx = \frac{S\sqrt{2h}}{a\sqrt{g}}$$

例2. 例1において、容器が直円錐型で、面積がa cm^2の穴は、先端にあるものとする。
深さh cmでの水面の面積が S cm^2のとき、すべての水が流れ出るまでにかかる時間は?



解) $-S\dfrac{x^2}{h^2}\Delta x \fallingdotseq a\sqrt{2gx}\Delta t$ より、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \fallingdotseq -\frac{S}{ah^2\sqrt{2g}}x^{\frac{3}{2}}$$

$\Delta t \to 0$のときを考えて

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{S}{ah^2\sqrt{2g}}x^{\frac{3}{2}}$$

したがって、すべての水が流れ出るまでの時間は、

$$t = -\int_h^0 \frac{S}{ah^2\sqrt{2g}}x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{S\sqrt{2h}}{5a\sqrt{g}}$$

例3. 例1において、容器に b cm^3/s の水が加えられていくものとする。
このとき、容器の水はどうなるか?

解) 加えられる量と流れ出す量が等しくなるとき、水深は一定となる。

このとき、$a\sqrt{2gx}\cdot\Delta t \fallingdotseq b\cdot\Delta t$ であり、

$\Delta t \to 0$のときを考えて $a\sqrt{2gx} = b$

よって、一定となる水深は、$x = \dfrac{b^2}{2ga^2}$

また、時間tと水深xの関係式を求めると、

$S\Delta x \fallingdotseq (b - a\sqrt{2gx})\Delta t$ より、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \fallingdotseq \frac{S}{b - a\sqrt{2gx}}$$

$\Delta t \to 0$のときを考えて $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{S}{b - a\sqrt{2gx}}$

したがって、

$$t = \int_h^x \frac{S}{b - a\sqrt{2gx}}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}S}{a\sqrt{g}}(\sqrt{h} - \sqrt{x}) - \frac{bS}{a^2 g}\log\frac{b - a\sqrt{2gx}}{b - a\sqrt{2gh}}$$

(注) 上の式より、$x \to \dfrac{b^2}{2ga^2}$ のとき、
$t \to \infty$ であることがわかる。

[2] 重力による最速降下

準備

【速度ベクトルの大きさと向き】

座標平面上を動く点Pについて、時刻tのときの位置を P$(x(t), y(t))$ とする。

時刻tの微小な変化量Δtに対するx, yの変化量を$\Delta x, \Delta y$とする。

このとき、速度$\overrightarrow{v}=(v_x, v_y)$について、

$$v_x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt},\ v_y=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}$$

であるから、$\overrightarrow{v}=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})$　であり、

その大きさは、　$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

$\overrightarrow{v}$ とx軸方向の作る角をθとすると、

$$\tan\theta=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{dy}{dx}$$

また、質量mの物体が静止状態から高さhだけ鉛直方向に落下した時の速度$\overrightarrow{v}$について、エネルギー保存則$\frac{1}{2}m|\overrightarrow{v}|^2=mgh$　（gは重力加速度）から、

$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{2gh}$　である。

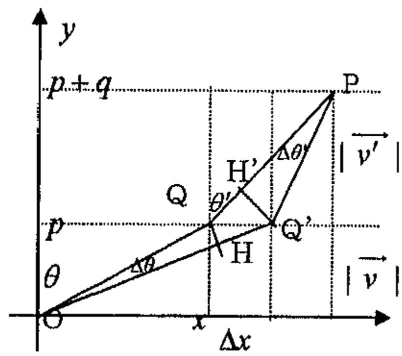
【屈折の法則】

座標平面上を動く点Pの速度の大きさを、

$0<y<p$で　$|\overrightarrow{v}|$、

$p<y<p+q$で　$|\overrightarrow{v'}|$

とする。（$p, q, |\overrightarrow{v}|, |\overrightarrow{v'}|$はそれぞれ定数。）



点Pが、原点から、直線$y=p$上の点を経由して、点A$(a, p+q)$まで、折れ線を描いて進むとき、所要時間を最小とする経由点をQ(x, p)とし、そのごく近くの点をQ’$(x+\Delta x, p)$とする。また、OQ，QPとy軸方向の作る角をθ, θ'とし、∠QOQ’$=\Delta\theta$，∠QPQ’$=\Delta\theta'$、Q, Q’からOQ’，PQに引いた垂線をQH, $Q'H'$とする。

