

行列のグレースケール画像を用いた
BiCG法の収束予測

筑波大学
図書館情報メディア研究科
2020年03月
太田 凌

目次

第1章	背景・目的	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究目的	1
第2章	関連研究	3
第3章	基本原理と基礎技術	5
3.1	BiCG 法	5
3.1.1	BiCG 法の性質	6
3.2	畳み込みニューラルネットワーク	9
3.2.1	畳み込み層	9
3.2.2	プーリング層	10
3.2.3	全結合層	11
3.2.4	Dropout	11
第4章	フレームワークとデータセット	12
4.1	分類モデル生成に使用したフレームワーク	12
4.2	データセットの紹介	13
4.3	非零要素の数値分布	14
4.4	BiCG 法の収束・非収束と各種変数	15
第5章	疎行列画像の生成過程	16
5.1	SuiteSparse 法による行列画像の生成	16
5.2	sigmoid 法による行列画像の生成	19
5.3	スケーリング後の行列画像	23
第6章	実験と評価	27
6.1	K-fold 交差検証とモデルの評価方法	27
6.2	データセットの構成	28
6.3	SuiteSparse 法を利用した分類結果	29
6.4	sigmoid 法を利用した分類結果	31
6.5	スケーリング後の分類結果	33
6.5.1	SuiteSparse 法	33

6.5.2	sigmoid 法	36
6.6	収束条件を 10^{-10} とした場合	39
第 7 章	まとめと考察	40
	謝辞	42
	参考文献	43

目次

2.1	対角成分から切り出した入力画像	4
3.1	畳み込み計算のイメージ	9
3.2	コーディングとプーリング	10
3.3	Dropout の概念図	11
4.1	CNN の構成	12
4.2	非零要素の分布	14
4.3	スケーリング後の全非零要素の数値分布	14
4.4	行列 08blocks, ex1 の相対残差履歴	15
5.1	行列 08blocks のカラー画像	16
5.2	A の非零の分布	18
5.3	A' の非零の分布	18
5.4	A' の非零の対数分布	18
5.5	SuiteSparse 法で生成した行列画像の濃度値分布	19
5.6	sigmoid 関数の概形	20
5.7	標準化した 08blocks の非零要素	21
5.8	sigmoid 法で生成した行列画像の濃度値分布	21
5.9	SuiteSparse 法で生成した 08blocks の行列画像	22
5.10	sigmoid 法で生成した 08blocks の行列画像	22
5.11	生成方法の違いによる濃度値差分	22
5.12	SuiteSparse 法で生成した 28×28 pixel の全非零要素の濃度値分布	22
5.13	sigmoid 法で生成した 28×28 pixel の全非零要素の濃度値分布	22
5.14	スケーリング後の非零要素の分布	23
5.15	SuiteSparse 法で生成した 08blocks	24
5.16	sigmoid 法で生成した 08blocks	24
5.17	スケーリング後 SuiteSparse 法で生成した行列画像の濃度値分布	24
5.18	スケーリング後 sigmoid 法で生成した行列画像の濃度値分布	24
5.19	スケーリング後 SuiteSparse 法で生成した 28×28 pixel の全非零要素の濃度値分布	25
5.20	スケーリング後 sigmoid 法で生成した 28×28 pixel の全非零要素の濃度値分布	25
5.21	SuiteSparse 法の濃度値の累積分布	26

5.22 sigmoid 法の濃度値の累積分布	26
6.1 K-fold 交差検証の計算手順	27

第1章 背景・目的

1.1 研究背景

近年, 様々な産業分野において, 計算機による数値シミュレーションの重要性が高まっている. 例えば, 構造解析を援用した自動車や橋げたの設計などの機械・建築分野, 流体解析を援用した飛行機のジェットエンジンの設計など幅広い分野で数値シミュレーションが行われ, 開発期間の短縮, コストの削減, 製品の高精度化等に大きく寄与している. このような数値シミュレーションの世界では, 多くの問題が偏微分方程式により記述されている. そして, それらは有限要素法, 境界要素法, 有限差分法等を用いて離散化され, 最終的に大規模な線形方程式

$$Ax = b$$

が得られる (A は n 次行列, x, b は n 次元ベクトル). 数値シミュレーションでは, この方程式をいかに高速かつ低コストで解くかが最も重要な問題とされている.

線形方程式の解法には, 大きく分けて直接法と反復法という手法がある. 直接法は Gauss の消去法に代表され, 式変形により未知数の個数を減らして解を求める方法である. 一方で, 反復法では, 適当な初期値から計算を開始し, 一定の精度が得られるまで反復を繰り返して近似解を得る方法である. 係数が大規模疎行列のとき, 反復法は直接法に比べて演算量, メモリ量の点で有利であるとされている [2]. 反復法の中でも, クリロフ部分空間法という方法があり, 係数行列が非対称な場合は主に双共役勾配法 (以下, BiCG 法) が使われる.

しかし, 係数行列の性質によっては, 収束が停滞してしまい解を求めるまでに時間が掛かってしまったり, そもそも収束しないといった場合もある. 反復計算を実行する以外に解が得られるか否かを判断することは不可能である.

1.2 研究目的

最近, 畳み込みニューラルネットワーク (以下, CNN)[3] を用いて, 画像認識を試みるのが容易になってきている. 行列を画像へと落とし込めば, CNN への入力とすることも可能である. そこで, 既存の行列データを用いて学習を行い, どのような行列ならば BiCG 法で収束するのかを判断できるようにしたい. CNN は画像内の特徴量を抽出し, 抽出したパターンを学習することで, 分類や回帰を行う. もし疎行列が非零要素の大小関係と疎のパターンを反映した画像へと変換されれば, BiCG 法の収束性を予測できるかもしれない.

また, 行列を画像に置き換えることで, 次数や行列が生成された分野などの性質を見ずに画像の濃度値分布のみから BiCG 法の結果を予測できるのではないかと考えた.

本研究では CNN を用いて非対称行列と BiCG 法の収束の関係を判断するため, CNN による分類に適した行列画像の生成方法を調べる. そこで, SuiteSparse Matrix Collection[1] に格納されている非対称で実数を要素に持つ正方行列のうち, 次数の小さいものから 875 件に対して BiCG 法を実行し, 反復回数や相対残差ノルム等のデータを集めた. その後, 複数の手法で行列画像を生成し, どのような行列画像が分類の結果, 誤答するのかについて調べた.

第2章 関連研究

本章ではハイパフォーマンスコンピューティング分野の問題点に対して機械学習の手法を用いた関連研究を2つほど紹介し、そこに示されている今後の課題や未着手の部分を挙げて本研究の着眼点について説明する。

疎行列の格納形式における自動選択

多くのアプリケーションにおいて、疎行列ベクトル積 (以下, SpMV) が計算の中核を成す。しかしながら、様々な行列に SpMV を実行する際、計算機環境などのプラットフォームやアルゴリズムなどの違いからそのパフォーマンスも様々に変化する。

そこで、Cui らの研究 [14] では計算を実行する前に与えられた行列に対して SpMV における高いパフォーマンスを示すアルゴリズムを予測した。

手法として、SuiteSparse Matrix Collection の行列 450 件を用いて非零要素の位置情報を反映した 32×32 pixel のグレースケール画像と最適な SpMV が実行できる環境のラベルから構成されるデータセットを用いて、CNN による分類を行った。CPU, GPU のいずれの上で実行するかという選択肢と疎行列の格納形式から構成される 5 種類の環境に対する分類の結果、54% の行列に対して最適実装が選択された。選択された実装を用いて、SpMV の実行時間を計測したところ、提案手法を用いずにランダムに選択した場合と比較して、19.9% の短縮につながった。

CNN を利用した効率的な前処理行列の生成

反復計算において、前処理の効率はループ前の前処理行列を生成する過程と各反復過程における前処理行列を用いた計算、両方の並列性に依存する。しかしながら、前処理行列の生成は骨の折れる作業とされている。

そこで、Gotz らの研究 [11] では前処理行列として生成する block-Jacobi 行列に必要な係数行列 A の対角成分を切り出した。行列 A の次数は $n = 128$ として生成し、非零要素は対角を中心として幅 20 の箇所にも $0.5 \sim 0.7$ 、その他の部分にも $0 \sim 0.5$ の範囲でランダムに数値を与え、縦横をパディングした 21×128 pixel のグレースケール画像を入力とした。図 2.1 は実際の入力画像である。

そのようにして生成した 3000 個の行列を用いて、CNN から出力される非零要素の構造に基づいて block-Jacobi 前処理行列を適用したところ、反復計算の約 22% が削減された。

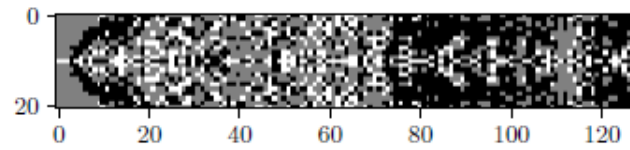


図 2.1: 対角成分から切り出した入力画像

Gotz らの先行研究のように, 行列を画像として変換し CNN を用いて前処理行列を推定する研究のほかに, Support Vector Machine を利用し, 反復解法と前処理行列の組み合わせを推定した Muralidharan らの研究 [12] や, 前処理行列と疎行列ベクトル積の実装方法を自動選択する山田らの研究 [13] など, 前処理に関する研究が多いことが分かる. しかし, 1 つの解法に対して反復計算が収束するか否かに関する研究はされておらず, その点は本研究の新規性であると言える. また, グレースケール画像を用いて非零要素の位置情報と値の大小関係を反映した先行研究は存在しない点やマシンに依存しない収束特性の分析を扱っている点も新規性がある.

第3章 基本原理と基礎技術

本章はまず前半部分において, BiCG 法の基本理論を説明する. その後, 後半部分においては画像認識を行う上で使用する CNN の基礎理論を述べる.

3.1 BiCG 法

BiCG 法は非対称な係数行列を係数に持つ方程式の反復解法である. 本節では BiCG 法のアルゴリズムや性質を [4], [5], [6] を参考に示す. 以下が BiCG 法のアルゴリズムである.

BiCG 法のアルゴリズム

```
Select an initial guess  $x_0$ ,
Compute  $r_0 = b - Ax_0$ ,
Choose  $r^*_0$  s.t.  $(r^*_0, r_0) \neq 0$ ,
Set  $p_0 = r_0$ ,
For  $k = 0, 1, \dots$ , until  $\|r_k\|_2 \leq \varepsilon \|b\|_2$  do:
     $q_k = Ap_k$ ,
     $q^*_k = A^T p^*_k$ ,
     $\alpha_k = \frac{(r_k, r^*_k)}{(q_k, p^*_k)}$ ,
     $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ ,
     $r_{k+1} = r_k - \alpha_k q_k$ ,
     $r^*_{k+1} = r^*_k - \alpha_k q^*_k$ ,
     $\beta_k = \frac{(r^*_{k+1}, r_{k+1})}{(r^*_k, r_k)}$ ,
     $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$ ,
     $p^*_{k+1} = r^*_{k+1} + \beta_k p^*_k$ ,
End For
```

BiCG 法は残差ノルム $\|b - Ax_k\|_2$ や誤差ノルム $\|x - x_k\|_2$ を最小化するといった性質を持たないため, 各反復で近似解の精度が改善されないことがある. そのため, 残差ノルムや誤差ノルムをプロットすると振動することがあり, 収束が停滞したり, 発散することがある.

3.1.1 BiCG 法の性質

定理 2.1.1

BiCG 法によって計算されるベクトルは $i \neq j$ のとき, 次が成り立つ.

$$(\mathbf{r}_j^*, \mathbf{r}_i) = 0$$

$$(\mathbf{p}_j^*, A\mathbf{p}_i) = 0$$

数学的帰納法によりこれを示す.

まず, $0 \leq i < j$ の時について考える. 変数 j の帰納法として示す.

(i) $j = 1$ のとき $i = 0$ となるから,

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_0) &= (\mathbf{r}_0^* - \alpha_0 A^T \mathbf{p}_0^*, \mathbf{r}_0) \\ &= (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}_0, \alpha_0 A^T \mathbf{p}_0^*) \\ &= (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0) - \alpha_0 (\mathbf{r}_0, A^T \mathbf{p}_0^*)\end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_0$ であるから,

$$\begin{aligned}&= (\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0) - \frac{(\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0)}{(\mathbf{p}_0^*, A\mathbf{p}_0)} (\mathbf{p}_0^*, A\mathbf{p}_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

となって直交することが分かる. また,

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}_1^*, A\mathbf{p}_0) &= (\mathbf{r}_1^* + \beta_0 \mathbf{p}_0^*, A\mathbf{p}_0) \\ &= (\mathbf{r}_1^*, A\mathbf{p}_0) + \frac{(\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_1)}{(\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0)} (\mathbf{p}_0^*, A\mathbf{p}_0) \\ &= (\mathbf{r}_1^*, A\mathbf{p}_0) + \frac{(\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_1)}{\alpha_0} \\ &= \frac{1}{\alpha_0} (\mathbf{r}_1^*, \alpha_0 A\mathbf{p}_0) + (\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_1) \\ &= \frac{1}{\alpha_0} (\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

となって $j = 1$ のとき, 2 式ともに直交条件を満たす.

次に $j \geq 1$ のとき, 定理 2.1.1 が成立すると仮定する. $0 \leq i < j + 1$ とき,

$$\begin{aligned}
(r_{j+1}^*, r_i) &= (r_j^* - \alpha_j A^T p_j^*, r_i) \\
&= (r_j^*, r_i) - \alpha_j (A^T p_j^*, r_i) \\
&= (r_j^*, r_i) - \alpha_j (A^T p_j^*, p_i - \beta_{i-1} p_{i-1}) \\
&= (r_j^*, r_i) - \alpha_j (p_j^*, A p_i) + \alpha_j \beta_{i-1} (p_j^*, A p_{i-1}) \\
&= (r_j^*, r_i) - \alpha_j (p_j^*, A p_i) \\
&= 0 \quad (\text{帰納法の仮定より})
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
(p_{j+1}^*, A p_i) &= (r_{j+1}^*, A p_i) + \beta_j (p_j^*, A p_i) \\
&= -\frac{1}{\alpha_i} (r_{j+1}^*, -\alpha_i A p_i) + \beta_j (p_j^*, A p_i) \\
&= -\frac{1}{\alpha_i} (r_{j+1}^*, r_{i+1}^*) - (r_{j+1}^*, r_i) + \beta_j (p_j^*, A p_i) \\
&= 0 \quad (\text{帰納法の仮定より})
\end{aligned}$$

となって, 定理 2.1.1 が成立する. $0 \leq j < i$ の時も同様である.

定理 2.1.2

$r_i \neq 0, r_i^* \neq 0, i \leq n$ であれば, $r^*_0, r^*_1, \dots, r^*_n$ は互いに線形独立である.

(証明)

数学的帰納法より, これを示す. r^*_0 と r^*_1 について考えると, 定理 2.1.1 より,

$$\begin{aligned}
(r^*_0, r_1) &= 0 \\
(r^*_1, r_1) &\neq 0
\end{aligned}$$

が成立する. ここで, r^*_0 と r^*_1 が線形独立でないならば, 線形従属であり, $r^*_1 = \alpha r^*_0$ を満たすスカラー α が存在する. よって, $(r^*_1, r_1) = (\alpha r^*_0, r_1) = \alpha (r^*_0, r_1) = 0$ となって, $(r^*_1, r_1) \neq 0$ に矛盾する. したがって, r^*_0 と r^*_1 は線形独立である.

次に, $s \leq i$ に対して, $r^*_0, r^*_1, \dots, r^*_{s-1}$ が互いに線形独立であると仮定する. 定理 2.1.1 と仮定から,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}^*_0, \mathbf{r}_s) &= 0, \\
(\mathbf{r}^*_1, \mathbf{r}_s) &= 0, \\
&\vdots \\
(\mathbf{r}^*_{s-1}, \mathbf{r}_s) &= 0, \\
(\mathbf{r}^*_s, \mathbf{r}_s) &\neq 0
\end{aligned}$$

が成立する.

ここで, \mathbf{r}^*_s が $\mathbf{r}^*_0, \mathbf{r}^*_1, \dots, \mathbf{r}^*_{s-1}$ と互いに線形独立でないとすると, $\mathbf{r}^*_s = \alpha_0 \mathbf{r}^*_0 + \alpha_1 \mathbf{r}^*_1 + \dots + \alpha_{s-1} \mathbf{r}^*_{s-1}$ を満たすスカラー $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ が存在する. よって, $(\mathbf{r}^*_s, \mathbf{r}_s) = (\alpha_0 \mathbf{r}^*_0, \mathbf{r}_s) + (\alpha_1 \mathbf{r}^*_1, \mathbf{r}_s) + (\alpha_{s-1} \mathbf{r}^*_{s-1}, \mathbf{r}_s) = 0$ となって, $(\mathbf{r}^*_s, \mathbf{r}_s) \neq 0$ に矛盾する. したがって, $\mathbf{r}^*_0, \mathbf{r}^*_1, \dots, \mathbf{r}^*_s$ は互いに線形独立である.

定理 2.1.3

BiCG 法は高々 n 回の反復で収束する

(証明)

$(n-1)$ 回目まで収束しないと仮定する. このとき, $\mathbf{r}_i \neq 0, i \leq n$ であるため, 定理 2.1.2 より, $\mathbf{r}^*_0, \mathbf{r}^*_1, \dots, \mathbf{r}^*_s$ はそれぞれ線形独立である. よって, $\mathbf{r}^*_0, \mathbf{r}^*_1, \dots, \mathbf{r}^*_s$ は \mathbb{R}^n の基底を成す. ここで, n 反復目の残差ベクトル \mathbf{r}_n を考えると, 定理 2.1.2 より $(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_i) = 0, i < n$ となるが, そのようなベクトルは $\mathbf{r}_n = 0$ しかない. よって, BiCG 法は高々 n 回の反復で収束することが分かる.

3.2 畳み込みニューラルネットワーク

画像認識を行う際には

- 畳み込み層
- プーリング
- 全結合層
- Dropout

から構成されるネットワークを構築する。本節では上記の項目について説明する [7], [8], [9], [10].

