

令和元年6月17日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04834

研究課題名（和文）ループ群による非コンパクト対称空間への調和写像の構成と曲面論への応用

研究課題名（英文）Construction of harmonic maps into non-compact symmetric spaces via loop groups and applications to surface theory

研究代表者

井ノ口 順一（Inoguchi, Jun-ichi）

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：40309886

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：リーマン面で定義され非コンパクト対称空間に値をもつ調和写像のループ群論による構成法の研究を行い以下の成果を得た。

3次元ハイゼンベルグ群内の対称性をもつ極小曲面のループ群による構成の基礎理論の構築に成功した。リーマン面で定義されコンパクト半単純リー群に値をもつ調和写像に対するループ群論的構成法（Uhlenbeck-Segal理論）をリーマン面で定義され両側不変接続を与えた一般のリー群に値をもつ（アフィン）調和写像に対し拡張した。3次元双曲空間内のガウス曲率 $K$ が負で一定の曲面および3次元反ド・ジッター時空の空間的平均曲率一定曲面に対するループ群論的構成について基礎理論を確立することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元空間の2次元図形（曲面）を深く精緻に理解するためには、それらの図形を具体的に構成することがもつとも有効である。一般にはこれらの図形を記述する方程式（非線型偏微分方程式）の解析は困難であるが、幾何学的によい性質をもつ曲面（ガウス曲率一定曲面、極小曲面）や理論物理学に由来する曲面（反ド・ジッター時空の極大曲面）は具体的構成法を与えることが可能であることを示した。これらの曲面に対する研究手法を与えた点が本研究の学術的意義である。本研究成果を得る過程で得られた研究手法は他の問題（磁場軌道、重調和写像）や工業意匠設計（美的曲線）にも応用できた点にも価値がある。

研究成果の概要（英文）：We gave a loop group method for constructing minimal surfaces with symmetry in the 3-dimensional Heisenberg group (the model space Nil of nilgeometry in the sense of Thurston).

We also established loop group methods for constructing constant negative Gaussian curvature surfaces in the hyperbolic 3-space and maximal surfaces in the 3-dimensional anti de Sitter space-time. In addition, we generalized the Uhlenbeck-Segal theory for harmonic maps into compact semi-simple Lie groups (principal chiral models) to affine harmonic maps into general Lie groups equipped with natural bi-invariant torsion free connection.

研究分野：幾何学

キーワード：ループ群 調和写像 対称空間 極小曲面 双曲空間 ハイゼンベルグ群 反ド・ジッター空間 佐々木多様体

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面の単位法線場(ガウス写像)は、2次元球面に値をもつ調和写像(エネルギー汎関数の停留点として定義される幾何学的変分問題の解)である。逆に「2次元球面への調和写像」をガウス写像にもつ平均曲率一定曲面が存在する。この事実に着目し、Dorfmeister氏、Pedit氏、Wu氏はループ群論を用いて3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面の構成法を与えた(1998)。この構成法はDPW法とよばれ「平均曲率一定曲面の研究」の中核的研究手法である。

(1) DPW法は「コンパクト・リーマン対称空間に値をもつ調和写像」の理論を基礎にしている。リーマン対称空間という条件は本質的である。調和写像の存在に関する研究は、像空間が負曲率の場合は、幾何解析的手法で発展していたが、この手法は正曲率の場合には適用できない。そのため正曲率空間の典型例であるコンパクト・リーマン対称空間に値をもつ調和写像に対しDPW法が確立されたことは飛躍的進歩であった。しかしながら非コンパクト(半単純)リー群のループ群は複雑な構造をもつため、DPW法を非コンパクト・リーマン対称空間に拡張することは困難さを伴う。3次元双曲空間において平均曲率 $H$ が一定で $0 \leq H < 1$ をみたす曲面は(ユークリッド空間や3次元球面内に対応物が存在しない)双曲幾何特有の曲面であり、これまで強力な組織的な構成理論が得られていなかった(DPW法も適用できない)。本研究者は、以前の研究課題(基盤研究(C)21540067)において、Dorfmeister氏、小林真平氏と共同研究を行い新たなループ群論的構成法を確立した(2014)。

(2) 定曲率でない3次元空間における「曲面の構成法」は長く手付かずの状態であった。Thurston氏による3次元幾何学のモデル空間(定曲率でない6種の空間)に限っても構成理論は確立されていなかった。本研究者は前研究課題(基盤研究(C)24540063)においてDorfmeister氏、小林真平氏との共同研究を行い(非コンパクト対称空間である)2次元双曲空間に拡張したDPW法と「曲面のスピン幾何学的表現」とを組み合わせて、モデル空間の1つであるハイゼンベルグ群(Heisenberg group)  $Nil_3$ の極小曲面に対する新種のループ群論的構成法を確立した(2016)。