経路OQPが所要時間最小だから、

$\Delta x \fallingdotseq 0$　のとき、

$$\frac{OQ}{|\overrightarrow{v}|}+\frac{QP}{|\overrightarrow{v'}|}\fallingdotseq\frac{OQ'}{|\overrightarrow{v}|}+\frac{Q'P}{|\overrightarrow{v'}|}$$

$$\frac{OQ}{|\overrightarrow{v}|}+\frac{\Delta x\sin\theta'+Q'P\cos\Delta\theta'}{|\overrightarrow{v'}|}$$

$$\fallingdotseq\frac{OQ\cos\Delta\theta+\Delta x\sin(\theta+\Delta\theta)}{|\overrightarrow{v}|}+\frac{Q'P}{|\overrightarrow{v'}|}$$

$$\frac{OQ(1-\cos\Delta\theta)-\Delta x\sin(\theta+\Delta\theta)}{|\overrightarrow{v}|}$$

$$\fallingdotseq\frac{Q'P(1-\cos\Delta\theta')-\Delta x\sin\theta'}{|\overrightarrow{v'}|}$$

$\Delta x \fallingdotseq 0$　のとき、$\Delta\theta, \Delta\theta' \fallingdotseq 0$、$\sin\Delta\theta, \sin\Delta\theta' \fallingdotseq 0$

であるから、$1-\cos\Delta\theta=\frac{\sin^2\Delta\theta}{1+\cos\Delta\theta}$　より、これらの項を無視すると、

$$\frac{-\Delta x\sin(\theta+\Delta\theta)}{|\overrightarrow{v}|}\fallingdotseq\frac{-\Delta x\sin\theta'}{|\overrightarrow{v'}|}$$

$$\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)}{|\overrightarrow{v}|}\fallingdotseq\frac{\sin\theta'}{|\overrightarrow{v'}|}$$

$\Delta x\to 0$のとき$\Delta\theta\to 0$であるから、

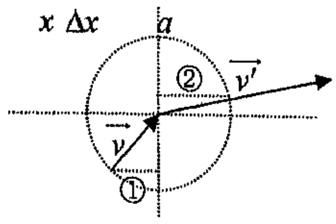
$$\frac{\sin\theta}{|\overrightarrow{v}|}=\frac{\sin\theta'}{|\overrightarrow{v'}|}$$

このことから速度が変化する場合で、目標に最速で到達するとき、$\frac{|\overrightarrow{v}|}{\sin\theta}$は一定であり、その定数を$k$とすると、　$|\overrightarrow{v}|=k\sin\theta$　　が成り立つ。

たとえば、$|\overrightarrow{v}|:|\overrightarrow{v'}|=1:2$のとき、$\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}$と$y$軸方向の作る角$\theta, \theta'$について、

$\sin\theta : \sin\theta'=1:2$

が成り立つように進むと最速になる。



（別証）微分法を用いると、次のように示すことができる。

$Q(x,p)$ とし、経路OQPの所要時間を $f(x)$ とすると、

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+p^2}}{|\overrightarrow{v}|}+\frac{\sqrt{(a-x)^2+q^2}}{|\overrightarrow{v'}|}$$

$$f'(x)=\frac{x}{|\overrightarrow{v}|\sqrt{x^2+p^2}}-\frac{a-x}{|\overrightarrow{v'}|\sqrt{(a-x)^2+q^2}}$$

$$=\frac{\sin\theta}{|\overrightarrow{v}|}-\frac{\sin\theta'}{|\overrightarrow{v'}|}$$

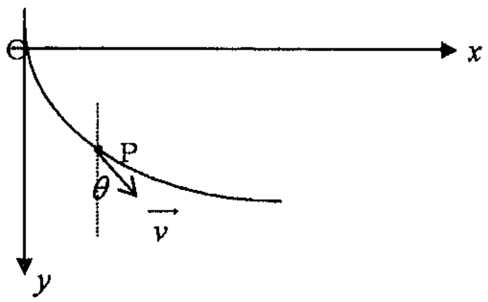
（ただし θ,θ' は、$\overrightarrow{v},\overrightarrow{v'}$ と y 軸方向の作る角。）

$f(x)$ が最小となるのは $f'(x)=0$ の時にあり、

このとき、 $\dfrac{\sin\theta}{|\overrightarrow{v}|}=\dfrac{\sin\theta'}{|\overrightarrow{v'}|}$