3.2.1 畳み込み層

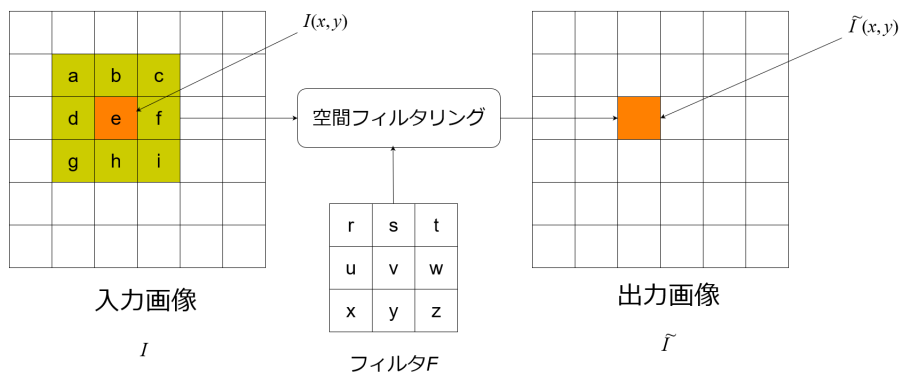


図 3.1: 畳み込み計算のイメージ

畳み込み層で行う処理はフィルター処理に相当する。フィルタ F の初期値はランダムに決定する。注目する画素の座標を (x, y) , 入力画像を I , 出力画像を \tilde{I} , 座標 (x, y) における画素値を $I(x, y)$, フィルタの中心を原点として、フィルタ内の座標 (i, j) を $F(i, j)$, 近傍領域の大きさを $(2N + 1) \times (2N + 1)$ とすると、畳み込みの計算は次の通りである。

$$\tilde{I}(x, y) = \sum_{j=-N}^N \sum_{i=-N}^N F(i, j) I(x - i, y - j)$$

上記の図で $\tilde{I}(x, y)$ は,

$$\tilde{I}(x, y) = az + by + cx + dw + ev + fu + gt + hs + ir$$

で算出される。畳み込み層ではフィルタ F を使い、入力画像 I のエッジ (色が変化する境目) やプロブ (局所的に塊のある領域) などの特徴を得る。その特徴からフィルタ F の重みを学習する。フィルタ F の重みを学習することで、画像の持つ特徴を学習している。畳み込み層を何層も重ねると層が深くなるにつれて、最初は単純なエッジに反応し、続いてテクスチャに反応し、より複雑で抽象化された情報が抽出される。

3.2.2 プーリング層

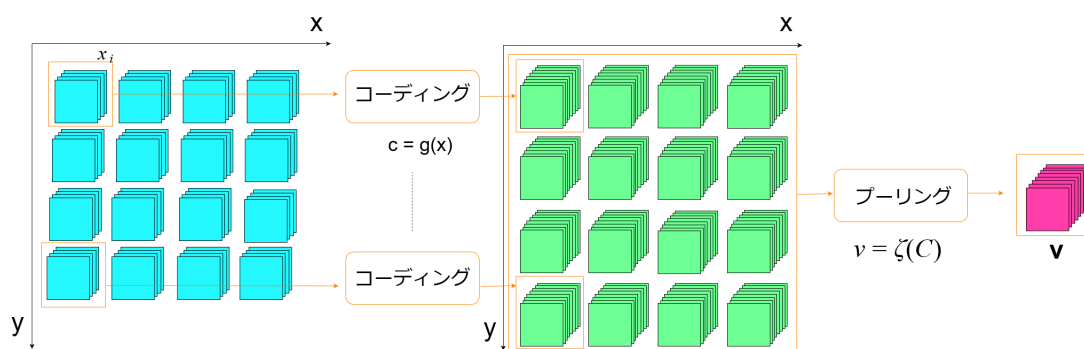


図 3.2: コーディングとプーリング

まず、プーリングの説明の前に必要となるコーディングについての説明を行う。コーディングは入力データ x に対して、

$$x = (x_1, \dots, x_D)^T \mapsto c = g(x) = (g_1(x), \dots, g_{D_c}(x))^T$$

に示すように、分類に有利な $D_c (\geq D)$ 次元の高次元への非線形な写像 $g(\cdot)$ を求め、この写像を用いて特徴 c を求める過程である。コーディング関数 $g(\cdot)$ は畳み込み演算のフィルタを判別的に学習することで推定する。画像領域から得た複数のコーディング後のベクトルを、その領域を代表する 1 本のベクトルにまとめる操作をプーリングという。

$$v = \zeta(C)$$

ここで、 $\zeta(\cdot)$ はプーリング関数、 C は対象画像領域に含まれるコーディング後の特徴集合である。プーリング後の特徴の次元は、一般的にコーディングされた特徴の次元と等しくなる。畳み込み演算をして得られた特徴をプーリングすることで、対象画像領域が持つ強い特徴を抽出しているのがプーリング層である。

プーリングを行う長所として、主に 2 点が挙げられる。1 点目は画像から得られる局所特徴の数が異なっても、プーリングを行うことによって、同じ次元の特徴ベクトルを得られる点、2 点目はプーリングを行う画像領域内の局所特徴の位置情報を考慮しないため、位置不変な特徴を得られることが挙げられる。プーリングの手法には、対象ベクトルの平均値を計算す

る平均値プーリング (average pooling) やベクトルの各要素の最大値を計算する最大値プーリング (max pooling) などがある. 本研究では, 最大値プーリングを使用しており, 以下のような関数で記述される.

$$v_k = \max\{c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{ik}, \dots, c_{Nk}\}$$

ここで, N はプーリングする領域に含まれる特徴の数である.

3.2.3 全結合層

全結合層は, ここまでの畳み込み層とプーリング層の特徴を受けて, それを特徴量として結果に反映する. 推論の結果, 最も確率の高いクラスの値を取り出し, one-hot vector へと変換し, 収束 / 非収束を予測する.

3.2.4 Dropout

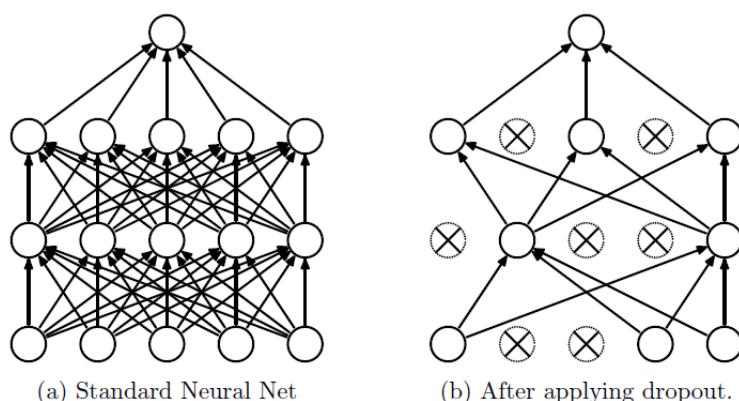


図 3.3: Dropout の概念図

Dropout は, ノードをランダムに消去しながら学習する手法である. 分類器を安定させる手段として, 多くの異なるネットワークの予測結果の平均を用いるという方法がある. しかし, 膨大な数のパラメータを持つネットワークを複数学習させると, 計算にコストが掛かりすぎてしまう. そこで, パラメータの増加を抑えつつ, 過学習を抑制する手法として Dropout が使用される. Dropout では訓練データが提示されるたびに中間層のユニットの出力を p の確率で 0 にする. つまり, 訓練データが提示されるたびに異なるネットワーク構造が選択され, 学習されることとなる. ただし, ネットワークの重みは共有している. 図 3.3 は Dropout 適用前後のイメージである. N 個のノードを持つとすると, 2^N 個のネットワークが可能となる. テスト時には, 全てのノードを有効として結合重みは $(1 - p)$ 倍する. これにより, 2^N 個のネットワーク出力の平均が最終的な出力となるため, 汎化誤差の低減に貢献する. 一般的に Dropout は全結合層に適用される.

第4章 フレームワークとデータセット

4.1 分類モデル生成に使用したフレームワーク

本研究では、ディープラーニングのフレームワークとして、畳み込みニューラルネットワークを構築するのに TensorFlow[15] を利用している。TensorFlow は計算グラフを利用したオープンソースのライブラリであり、Python だけでなく C / C++からも呼び出すことができる。図 4.1 は本研究で使用した CNN の構成である。図では 28×28 pixel での例を示しているが、画像のサイズを大きくした場合でも同様の構造とした。このネットワーク構造は元々 LeNet[16] と呼ばれる画像認識では定番とされているネットワークの構造で、[13], [14] でも同じ構造を使用している。CNN は 2 組みの畳み込み層と Max プーリング層を通して、2 つの全結合層と出力層から構成される。1 つ目の全結合層の出力は 128、2 つ目の全結合層の出力は 256 とした。疎行列画像の入力サイズは、画像認識分野の基礎実験である手書きの数字画像の分類実験で使用されている 28×28 pixel から、 56×56 , 112×112 , 224×224 pixel までの 4 パターンを生成した。

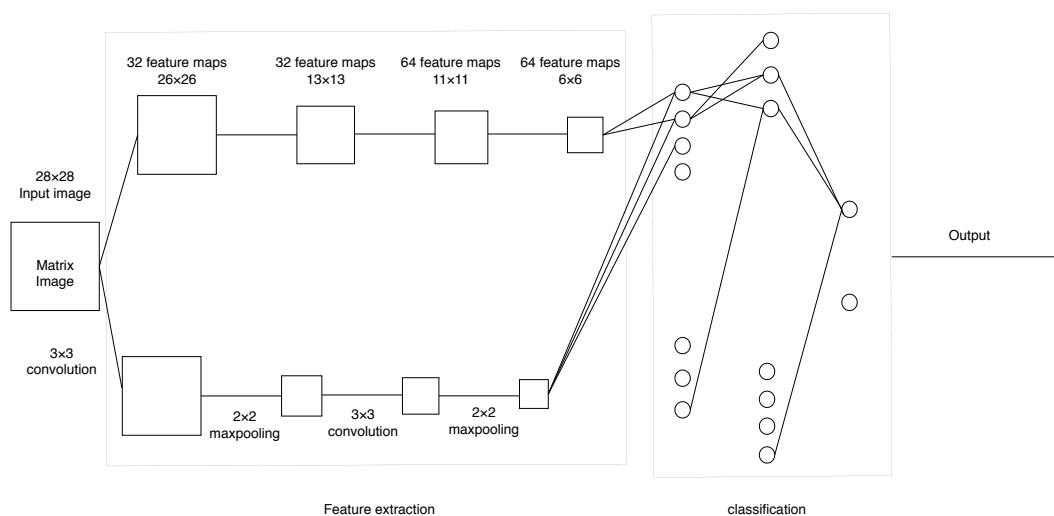


図 4.1: CNN の構成

学習の過程において、バッチサイズは 16 として Epoch 数は最大で 30 回にした。誤差関数はクロスエントロピー誤差関数、最適化手法は Adam とした。その他、学習率は 1.0×10^{-3} として、Dropout の確率は 25% とした。

4.2 データセットの紹介

本研究では, SuiteSparse Matrix Collection に格納された疎行列データセットを利用する. SuiteSparse Matrix Collection は実際のアプリケーションにおいて生成された今なお発展を続けている疎行列データセットである. また, それぞれの行列が生成された分野も様々である. 本研究では非対称で実数を要素に持つ正方行列 982 個中, 次数の小さいものから 875 個を用いた. 表 4.1 に 875 個の行列それぞれの分野 (属性名:field) についてまとめた.

表 4.1: 使用分野ごとの行列の数

使用分野	個数	使用分野	個数
subsequent circuit simulation problem	182	circuit simulation problem sequence	8
computational fluid dynamics problem	96	computational fluid dynamics problem sequence	7
chemical process simulation problem	67	counter-example problem	7
economic problem	62	statistical/mathematical problem	6
directed graph	50	model reduction problem	6
circuit simulation problem	46	semiconductor device problem sequence	5
2D/3D problem	39	2D/3D problem sequence	4
directed weighted graph	39	frequency-domain circuit simulation problem	3
eigenvalue/model reduction problem	35	optimization problem sequence	3
subsequent computational fluid dynamics problem	30	optimization problem	3
power network problem	24	robotics problem	3
electromagnetics problem	22	chemical process simulation problem sequence	2
structural problem	18	structural problem sequence	2
semiconductor device problem	16	directed weighted graph sequence	1
materials problem	14	directed weighted random graph	1
subsequent optimization problem	13	computer graphics/vision problem	1
subsequent semiconductor device problem	13	subsequent power network problem	1
directed multigraph	12	linear programming problem	1
combinatorial problem	11	acoustics problem	1
subsequent 2D/3D problem	10	power network problem sequence	1
thermal problem	10		

4.3 非零要素の数値分布

図 4.2 に, 実験に使用した 875 個の疎行列が持つ非零要素の絶対値を取り, 常用対数を取ったものの数値分布を示す. 横軸に非零要素の値, 縦軸にその要素数を示す. 非零要素の総数は 414,314,792 個となっている. これらの値は平均が-3.24, 中央値が-2 で-324 から 28 までの範囲に分布していることが分かった. また, 全行列の疎度を調べたところ, 0.000006%から 76%の範囲に分布している.

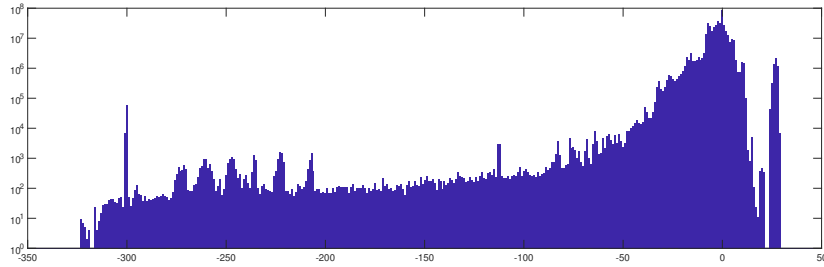


図 4.2: 非零要素の分布

ここで, $CAx = Cb$ として, 方程式の両辺に対角行列を掛けることをスケーリングと呼ぶ. 以降で, スケーリング行列を C と呼ぶ.

$$c_{ii} = \begin{cases} 1 & (a_{ii} = 0) \\ \frac{1}{|a_{ii}|} & (a_{ii} \neq 0) \end{cases}$$

と設定した. C を掛けた後の行列 CA の対角成分は-1, 0, 1 のいずれかとなる. C を適用した際の 875 個の行列の非零要素の分布は図 4.3 となった. C を掛けても, 非零要素の構造は変わらないため, 非零要素の総数は 414,314,792 個であり, 絶対値を取り, 常用対数を取った非零要素の分布は-324 から 302 の範囲に分布している. その平均値は-4.5 であり, 中央値は-3 である. C を掛けて対角要素を 1 でスケーリングすることで, スカラー倍された複数の行列を 1 つの同じ行列として認識できるメリットがある.

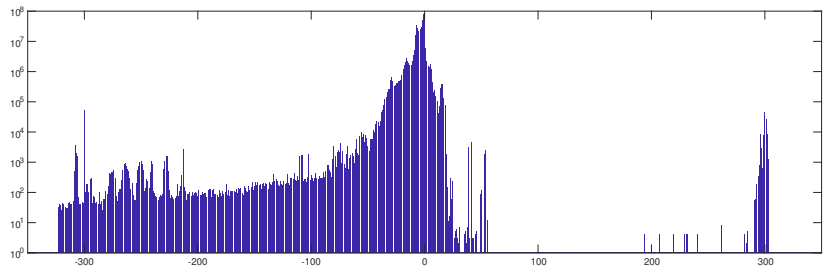


図 4.3: スケーリング後の全非零要素の数値分布

4.4 BiCG 法の収束・非収束と各種変数

BiCG 法の設定は以下のようにした. まず, 解ベクトル x を $x = [1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{(n-1)}]^T$ として右辺ベクトルは $b = Ax$ で計算した. 初期ベクトルは $x_0 = [0, 0, 0, \dots, 0]^T$ とし, $r^*_0 = r_0$ とした. また, 収束判定の条件として $\|r\|_2 \leq 10^{-6}\|b\|_2$ に設定した. 最大反復回数は行列の次数回までとした.

この条件の下, データセットに含まれる行列 08blocks, ex1 に対して BiCG 法を実行した. 結果は表 4.2 のようになった. 図 4.4 は BiCG 法の相対残差 2-ノルム ($\|r_k\|_2/\|b\|_2$) のふるまいを示す.

A に対する BiCG 法では, 行列 08blocks の相対残差ノルムは行列の次数以下の反復回数で収束している. 行列 ex1 は行列の次数 217 の反復を経ても収束していない. 行列 ex1 のように, 相対残差ノルムの減少に次数回以上の反復を要したり, 行列によっては相対残差ノルムが増大してしまう場合がある.

しかし, C を掛けることによって, いずれの行列も収束性が改善される. 行列 08blocks では反復回数が 78 回までループを削減することが出来た. また, 行列 ex1 においては C を掛けることにより, 収束するようになった.

表 4.2: 行列 08blocks, ex1 に対する BiCG 法の計算結果

行列	次数	係数行列	反復回数	相対残差ノルム
08blocks	100	A	95	2.2E-09
		CA	78	1.1E-07
ex1	217	A	217	2.7E-05
		CA	166	8.0E-07

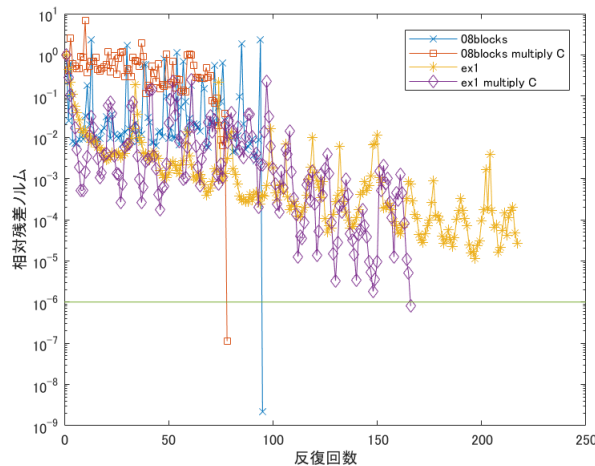


図 4.4: 行列 08blocks, ex1 の相対残差履歴

第5章 疎行列画像の生成過程

本研究では行列画像の生成手法として, SuiteSparse の一部を変更した方法である SuiteSparse 法とシグモイド関数を利用した sigmoid 法の2種類を用いた. またその際, 実際の数値がグレースケール値へどのように変換されていくのかを具体例を踏まえて説明する.