(3) 「双曲空間の平均曲率一定曲面に対する新DPW法」および「 $Nil_3$ の極小曲面に対するループ群論的構成法」の確立のために開発した非コンパクト・リー群のループ群の分解定理と等質空間への調和写像に関する研究成果が「研究の目的」で述べる予想外の3種類のクラスの曲面に適用可能であることが判明した。この発見から本研究課題の着想が得られた。

### 2. 研究の目的

(1) 本研究課題では、以前の研究課題(基盤研究(C)21540067, 24540063)において新DPW法の確立のために開発したループ群論に関する種々の技術を発展させ、次の3つの対象についてループ群論を用いた構成法を与えることを目的とした。

- ① 3次元ハイゼンベルグ群(Heisenberg group)  $Nil_3$ 内の対称性をもつ極小曲面
- ② 3次元双曲空間内のガウス曲率 $K$ が負で一定の曲面、とくに完備である曲面
- ③ 特別な対称性をもつ反ド・ジッター空間 $AdS_3$ 内の平均曲率0の曲面(極大曲面)

(2) 対称性(群作用不変性)を備えた3次元ハイゼンベルグ群 $Nil_3$ 内の極小曲面の構成法は(初等的な例)を除き全く知られていなかった。本研究では双曲平面に値をもつ調和写像で、対称性を備えたもの(同変調和写像)をループ群論を用いて構成すること、同変調和写像から極小曲面を構成する方法を確立することを主要目的とした。

(3) 3次元双曲平面内のガウス曲率一定曲面をループ群論を用いて構成する理論を確立することを主要目的とした。この構成法の確立により3次元定曲率空間内のガウス曲率一定曲面に対し(すべてのケースについて)構成法が与えられたことになる。

(4) 素粒子物理学における $AdS/CFT$ 対応に由来する3次元反ド・ジッター時空内の極大曲面(平均曲率0の曲面)をループ群論によって構成する方法を与えること。

### 3. 研究の方法

(1)  $Nil_3$ の極小曲面を構成するデータである「双曲平面に値をもつ調和写像」には2次特殊線型群 $SL(2, \mathbb{C})$ が作用する。一方、ハイゼンベルグ群の等長変換群は回転群 $SO(2)$ とハイゼンベルグ群の半直積群である。したがって「双曲平面に値をもつ調和写像」の同変性は極小曲面に遺伝しない。これは定曲率空間の場合と著しく異なる点であり、 $Nil_3$ の幾何学を難しくする理由の一つである。そこで「極小曲面の同変性」と「調和写像の同変性」を詳細に分析し、その成果をループ群論的構成法に適用する。

(2) (1)の成果を $AdS_3$ の極大曲面および3次元双曲空間内のガウス曲率一定曲面にも適用できるように拡張する。

(3) (1)および(2)の研究過程で得られた成果を他の幾何学的問題(曲線の変分問題、調和写像の一般化)にも応用し、本研究の有用性を示す。

### 4. 研究成果

(1) 本研究の主たる目標の1つであった「3次元ハイゼンベルグ群 $Nil_3$ 内の対称性をもつ極小曲面のループ群による構成」の基礎理論の構築に成功した(Josef F. Dorfmeister氏、小林

真平氏との共同研究, 論文投稿中)。また 3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面に対するベルンシュタイン問題を考察した。Fernandez と Mira は指定された正則 2 次微分をもつ極小曲面が 2 径数族をなすことを示したが 2 径数の意味は解明できていなかった。本研究では「ループ群論的証明法」を改良し 2 径数の幾何学的意味を解明することに成功した(論文⑭として発表)。

(2) リーマン面で定義されコンパクト半単純リー群に値をもつ調和写像に対する(ループ群論的)構成法が Uhlenbeck 氏と Segal 氏により確立されている。Uhlenbeck-Segal 理論を DPW 法の観点から, リーマン面で定義され両側不変接続を与えた一般のリー群に値をもつ(アフィン)調和写像に対し拡張した (Josef F. Dorfmeister 氏, 小林真平氏との共同研究, 論文⑩として発表, 学会発表(国際会議①)で成果発表)。