例1.【重力による最速降下経路】

質量mの物体が、鉛直な平面上を、点OからAまで降下するとき、所要時間を最小にする経路は？　（降下時の摩擦等は考えない）



解）時刻 t における物体の位置をP (x,y)、速度を $\overrightarrow{v}$ 、$\overrightarrow{v}$ と y 軸方向の作る角を θ とする。

エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}m|\overrightarrow{v}|^2=mgy \quad (g\text{ は重力加速度})$$

$$|\overrightarrow{v}|=\sqrt{2gy}$$

Pが降下するに従って $|\overrightarrow{v}|$ は大きくなるが、最速に降下するとき、瞬間々々で、屈折の法則が成り立つので、$|\overrightarrow{v}|=k\sin\theta$ （k は定数）と表せる。

よって、

$$\sqrt{2gy}=k\sin\theta,\quad y=\frac{k^2}{2g}\sin^2\theta \quad \text{——①}$$

また、$\dfrac{dy}{dx}=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$ より、$\dfrac{dx}{dy}=\tan\theta$

よって　$x=\int_0^y \tan\theta\ dy$、　これに①を用いて、

$$x=\int_0^\theta \tan\theta\cdot\frac{k^2}{g}\sin\theta\cos\theta\ d\theta=\int_0^\theta\frac{k^2}{g}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{k^2}{2g}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\frac{k^2}{4g}(2\theta-\sin 2\theta)$$

また①より、 $y=\dfrac{k^2}{4g}(1-\cos 2\theta)$

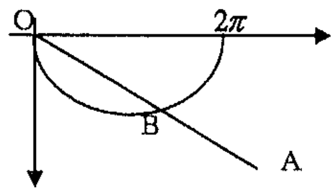
従って、曲線 $\begin{cases}x=a(\alpha-\sin\alpha)\\ y=a(1-\cos\alpha)\end{cases}$ ——②

（ただし、 $a=\dfrac{k^2}{4g},\alpha=2\theta$ ）

に沿って降下するとき、所要時間が最小である。

（これはサイクロイド曲線）

（注） k、従って a の値について、直線OAとサイクロイド曲線 $x=\alpha-\sin\alpha, y=1-\cos\alpha$ の交点をBとすると、$a=\dfrac{OA}{OB}$ である。



例2.【最速降下経路での所要時間】

例1で、OからAまで降下する時間は？

解） $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{2gy}$ より

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\frac{d\alpha}{dt}=\sqrt{2gy}$$

ここで、②より、

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2=a^2(1-\cos\alpha)^2+a^2\sin\alpha^2$$

$$=2a^2(1-\cos\alpha)=2ay$$

したがって、$\sqrt{2ay}\dfrac{d\alpha}{dt}=\sqrt{2gy}$、$\dfrac{dt}{d\alpha}=\sqrt{\dfrac{a}{g}}$

よって、　$t=\int_0^{\alpha}\sqrt{\dfrac{a}{g}}d\alpha=\alpha\sqrt{\dfrac{a}{g}}$

従って、例1（注）のBが、$\alpha=\alpha_1$の時の点とすると、OからAまで降下する時間は　$\alpha_1\sqrt{\dfrac{a}{g}}$

また、$\alpha=2\pi$、すなわち、$A(2a\pi,\,0)$のとき、

OからAまで降下する時間は　$2\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$

たとえば、東京大阪間を最速降下曲線によるトンネルで結ぶと、東京大阪間 500 kmとして、$2a\pi=500$より、$a=\dfrac{250}{\pi}$だから、所要時間は、

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}=\sqrt{\frac{1000\pi}{g}}\fallingdotseq\sqrt{\frac{1000\times10^3\times3.14}{9.8}}$$

$\fallingdotseq 566$秒=9分26秒 !?