5.1 SuiteSparse 法による行列画像の生成

SuiteSparse Matrix Collection より配布されているソフトウェア SuiteSparse[17] を利用することにより行列画像は生成出来る. しかし, この手法は行列画像を分類することを目的としたものではなく, 非零要素の位置と値の大小関係を可視化するためのものであり, カラー画像を生成するための手法である. 図 5.1 は SuiteSparse を利用し, 生成した 28×28 pixel の行列 08blocks のカラー画像である. なお, nnz は行列の非零要素数を示す.

表 5.1: 行列 08blocks の持つ特徴

名前	n	nnz	非零要素の分布	使用分野
08blocks	300	592	$1 \leq val \leq 100$	combinatorial problem

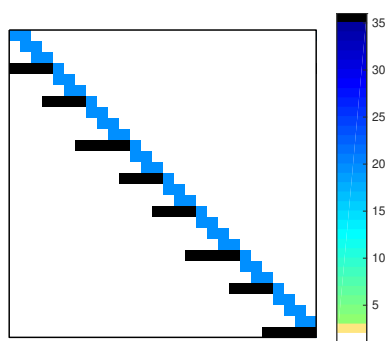


図 5.1: 行列 08blocks のカラー画像

本研究は収束 / 非収束の2値分類であるという点, そして RGB の3チャンネルを含んだカラー画像と比較して, 1チャンネルしか持たず分類が容易であるという点から入力にはグレースケール画像を使用した. そのため SuiteSparse の機能を変えて, 生成される画像をグレース

ケール画像にした。以降、この濃度付与法を SuiteSparse 法と呼ぶ。グレースケール値は 0 が黒で 255 が白にそれぞれ対応している。

はじめに、SuiteSparse 法による行列を画像へと変換する手順を示す。その後、各ステップにおける変換過程を説明する。

SuiteSparse 法の手順

1. A の非零要素に絶対値をとり、正值とする。
2. 行列の次数 n を生成画像のサイズ d で割り、切り上げる。得られた数を s とする。
3. 行列を $s \times s$ ブロックに分割し、各ブロックから最大値を取り出して行列を再構成する。その行列を A' とする。
4. A' の非零要素に対して常用対数をとる。
5. 常用対数をとった非零要素の中央値 Me 、標準偏差 σ を求める。
6. A' の要素 $a'_{i,j}$ に対して 5. で生成した数を式、

$$grayscale = \begin{cases} 255 & (Me + \sigma < \log_{10}(a'_{i,j})) \\ 128 + \lceil 127 \frac{(\log_{10}(a'_{i,j}) - Me)}{\sigma} \rceil & (Me - \sigma \leq \log_{10}(a'_{i,j}) \leq Me + \sigma) \\ 0 & (Me - \sigma > \log_{10}(a'_{i,j})) \end{cases}$$

を用いてグレースケール値へと変換する。

7. 1 行あたりのブロック数である $\lceil \frac{n}{s} \rceil$ が d に満たない場合、画像を拡大する。

1. 行列 08blocks の持つ非零要素の分布を階級幅 1 のヒストグラムで示すと図 5.2 になる。行列 08blocks の非零要素は全て自然数であるため、値の分布は変わらない。
2. 行列の次数 n を生成する画像のサイズ d で割り、それを切り上げた整数値を求める。行列 08blocks の次数は、 $n = 300$ で、画像のサイズを 28×28 pixel とした場合、 $s = 11$ となる。
3. A を 2. で設定した 11×11 のブロック 28×28 個に分割し、各ブロックから最大値を取り出した行列を A' とする。ブロックを構成する際、28 番目のブロックからはみ出した部分は 0 で埋め合わせて最大値を取り出す。今回の場合、 A' の次数は 28 となり非零要素数は 82 個となる。図 5.3 は行列 A' の非零要素値の分布を階級幅 1, 1 刻みのヒストグラムで示している。
4. A' の非零要素に対し、常用対数を取る。その際の 08blocks の非零要素の数値分布は図 5.4 のようになる。1 に対数を取った結果、0 になった値を含めている。このヒストグラムの階級幅は 0.1 刻みで示している。

n	nnz	A の非零要素
300	592	$1 \leq val \leq 100$

n	nnz	A' の非零要素
28	82	$1 \leq val \leq 100$

n	nnz	A' の非零の対数値
28	82	$0 \leq val \leq 2$

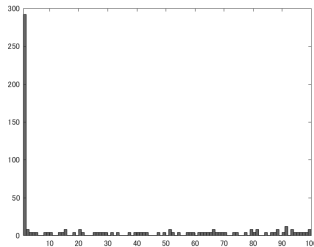


図 5.2: A の非零の分布

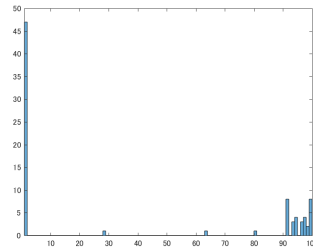


図 5.3: A' の非零の分布

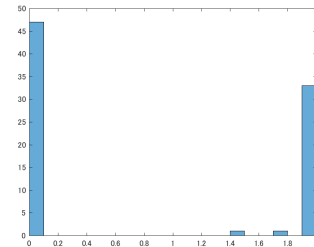


図 5.4: A' の非零の対数分布

5. MATLAB の関数にならい, A' の非零要素を $nonzeros(A')$ として表現する. まず, $nonzeros(A')$ に対して常用対数をとった数値の中央値と標準偏差を求める. 行列 08blocks の場合, これらの値はそれぞれ

$$Me(\log_{10}(nonzeros(A'))) = 0, \sigma(\log_{10}(nonzeros(A'))) = 0.9759$$

である.

6. 行列 08blocks の非零要素に対しては, 2 番目の条件から,

$$-0.9759 \leq \log_{10}(val) \leq 0.9759 \text{ より,}$$

$$0.1057 \leq val \leq 9.460$$

の範囲に対して, 1 から 254 までの濃度値を付与する. 例えば, 1 の場合, 行列画像 08blocks の濃度値として, 以下のように 128 が割り当てられる.

$$128 + \lceil 127 \frac{\log_{10}(1) - Me}{\sigma} \rceil = 128$$

となる. 図 5.3 より, $0.1057 \leq val \leq 9.460$ の範囲に存在する非零要素は 1 だけであり, それ以外の要素は 9.460 よりも大きな値であるため, 1 以外の非零要素には濃度 255 が割り振られる. 行列 08blocks を画像に変換した際の非零要素に対する濃度値分布を図 5.5 に示す.

7. 行列の次数が小さい場合, 画像を拡大する必要がある. 拡大の際に画像の品質が損なわれないよう bicubic 補間を利用している.

n	nnz	非零要素の分布
28	82	128, 255

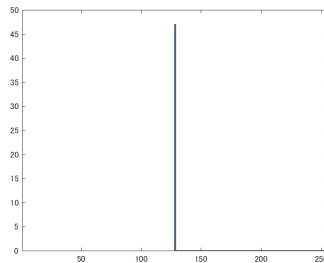


図 5.5: SuiteSparse 法で生成した行列画像の濃度値分布

元々の行列のサイズが $n = 300$ であったときに、非零要素の値の種類は全部で 64 種類であったにも関わらず、これらすべての値が 128, 255 へと濃度値が振られており、SuiteSparse 法による濃度の付与方法は行列内での非零要素の大小関係を細かに反映した方法ではないことが分かる。画像のサイズを大きくして生成した場合でも同様の現象が確認された。この問題を解決すべく、本研究では sigmoid 法という新たな濃度値付与方法を試みた。次節では sigmoid 法による濃度の付与方法について説明していく。

5.2 sigmoid 法による行列画像の生成

SuiteSparse 法では、非零要素の大小関係を細かくグレースケール値に反映出来ていないことが分かった。この問題を解決すべく、本節では sigmoid 法を導入する。

sigmoid 関数

$$\text{sigmoid}(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

は図 5.6 の形状をしており、値を 0 から 1 の範囲へ連続的に変換が出来る。そこで、非零要素を sigmoid 関数で標準化したのち、255 を掛けて非零要素をグレースケール値へと変換する。

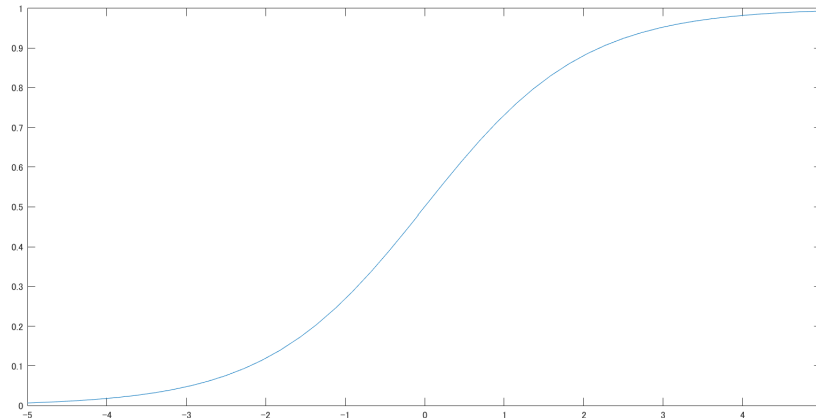


図 5.6: sigmoid 関数の概形

なお本研究では, sigmoid 関数の定義域は全ての実数としている. 以下に sigmoid 法における行列画像の生成過程を示す.

sigmoid 法の手順

1. A の持つ負の非零要素に絶対値をとり, 正とする.
2. 行列の次数 n を生成画像のサイズ d で割り, 切り上げる. 得られた数を s とする.
3. 行列を $s \times s$ ブロックに分割し, 各ブロックから最大値を取り出して行列を再構成する. その行列を A' とする.
4. A' の非零要素に対して常用対数をとる.
5. 常用対数を取った非零要素の平均値 μ , 標準偏差 σ を算出する.
6. $\mathbf{u} = \log_{10}(\text{nonzeros}(A'))$ と置いて,

$$u_i = \frac{u_i - \mu}{\sigma}$$

で標準化する.

7. 6. で標準化した値を sigmoid 関数を用いて 0 から 1 までの範囲に収め, 255 を掛けた数値の切り捨てを算出し, グレースケール値へと変換する.
8. 1 行あたりのブロック数 $\lceil \frac{n}{s} \rceil$ が d に満たない場合, 画像を拡大する.

5. までのステップは SuiteSparse 法と同様であるため 6. 以降のステップから説明をする.

6. A' の非零要素をを標準化する. 平均値は $\mu=0.8353$, 標準偏差は $\sigma=0.9759$ である.
 $u = \text{nonzeros}(A')$ と置いて, 標準化後の A' の非零要素の分布は図 5.7 のようになる.
 なお図 5.7 では階級幅を 0.1 としている.

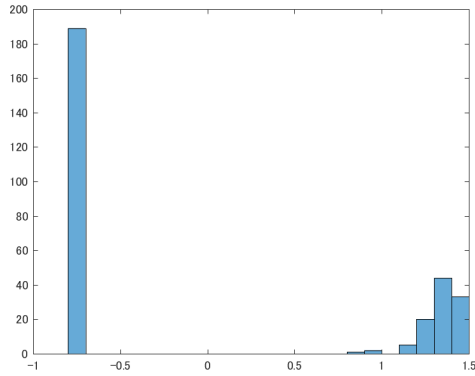


図 5.7: 標準化した 08blocks の非零要素

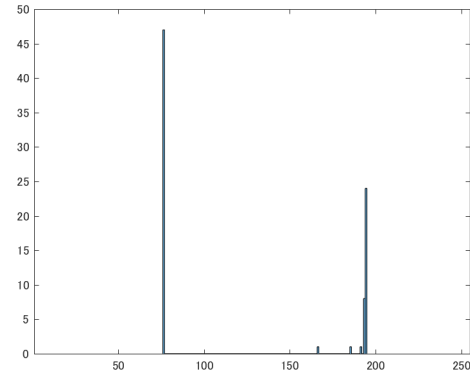


図 5.8: sigmoid 法で生成した行列画像の濃度値分布

例えばこの場合, 非零要素の値が 1 であつたら, 標準化後の値は

$$u_i = \frac{\log_{10}(1) - 0.8353}{0.9759} = -0.8559 \quad (\#)$$

となる.

7. 6. で標準化した非零要素に対して sigmoid 関数を適用し, 255 を掛けたのちにその切り捨てを求める. その時の値がグレースケール値となる. 図 5.8 は 08blocks をグレースケール値へと変換したときの非零要素の分布である. (#) で算出した値を sigmoid 関数へ代入し, 255 を掛けることで, 08blocks の非零要素 1 は

$$\text{floor}\left(255 * \frac{1}{1 + \exp(-(-0.8559))}\right) = 76$$

濃度値 76 へと変換される.

8. 行列の次数が小さく, 入力サイズに満たない場合, 画像を拡大する. 拡大には bicubic 補間を利用している.

図 5.9 は SuiteSparse 法, 図 5.10 は sigmoid 法により生成した 28×28 pixel の 08blocks の行列画像となる. 両者を比較しても, 特徴画像に変化はないように見える. しかし, 非零要素に対して使用される濃度値の種類は SuiteSparse 法では 128 と 255 の 2 種類であつたのに対して, 図 5.8 より, sigmoid 法では濃度値 76, 166, 185, 191, 193, 194, 195 の 7 種類まで増加し, SuiteSparse 法と比較しても非零要素の大小関係を保持しつつ, グレースケール値へと変換できていることが分かる.

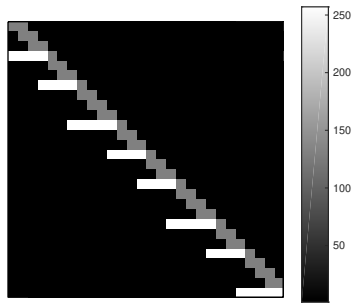


図 5.9: SuiteSparse 法で生成した 08blocks の行列画像

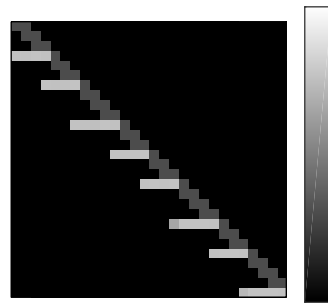


図 5.10: sigmoid 法で生成した 08blocks の行列画像

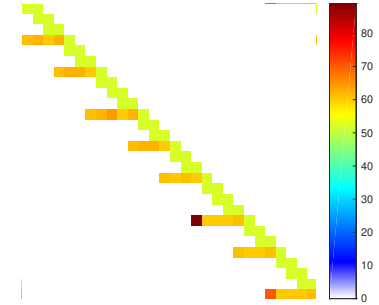


図 5.11: 生成方法の違いによる濃度値差分

図 5.11 は SuiteSparse 法で生成した行列画像から sigmoid 法で生成した行列画像の濃度値の差分を取ったものである。SuiteSparse 法で生成した 08blocks の対角以外の要素には 255 だけが割り振られていた。しかし、sigmoid 法で生成した画像と差分をとることで濃度値分布が変化しており、濃度値の割り振りが細やかになった。次に 875 個の疎行列の非零要素に割り当てられた濃度値のヒストグラムを示す。

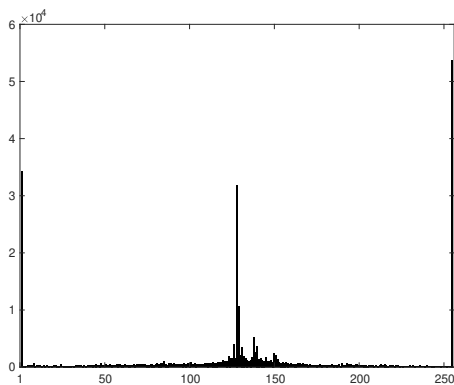


図 5.12: SuiteSparse 法で生成した 28×28 pixel の全非零要素の濃度値分布

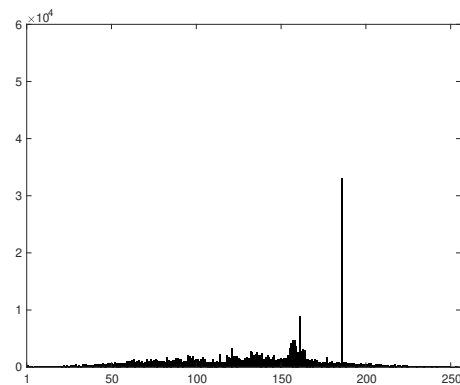


図 5.13: sigmoid 法で生成した 28×28 pixel の全非零要素の濃度値分布

図 5.12, 図 5.13 のヒストグラムは 28×28 pixel の行列画像に対する結果である。表 5.2 に各画像サイズ毎の全非零要素の濃度値分布が持つ平均と標準偏差を示す。SuiteSparse 法では平均値は 136.7, 標準偏差は 81.03 となった。一方で sigmoid 法では平均値は 135.0, 標準偏差は 47.73 となった。図 5.12 より, SuiteSparse 法による濃度付与は 08blocks 以外の行列に対して 1, 128, 255 周辺に濃度値を割り振ることが多い様子が分かる。また, 標準偏差も SuiteSparse 法の方が大きいという点から, 非零要素の大小関係を大まかに表現する点が SuiteSparse 法の特徴だといえる。

一方で, sigmoid 法では濃度値が 50 から 200 の範囲に多く分布しており, この範囲の数値を

使って非零要素の大小関係を表現しているという点から, sigmoid 法は SuiteSparse 法よりも細かくグレースケール値を割り振り, 大小関係を綿密に表現している点の特徴だと言える.