(3) 3 次元双曲空間内のガウス曲率  $K$  が負( $K=-1$  は除く)である曲面と 2 次元球面 ( $-1 < K$ ) および双曲平面 ( $-1 < K < 0$ ) に値をもつ写像が対応することを示した。とくにその写像が調和写像であることと  $K$  が一定であることが同値であることを証明した(ルー・ヴィルムス型定理)。このルー・ヴィルムス型定理を出発点とし, ガウス曲率一定曲面に対するループ群論的構成法を確立した(小林真平氏との共著論文を準備中)。

(4) 3 次元反ド・ジッター時空  $AdS_3$  内の空間的平均曲率一定曲面に対するループ群による構成について基礎理論を確立することに成功した(論文を準備中)。また  $AdS_3$  の時間的平坦曲面がモンジュ・アンペール方程式で記述できることに着目し, 3 次元双曲空間の平坦曲面に対する表現公式に相当する表現公式を確立した(論文⑲として発表)。

(5) 本研究の主要研究対象である「リーマン面で定義域とし, 双曲平面に値をもつ調和写像」はある正規性の条件下では sinh-Gordon 方程式に書き換えられる。この sinh-Gordon 方程式は 3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面を規定する sinh-Gordon 方程式, すなわち「リーマン面を定義域とし, 2 次元球面に値をもつ調和写像」とは型が異なり, 解の性質, とくに大域的挙動は著しく異なる。本研究では対称性をもつ調和写像を主たる研究対象としているが, それらを含むより広いクラスへの拡張もなされるべきである。その試行として, sinh-Gordon 方程式の類似として知られる Tzitzeica (2 次元戸田方程式の一種) の準周期解を考察した。主要部が楕円型である Tzitzeica 方程式には 2 種類あり, その 1 種は 5 次元球面内の水平的極小曲面の構造方程式と等価である。5 次元球面内の水平的極小曲面のリーマン・テータ函数を用いた記述を宇田川誠一氏, 谷口哲也氏との共同研究で与えた(論文⑰として発表)。

一方, 主要部が双曲型の Tzitzeica 方程式は 3 次元等積アフィン空間におけるアフィン球面の構造方程式を与える。宇田川誠一氏との共同研究により, 双曲型の Tzitzeica 方程式のテータ関数解で定まるアフィン球面の具体的表示を与えることに成功した(論文⑧として発表)。

(6) 上記の成果(1)~(4)を(定曲率でない)3次元等質空間に一般化できるかどうかは重要な視点である。この観点からの試行として, 内藤博夫氏との共同研究により 3 次元非ユニモデューラー・リー群内の曲面に対する軌道型グラスマン幾何の分類を行った(論文投稿中)。この成果は学会発表(国際会議)④で成果発表した。

(7) 研究成果(5)と別の観点からの一般化として接触構造に着目することが考えられる。ハイゼンベルグ群  $Nil_3$  は接触多様体(佐々木多様体)の典型例である。成果(1)~(4)の他の幾何学への応用可能性を探るため, 接触多様体における曲線に関する幾何学的変分問題(磁場曲線)を考察した。Marian Ioan Munteanu 氏らとの共同研究において以下の成果を得た。

- ① 一般奇数次元の佐々木空間形内の接触磁場曲線を分類した(論文⑳として発表)。
- ② リーマン多様体の単位接ベクトル束の磁場軌道の基礎理論を確立した(論文投稿中)。とくにユークリッド平面の単位接ベクトル束の磁場軌道を具体的に記述した(論文③として発表)。

(8) 調和写像の 1 次元類似である弾性曲線を非コンパクト・リー群(相似変換群)のもとで考察した。梶原健司氏, 三浦二郎氏らとの共同研究において, 弾性曲線の相似幾何学的類似は工業意匠設計において活用されている対数型美的曲線を含むことを示した(論文⑩として発表)。対数型美的曲線および超螺旋(superspiral)を含む「美的曲線」の候補としてある特殊なリッカチ微分方程式で定義される曲線族を発見した(Ziatdinov 氏, 三浦憲二郎氏との共著論文②及び単著論文⑱として発表)。

(9) 調和写像の一般化の一つである重調和写像(biharmonic map)に関する関連研究を行った。いくつかのリーマン対称空間内の等質かつ重調和な超曲面を分類した(笹原徹氏との共著論文⑬, ㉒として発表)。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 27 件)

- ① Hyeongki Park, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Ken-ichi Maruno, Nozomu Matsuura, Yasuhiro Ohta, Isoperimetric deformations of curves on the Minkowski plane, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 掲載決定, 査読有, <https://doi.org/10.1142/S0219887819501007>
- ② Jun-ichi Inoguchi, Rushan Ziatdinov, Kenjiro T. Miura, Generalization of log-aesthetic curves via similarity geometry, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 36(2019), 239-259 査読有, <https://doi.org/10.1007/s13160-018-0335-7>
- ③ Jun-ichi Inoguchi, Marian Ioan Munteanu, Magnetic curves in tangent sphere bundles