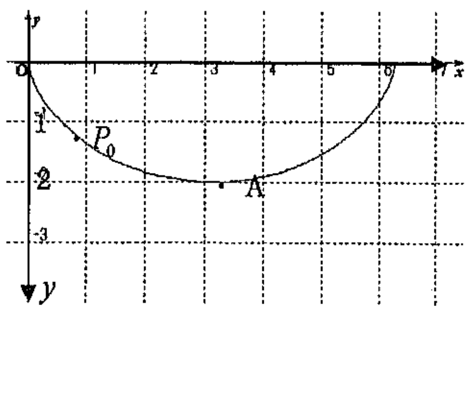
（ただし、トンネルの深さは、$\alpha=\pi$のときのyの値より　$\dfrac{250}{\pi}\times2\fallingdotseq159$km　である。）

例3．【サイクロイド曲線に沿った降下の等時性】

鉛直な平面上で、質量mの物体を、

サイクロイド$\begin{cases}x=\alpha-\sin\alpha\\ y=1-\cos\alpha\end{cases}$　に沿って、

点$P_0(x_0,y_0)$ $(0<x_0<\pi)$から、点$A(\pi,2)$まで降下させるとき、その所要時間は？



解）t秒後の位置を$P(x,y)$、そのときの速度を$\vec{v}$とすると、

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{2g(y-y_0)}\ \text{より、}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\cdot\frac{dy}{dt}=\sqrt{2g(y-y_0)}$$

ここで、

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1=\frac{(dx/d\alpha)^2}{(dy/d\alpha)^2}+1=\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}+1$$

$$=\frac{2}{1+\cos\alpha}=\frac{2}{2-y}$$

従って、　$\sqrt{\dfrac{2}{2-y}}\dfrac{dy}{dt}=\sqrt{2g(y-y_0)}$

$$\frac{dt}{dy}=\frac{1}{\sqrt{g(2-y)(y-y_0)}}$$

よって、$t=\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{1}{\sqrt{g(2-y)(y-y_0)}}dy$　―――③

ここで、

$(2-y)(y-y_0)$

$$=\frac{(2-y_0)^2}{4}\left[1-\left\{\frac{2}{2-y_0}\left(y-\frac{2+y_0}{2}\right)\right\}^2\right]$$

であるから、

③において、$\dfrac{2}{2-y_0}\left(y-\dfrac{2+y_0}{2}\right)=\sin\beta$ ―― ④

とおくと、$y=y_0$のとき$\beta=-\dfrac{\pi}{2}$であり、

$$t=\frac{1}{\sqrt{g}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\beta}\frac{1}{\frac{2-y_0}{2}\cos\beta}\frac{2-y_0}{2}\cos\beta d\beta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)$$

④で、$y=2$のとき$\beta=\dfrac{\pi}{2}$

よって、点Aまでの降下時間は　$t=\dfrac{\pi}{\sqrt{g}}$　（一定）

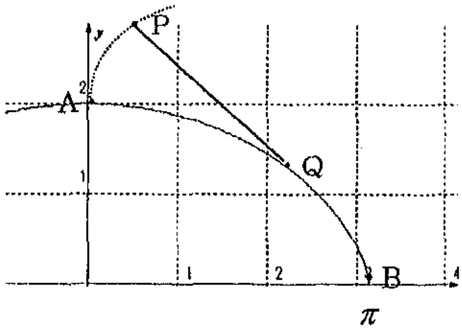
従って、サイクロイド曲線に沿って降下するとき、降下し始める位置に関わらず、最下点に到達するまでの降下時間は一定である。

例4．【サイクロイド振り子】

媒介変数表示$\begin{cases} x = \alpha - \sin\alpha - \pi \\ y = 1 - \cos\alpha \end{cases}$ で表されたサイクロイド曲線C上の点をA(0,2)、B(π,0)とする。

曲線Cに沿ってAからBまで糸を張り、Bで糸の片端を固定する。

糸をピンと張ったままAにある糸の端Pを動かすとき、Pの描く曲線は？



解）　糸と曲線Cが接する点をQ(x,y)（ただし0≦x≦π、即ちπ≦α≦2π）とし、Pの座標をαで表す。

AからQまでの曲線の長さは、

$$\int_\pi^\alpha \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha$$

$$= \int_\pi^\alpha \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}\, d\alpha$$

$$= \int_\pi^\alpha 2\sin\frac{\alpha}{2} d\alpha = -4\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\alpha}{dx/d\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha - \sin\alpha - \pi \\ 1 - \cos\alpha \end{pmatrix} - 4\cos\frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha - \sin\alpha - \pi \\ 1 - \cos\alpha \end{pmatrix} + 4\cos\frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} \sin\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + \sin\alpha - \pi \\ 3 + \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ただし、$\theta = \alpha - \pi$.