表 5.2: 非零要素の濃度分布に対する平均と標準偏差

Method		28×28	56×56	112×112	224×224
Suite	平均	136.74	144.56	149.18	155.49
	標準偏差	81.034	79.197	82.553	84.825
sigmoid	平均	134.997	136.627	138.326	140.344
	標準偏差	47.740	45.759	46.958	47.885

5.3 スケーリング後の行列画像

本節では, 行列 C を掛けた変化について説明する. 図 5.14 は行列 08blocks に C を掛けた後の非零要素の分布である. なお階級幅は 0.01 としている. 図 5.2 より, 行列 08blocks の非零要素は $1 \leq val \leq 100$ の範囲に分布していた. しかし, C を掛けてスケーリングすることで, 対角成分は全て 1 となり, 数値分布は $0.0220 \leq val \leq 1.10$ の範囲になった.

n	nnz	非零要素の分布
300	592	$0.0220 \leq val \leq 1.10$

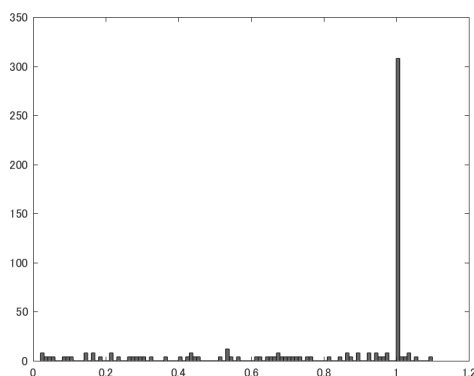


図 5.14: スケーリング後の非零要素の分布

入力画像は図 5.15 のようになる. また図 5.17 は 28×28 pixel におけるヒストグラムである. 非零要素のグレースケール値の分布範囲は 1 から 211 の範囲に分布するようになった. 図 5.5 の結果では 128, 255 の 2 種類の濃度値しか付与されていなかったが, 非零要素をスケーリングした結果, 行列画像に使用される濃度値は計 10 種類まで増加した. このように C を掛けるこ

とで BiCG 法の収束性を改善できるだけでなく, より鮮明に非零要素の大きをグレースケール値に反映出来る. 同様に, C によるスケーリングの後に sigmoid 法を用いて生成した 08blocks の行列画像は図 5.16 である. こちらでも濃度付与に使われたグレースケール値の種類は 10 種類である. 図 5.16 のヒストグラムが図 5.18 である.

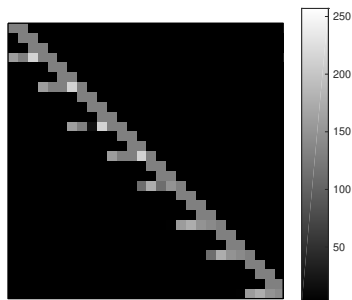


図 5.15: SuiteSparse 法で生成した 08blocks

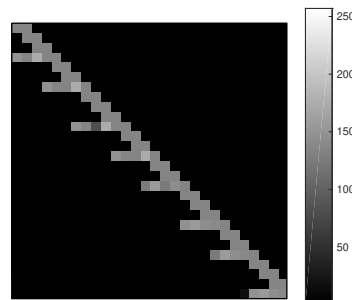


図 5.16: sigmoid 法で生成した 08blocks

表 5.3: スケーリング後に SuiteSparse 法で生成した行列画像の特徴

n	nnz	非零要素の分布
28	82	$1 \leq grayscale \leq 211$

表 5.4: スケーリング後に sigmoid 法で生成した行列画像の特徴

n	nnz	非零要素の分布
28	81	$1 \leq grayscale \leq 172$

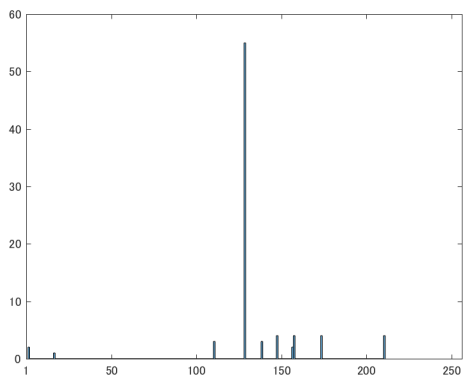


図 5.17: スケーリング後 SuiteSparse 法で生成した行列画像の濃度値分布

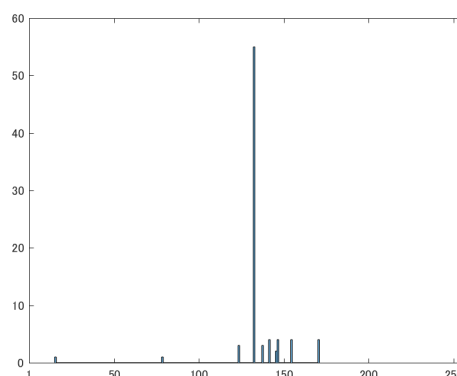


図 5.18: スケーリング後 sigmoid 法で生成した行列画像の濃度値分布

図 5.18 では, 非零要素に対する濃度値が $1 \leq val \leq 172$ の範囲で SuiteSparse 法で生成した場合と同様に 10 種類の濃度値が付与されている. しかし, SuiteSparse 法で生成した場合と比べて, 1 つの非零要素 (値:28) が画像に反映されていない. sigmoid 法で濃度値を生成した場合,

sigmoid 関数の出力値と 255 の積を取った後に切り捨てをしているため、0 になった非零要素がグレースケール値に反映されないことがある。

以上、使用される濃度値の種類から、スケーリングした行列に対して sigmoid 法で濃度を付与しても使用されるグレースケール値の種類に大きな変化が見られなかった。最後に、 C を掛けた場合の 875 個の行列に対するグレースケール値の分布は以下のようになっている。

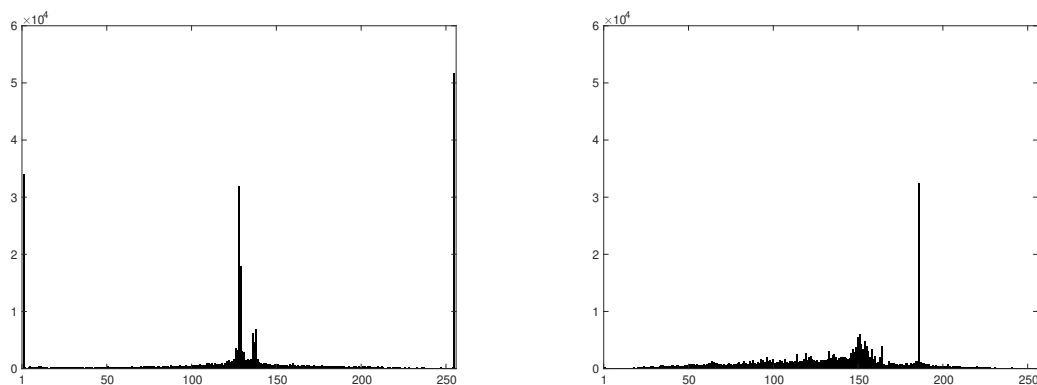


図 5.19: スケーリング後 SuiteSparse 法で生成した 28×28 pixel の全非零要素の濃度値分布
 図 5.20: スケーリング後 sigmoid 法で生成した 28×28 pixel の全非零要素の濃度値分布

上記のヒストグラムも先程と同様に、 28×28 pixel の行列画像に対する結果である。また、各画像サイズのヒストグラムにおける平均と標準偏差を表 5.5 に示す。前節のスケーリング前の 28×28 pixel の結果 (SuiteSparse 法: 平均 136.7, 標準偏差 81.03 sigmoid 法: 平均 135.0, 標準偏差 47.73) と比較して SuiteSparse 法, sigmoid 法ともに若干分布が狭まった。SuiteSparse 法の分布が狭まった点から、1 や 255 等のグレースケール値を割り振る大雑把な濃度値を付与していた SuiteSparse 法がその他のグレースケール値を割り振るようになったと言える。しかし、2 つのヒストグラムから、 C によるスケーリングを実行後も分布の概形は大きく変わらなかった。図 5.21 と 5.22 に 28×28 pixel における 875 個の行列に使われた濃度値分布の累積を示す。これは画像サイズを変えた際にも共通している特徴である。

表 5.5: 対角をスケーリングした非零要素の濃度分布に対する平均と標準偏差

Method		28×28	56×56	112×112	224×224
Suite Sparse	平均	136.57	138.53	151.11	150.48
	標準偏差	79.348	80.258	80.290	86.488
sigmoid	平均	135.15	136.91	138.70	140.81
	標準偏差	47.155	46.076	47.427	48.207

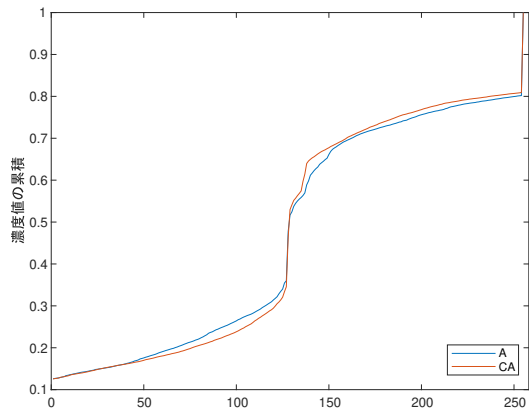


図 5.21: SuiteSparse 法の濃度値の累積分布

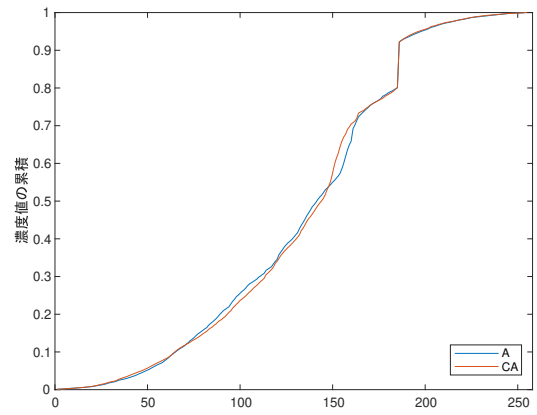


図 5.22: sigmoid 法の濃度値の累積分布

次章ではここまで説明した方法で生成した行列画像の分類を行った結果を示す。

第6章 実験と評価

6.1 K-fold 交差検証とモデルの評価方法

本研究では、分類モデルの評価の際に K-fold 交差検証を使用した。K-fold 交差検証とは、標本群を k 個に分割した後、そのうちの 1 つのクラスをテストとして残りの $k - 1$ 個のクラスを用いて訓練を行い、全てのクラスをテストとして実験を終了した後、 k 個の正答率 (Accuracy) の平均値 (Average accuracy) を求めて結果とする方法である。K-fold 交差検証のメリットとして、全てのデータを用いて検証を行うため、過学習やデータの偏りを防ぐことが出来るという利点がある。

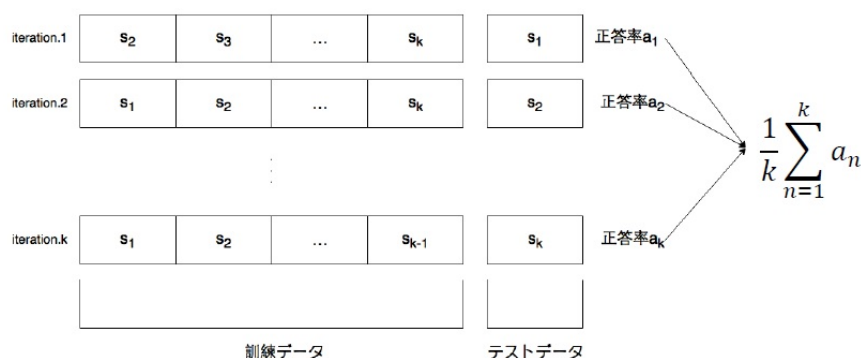


図 6.1: K-fold 交差検証の計算手順

本研究では、 $k = 5$ として実験をした。また、テストデータの分類結果は、表 6.1 のいずれかに対応する。表 6.1 は Confusion Matrix と呼ばれており、分類問題における評価の際に使用される。本研究において、TN (True Negative) は非収束行列を非収束と予測できた数、FN (False Negative) は非収束行列に対して、収束と予測した数、FP (False Positive) は収束する行列に非収束と予測した数、TP (True Positive) は収束する行列に対して収束と予測できた数を表す。

表 6.1: 実測と予測に対する Confusion Matrix

		Prediction label	
		Not convergence	Convergence
True label	Not convergence	TN	FN
	Convergence	FP	TP

本システムの評価には、以下の指標 *Accuracy* を利用した。

$$Accuracy = \frac{TN + TP}{TN + FN + FP + TP}$$

TN+FN+FP+TP はグループ全体のデータ数に等しい。分割した 5 グループに対して、それぞれ *Accuracy* を求め、その平均である *Average accuracy* を算出し、評価指標とする。また、分類問題におけるその他の評価指標としては、*F* 値と呼ばれる、

$$F = \frac{TP}{TP + \frac{1}{2}(FN + FP)}$$

という指標がある。これは収束 / 非収束の両方の誤検知の割合の調和平均を取った指標である。

6.2 データセットの構成

875 個の行列に対し、BiCG 法の収束 / 非収束は表 6.2 のようになった。

表 6.2: BiCG 法に対する収束/非収束
の行列の数

	収束	非収束	合計
<i>A</i>	235	640	875
<i>CA</i>	289	586	875

表 6.2 より、*C* を掛けてスケーリングすることで 54 個の行列が収束するようになった。表 6.2 の行列セットを用いて 3 種類のデータセット *F*, *G*, *H* を用意した。それぞれのデータセットの作り方について説明する。

1. *A* で収束する行列 235 個を 1~5 の 5 グループに分割する。
2. 残りの行列の中から *CA* のみで収束する 54 個の行列を 1~5 の 5 グループに分割する。
3. 残った *A* でも *CA* でも収束しない 586 個の行列を 1~5 の 5 グループに分割する。
4. 2., 3. で 5 分割した各グループから 47 個を選び、1. の行列と合わせて 470 個の行列から構成されるデータセット *F* とする。

データセット *G*, *H* は 875 個の行列全てを使用して構成したため、内容は完全に一致している。しかし、データセット *G* では *A* の収束結果、データセット *H* では *CA* の収束結果に基づいているため、収束 / 非収束の内訳が異なっている。また、*F*, *G* を構成する 5 つのグループを F_i, G_i ($1 \leq i \leq 5$) とする。 F_i は G_i の部分集合として、 $F_i \subseteq G_i$ となっている。5 グループの構成は巻末の付録に示す。

6.3 SuiteSparse 法を利用した分類結果

まず, 収束 / 非収束のデータ数が等しい F とデータセット全件を使用した G の *Accuracy* を表 6.3 に示す.

表 6.3: SuiteSparse 法で生成した画像から構成される F と G の *Accuracy*

size (pixel)	Dataset	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	Average (%)
28×28	F	84.0	77.7	80.9	83.0	74.5	80.0
	G	84.6	86.3	86.3	89.7	83.4	86.1
56×56	F	79.8	78.7	79.8	83.0	73.4	78.9
	G	85.1	82.3	85.1	87.4	84.5	84.9
112×112	F	78.8	80.9	77.7	83.0	78.7	79.8
	G	79.4	79.4	84.0	86.3	80.6	81.9
224×224	F	76.6	85.1	75.5	80.8	76.6	78.9
	G	82.8	78.9	85.7	84.0	78.9	82.1

表 6.3 より, 画像サイズを大きくするにつれて Average accuracy が減少しており, Average accuracy は 28×28 pixel の場合に最大となっている. また全てのケースでデータセット G の方が Average accuracy が高くなっている. この点から非収束クラスが収束クラスの 2~3 倍程度のデータセットにおいては, 各クラスの要素数を揃えるよりも多くの行列のパターンを学習した方が効果的であると言える. ここで, SuiteSparse 法の Average accuracy が最も高かった 28×28 pixel での各グループの分類結果の内訳を示す. またカッコ内は収束 / 非収束行列の検出率を示す.

表 6.4: SuiteSparse 法で生成したデータセット F における分類の内訳

	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	計 (%)
TN	42 (89.3)	37 (78.7)	39 (82.9)	36 (76.5)	33 (70.2)	187 (79.5)
FN	10	11	10	5	10	46
FP	5	10	8	11	14	48
TP	37 (78.7)	36 (76.5)	37 (78.7)	42 (89.3)	37 (78.7)	189 (80.4)
計	94	94	94	94	94	470

表 6.5: SuiteSparse 法で生成したデータセット G における分類の内訳

	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	計 (%)
TN	116 (90.6)	114 (89.0)	122 (69.7)	116 (90.6)	113 (64.5)	581 (90.7)
FN	15	10	18	6	14	63
FP	12	14	6	12	15	59
TP	32 (68.0)	37 (78.7)	29 (61.7)	41 (87.2)	33 (70.2)	172 (73.1)
計	175	175	175	175	175	875

表 6.4 では, TN の割合と TP の割合がいずれもおおよそ 8 割となっている. 一方で表 6.5 では, TN の割合が 11.2% 上昇し, 逆に TP の割合は 7.3% 減少した. これらの結果から非収束行列のデータの方が多いと, TN の割合は上昇するが, TP の割合が減少してしまうことが分かった. 結果として, Accuracy は上昇しているものの収束する行列の検出率が下がってしまう点が課題である. ここで, データセット F と G 両方で誤答した行列全 57 件を表 6.6 に示す.