- II, Journal of Mathematical Analysis and Applications 466 (2018), 1570-1581, 査読有, <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.06.069>
- ④ Jun-ichi Inoguchi, Marian Ioan Munteanu, Ana Irina Nistor, Magnetic curves in quasi-Sasakian 3-manifolds, Analysis and Mathematical Physics 9 (2018), 43-61 査読有, <https://doi.org/10.1007/s13324-017-0180-x>
- ⑤ Jun-ichi Inoguchi, Marian Ioan Munteanu, Magnetic vector fields: new examples, Institut Mathematique. Publications. Nouvelle Serie (Beograd) (N.S) 103(117) (2018), 91-102. 査読有, <https://doi.org/10.2298/PIM1817091I>
- ⑥ Zlatko, Erjavec, Jun-ichi Inoguchi, Killing magnetic curves in  $Sol_3$ , Mathematical Physics, Analysis and Geometry 21 (2018) no. 2, Article number 15, 査読有, <https://doi.org/10.1007/s11040-018-9272-6>
- ⑦ Zlatko, Erjavec, Jun-ichi Inoguchi, Magnetic curves in  $Sol_3$ , Journal of Nonlinear Mathematical Physics 25 (2018), 198-210, 査読有, <https://doi.org/10.1080/14029251.2018.1452670>
- ⑧ Jun-ichi Inoguchi, Seiichi Udagawa, Affine spheres and finite gap solutions of Tzitzeica equation, Journal of Physics Communications, 2(2018), no. 11, 115020 査読有, <https://doi.org/10.1088/2399-6528/aaeaa0>
- ⑨ 井ノ口順一, The hidden symmetry of chiral fields and the Riemann-Hilbert problem, revisited, 京都大学数理解析研究所講究録 2071(2018), 1-16 査読無  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2071-01.pdf>
- ⑩ Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Kenjiro T. Miura, Masayuki Sato, Wolfgang K. Schief, Yasuhiro Shimizu, Log-aesthetic curves as similarity geometric analogue of Euler's elasticae, Computer Aided Geometric Design 61 (2018), 1-5, 査読有, <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2018.02.002>
- ⑪ Jong Taek Cho, Jun-ichi Inoguchi, Contact 3-manifolds with Reeb flow invariant characteristic Jacobi operator, Analele stiintifice ale Universitatii "Al. I. Cuza", din Iasi. Matematics (SERIE NOUA) 63 (2017), 665-676, 査読有, <https://www.math.uaic.ro/~annalsmath/new/>
- ⑫ Kenjiro T. Miura, Sho Suzuki, R. U. Gobithaasan, Shin Usuki, Jun-ichi Inoguchi, Masayuki Sato, Kenji Kajiwara, Yasuhiro Shimizu, Fairness metric of plane curves defined with similarity geometry invariants, Computer-Aided Design and Applications 15 (2017), 256-263, 査読有, <https://doi.org/10.1080/16864360.2017.1375677>
- ⑬ Jun-ichi Inoguchi, Toru Sasahara, Biharmonic hypersurfaces in Riemannian symmetric spaces II, Hiroshima Mathematical Journal 47 (2017), 349-378, 査読有, <https://projecteuclid.org/euclid.hmj/1509674451>
- ⑭ Jun-ichi Inoguchi, Ji-Eun Lee, Slant curves in 3-dimensional almost f-Kenmotsu manifolds, Communications of the Korean Mathematical Society, 32 (2017), 417-424, 査読有, <https://doi.org/10.4134/CKMS.c160079>
- ⑮ Jun-ichi Inoguchi, Marian Ioan Munteanu, Periodic magnetic curves in Berger spheres, Tohoku Mathematical Journal 69 (2017), 113-128, 査読有, doi:10.2748/tmj/1493172131
- ⑯ Josef F. Dorfmeister, Jun-ichi Inoguchi, Shimpei Kobayashi, A loop group method for affine harmonic maps into Lie groups, Advances in Mathematics, 298 (2016), 207-253, 査読有, <http://doi.org/10.1016/j.aim.2016.04.018>
- ⑰ Jun-ichi Inoguchi, Tetsuya Taniguchi, Seiichi Udagawa, Finite gap solutions for horizontal minimal surfaces of finite type in 5-sphere, Journal of Integrable Systems 1 (2016), Article ID xyw011, 査読有, doi: 10.1093/integr/xyw011
- ⑱ Sampei Hirose, Jun-ichi Inoguchi, Kenji Kajiwara, Nozomu Matsuura, Yasuhiro Ohta, dNLS Flow on Discrete Space Curves, Mathematics for Industry 24 (2016), 137-149, 査読有, DOI: 10.1007/978-981-10-1076-7\_14
- ⑲ Jun-ichi Inoguchi, Attractive plane curves in Differential Geometry, Mathematics for Industry 24 (2016), 121-135, 査読有, DOI: 10.1007/978-981-10-1076-7\_13
- ⑳ Jun-ichi Inoguchi, Marian Ioan Munteanu, New examples of magnetic maps involving tangent bundles, Rendiconti Sem Matematico Universita e Politecnico di Torino 73/1-2 (2016), 101-116, 査読有, <http://www.seminariomatematico.unito.it/rendiconti/73-12/101.pdf>
- ㉑ Jun-ichi Inoguchi, A note on almost contact Riemannian 3-manifolds II, Bulletin of the Korean Mathematical Society 54 (2017), 85-97, 査読有, <https://doi.org/10.4134/BKMS.b150772>
- ㉒ Jun-ichi Inoguchi, Toru Sasahara, Biharmonic hypersurfaces in Riemannian symmetric