したがって、Pの描く曲線もサイクロイドであり、このような振り子を作れば、サイクロイドの等時性により、振幅の大きさに関わらず、周期は一定となる。

［3］ 鬼ごっこでの追跡

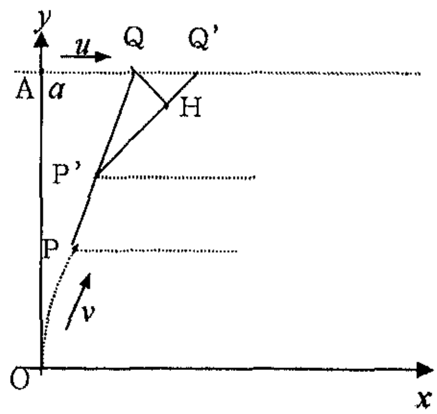
鬼ごっこでの鬼や追跡型ミサイルのような、動く目標に向かって、向きを修正しながら追跡することについて考えよう。

扱いやすいように、追跡する速度の大きさは一定で、目標は直線上を一定の速度で進む場合で追求する。

例1．【微分方程式を導く】

座標平面上で$O(0,0)$, $A(0,a)$とする。点Qは、Aから出発し、直線$y = a$上を一定の速度uで進む。点Pは、原点Oから出発し、点Qに向かって、一定の速度vで進む。($v > u$)

時刻tのときのP、Qに対し、線分PQの長さをr、線分PQとx軸方向の作る角をθとするとき、t, r, θについての微分方程式を導いてみよう。



解）時刻$t + \Delta t$のときをP', Q'とし、

$P'Q' = r + \Delta r$, $P'Q'$とx軸方向の作る角を$\theta + \Delta\theta$とする。

$\Delta t \fallingdotseq 0$ の時、P' は線分PQ上にあると考えて、

$PP' = v\Delta t,\ \ QQ' = u\Delta t,$

$\angle Q'P'Q = -\Delta\theta,\ \angle QQ'P' = \theta + \Delta\theta$

Qから線分$P'Q'$に垂線QHを引いて、

$$\Delta r = P'Q' - PQ = P'H + HQ' - PQ$$
$$= (r - v\Delta t)\cos\Delta\theta + u\Delta t\cos(\theta+\Delta\theta) - r$$
$$= -r(1-\cos\Delta\theta)$$
$$+ \Delta t\{-v\cos\Delta\theta + u\cos(\theta+\Delta\theta)\}$$

$\Delta t \fallingdotseq 0$ の時、$\Delta\theta \fallingdotseq 0$、$\sin\Delta\theta \fallingdotseq 0$ であり、

$1-\cos\Delta\theta = \dfrac{\sin^2\Delta\theta}{1+\cos\Delta\theta}$ より、この項を無視して、

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} \fallingdotseq -v\cos\Delta\theta + u\cos(\theta+\Delta\theta)$$

$\Delta t \to 0$ のとき$\Delta\theta, \Delta r \to 0$ であることを考えて、

$$\frac{dr}{dt} = -v + u\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

また$\triangle QP'H$と$\triangle QQ'H$で、

QH$=(r-v\Delta t)\sin(-\Delta\theta) = u\Delta t\sin(\theta+\Delta\theta)$

であるから、

$$\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta t} = -\frac{u\sin(\theta+\Delta\theta)}{r-v\Delta t},$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\cdot\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} = -\frac{u\sin(\theta+\Delta\theta)}{r-v\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ のとき$\Delta\theta \to 0$ であるから、

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{u\sin\theta}{r} \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

例2.【微分方程式を解く】

例1において、PがQに追いつくまでの時間は？
また、追いつく地点は？

解) ①、②より、

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta} = (-v+u\cos\theta)\left\{-\frac{r}{u\sin\theta}\right\}$$

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{v}{u\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta}$$

したがって、P(0,0)のとき$r=a, \theta=\dfrac{\pi}{2}$である事に注意して、

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\left(\frac{v}{u\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\right)d\theta,$$

$$\int_a^r\frac{1}{r}dr = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\left(\frac{v}{u\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta}\right)d\theta$$

よって、$\log\dfrac{r}{a} = \dfrac{v}{u}\log(\tan\dfrac{\theta}{2}) - \log(\sin\theta)$、

$$r = a\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{u}}\frac{1}{\sin\theta} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

②、③より

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{r}{u\sin\theta} = -\frac{a}{u}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{u}}\frac{1}{\sin^2\theta}$$