表 6.6: SuiteSparse 法で生成しデータセット F と G で誤答した行列

行列名	分野	相対残差ノルム
adder_dcop_24	subsequent circuit simulation problem	8.85E-05
adder_dcop_49	subsequent circuit simulation problem	1.23E-05
Baumann	2D/3D problem	8.6E+05
dw8192	electromagnetics problem	1.4E-01
epb3	thermal problem	2.7E-05
ex19	computational fluid dynamics problem	3.1E-05
ex27	computational fluid dynamics problem	3.4E-04
fpga_dcop_22	subsequent circuit simulation problem	1.1E-06
fs_183_1	2D/3D problem sequence	5.92E-06
goodwin	computational fluid dynamics problem	3.4E+01
gre_1107	directed weighted graph	1.0E+04
mark3jac020sc	economic problem	3.7E+06
pores_1	computational fluid dynamics problem	2.2E-03
raefsky3	structural problem	2.4E-04
raefsky6	structural problem	1.1E-05
rbsb480	robotics problem	1.6E+01
transient	circuit simulation problem	1.5E+00
utm5940	electromagnetics problem	1.5E-03
venkat50	subsequent computational fluid dynamics problem	4.9E-01
08blocks	combinatorial problem	8.24E-12
adder_dcop_25	subsequent circuit simulation problem	4.20E-07
adder_dcop_34	subsequent circuit simulation problem	5.32E-08
airfoil_2d	computational fluid dynamics problem	9.89E-11
ASIC_320ks	circuit simulation problem	9.56E-11
bwm2000	chemical process simulation problem	4.72E-11
cage3	directed weighted graph	1.56E-15
cage4	directed weighted graph	4.04E-18
cage5	directed weighted graph	1.07E-11
cavity01	subsequent computational fluid dynamics problem	8.36E-11
circuit_2	circuit simulation problem	7.49E-11
CoupCons3D	structural problem	9.82E-11
coupled	circuit simulation problem	8.75E-11
cz148	2D/3D problem	9.01E-11
dc2	subsequent circuit simulation problem	7.51E-11
ex18	computational fluid dynamics problem	2.84E-07
ex31	computational fluid dynamics problem	8.53E-11
fs_183_4	subsequent 2D/3D problem	2.22E-07
fs_680_1	subsequent 2D/3D problem	8.19E-11
ibm32	directed graph	2.87E-08
language	directed weighted graph	1.35E-11
LeGresley_2508	power network problem	9.02E-11
lop163	statistical/mathematical problem	6.86E-08
mult_dcop_01	circuit simulation problem sequence	9.99E-11
n3c6-b1	combinatorial problem	3.17E-11
orsreg_1	computational fluid dynamics problem	5.14E-11
Pd	counter-example problem	7.27E-11
pivtol	statistical/mathematical problem	7.86E-11
poisson2D	computational fluid dynamics problem	8.55E-11
poli	economic problem	3.13E-11
poli3	economic problem	7.80E-11
steam2	computational fluid dynamics problem	7.78E-11
tols340	computational fluid dynamics problem	2.91E-08
tols90	computational fluid dynamics problem	6.40E-11
tomography	computer graphics/vision problem	8.78E-11
torso2	2D/3D problem	4.30E-11
venkat01	computational fluid dynamics problem sequence	9.38E-11
wang4	semiconductor device problem	5.07E-11

表 6.6 より, 反復停止時の相対残差ノルムを見ると, 非収束行列では収束条件である 1.0×10^{-6} にあと少しで届きそうな行列が多いことが分かった. 次節では, 同様の比較を sigmoid 法を用いた場合で行い, SuiteSparse 法での結果とどのように違っているかを考察していく.

6.4 sigmoid 法を利用した分類結果

同様に収束/非収束のデータ数が等しい F とデータセット全件を使用した G の Accuracy を表 6.7 に示す.

表 6.7: sigmoid 法で生成した画像から構成される F と G の Accuracy

size (pixel)	Dataset	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	Average (%)
28×28	F	86.1	88.2	79.7	79.7	89.7	82.7
	G	85.1	84.0	85.7	83.4	82.3	84.1
56×56	F	74.4	76.6	79.8	81.9	75.5	77.6
	G	84.6	81.7	83.4	86.3	80.6	83.3
112×112	F	81.9	85.1	83.0	79.7	76.6	81.2
	G	80.6	77.7	86.3	88.0	80.6	82.6
224×224	F	75.5	76.5	74.4	86.1	72.3	77.0
	G	80.6	78.2	84.6	76.6	76.6	79.3

表 6.7 でも, SuiteSparse 法の場合と同様の傾向がみられる. 画像サイズを大きくするにつれて, 全体的に Average accuracy が減少しており, Average accuracy の最大値は 28×28 pixel のときとなっている. また, データセット G の方が Average accuracy は常に大きくなっており, この 2 つの性質は画像の生成方法によらないといえる. 前節の SuiteSparse 法の結果と比較しても, accuracy に大きな変化は見られない. ここで, sigmoid 法で Average accuracy が最も高かった 28×28 pixel における各グループの分類結果の内訳を表 6.8 と表 6.9 に示す.

表 6.8: sigmoid 法で生成したデータセット F における分類の内訳

	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	計 (%)
TN	44 (93.6)	46 (97.8)	33 (70.2)	30 (63.8)	36 (76.5)	189 (80.4)
FN	10	10	5	2	8	35
FP	3	1	14	17	11	46
TP	37 (78.7)	37 (78.7)	42 (89.3)	45 (95.7)	39 (82.9)	200 (85.1)
計	94	94	94	94	94	470

表 6.9: sigmoid 法で生成したデータセット G における分類結果の内訳

	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	計 (%)
TN	118 (92.1)	115 (89.8)	121 (94.5)	104 (81.2)	113 (88.2)	571 (89.2)
FN	16	15	18	5	16	70
FP	10	13	7	24	15	69
TP	31 (65.9)	32 (68.0)	29 (61.7)	42 (89.3)	31 (65.9)	165 (70.2)
計	175	175	175	175	175	875

SuiteSparse 法の場合, 収束/非収束の行列の数を一緒にした際, TN と TP の割合はいずれも 8 割であったが, 表 6.8 では, TP の比率が 4.6%ほど上昇している. しかし, 非収束行列の数を増やした場合の結果表 6.9 では, TP の比率が 14.2%下がっており, 非収束行列の多いデータセットにおいて間違いやすい行列は収束する行列であることが分かる. グループ毎の accuracy の高さも SuiteSparse 法における結果と傾向が似ており, 例えばグループ 4 の TP の割合が高い点などから, SuiteSparse 法でも sigmoid 法でも分類の結果は類似すると言える. 次にデータセット F でも G でも誤答した行列全 55 個のリストを表 6.10 に示す.

表 6.10: sigmoid 法で生成しデータセット F と G で誤答した行列

行列名	分野	相対残差ノルム
adder_dcop_49	subsequent circuit simulation problem	1.23E-05
ASIC_100k	circuit simulation problem	5.4E+00
Baumann	2D/3D problem	8.6E+05
cell1	directed weighted graph	1.65E+02
dw8192	electromagnetics problem	1.4E-01
epb3	thermal problem	2.7E-05
ex19	computational fluid dynamics problem	3.1E-05
ex23	computational fluid dynamics problem	6.0E-04
ex27	computational fluid dynamics problem	3.4E-04
fpga_dcop_22	subsequent circuit simulation problem	1.1E-06
fs_183_1	2D/3D problem sequence	5.92E-06
goodwin	computational fluid dynamics problem	3.4E+01
graham1	computational fluid dynamics problem	8.7E-01
nnc666	2D/3D problem	2.0E-03
pores_1	computational fluid dynamics problem	2.2E-03
pores_2	computational fluid dynamics problem	9.1E-01
raefsky3	structural problem	2.4E-04
Tina_DisCal	directed graph	5.5E+08
transient	circuit simulation problem	1.5E+00
utm5940	electromagnetics problem	1.5E-03
venkat50	subsequent computational fluid dynamics problem	4.9E-01
08blocks	combinatorial problem	8.24E-12
adder_dcop_19	subsequent circuit simulation problem	9.41E-07
adder_dcop_21	subsequent circuit simulation problem	1.28E-07
adder_dcop_25	subsequent circuit simulation problem	4.20E-07
airfoil_2d	computational fluid dynamics problem	9.89E-11
ASIC_320k	circuit simulation problem	8.15E-11
ASIC_320ks	circuit simulation problem	9.56E-11
circuit_1	circuit simulation problem	5.41E-11
coupled	circuit simulation problem	8.75E-11
dc2	subsequent circuit simulation problem	7.51E-11
epb2	thermal problem	6.54E-11
fs_541_1	2D/3D problem sequence	5.07E-11
ibm32	directed graph	2.87E-08
Kaufhold	counter-example problem	7.54E-08
LeGresley_2508	power network problem	9.02E-11
lop163	statistical/mathematical problem	6.86E-08
ML_Laplace	structural problem	8.89E-11
mult_dcop_01	circuit simulation problem sequence	9.99E-11
n3c6-b1	combinatorial problem	3.17E-11
orsirr_1	computational fluid dynamics problem	1.14E-09
orsirr_2	computational fluid dynamics problem	7.54E-10
poli	economic problem	3.13E-11
poli_large	economic problem	6.29E-11
poli3	economic problem	7.80E-11
rajat03	circuit simulation problem	8.17E-11
rgg010	counter-example problem	1.02E-14
sherman3	computational fluid dynamics problem	8.38E-11
Tina_DisCog	directed graph	1.28E-11
tols340	computational fluid dynamics problem	2.91E-08
tols90	computational fluid dynamics problem	6.40E-11
tomography	computer graphics/vision problem	8.78E-11
utm3060	electromagnetics problem	3.34E-07
venkat01	computational fluid dynamics problem sequence	9.38E-11
wang4	semiconductor device problem	4.77E-11

表 6.10 を見てみると, 表 6.6 の SuiteSparse 法で生成したデータセット F と G のいずれでも間違えた行列と重複している行列が非収束の行列 14 個と収束する行列 18 個の計 32 個ある。このことから, SuiteSparse 法でも sigmoid 法でも正答 / 誤答する行列の傾向はおおよそ類似していることが分かった。

6.5 スケーリング後の分類結果

6.5.1 SuiteSparse 法

次に、非零要素値を変えずにデータセットの行列全てを使用したデータセット G と、対角をスケーリングし画像を生成したデータセット H における結果の比較を行う。表 6.11 にデータセット G, H の 5-fold 交差検証の結果を示す。G と H で各グループを構成する行列は同じだが、54 個の行列の収束 / 非収束のラベルは異なっている。また、前節との結果比較のため、表 6.12 には 28×28 pixel の内訳を示している。

表 6.11: SuiteSparse 法で生成した G と H の Accuracy
表 6.12: スケーリング後に SuiteSparse 法で生成した H における分類結果の内訳

size (pixel)	Dataset	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	Average (%)
28×28	G	84.6	86.3	86.3	89.7	83.4	86.1
	H	84.0	84.0	81.1	88.6	82.3	84.0
56×56	G	85.1	82.3	85.1	87.4	84.5	84.9
	H	87.4	84.0	84.6	85.1	85.1	85.3
112×112	G	79.4	79.4	84.0	86.3	80.6	81.9
	H	85.7	80.0	82.3	86.9	84.6	83.9
224×224	G	82.8	78.9	85.7	84.0	78.9	82.1
	H	80.6	81.7	81.7	85.1	88.0	83.4

	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	計 (%)
TN	98 (83.7)	105 (88.9)	100 (85.4)	105 (89.7)	98 (83.7)	506 (86.3)
FN	9	15	16	8	12	60
FP	19	13	17	12	19	80
TP	49 (84.4)	42 (73.6)	42 (72.4)	50 (86.2)	46 (79.3)	229 (79.2)
計	175	175	175	175	175	875

表 6.11 より、先程とは少し違い、データセット H では 56×56 pixel の時に Average accuracy が最大となった。しかし、画像サイズを大きくするにつれて Average accuracy が減少していく様子はスケーリング前の分類と共通している。

次に、表 6.12 の結果を見ると、収束する行列が 54 個増えたことにより、データセット G の結果である表 6.5 より TN の割合が 4.4% 減少し、TP の割合が 6.1% 増加した。そこで、どのような行列が正答するようになったのか、あるいはスケーリングしても誤答してしまうのかを調べた。スケーリングを実行しても誤答してしまった行列を表 6.13 に、TP の比率が上昇したことから、元々は誤答であったが C を掛けることで正答するようになった収束行列を表 6.14 に示す。

表 6.13 では、表 6.6 と重複して誤答していた行列が非収束の行列 6 個と、収束する行列 14 個の計 20 個となった。表 6.13 には収束する行列が計 19 個であり、これらの行列 19 個中 14 個がスケーリング前でも誤答していたことが分かった。また、これらの行列の中でも ex, mark3jac 系統の行列が複数誤答していることから、これらの行列は分類が困難であると考察される。一方で、スケーリングした結果、正答するようになった行列を見てみると、adder.dcop, cage, ck, fs 系統の行列が複数正答するようになっており、これらの行列の分類に対してはスケーリングが有効であることが分かった。

表 6.13: SuiteSparse 法で生成しデータセット G と H で誤答した行列

行列名	分野	相対残差ノルム	スケーリング後の相対残差ノルム
adder_dcop_24	subsequent circuit simulation problem	8.85E-05	1.27E-02
Baumann	2D/3D problem	8.6E+05	1.4E+03
bbmat	computational fluid dynamics problem	1.8E+01	2.2E+00
cell2	directed weighted graph	2.0E+04	2.4E+05
cz20468	2D/3D problem	9.4E+02	5.8E-01
ex21	computational fluid dynamics problem	1.1E-02	3.2E-03
ex27	computational fluid dynamics problem	3.0E-04	7.7E0-03
ex40	computational fluid dynamics problem	8.0E-06	2.3E-05
ex6	computational fluid dynamics problem	2.0E-02	2.3E+00
fp	electromagnetics problem	4.0E-04	6.7E+02
hvd2	power network problem	8.8E-01	5.8E-01
mark3jac020	economic problem	2.2E+02	6.3E+03
mark3jac020sc	economic problem	8.1E+03	4.5E+08
mark3jac140	economic problem	3.7E+06	8.5E+06
mark3jac140sc	economic problem	1.0E+03	8.3E+05
odepa400	2D/3D problem	1.0E-04	3.3E-02
olm5000	computational fluid dynamics problem	1.4E-06	2.0E+06
onstone2	frequency-domain circuit simulation problem	5.2E+07	6.0E+07
pores_1	computational fluid dynamics problem	2.2E-03	1.0E+00
sherman2	computational fluid dynamics problem	1.5E-01	7.5E+01
torso1	2D/3D problem	4.4E-05	1.5E+00
transient	circuit simulation problem	1.5E+00	1.9E-01
tub1000	computational fluid dynamics problem	1.9E-02	1.1E-04
08blocks	combinatorial problem	8.24E-12	9.18E-11
ASIC_320ks	circuit simulation problem	9.56E-11	3.21E-11
bcircuit	circuit simulation problem	8.57E-11	7.74E-11
cage4	directed weighted graph	4.04E-18	1.57E-15
cavity01	computational fluid dynamics problem sequence	8.36E-11	2.01E-11
CoupCons3D	structural problem	9.90E-11	9.85E-11
coupled	circuit simulation problem	8.75E-11	9.04E-11
cz148	2D/3D problem	9.58E-11	5.46E-11
ex31	computational fluid dynamics problem	5.76E-09	8.85E-11
ibm32	directed graph	2.87E-08	9.90E-08
jgl009	counter-example problem	3.20E-15	3.20E-15
LeGresley_2508	power network problem	9.02E-11	4.09E-11
orsirr_1	computational fluid dynamics problem	1.14E-09	5.40E-11
pivtol	statistical/mathematical problem	7.86E-11	7.42E-11
Tina_AskCog	directed graph	1.28E-11	2.36E-12
tols90	computational fluid dynamics problem	6.40E-11	1.49E-11
tomography	computer graphics/vision problem	8.78E-11	4.33E-11
torso3	2D/3D problem	3.43E-11	5.21E-11
venkat01	computational fluid dynamics problem sequence	9.38E-11	6.82E-11

表 6.14: 対角をスケーリングしてから SuiteSparse 法を用いて正答するようになった収束行列

行列名	分野	相対残差ノルム	スケーリング後の 相対残差ノルム
adder_dcop_19	subsequent circuit simulation problem	9.41E-07	5.40E-11
adder_dcop_21	subsequent circuit simulation problem	1.28E-07	8.11E-11
adder_dcop_25	subsequent circuit simulation problem	4.20E-07	8.20E-11
adder_dcop_34	subsequent circuit simulation problem	5.32E-08	9.61E-11
adder_dcop_37	subsequent circuit simulation problem	4.31E-07	8.14E-11
adder_dcop_38	subsequent circuit simulation problem	9.95E-08	9.67E-11
adder_dcop_42	subsequent circuit simulation problem	3.59E-09	9.46E-11
adder_dcop_47	subsequent circuit simulation problem	3.94E-09	6.72E-11
airfoil_2d	computational fluid dynamics problem	9.89E-11	2.87E-11
bwm2000	chemical process simulation problem	8.92E-11	9.99E-11
cage13	directed weighted graph	2.02E-11	1.36E-11
cage3	directed weighted graph	1.56E-15	3.95E-16
cage5	directed weighted graph	1.07E-11	4.76E-11
cavity17	subsequent computational fluid dynamics problem	9.75E-11	8.11E-11
circuit_2	circuit simulation problem	7.49E-11	6.61E-11
ck104	2D/3D problem	3.09E-12	8.86E-11
ck656	2D/3D problem	2.10E-11	1.68E-11
dc2	subsequent circuit simulation problem	7.51E-11	9.15E-11
epb2	thermal problem	6.54E-11	4.42E-11
fs_183_4	subsequent 2D/3D problem	2.22E-07	3.11E-11
fs_541_1	subsequent 2D/3D problem	5.07E-11	7.82E-11
fs_680_1	2D/3D problem sequence	8.19E-11	5.64E-11
fs_760_1	2D/3D problem sequence	8.65E-11	4.18E-11
language	directed weighted graph	1.35E-11	5.94E-12
mult_dcop_01	circuit simulation problem sequence	9.99E-11	9.89E-11
orsirr_2	computational fluid dynamics problem	7.54E-10	7.34E-11
orsreg_1	computational fluid dynamics problem	5.14E-11	6.79E-11
Pd	counter-example problem	7.27E-11	8.86E-11
poisson2D	computational fluid dynamics problem	8.55E-11	9.12E-11
poli	economic problem	3.13E-11	3.13E-11
poli3	economic problem	7.80E-11	2.05E-11
psmigr_1	economic problem	2.52E-11	3.83E-11
rgg010	counter-example problem	1.02E-14	1.02E-14
steam2	computational fluid dynamics problem	7.78E-11	2.25E-11
tols340	computational fluid dynamics problem	2.91E-08	2.38E-11
torso2	2D/3D problem	4.30E-11	3.93E-11
wang4	semiconductor device problem	4.77E-11	8.50E-11

6.5.2 sigmoid 法

同様に、非零要素の値を変えず、データセットの全行列を画像にした G と対角成分をスケールリングした H を sigmoid 法で生成した。G と H の Accuracy を表 6.15 に、その分類結果のうち、画像サイズ 28×28 pixel の内訳を表 6.16 に示す。

表 6.15: sigmoid 法で生成した G と H の Accuracy
表 6.16: スケールリング後に sigmoid 法で生成した H における分類結果の内訳

size (pixel)	Dataset	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	Average (%)
28×28	G	85.1	84.0	85.7	83.4	82.3	84.1
	H	81.7	81.1	81.1	84.6	79.4	81.6
56×56	G	84.6	81.7	83.4	86.3	80.6	83.3
	H	82.9	82.9	80.0	86.9	82.9	83.1
112×112	G	80.6	77.7	86.3	88.0	80.6	82.6
	H	82.9	81.7	85.7	82.9	82.3	83.1
224×224	G	80.6	78.2	84.6	76.6	76.6	79.3
	H	84.0	81.7	79.4	81.7	82.3	81.8