spaces I, Hiroshima Mathematical Journal 46 (2017), 97-121, 査読有,  
<http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1459525933>

- ⑳ Jun-ichi Inoguchi, Marianty Ionel, Sungwook Lee, Flat Lorentz surfaces in anti-de Sitter 3-space and gravitational instantons, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 13 (2016), 1650012, 査読有,  
<https://doi.org/10.1142/S0219887816500122>
- ㉑ Josef F. Dorfmeister, Jun-ichi Inoguchi, Shimpei Kobayashi, On the Bernstein problem in the three-dimensional Heisenberg group, Canadian Mathematical Bulletin 59 (2016) 50-61, 査読有, <http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2015-061-3>
- ㉒ Simona Luiza Druta-Romaniuc, Jun-ichi Inoguchi, Marian Ioan Munteanu, Ana Irina Nistor, Magnetic curves in Sasakian manifolds, Journal of Nonlinear Mathematical Physics 22 (2015), 428-447, 査読有, <http://dx.doi.org/10.1080/14029251.2015.107942>
- ㉓ Jong Taek Cho, Jun-ichi Inoguchi, Characteristic Jacobi operator on contact Riemannian 3-manifolds, Differential Geometry Dynamical Systems 17 (2015) 49-71, 査読有, <http://vectron.mathem.pub.ro/dgds/v17/D17-cj-987.pdf>
- ㉔ Jun-ichi Inoguchi, Ji-Eun Lee, Slant curves in 3-dimensional almost contact metric geometry, International Electronic Journal of Geometry 8 (2015), 106-146, 査読有, <http://www.iejgeo.com>

[学会発表] (計 17 件)

- ① Jun-ichi Inoguchi, Harmonic map into Lie groups, revisited, The Joint International Meeting of the Chinese mathematical Society and American Mathematical Society, 2018.
- ② 井ノ口 順一, 対数型美的曲線の相似幾何学的定式化, 精密工学会, AIMaP 数学応用シンポジウム: 精密工学と幾何学の新たな出会い, 2018.
- ③ 井ノ口 順一, 梶原 健司, 三浦 憲二郎, Schief Wolfgang, 対数型美的曲線の相似幾何における平面曲線に対する変分原理による定式化, 日本応用数理学会 2017 年度年会, 2017.
- ④ Jun-ichi Inoguchi, Grassmann geometry of surfaces in 3-dimensional homogeneous spaces, International Conference on Applied and Pure Mathematics (ICAPM 2017), 2017.
- ⑤ 井ノ口 順一, 平面曲線と意匠設計, 第 63 回幾何学シンポジウム, 2016.

[図書] (計 4 件)

- ① 中村佳正, 高崎金久, 辻本諭, 尾角正人, 井ノ口 順一, 解析学百科 II 可積分系の数理, 朝倉書店, 2018, 254-362
- ② 井ノ口 順一, はじめて学ぶリー環, 現代数学社, 2018, 280
- ③ 井ノ口 順一, はじめて学ぶリー群, 現代数学社, 2017, 259
- ④ 井ノ口 順一, 曲面と可積分系, 朝倉書店, 2016, 224

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年:  
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年:  
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。