したがって、

$$t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{a}{u}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{v}{u}}\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta$$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = z$ とおくと、

$$t = -\int_1^z\frac{a}{u}z^{\frac{v}{u}}\left(\frac{1+z^2}{2z}\right)^2\frac{2}{1+z^2}dz$$

$$= \frac{a}{2u}\int_z^1(z^{\frac{v}{u}-2} + z^{\frac{v}{u}})dz$$

$$= \frac{a}{2u}\left(\frac{1}{\frac{v}{u}-1}(1-z^{\frac{v}{u}-1}) + \frac{1}{\frac{v}{u}+1}(1-z^{\frac{v}{u}+1})\right)$$

$$= \frac{a}{2(v-u)}(1-\tan^{\frac{v}{u}-1}\frac{\theta}{2})$$
$$+ \frac{a}{2(v+u)}(1-\tan^{\frac{v}{u}+1}\frac{\theta}{2}) \quad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

PがQに追いつく時刻は、$\theta = 0$ より、

$$t = \frac{a}{2(v-u)} + \frac{a}{2(v+u)} = \frac{av}{v^2-u^2}$$

従って、追いつく地点は $(\dfrac{auv}{v^2-u^2}, a)$、

Pが動いた道のりは $vt = \dfrac{av^2}{v^2-u^2}$

例えば、$a=6, v=2, u=1$ のとき、
追いつく地点は、(4,6)であり、

③より、$r = 6\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2 \dfrac{1}{\sin\theta}$

④より、

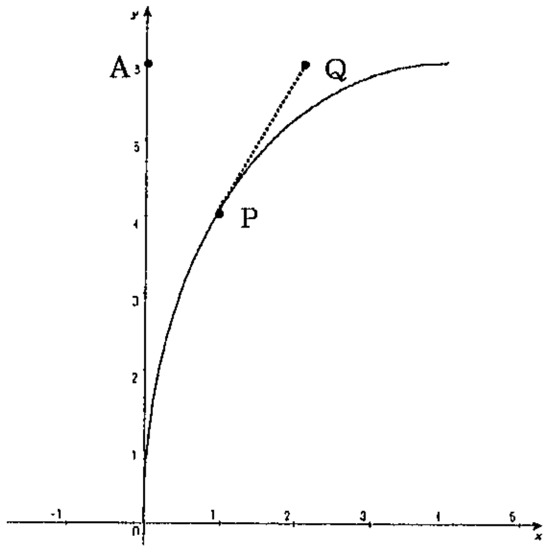
$$t = 3(1-\tan\frac{\theta}{2}) + 1 - \tan^3\frac{\theta}{2}$$

$$= 4 - 3\tan\frac{\theta}{2} - \tan^3\frac{\theta}{2}$$

また、$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} - \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} t - r\cos\theta \\ 6 - r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Pは次のような曲線を描いて、Qを追跡する。



［4］ 製品の寿命

製品の寿命について確率的に考えてみよう。

製品を使い始めてからの時刻をt、使い始めてから時刻tまでに故障する（寿命がつきている）確率を$P(t)$とし、時刻の微小な増加量Δtに対する$P(t)$の増加量をΔPとする。

時刻tで故障する（寿命がつきる）確率を$\lambda(t)$とすると、

$\Delta P \fallingdotseq (1-P(t))\,\lambda(t)\,\Delta t$、$\dfrac{\Delta P}{\Delta t} \fallingdotseq (1-P(t))\,\lambda(t)$

$\Delta t \to 0$のときを考えて、

$$\frac{dP}{dt} = (1-P)\,\lambda(t)$$

よって、$\displaystyle\int_0^t \frac{1}{1-p}\frac{dP}{dt}dt = \int_0^t \lambda(t)dt$

$$\int_0^P \frac{1}{1-p}dP = \int_0^t \lambda(t)dt$$

$$-\log(1-P) = \int_0^t \lambda(t)dt$$

したがって、

$$P(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

実際には$\lambda(t)$を様々に仮定して求めることになる。

例1. 製品の故障が全く偶発的な要因で起こるとき、使い始めてからの時間をtとして、使い始めてから時刻tまでに故障する確率$P(t)$は？

解）$\lambda(t)$は時刻tに関わらない定数と考えられるので、この値をλとすると、①より、

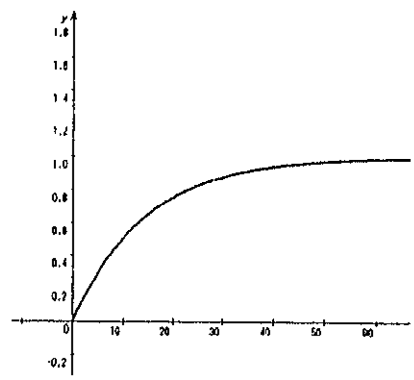
$$P(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