	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	計 (%)
TN	94 (80.3)	99 (83.8)	99 (84.6)	103 (88.0)	102 (87.1)	497 (84.8)
FN	9	14	15	13	21	72
FP	23	19	18	14	15	89
TP	49 (84.4)	43 (75.4)	43 (74.1)	45 (77.5)	37 (63.7)	217 (75.0)
計	175	175	175	175	175	875

表 6.15 より、Average accuracy の推移を見ると、データセット H の場合、Accuracy は画像のサイズが 56×56 pixel の場合と 112×112 pixel の場合で最大となっているが、224×224 pixel の場合では減少している。次に、表 6.16 の結果から、sigmoid 法の場合でも収束する行列が増えたことで、データセット G の分類の内訳である表 6.9 より、TN の割合が 4.4% 減少し、TP の割合が 4.8% 上昇しており、この点は SuiteSparse 法における分類の結果と同様である。

次にデータセット G と H の分類結果から、sigmoid 法において、スケールリング前後ともに誤答をしている行列の一覧を表 6.17 に、TP の比率が上昇したことから、スケールリングした結果正答するようになった収束行列の一覧を表 6.18 に示す。スケールリング前の分類結果、表 6.10 と重複して誤答している行列が収束する行列が 16 個、非収束の行列 13 個の計 29 個となった。スケールリング後の SuiteSparse 法での誤答傾向と類似して ex, mark3jac 系統の行列が複数誤答しているのに加えて、スケールリング後の sigmoid 法では cz 系統の行列においても誤答している。表 6.18 より、対角をスケールリングすることで正答するようになった行列は adder_dcop, cage, fs 系統の行列が複数正答している点から、スケールリング後の分類結果においても SuiteSparse 法と sigmoid 法は類似することが分かった。

表 6.17: sigmoid 法で生成しデータセット G と H で誤答した行列

行列名	分野	相対残差ノルム	スケーリング後の相対残差ノルム
cell2	directed weighted graph	2.0E+04	2.4E+05
cz20468	2D/3D problem	9.4E+02	5.8E-01
jgl011	counter-example problem	1.1E-02	7.0E-03
tub1000	computational fluid dynamics	1.9E-02	1.1E-04
ex6	computational fluid dynamics	2.0E-02	2.3E+00
internet	directed weighted graph	7.5E+12	3.1E+15
mark3jac020sc	economic problem	8.1E+03	4.5E+08
mark3jac140	economic problem	3.7E+06	8.5E+06
raefsky3	computational fluid dynamics problem	2.0E-04	1.5E-04
torso1	2D/3D problem	4.4E-05	1.5E+00
ex19	computational fluid dynamics problem	3.0E-05	1.9E+02
mac_econ_fwd500	economic problem	3.9E+15	6.2E+18
odepa400	2D/3D problem	1.0E-04	3.3E-02
PR02R	computational fluid dynamics problem	2.4E-01	7.3E+04
saylr1	computational fluid dynamics problem	7.2E-01	1.8E-06
dw8192	electromagnetics problem	1.4E-01	1.3E-02
ex23	computational fluid dynamics problem	6.0E-04	2.0E-05
ex40	computational fluid dynamics problem	8.0E-06	2.3E-05
fs_760_3	subsequent 2D/3D problem	1.5E-03	2.4E+00
goodwin	computational fluid dynamics problem	3.4E+01	1.9E+01
mhd4800a	electromagnetics problem	1.2E+01	2.7E+06
Tina_DisCal	directed graph	5.5E+08	3.4E+07
Baumann	2D/3D problem	8.6E+05	1.4E+03
mark3jac140sc	economic problem	1.0E+03	8.3E+05
pores.1	computational fluid dynamics problem	2.2E-03	1.0E+00
sherman2	computational fluid dynamics problem	1.5E-01	7.5E+01
transient	circuit simulation problem	1.5E+00	1.9E-01
08blocks	combinatorial problem	8.24E-12	9.18E-11
ASIC_320k	circuit simulation problem	8.15E-11	6.58E-11
ASIC_320ks	circuit simulation problem	9.56E-11	3.21E-11
bcircuit	circuit simulation problem	8.57E-11	7.74E-11
cavity01	computational fluid dynamics problem sequence	8.36E-11	2.01E-11
CoupCons3D	structural problem	9.90E-11	9.85E-11
coupled	circuit simulation problem	8.75E-11	9.04E-11
cz148	2D/3D problem	9.58E-11	5.46E-11
cz308	2D/3D problem	2.25E-11	3.82E-11
ibm32	directed graph	2.87E-08	9.90E-08
jgl009	counter-example problem	3.20E-15	3.20E-15
language	directed weighted graph	1.35E-11	5.94E-12
LeGresley_2508	power network problem	9.02E-11	4.09E-11
orsirr.1	computational fluid dynamics problem	1.14E-09	5.40E-11
orsreg.1	computational fluid dynamics problem	5.14E-11	6.79E-11
pivotl	statistical/mathematical problem	7.86E-11	7.42E-11
poliJarge	economic problem	6.29E-11	6.29E-11
poli3	economic problem	7.80E-11	2.05E-11
psmigr.1	economic problem	8.22E-11	2.51E-11
rgg010	counter-example problem	1.02E-14	1.02E-14
sherman3	computational fluid dynamics problem	8.38E-11	4.09E-11
steam2	computational fluid dynamics problem	7.78E-11	2.55E-11
Tina_AskCog	directed graph	1.28E-11	2.36E-12
tols90	computational fluid dynamics problem	6.40E-11	1.49E-11
tomography	computer graphics/vision problem	8.78E-11	4.33E-11
torso3	2D/3D problem	3.43E-11	5.21E-11
venkat01	computational fluid dynamics problem sequence	9.38E-11	6.82E-11
wang4	semiconductor device problem	4.77E-11	8.50E-11
watt.2	computational fluid dynamics problem	7.52E-11	9.29E-11

表 6.18: 対角をスケールしてから sigmoid 法を用いて正答するようになった収束行列

行列名	分野	相対残差ノルム	スケール後の相対残差ノルム
adder_dcop_19	subsequent circuit simulation problem	9.41E-07	5.40E-11
adder_dcop_21	subsequent circuit simulation problem	1.28E-07	8.11E-11
adder_dcop_25	subsequent circuit simulation problem	4.20E-07	8.20E-11
adder_dcop_34	subsequent circuit simulation problem	5.32E-08	9.61E-11
adder_dcop_37	subsequent circuit simulation problem	4.31E-07	8.14E-11
adder_dcop_38	subsequent circuit simulation problem	9.95E-08	9.67E-11
adder_dcop_42	subsequent circuit simulation problem	3.59E-09	9.46E-11
adder_dcop_47	subsequent circuit simulation problem	3.94E-09	6.72E-11
airfoil_2d	computational fluid dynamics problem	9.89E-11	2.87E-11
bwm2000	chemical process simulation problem	8.92E-11	9.99E-11
cage3	directed weighted graph	1.56E-15	3.96E-16
cage4	directed weighted graph	4.04E-18	1.57E-15
cage5	directed weighted graph	1.07E-11	4.76E-11
cage7	directed weighted graph	6.10E-11	5.47E-11
circuit_1	circuit simulation problem	5.41E-11	9.28E-11
circuit_2	circuit simulation problem	7.49E-11	6.61E-11
ck656	2D/3D problem	2.10E-11	1.68E-11
dc2	subsequent circuit simulation problem	7.51E-11	9.15E-11
epb2	thermal problem	6.54E-11	4.42E-11
fs_183_4	subsequent 2D/2D problem	2.22E-07	3.11E-11
fs_183_6	2D/3D problem sequence	2.68E-07	4.95E-12
fs_541_1	subsequent 2D/2D problem	5.07E-11	7.82E-11
fs_680_1	2D/3D problem sequence	8.19E-11	5.64E-11
fs_760_1	2D/3D problem sequence	8.65E-11	4.18E-11
ML_Laplace	structural problem	8.89E-11	8.12E-11
mult_dcop_01	circuit simulation problem sequence	9.99E-11	9.89E-11
orsirr_2	computational fluid dynamics problem	7.54E-10	7.34E-11
Pd	counter-exmple problem	7.27E-11	8.86E-11
poisson2D	computational fluid dynamics problem	8.55E-11	9.12E-11
poli	economic problem	3.13E-11	3.13E-11
rajat03	circuit simulation problem	8.17E-11	8.54E-11
Tina_DisCog	directed graph	7.76E-11	3.68E-11
tols340	computational fluid dynamics problem	2.91E-08	3.93E-11
torso2	2D/3D problem	4.30E-11	3.93E-11

6.6 収束条件を 10^{-10} とした場合

本節では、収束の条件を制限し、 $\varepsilon = 10^{-10}$ として BiCG 法を実行、新たに 875 個の行列に対してラベル付けをして再度分類を行ったときの結果を示す。前節までの結果から SuiteSparse 法での分類結果と sigmoid 法での分類結果が類似するという点から、この実験については SuiteSparse 法のみで実行する。また、グループ構成については前節までの分け方をするとグループ間での収束 / 非収束の割合が不均等になるため、再度グループを構成し直した。以降、データセット G と比べてラベル、各グループの構成が変化したこのデータセットを I と呼ぶ。はじめに、収束 / 非収束の割合を表 6.19 に示す。

表 6.19: 各クラスの行列の数

	収束	非収束	計
A	176 (20.0%)	699 (80.0%)	875

表 6.19 より、20%の行列が収束し、80%の行列が非収束であった。各クラスの偏りは $\varepsilon = 10^{-6}$ の場合と比べて、7%ほど大きくなっている。これらの行列を 5 等分し、分類した結果を表 6.20 に、更に I における 28×28 pixel の分類結果の内訳を表 6.21 に示す。

表 6.21: 28×28 pixel の分類結果の内訳

表 6.20: データセット I の Accuracy (%)

size	1	2	3	4	5	Average
28×28	84.0	86.2	86.2	86.8	81.7	85.0
56×56	87.4	86.8	86.2	86.8	81.7	85.7
112×112	86.2	86.8	88.0	88.0	81.7	86.1
224×224	86.8	82.8	86.8	86.8	81.7	85.0

	1 (%)	2 (%)	3 (%)	4 (%)	5 (%)	Total (%)
TN	129 (92.1)	129 (92.1)	135 (96.4)	127 (90.7)	130 (92.8)	650 (93.5)
FN	17	13	19	10	23	82
FP	11	11	5	13	9	49
TP	18 (51.4)	22 (62.8)	16 (45.7)	25 (71.4)	13 (36.1)	94 (53.4)
Total	175	175	175	175	175	875

上記の表 6.20 から Average accuracy は 85%に達した。しかし、I における非収束行列の割合は 80%である点、及び、TP の割合を見るとグループ 3, 5 の結果では収束する行列の検出率 (TP) が 50%を割っている点から、収束 / 非収束の分類を適切に行えていない様子が分かる。また、この結果から、行列の分類には BiCG 法における収束条件よりも各クラスのデータ数に依存することが分かった。

第7章 まとめと考察

本研究では、行列の元々の性質に関する情報だけでは難しい BiCG 法の収束 / 非収束の結果を事前に予測するために機械学習を用いた。手法は行列の非零要素の構造と大小関係を反映したグレースケール画像を作成し、CNN を使って分類することとした。その際、最適なグレースケール画像の作成方法を調べるために濃度付与方法として SuiteSparse 法と sigmoid 法、行列の対角要素をスケールした後の SuiteSparse 法、sigmoid 法を試した。画像サイズを 28×28 pixel から 56×56 , 112×112 , 224×224 pixel まで変更し、データセット内の行列の数を収束 / 非収束で揃えた場合と、全ての行列を使用した場合を試した。

5 分割交差検証の結果、まずデータセットが含む行列の数において、非収束行列の割合が収束する行列の 2 ~ 3 倍であれば、収束する行列と非収束の行列を揃えるよりもデータセット全体を使用した方が Accuracy が高くなり、 28×28 pixel において、SuiteSparse 法では 80.0% から 86.1% へ 6.1%, sigmoid 法では 82.7% から 84.1% へ 1.4% ほど上昇した。次に画像サイズについては、基本的に 28×28 pixel から 56×56 pixel の間で結果が最大となり、画像サイズを大きくするにつれて、Accuracy は減少した。濃度付与方法としては SuiteSparse 法、sigmoid 法で共に誤答しやすい行列の傾向は似ていることが確認された。対角をスケールした場合について、データセット内に収束する行列が増えたことにより、収束する行列の検出漏れが減少していることが確認された。

最後に BiCG 法における収束条件を $\epsilon = 10^{-10}$ とした場合について、分類を行ったところ、Accuracy が高くなったが、TP の比率が 50% 以下になる場合もあり、相対残差ノルムの条件よりもデータ数の割合が重視すべきであることが分かった。

以上の結果は、例えば、ロケットの軌道計算や回路方程式など、流体力学や電磁気学等のシミュレーション分野での反復解法選択の際に役立つと考えられる。また、行列の分類問題に対して機械学習を用いた研究は未だ少なく、収束結果を予測する研究も行われていない点から、本研究は数値計算分野における機械学習の応用範囲を広げており、学術的な価値は高いと考えられる。

結果から考えられることとして、データセット F と G の結果から、BiCG 法の収束 / 非収束を予測する場合でも、予測の精度はデータ数に依存していることが分かった。この結果は行列画像に限らず、他の機械学習に関する問題と同様であり、セオリー通りの結果である。また、データセット G と H の結果より、スケールした場合としなかった場合で Accuracy が大きく変わらなかったという点から、スケールを行ったのちに行列画像を生成しても収束結果を予測しやすくなる訳ではないと考察される。仮にスケールが有効に機能していた場合、その結果は、行列を画像に変換した際に、非零要素値の変換パターンを減らせているということにな

り, 最適な前処理行列の予測など, 収束 / 非収束以外の予測でも大きく役立つと考えられる. そのような点から, 今後も他のスケーリング行列や前処理行列を適用した後の画像への変換, そして, その画像を用いた分類結果を調べる研究は価値があると考えられる. 今回は SuiteSparse Matrix Collection の行列のみを使用した実験ではあるが, このような様々な分野の行列を使用して Accuracy が 85% であるということから, 今後, 更にデータセットに含まれる行列の種類が増えた場合でも十分高い精度で収束予測ができるものとする. しかし, 画像から行列への逆変換は一意に対応していないため, 画像の情報から行列の特徴に関する情報は得ることができなかった.

今後の課題として, 収束条件を $\varepsilon = 10^{-10}$ にした場合にデータセット G と同程度の収束する行列, 非収束の行列を使った分類で結果がどう変わるのか確認すること, そして対角要素を C でスケーリングしていたが, 他の前処理行列を使用した場合, グレースケール画像の濃度値分布がどう変わっていくのかを調べることを挙げられる. また, 今回 BiCG 法の初期値の取り方を 1 通りしか試していなかったため, 収束結果を予測するうえで初期値の取り方に対する依存についても調べる必要がある.

謝辞

本研究を進めるにあたり、サバティカル中でありながら、ご指導いただきました長谷川秀彦教授に感謝申し上げます。また、長谷川先生が出張中に主指導教員を担当して頂きました宇陀則彦准教授、副指導をして下さいました手塚太郎准教授にも深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Tim Davis. SuiteSparse Matrix Collection, <https://sparse.tamu.edu/>, 2019.
- [2] 藤野清次. Krylov 部分空間法ことはじめ, 計算工学= Journal of The Society for Computational Engineering and Science (JSCES), Vol.11, 2006, pp.5-9.
- [3] Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, and Geoffrey E Hinton. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks, Neural Information Processing Systems, 2012, pp.1097-1105.
- [4] Yousef Saad. Iterative Method for Sparse Linear Systems, Second Edition, SIAM, 2003, pp.252-254.
- [5] 皆本晃弥. C 言語による数値計算入門, サイエンス社, 2016, pp.105-115.
- [6] Richard Barrett, Michael W Berry, Tony F Chan, et al. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods, SIAM, 1994.
- [7] Nick McClure. TensorFlow Machine Learning Cookbook. 株式会社クイープ訳. インプレス, 2017, pp.236-272.
- [8] 斎藤康毅. ゼロから作る Deep Learning Python で学ぶディープラーニングの理論と実装 オーム社, 2017, pp.205-273.
- [9] 原田達也. 画像認識, 講談社, 2017, pp.21-193.
- [10] Srivastava Nitish, Georey Hinton, Alex Krizhevsky, et al. Dropout: a simple way to prevent neural networks from overfitting. The journal of machine learning research 15.1, 2014, pp.1929-1958.
- [11] Gotz Markus and Hartwig Anzt. Machine Learning-Aided Numerical Linear Algebra: Convolutional Neural Networks for the Efficient Preconditioner Generation. IEEE/ACM 9th Workshop on Latest Advances in Scalable Algorithms for Large-Scale Systems (scalA). IEEE, 2018, pp.49-56.
- [12] Muralidharan Saurav, Manu Shantharam, Mary Hall, et al. Nitro: A framework for adaptive code variant tuning. 2014 IEEE 28th International Parallel and Distributed Processing Symposium. IEEE, 2014, pp.501-512.

- [13] 山田賢也, 片桐 孝洋, 永井 亨. 疎行列形状のカラー画像を入力としたディープラーニングによる数値計算ライブラリの自動チューニング方式. 情報処理学会研究報告ハイパフォーマンスコンピューティング (HPC) 2017, pp.1-8.
- [14] Cui Hang, Shoichi Hirasawa, Hiroyuki Takizawa, et al. A code selection mechanism using deep learning. 2016 IEEE 10th International Symposium on Embedded Multicore/Many-core Systems-on-Chip (MCSoc). IEEE, 2016, pp.385-392.
- [15] Tensorflow-an open-source software library for Machine Intelligence, <https://www.tensorflow.org/>.
- [16] Yann LeCun, Leon Bottou, Yoshua Bengio, et al. Gradient-Based Learning Applied to Document Recognition, Proceedings of the IEEE, Vol.86, 1998, pp.2278-2324.
- [17] Tim Davis. SuiteSparse: A suite of sparse matrix software. <https://faculty.cse.tamu.edu/davis/suitesparse.html>, 2015.

付録

データセットに含まれる全ての行列における BiCG 法の実行結果を以下に示す. 紙面の都合から行列を id で表現しているため, 行列名を含めたデータを <https://www.dropbox.com/s/cgyxfp8z9sipvwm/ConvList.xls?dl=0> にアップロードする.

id	Group	type	N	nnz	field	iteration(A)	residual_norm(A)	iteration(CA)	residual_norm(CA)
1	5	JGD_SPG	300	592	combinatorial problem	97	8.24E-12	84	9.18E-11
2	3	Schenk_IBMSDS	27628	206670	semiconductor device problem	27628	3105130.562	27629	2.92E-04
3	1	Schenk_IBMSDS	54019	486129	semiconductor device problem	54019	0.564493253	16351	1.30E-05
4	3	Schenk_IBMSDS	28984	285092	semiconductor device problem	28984	357713.1058	28985	4.33E-04
5	5	Schenk_IBMSDS	51448	537038	semiconductor device problem	51448	27.1	14790	1.88E-05
6	2	Puri	23412	218484	model reduction problem	23412	0.000000189	4892	7.41E-11
7	2	Hamm	2395	13151	circuit simulation problem	416	5.24E-11	190	3.61E-11
8	2	Hamm	4960	19848	circuit simulation problem	96	6.82E-11	79	5.70E-11
9	1	Sandia	1813	11156	subsequent circuit simulation problem	883	7.79E-11	679	3.51E-11
10	2	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.254830306	1814	1.31E+05
11	3	Sandia	1813	11148	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000293412	1345	8.63E-11
12	2	Sandia	1813	11107	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000108369	1239	6.13E-11
13	1	Sandia	1813	11097	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000257149	1718	9.48E-12
14	5	Sandia	1813	11224	subsequent circuit simulation problem	1813	0.014088397	206	7.15E-11
15	2	Sandia	1813	11226	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000775978	443	8.04E-11
16	3	Sandia	1813	11242	subsequent circuit simulation problem	1813	0.006225686	63	7.76E-11
17	5	Sandia	1813	11239	subsequent circuit simulation problem	1813	0.378141298	90	4.15E-11
18	1	Sandia	1813	11232	subsequent circuit simulation problem	1813	0.001201109	82	8.10E-11
19	4	Sandia	1813	11243	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000203503	67	2.15E-11
20	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000625	28	5.54E-11
21	3	Sandia	1813	11245	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00014554	1814	3.07E+01
22	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.0000648	29	1.47E-11
23	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000994326	202	5.21E-11
24	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.002014699	26	6.88E-11
25	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000179	40	2.15E-11
26	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000656	18	6.34E-11
27	5	Sandia	1813	11245	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000000941	18	5.40E-11
28	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000452319	18	9.35E-11
29	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000000128	18	8.11E-11
30	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000033	18	8.41E-11
31	2	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000147	25	6.56E-11
32	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.0000885	1814	1.27E-02
33	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000042	18	8.20E-11
34	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000359	20	8.60E-11
35	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000749	20	8.94E-11
36	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000603	21	6.67E-11
37	2	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000123983	20	9.33E-11
38	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	2035.224283	1814	2.09E+04
39	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.0000367	19	7.85E-11
40	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.010769345	23	6.61E-11
41	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.0000936	14	9.86E-11
42	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	5.32E-08	20	9.61E-11
43	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000114	20	9.04E-11
44	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000156184	27	6.85E-11
45	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000000431	23	8.14E-11
46	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	9.95E-08	20	9.67E-11
47	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	8.72E-08	1814	6.89E+01
48	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.0000273	21	6.66E-11
49	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000000691	27	6.62E-11
50	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	3.59E-09	20	9.46E-11
51	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000000431	18	9.66E-11
52	3	Sandia	1813	11245	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000263	25	7.18E-11
53	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.0000189	25	6.69E-11
54	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000111	18	9.67E-11
55	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	3.94E-09	25	6.72E-11
56	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	4.66E-09	25	6.68E-11
57	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.0000123	25	6.90E-11
58	2	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	9.12E-08	25	6.86E-11
59	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.010349665	25	6.77E-11

60	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000234741	25	6.64E-11
61	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000000755	22	1.00E-10
62	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000000749	25	6.64E-11
63	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.000000325	25	6.75E-11
64	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	9.27E-08	25	6.64E-11
65	2	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	6.59E-09	25	6.62E-11
66	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	1.76E-09	25	6.63E-11
67	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	0.00000465	25	6.61E-11
68	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	3.64E-09	21	8.06E-11
69	1	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	4.04E-08	18	9.94E-11
70	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	1.43E-08	23	9.66E-11
71	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	5.23E-09	23	9.71E-11
72	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	1.04E-09	25	6.57E-11
73	2	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1813	6.85E-09	25	6.56E-11
74	3	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1641	4.34E-11	18	1.00E-10
75	4	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1486	9.61E-11	23	6.79E-11
76	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1475	7.86E-11	25	6.57E-11
77	5	Sandia	1813	11246	subsequent circuit simulation problem	1467	7.41E-11	25	6.57E-11
78	4	Sandia	1814	14579	circuit simulation problem sequence	264	5.75E-11	48	7.08E-11
79	3	Sandia	1814	14579	subsequent circuit simulation problem	243	5.35E-11	48	7.08E-11
80	5	Bai	23560	460598	computational fluid dynamics problem	4576	8.83E-11	4168	8.24E-11
81	1	Engwirda	14214	259688	computational fluid dynamics problem	3067	9.89E-11	377	2.87E-11
82	3	SNAP	262111	1234877	directed graph	262111	39200	262111	7.87E+01
83	4	SNAP	400727	3200440	directed graph	400727	11700	400727	4.24E+02
84	1	SNAP	410236	3356824	directed graph	410236	9230	410236	3.55E+01
85	4	SNAP	403394	3387388	directed graph	403394	11100	403394	1.86E+01
86	1	Simon	14000	1853104	directed weighted random graph	109	8.23E-11	109	9.52E-11
87	1	HB	130	1037	materials problem	17	1.72E-11	8	4.45E-13
88	1	SNAP	31379	106762	directed weighted graph sequence	31379	0.00109	928	9.14E+02
89	1	Sandia	99340	940621	circuit simulation problem	99340	5.450539582	180	6.18E-11
90	4	Sandia	99190	578890	circuit simulation problem	734	9.97E-11	66	4.68E-11
91	1	Sandia	321821	1931828	circuit simulation problem	462	8.15E-11	145	6.58E-11
92	3	Sandia	321671	1316085	circuit simulation problem	99	9.56E-11	66	3.21E-11
93	4	Vavasis	41092	1683902	2D/3D problem	41092	25.35857046	41093	1.37E+02
94	1	Grund	1089	4144	chemical process simulation problem	1089	439.3883996	1090	2.80E+03
95	3	Grund	7	15	chemical process simulation problem	5	8.06E-16	6	4.25E-16
96	2	Grund	1089	3895	chemical process simulation problem	1089	63823.55913	1090	8.05E+04
97	1	Schenk_ISEI	113076	2129496	semiconductor device problem sequence	113076	2.66	113076	1.46E-06
98	1	Schenk_ISEI	115625	2158759	subsequent semiconductor device problem	115625	0.002074513	115625	3.71E-03
99	4	Schenk_ISEI	115625	2158759	subsequent semiconductor device problem	115625	0.000919561	115625	1.73E-03
100	3	Schenk_ISEI	115625	2158759	subsequent semiconductor device problem	115625	0.0457	115625	5.68E-06
101	4	Schenk_ISEI	113076	2129496	subsequent semiconductor device problem	113076	0.509859907	113076	1.06E-04
102	3	Schenk_ISEI	113076	2129496	subsequent semiconductor device problem	113076	9.3	113076	2.17E-06
103	2	Schenk_ISEI	113076	2129496	subsequent semiconductor device problem	113076	404	113076	5.75E-03
104	2	Schenk_ISEI	115625	2158759	semiconductor device problem sequence	115625	0.0101	115625	6.61E-06
105	2	Pothen	6691	46187	structural problem	6691	0.134623724	6692	4.37E-01
106	1	Pothen	6019	40965	structural problem	6019	52243.03644	6020	4.31E+04
107	2	Pothen	15606	107362	structural problem	15606	215468790.1	15607	7.90E+08
108	5	Watson	112211	748331	2D/3D problem	112211	863612.4936	112212	1.45E+03
109	4	Rommles	40366	145019	eigenvalue/model reduction problem	40366	0.0000533	40367	3.79E+00
110	1	Grund	57735	275094	chemical process simulation problem	57735	4.02E+12	57736	3.95E+08
111	4	Grund	13935	63307	chemical process simulation problem	13935	102316.9243	13936	5.55E-02
112	2	Grund	6747	29195	chemical process simulation problem	6747	7.56E+11	6748	1.44E-21
113	1	Grund	20545	85537	chemical process simulation problem	20545	3.55E+14	20546	1.53E+15
114	3	Grund	3268	20712	chemical process simulation problem	3268	232.5824696	3	5.57E-16
115	2	Grund	3008	20715	chemical process simulation problem	3008	59.2936575	3	1.59E-16
116	5	Grund	3268	20963	chemical process simulation problem	3268	634.3917917	3	7.22E-16
117	3	Grund	3008	20698	chemical process simulation problem	3008	3119.414263	3	1.51E-16
118	2	Grund	3083	11767	chemical process simulation problem	3083	4063025.769	3084	2.79E+02
119	1	Grund	13436	71594	chemical process simulation problem	13436	13897.7076	13437	1.50E+05
120	1	Simon	38744	1771722	computational fluid dynamics problem	38744	18.25483025	38745	2.22E+00
121	5	Hamm	68902	375558	circuit simulation problem	58459	8.57E-11	13600	7.74E-11
122	5	Bai	398	3678	electromagnetics problem	207	4.83E-11	153	9.65E-11
123	1	Bai	62	450	electromagnetics problem	62	3.33E-08	55	3.90E-11
124	4	Bai	782	7514	electromagnetics problem	308	8.93E-11	246	2.40E-11
125	5	Rommles	13275	49044	eigenvalue/model reduction problem	13275	954580.9075	322	4.65E-11
126	2	Rommles	15066	62198	eigenvalue/model reduction problem	15066	0.0000598	15067	1.25E-04
127	1	Rommles	16861	66498	eigenvalue/model reduction problem	16861	0.0000239	16862	1.60E-04
128	5	Rommles	21128	75729	eigenvalue/model reduction problem	21128	0.00008	21129	3.74E+04
129	4	Rommles	9735	40983	eigenvalue/model reduction problem	9735	0.082015831	6	1.04E-13
130	3	Rommles	11305	44678	eigenvalue/model reduction problem	11305	557765.3129	6	1.04E-13
131	4	Rommles	7135	34738	eigenvalue/model reduction problem	7135	5012847.823	6	1.04E-13
132	1	HB	822	3276	optimization problem sequence	822	8.747035698	823	9.57E+00
133	3	HB	822	4661	subsequent optimization problem	822	22.93607524	823	6.61E+00
134	1	HB	822	4726	subsequent optimization problem	822	7.979029683	823	7.20E+00
135	5	HB	822	4790	subsequent optimization problem	822	12.23528094	823	1.13E+01
136	1	HB	822	4841	subsequent optimization problem	822	34.97258133	823	2.65E+01
137	1	HB	822	3802	subsequent optimization problem	822	14.10189448	823	2.70E+02
138	5	HB	822	4028	subsequent optimization problem	822	146.8791623	823	1.49E+02

139	3	HB	822	4172	subsequent optimization problem	822	27.25509264	823	2.18E+01
140	1	HB	822	4534	subsequent optimization problem	822	8.726399142	823	1.14E+01
141	2	Bai	200	796	chemical process simulation problem	119	4.72E-11	101	4.84E-12
142	5	Bai	2000	7996	chemical process simulation problem	1078	8.92E-11	492	9.99E-11
143	2	JGD_CAG	1916	195985	combinatorial problem	1916	1739.069049	1917	8.46E-10
144	5	JGD_CAG	364	13585	combinatorial problem	364	0.012734044	365	8.51E-06
145	3	JGD_CAG	72	1012	combinatorial problem	72	0.001802594	73	3.48E+00
146	1	vanHeukelum	11397	150645	directed weighted graph	27	6.26E-11	21	7.27E-11
147	5	vanHeukelum	39082	559722	directed weighted graph	29	3.74E-11	22	4.98E-11
148	2	vanHeukelum	130228	2032536	directed weighted graph	28	3.81E-11	20	9.06E-11
149	5	vanHeukelum	445315	7479343	directed weighted graph	31	2.02E-11	23	1.36E-11
150	3	vanHeukelum	5	19	directed weighted graph	4	1.56E-15	6	1.49E-15
151	3	vanHeukelum	9	49	directed weighted graph	9	4.04E-18	10	1.57E-15
152	1	vanHeukelum	37	233	directed weighted graph	23	1.07E-11	21	4.76E-11
153	5	vanHeukelum	93	785	directed weighted graph	25	1.4E-11	20	6.02E-11
154	2	vanHeukelum	340	3084	directed weighted graph	28	6.1E-11	23	5.47E-11
155	4	vanHeukelum	1015	11003	directed weighted graph	26	7.23E-11	21	4.80E-11
156	1	vanHeukelum	3534	41594	directed weighted graph	28	7.86E-11	22	9.71E-11
157	4	Pajek	9664	16150	directed graph	9664	38.65870001	9665	6.99E+00
158	2	JGD_Margulies	85	254	combinatorial problem	85	0.059056857	86	9.42E-02
159	3	DRIVCAV	317	7280	computational fluid dynamics problem sequence	252	8.36E-11	184	2.01E-11
160	5	DRIVCAV	317	5923	subsequent computational fluid dynamics problem	317	0.004093135	318	6.25E-02
161	3	DRIVCAV	317	7311	subsequent computational fluid dynamics problem	317	0.029498632	318	3.49E-02
162	4	DRIVCAV	317	5923	subsequent computational fluid dynamics problem	317	0.103046933	318	6.88E-03
163	4	DRIVCAV	1182	32632	computational fluid dynamics problem sequence	576	7.62E-11	438	7.35E-11
164	1	DRIVCAV	1182	29675	subsequent computational fluid dynamics problem	1182	0.048462715	1183	1.11E-03
165	2	DRIVCAV	1182	32702	subsequent computational fluid dynamics problem	1182	0.000397195	1183	1.19E-01
166	1	DRIVCAV	1182	29675	subsequent computational fluid dynamics problem	1182	0.011209579	1183	1.78E-02
167	1	DRIVCAV	1182	32702	subsequent computational fluid dynamics problem	1182	0.08345384	1183	4.65E-02
168	4	DRIVCAV	2597	76171	computational fluid dynamics problem sequence	871	8.31E-11	588	5.11E-11
169	2	DRIVCAV	2597	71601	subsequent computational fluid dynamics problem	2597	0.000293118	2598	3.02E-05
170	5	DRIVCAV	2597	76258	subsequent computational fluid dynamics problem	2597	0.14059671	2598	1.49E-01
171	1	DRIVCAV	2597	71601	subsequent computational fluid dynamics problem	2597	0.084713794	2598	3.88E-02
172	3	DRIVCAV	2597	76258	subsequent computational fluid dynamics problem	2597	0.019719129	2598	1.75E+00
173	1	DRIVCAV	2597	71601	subsequent computational fluid dynamics problem	2597	0.462663603	2598	8.45E-01
174	2	DRIVCAV	4562	137887	computational fluid dynamics problem sequence	1208	9.05E-11	846	6.58E-11
175	1	DRIVCAV	4562	131735	subsequent computational fluid dynamics problem	3039	9.75E-11	2084	8.11E-11
176	5	DRIVCAV	4562	138040	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.018045278	4563	2.55E-07
177	3	DRIVCAV	4562	131735	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.00000796	4563	2.45E-03
178	3	DRIVCAV	4562	138040	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.018920632	4563	2.14E-01
179	2	DRIVCAV	4562	131735	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.000905135	4563	1.71E-02
180	2	DRIVCAV	4562	138040	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.402653633	4563	2.52E+00
181	3	DRIVCAV	4562	131735	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.123104948	4563	3.10E+01
182	2	DRIVCAV	4562	138040	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.317392328	4563	1.16E+00
183	1	DRIVCAV	4562	131735	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.814394492	4563	2.42E+00
184	5	DRIVCAV	4562	138040	subsequent computational fluid dynamics problem	4562	0.100270409	4563	2.86E-01
185	1	Bai	961	4681	computational fluid dynamics problem sequence	123	6.17E-11	124	6.17E-11
186	3	Bai	961	4681	subsequent computational fluid dynamics problem	138	4.68E-11	170	4.14E-11
187	3	Bai	961	4681	subsequent computational fluid dynamics problem	169	7.82E-11	170	7.82E-11
188	2	Bai	961	4681	subsequent computational fluid dynamics problem	165	3.63E-11	155	5.87E-11
189	5	Bai	961	4681	subsequent computational fluid dynamics problem	337	6.95E-11	330	9.75E-11
190	1	Bai	961	4681	subsequent computational fluid dynamics problem	159	4.97E-11	175	9.24E-11
191	3	Newman	297	2345	directed weighted graph	297	1.465667888	298	7.09E+01
192	1	Lucifora	7055	30082	directed weighted graph	7055	165.2123795	1467	8.88E-11
193	1	Lucifora	7055	30082	directed weighted graph	7055	20716.26748	7056	2.48E+05
194	1	JGD_Homology	600	2400	combinatorial problem	600	4.817567079	601	2.79E+00
195	3	JGD_Homology	141120	846720	combinatorial problem	141120	384.9545281	141121	1.49E+03
196	1	Muite	261	2319	structural problem	261	8.968101888	262	7.98E-07
197	4	Muite	2053	18447	structural problem	2053	1.88329687	1922	9.59E-11
198	1	Muite	4101	36879	structural problem	4101	58.70907093	552	5.93E-11
199	5	Muite	68121	5377761	structural problem	68121	8377252.508	68122	1.82E-02
200	5	Watson	40401	201201	2D/3D problem	80	2.99E-11	21	8.39E-11
201	3	Oberwolfach	20082	281150	model reduction problem	6814	9.93E-11	298	8.68E-11
202	4	Oberwolfach	20082	281150	model reduction problem	5507	9.8E-11	275	4.54E-11
203	1	Bomhof	2624	35823	circuit simulation problem	220	5.41E-11	104	9.28E-11
204	2	Bomhof	4510	21199	circuit simulation problem	582	7.49E-11	243	6.61E-11
205	4	Bomhof	12127	48137	circuit simulation problem	12127	1.203403503	12128	6.13E-03
206	4	Bomhof	80209	307604	circuit simulation problem	80209	0.127992524	80210	2.32E-05
207	4	YZhou	1020	5883	circuit simulation problem	1020	34.48161649	1021	nan
208	5	SNAP	34546	421578	directed graph	34546	6.22E+14	346	1.38E+00
209	1	SNAP	27770	352807	directed graph	27770	2.43E+18	595	1.70E+03
210	1	Bai	104	992	2D/3D problem	64	3.09E-12	102	8.86E-11
211	3	Bai	400	2860	2D/3D problem	261	3.46E-11	319	8.17E-12
212	1	Bai	656	3884	2D/3D problem	418	2.1E-11	518	1.68E-11
213	2	IBM_EDA	49702	333029	circuit simulation problem	49702	0.0000136	49703	2.41E-01
214	1	IBM_EDA	49702	332807	circuit simulation problem	49702	0.00000131	49703	3.55E-08
215	3	LAW	325557	3216152	directed graph	325557	330	325557	3.29E+02
216	4	Brethour	1348	19457	computational fluid dynamics problem	1348	16.31028266	1349	1.26E+01
217	3	Brethour	9540	207308	computational fluid dynamics problem	9540	9.649127742	9541	3.26E+01