なお、この製品が 10 年間の使用で、その半数が故障した場合は、

$\dfrac{1}{2} = 1 - e^{-10\lambda}$ より、$\lambda = \dfrac{\log 2}{10} \fallingdotseq 0.0693$

よって、$P(t) \fallingdotseq 1 - e^{-0.07t}$

グラフは次のようになる。



製品が故障する確率は使用時間tと共に増加し、限りなく1に近づいていくと考えられるので、$\lambda(t)$としてそのような関数を用いると次のようになる。

例1． 製品を使い始めてからの時間をtとして、時刻tで製品が故障する確率を

$$\lambda(t) = 1 - \frac{1}{kt+1} \quad (k>0) \quad とする。$$

このとき、この製品が使い始めてから時刻tまでに故障する確率$P(t)$は？

解)　$\int_0^t \left(1-\dfrac{1}{kt+1}\right)dt = t-\dfrac{1}{k}\log(kt+1)$　であるから、①より、

$$P(t)=1-e^{-t+\frac{1}{k}\log(kt+1)}$$

なお、この製品が 10 年間の使用で、その半数が故障した場合は、

$$\frac{1}{2}=1-e^{-10+\frac{1}{k}\log(10k+1)}$$

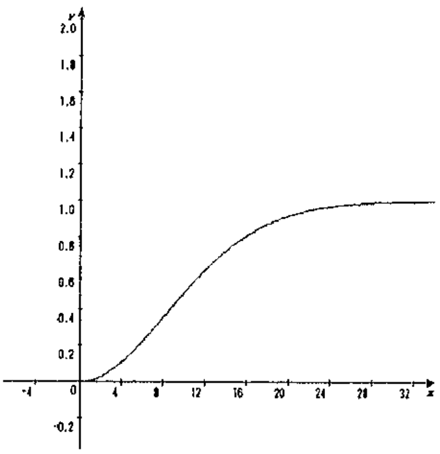
$$-10+\frac{1}{k}\log(10k+1)=-\log 2$$

$$\log(10k+1)=k(10-\log 2)$$

近似解を求めると、$k \fallingdotseq 0.015$

よって、$P(t) \fallingdotseq 1-e^{-t+\frac{1}{0.015}\log(0.015t+1)}$

グラフは次のようになる。



［5］ 母関数を利用した微分方程式の解法

微分方程式の解法には、変数分離法や積分、$x=e^{rt}$（r は複素数）と仮定する置換やラプラス変換などがある。

これらで解けないときは、含まれる関数をテーラー級数で近似する。

(解となる関数 $x=f(t)$ が、テーラー級数

$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$

(収束を考えない級数を母関数とよぶ）に展開されると仮定して解く方法である。)

それでも解けない場合は、コンピュータを利用した数値解析（ルンゲ・クッタ法など）を用いて解く。

ここでは、母関数の多項式関数の係数に着目して、係数の漸化式を作成し、その解を求めて、関数を決定する方法について扱う。

原理：x を従属変数、t を独立変数とする微分方程式の未だ分かっていない解を

$x=f(t)$

$=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$

・・・①　と仮定する。

微分方程式に含まれる、$\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を①で計算し、元の微分方程式に代入すると、係数の数列 $\{a_k\}$ に関する漸化式が得られる。この漸化式が解ければ級数が決定され、その級数に相当する関数を探し出せれば、それが求める解（関数）である。

例1）　バネの振動を表す微分方程式：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)+cx=0\text{、つまり、}\frac{d^2x}{dt^2}+cx=0$$

初期条件は、$t=0$ のとき、$x=x_0, \dfrac{dx}{dt}=0$ とする。

[質量M（kg）のおもりを、長さℓ（m）のひもでぶら下げた振り子の運動方程式を考える。ひもの張力をT（kg・m／s²）とすると、重力はMg（kg・m／s²）であるから、接線方向の重力成分はMg $\sin\theta$。

したがって、接線方向の移動量を x（m）とすると、

運動方程式は、$M\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{Mg}\ell\sin\theta$。

角 θ が小さい場合は、$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ であるから、

$x=\ell\theta$ であり、また運動方程式は、$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\mathrm{g}\ell\,\theta$

上の式はこれを書き換えたものである]

解)

$x=f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$

とおくと、

$$\frac{dx}{dt}=f'(t)=a_1+2a_2t+3a_3t^2+\cdots+na_nt^{n-1}+\cdots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)=2a_2+3\cdot 2a_3t+4\cdot 3a_4t^2+\cdots+(n+1)na_{n+1}t^{n-1}+\cdots$$

初期条件より、$a_0=x_0, a_1=0$　であるから、

$x=x_0+a_2t^2+a_3t^3+\cdots+a_nt^n+\cdots$

$$cx = cx_0 + ca_2 t^2 + ca_3 t^3 + \cdots + ca_{n-1} t^{n-1} + \cdots$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + cx$$

$$= (2a_2 + cx_0) + (3 \cdot 2a_3)t + (4 \cdot 3a_4 + ca_2)t^2 + \cdots + ((n+1)na_{n+1} + ca_{n-1})t^{n-1} + \cdots$$

したがって、

$$2a_2 + ca_0 = 0,$$

$$3 \cdot 2a_3 = 0$$

$$4 \cdot 3a_4 + ca_2 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

これより、漸化式は、

$$(n+1)na_{n+1} + ca_{n-1} = 0$$

奇数項は0で、偶数項は、

$$a_2 = -\frac{1}{2}cx_0,$$

$$a_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3}ca_2 = \frac{1}{4!}c^2 x_0,$$

$$a_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5}ca_4 = -\frac{1}{6!}c^3 x_0, \cdots$$

これより、

$$x = x_0 \left(1 - \frac{1}{2!}ct^2 + \frac{1}{4!}c^2 t^4 - \frac{1}{6!}c^3 t^6 + \cdots\right)$$

ここで、$z = \sqrt{c}t$ とおくと、

$$x = x_0 \left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots\right)$$

これは、$\cos z$ のテーラー級数展開であるから、

$$x = x_0 \cos z = x_0 \cos \sqrt{c}t$$

これが求める解である。

（生徒には、

単振動　$\dfrac{d^2 x}{dt^2} = -x$　（物理でも出てくる形）

を考えさせるのがよい。）

Ⅶ.　今後の課題

今回、提示した素案をもとに、一部実験的に高２ゼミや高３選択科目の授業で実践しつつあるが、中１から高３までのすべての授業で実践し、その結果に基づいて、新しいカリキュラムおよび具体的な教材例をつくることが今後の課題である。

新たに『統計』の章を作ることではなく、現行のカリキュラムの中で、どこに『統計』『微分方程式』の概念を組み入れていくかが焦点となる。これが、次期改訂の際の教材配列の一助になれば幸いである。少し、具体的に記述すれば、次のようになる。

S：集団に潜む特徴をつかむ

規則性の有無に関わらず、いろいろなデータの表を与える。規則性がある場合は、その規則性を発見し、通常の１次関数のグラフや２次関数のグラフなどが考えられる。一方、その表からでは規則性が見いだせないとき、データを確率密度関数を意識した、度数分布を考えさせる。結局は、データを表す点のあつまりをどう見るかが問題となる。

‘ｙ＝’で表現できる場合もあれば、そうでない場合はそれに代わる数学的な表現を考えることになる。

また、異なるように見えるデータグループを基準化という考えで統一してみる必要が
あるが、これは、中学で学ぶ相似の拡大・縮小や比例と関係している考え方でもある。
現行は高２の数列の指導の中でΣ計算を指導しているが、高１の『場合の数』のところでΣの記号と使い方のみを組み入れることも考えられる。その場合には、回帰直線などは、２次関数の応用としても興味深い。共分散などはベクトルの内積そのものである。また、発展的内容ではあるが行列の中では、主成分分析で固有値が有効に働いている。

D：関数の微小な変化から微分方程式へ

微分法で初めてではなく、‘微小な変化’という概念をいろいろな場面で意識させたい。微小な変化の考えれるいろいろな関数の場面でこの考えを生かしていくことが可能である。教科書には、「数学Ⅲ」まで出現しないパラメータ表示も学習する。特に、「数学Ⅱ」では、面積関数だけでなく体積関数も同様な考えで扱える。また、極値を考える問題は、まさにこれにあたる。極限を少し指導することで、微分方程式そのものが微分法に現れていることを意識させる。進んで、「数学Ⅲ」では実際に解くところまで考えている。