218	2	Langemyr	1500	97645	structural problem	852	9.82E-11	912	9.82E-11
219	3	Janna	416800	17277420	structural problem	48349	9.90169E-11	280	9.85E-11
220	3	IBM_Austin	11341	97193	circuit simulation problem	1377	8.75E-11	484	9.04E-11
221	3	QLi	160000	1750416	optimization problem	559	8.98E-11	106	7.60E-11
222	3	Bai	10000	49699	materials problem	10000	0.00054766	10001	2.17E+02
223	1	Bai	2500	12349	materials problem	2500	0.014057705	2501	1.74E+04
224	5	Pajek	1882	1740	directed graph	1882	509699.5401	1883	1.59E+06
225	2	HB	54	291	2D/3D problem	54	0.021160595	55	1.28E-03
226	2	CPM	10228	102876	2D/3D problem	8832	3.13E-11	4403	9.58E-11
227	3	CPM	1268	12786	2D/3D problem	452	9.01E-11	413	8.03E-11
228	5	CPM	148	1527	2D/3D problem	71	9.58E-11	71	5.46E-11
229	1	CPM	20468	206076	2D/3D problem	20468	945.2753826	20469	5.87E-01
230	4	CPM	2548	25674	2D/3D problem	1287	6.54E-11	886	9.21E-11
231	5	CPM	308	3182	2D/3D problem	120	2.25E-11	123	3.82E-11
232	4	CPM	40948	412148	2D/3D problem	22490	6.7E-11	40949	1.85E+00
233	2	CPM	5108	51412	2D/3D problem	1882	6.72E-11	1781	6.85E-11
234	1	CPM	628	6346	2D/3D problem	211	1.8E-11	216	3.68E-11
235	1	Grund	87	230	chemical process simulation problem	87	0.401531148	88	4.47E+00
236	5	Grund	87	232	chemical process simulation problem	87	0.69530481	88	5.61E-01
237	2	Grund	53	144	chemical process simulation problem	53	0.032982351	54	1.25E+01
238	2	IBM_EDA	116835	766396	circuit simulation problem sequence	116835	1.690168894	347	3.56E-11
239	5	IBM_EDA	116835	766396	subsequent circuit simulation problem	3003	7.51E-11	280	9.15E-11
240	3	IBM_EDA	116835	766396	subsequent circuit simulation problem	116835	84119811.36	873	4.34E-11
241	1	Rommes	20738	73916	eigenvalue/model reduction problem	20738	0.0000366	20739	1.63E+02
242	2	Fluorem	903	11766	computational fluid dynamics problem	903	0.104196411	904	2.49E+01
243	4	Bai	2048	10114	electromagnetics problem	1532	6.64E-11	2049	5.62E-03
244	3	Bai	2048	10114	electromagnetics problem	1532	6.64E-11	2049	5.62E-03
245	2	Bai	512	2480	electromagnetics problem	512	0.000000143	435	8.37E-11
246	2	Bai	512	2500	electromagnetics problem	18	7.62E-11	13	1.20E-11
247	5	Bai	8192	41746	electromagnetics problem	8192	0.145878231	8193	1.30E-02
248	4	Bai	8192	41746	electromagnetics problem	8192	0.145878231	8193	1.30E-02
249	3	Bai	512	2480	electromagnetics problem	512	0.000000143	435	8.37E-11
250	4	Bai	512	2500	electromagnetics problem	18	7.62E-11	13	1.20E-11
251	1	Shen	17281	553562	2D/3D problem	17281	615.3793412	17282	3.16E+04
252	3	Pajek	23219	325592	directed weighted graph	23219	1270	23219	5.39E-01
253	5	Pajek	23219	325589	directed weighted graph	23219	1330000	23219	4.53E+00
254	4	Sanghavi	51993	380415	semiconductor device problem	51993	1.344114384	473	7.40E-11
255	2	SNAP	265214	420045	directed graph	265214	586	15	2.70E-01
256	2	LAW	69244	276143	directed graph	69244	10528.74555	519	3.03E+03
257	3	Pajek	4772	8965	directed graph	4772	3.122020195	4773	1.81E+01
258	4	Averous	1794	7764	thermal problem	1794	0.000140541	893	6.15E-11
259	1	Averous	14734	95053	thermal problem	882	7.51E-11	603	9.14E-11
260	2	Averous	25228	175027	thermal problem	743	6.54E-11	316	4.42E-11
261	5	Averous	84617	463625	thermal problem	6914	9.48E-11	3166	8.88E-11
262	4	Pajek	8497	6726	directed graph	8497	161007.9014	8498	6.80E+02
263	5	FIDAP	216	4317	computational fluid dynamics problem	216	0.0000304	217	1.22E-07
264	1	FIDAP	5773	71701	computational fluid dynamics problem	5773	0.000000284	5774	2.75E+01
265	3	FIDAP	12005	259577	computational fluid dynamics problem	12005	0.0000308	12006	1.94E+02
266	2	FIDAP	2203	67830	computational fluid dynamics problem	2203	0.0000101	2204	1.06E-05
267	2	FIDAP	656	18964	computational fluid dynamics problem	656	0.011868137	657	3.21E-03
268	4	FIDAP	839	22460	computational fluid dynamics problem	839	0.009288397	840	5.51E-09
269	4	FIDAP	1409	42760	computational fluid dynamics problem	1409	0.000636012	1410	2.04E-05
270	3	FIDAP	2283	47901	computational fluid dynamics problem	2283	0.0000128	2284	9.84E-11
271	5	FIDAP	848	24369	computational fluid dynamics problem	848	0.075049147	849	5.44E-04
272	1	FIDAP	2163	74464	computational fluid dynamics problem	2163	0.013117746	2164	4.79E-04
273	3	FIDAP	974	37652	computational fluid dynamics problem	974	0.000340747	975	7.79E-03
274	5	FIDAP	2603	77031	computational fluid dynamics problem	2603	0.0000723	2604	8.05E-11
275	4	FIDAP	2870	23754	computational fluid dynamics problem	88	8.53E-11	25	4.70E-11
276	4	FIDAP	3909	91223	computational fluid dynamics problem	3909	5.76E-09	3910	8.85E-11
277	3	FIDAP	19716	227872	computational fluid dynamics problem	19716	0.00000455	19717	4.54E+04
278	1	FIDAP	3079	53099	computational fluid dynamics problem	3079	0.00000175	3080	4.55E-11
279	2	FIDAP	3565	67591	computational fluid dynamics problem	89	7.37E-11	31	5.08E-11
280	4	FIDAP	7740	456188	computational fluid dynamics problem	7740	0.00000801	7741	2.92E-05
281	2	FIDAP	1651	49062	computational fluid dynamics problem	1651	0.020542533	1652	2.30E+00
282	5	FIDAP	1633	46626	computational fluid dynamics problem	1004	9.27E-11	1634	4.97E-04
283	3	FIDAP	3096	90841	computational fluid dynamics problem	3096	0.000000176	3097	2.87E+01
284	5	Zitney	2837	10967	chemical process simulation problem	2837	34965738.98	2838	1.86E+07
285	3	Zitney	2836	10965	chemical process simulation problem sequence	2836	2367018.914	2837	3.68E+06
286	1	Pajek	10617	72176	directed weighted graph	10617	4.49014284	10618	7.17E+03
287	5	Hohn	7500	28462	materials problem	7500	855.5740221	7501	5.22E+01
288	3	Hohn	11532	44206	materials problem	11532	117.8747667	11533	3.48E+01
289	5	Hohn	16428	63406	materials problem	16428	117.1203721	16429	1.94E+02
290	5	Botonakis	17880	430740	thermal problem	258	9.85E-11	78	7.42E-11
291	4	Botonakis	147900	3489300	thermal problem	516	9.98E-11	55	4.84E-11
292	2	Oberwolfach	9669	67391	model reduction problem	9669	0.000000289	1161	9.92E-11
293	4	Pajek	13356	120238	directed weighted graph	13356	1.448093294	13357	6.37E+00
294	1	Pajek	35	118	directed weighted graph	35	1.17E+11	36	2.71E+13
295	4	MKS	7548	834222	electromagnetics problem	7548	0.000438404	7549	6.77E+02
296	2	Sandia	1220	5892	circuit simulation problem sequence	1220	447.2567579	1221	5.46E+06

297	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	7.093560984	1221	3.95E+04
298	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.001523036	1221	8.43E-04
299	5	Sandia	1220	5884	subsequent circuit simulation problem	1220	0.012512689	1221	8.63E-02
300	2	Sandia	1220	5852	subsequent circuit simulation problem	1220	0.003390688	1221	2.02E-04
301	1	Sandia	1220	5860	subsequent circuit simulation problem	1220	0.130575473	1221	4.35E-02
302	1	Sandia	1220	5855	subsequent circuit simulation problem	1220	0.014120488	1221	2.94E-02
303	3	Sandia	1220	5888	subsequent circuit simulation problem	1220	0.030749179	1221	9.43E-01
304	4	Sandia	1220	5888	subsequent circuit simulation problem	1220	0.013041759	1221	1.45E-01
305	1	Sandia	1220	5884	subsequent circuit simulation problem	1220	0.000296753	1221	6.56E-04
306	1	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.00270788	1221	5.25E-02
307	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.013736088	1221	2.06E-01
308	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.0000414	1221	8.82E-03
309	3	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.000304484	1221	7.27E-04
310	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.0000231	1221	2.45E-03
311	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.0000238	1221	3.73E-02
312	1	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.000100775	1221	1.68E-01
313	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.00000328	1221	1.71E-01
314	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.00000754	1221	5.57E-04
315	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.00000779	1221	9.98E-03
316	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.0000669	1221	5.05E-04
317	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.00000104	1221	1.37E-02
318	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.000000795	1221	2.75E-03
319	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.000000636	1221	3.62E-04
320	1	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.000000712	1221	3.76E-04
321	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	2.16E-08	1221	9.17E-04
322	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	1.75E-08	1221	1.64E-03
323	3	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.00000017	1221	5.57E-04
324	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.00000121	1221	5.75E-05
325	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	4.55E-08	1221	4.12E-04
326	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	1.82E-08	1221	1.69E-04
327	1	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.00000022	1221	1.30E-02
328	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	1.58E-08	1221	1.57E-05
329	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	7.83E-08	1221	3.96E-02
330	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	7.25E-08	1221	9.45E-03
331	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	1.79E-08	1221	2.48E-05
332	3	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.000000497	1221	6.21E-02
333	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1193	7.52E-11	1221	3.85E-03
334	3	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1220	0.000000354	1221	3.89E-02
335	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1157	4.63E-11	1221	3.08E-04
336	3	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	1141	4.62E-11	1221	8.59E-04
337	1	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	930	6.57E-11	1221	1.53E-03
338	1	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	964	5.6E-11	1221	2.17E-04
339	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	808	9.35E-11	1221	2.66E-04
340	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	604	6.7E-11	1221	1.54E-05
341	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	586	9.73E-11	1221	2.20E-04
342	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	605	7.03E-11	1221	3.04E-05
343	5	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	594	1.94E-11	1221	1.59E-05
344	1	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	597	7.45E-11	1221	1.05E-02
345	4	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	602	2.82E-11	1221	3.92E-06
346	2	Sandia	1220	5892	subsequent circuit simulation problem	595	4.67E-11	1221	1.64E-01
347	4	Sandia	1220	7382	circuit simulation problem sequence	564	9.4E-11	624	6.80E-11
348	2	Sandia	1220	7382	subsequent circuit simulation problem	621	8.04E-11	877	8.04E-11
349	5	HB	183	998	2D/3D problem sequence	183	0.00000592	21	3.48E-11
350	5	HB	183	1069	subsequent 2D/3D problem	183	0.000165577	32	9.62E-11
351	2	HB	183	1069	subsequent 2D/3D problem	183	0.000000222	21	3.11E-11
352	1	HB	183	1000	subsequent 2D/3D problem	183	0.000000268	19	4.95E-12
353	3	HB	541	4282	2D/3D problem sequence	13	5.07E-11	8	7.82E-11
354	1	HB	541	4282	subsequent 2D/3D problem	541	0.0000539	137	5.86E-11
355	2	HB	541	4282	subsequent 2D/3D problem	541	0.191673528	255	7.73E-11
356	4	HB	541	4273	subsequent 2D/3D problem	541	0.003084941	192	7.64E-11
357	2	HB	680	2184	2D/3D problem sequence	370	8.19E-11	68	5.64E-11
358	5	HB	680	2424	subsequent 2D/3D problem	680	0.00000412	75	8.23E-11
359	1	HB	680	2471	subsequent 2D/3D problem	680	0.0000427	100	5.17E-11
360	3	HB	760	5739	2D/3D problem sequence	114	8.65E-11	5	4.18E-11
361	5	HB	760	5739	subsequent 2D/3D problem	760	0.025250272	586	3.15E-11
362	4	HB	760	5816	subsequent 2D/3D problem	760	0.001589629	761	2.41E+00
363	4	Hollinger	2880	18229	economic problem	2880	216685.2572	2881	1.39E+28
364	3	Hollinger	2880	18229	economic problem	2880	4025.275366	2881	5.27E+21
365	1	Hollinger	5850	42568	economic problem	5850	95989.42594	5851	3.36E+28
366	2	Hollinger	5850	42568	economic problem	5850	292.2471649	5851	2.35E+24
367	3	Hollinger	11790	107383	economic problem	11790	438.8368655	11791	8.23E+18
368	5	Hollinger	11790	107383	economic problem	11790	2671.371033	11791	4.63E+21
369	2	Hollinger	14760	145157	economic problem	14760	112.9787029	14761	5.91E+27
370	2	Hollinger	17730	183325	economic problem	17730	1468.33252	17731	1.08E+27
371	2	Hollinger	17730	183325	economic problem	17730	256.9230887	17731	2.94E+30
372	2	Hollinger	23670	259648	economic problem	23670	229.7534584	23671	1.04E+28
373	1	Hollinger	23670	259648	economic problem	23670	62.5933403	23671	1.88E+26
374	1	Hollinger	29610	335972	economic problem	29610	5.714404283	29611	1.33E+21
375	4	Hollinger	29610	335972	economic problem	29610	841.8251127	29611	6.80E+21

376	3	Hollinger	35550	412306	economic problem	35550	670.2886172	35551	6.37E+28
377	5	Hollinger	35550	412306	economic problem	35550	79365.32116	35551	1.96E+25
378	4	Hollinger	41490	488633	economic problem	41490	22.54184863	41491	3.38E+17
379	5	Hollinger	41490	488633	economic problem	41490	25712537.74	41491	1.10E+17
380	5	Hollinger	47430	564952	economic problem	47430	7347.208266	47431	9.28E+15
381	5	Hollinger	47430	564952	economic problem	47430	7347.208266	47431	2.18E+22
382	5	Hollinger	53370	641290	economic problem	53370	2053.361608	53371	1.39E+16
383	3	Hollinger	53370	641290	economic problem	53370	29405.78602	53371	4.24E+17
384	5	Hollinger	59310	717620	economic problem	59310	3333.542719	59311	9.51E+13
385	1	Hollinger	59310	717620	economic problem	59310	12691466.4	59311	2.26E+16
386	5	Garon	3175	84723	computational fluid dynamics problem	3175	0.00000156	3176	9.27E-08
387	1	Garon	13535	373235	computational fluid dynamics problem	11972	9.73E-11	13536	9.41E-11
388	5	Pajek	352	458	directed graph	352	5.23E+14	353	8.89E+17
389	2	Pajek	638	1041	directed multigraph	638	5.507800231	639	6.32E+00
390	2	Pajek	311	645	directed weighted graph	311	2.15E+13	312	4.99E+13
391	3	Pajek	953	645	directed multigraph	450	1.57E+21(break)	4	2.68E+15
392	5	Pajek	33	135	directed multigraph	33	9.63E+13	34	8.40E+13
393	5	Pajek	23	87	directed graph	23	0.0000141	24	8.94E-06
394	5	Pajek	1538	8032	directed graph	1538	14.29157494	1539	3.67E+00
395	5	Pajek	36	57	directed graph	36	5.09E+14	37	3.72E+14
396	5	Pajek	62	287	directed graph	62	0.002700967	63	4.17E-03
397	5	Pajek	1096	1677	directed multigraph	1096	3.25E+12	1097	2.68E+13
398	3	Pajek	180	229	directed graph	180	23249.64515	181	1.62E+04
399	1	Pajek	452	460	directed multigraph	452	1.01E+18	453	2.93E+19
400	2	Pajek	38	50	directed graph	38	2.13E+12	39	1.13E+13
401	5	Pajek	105	149	directed graph	105	1.36E+15	106	1.61E+15
402	5	HB	4929	33108	power network problem sequence	4929	17.51807364	4930	3.02E+00
403	2	HB	4929	33044	subsequent power network problem	4929	36.98271282	4930	3.81E+01
404	4	HB	113	655	statistical/mathematical problem	113	0.0000062	1	1.00E+00
405	4	Pajek	72	122	directed graph	72	2.42E+14	73	1.39E+14
406	4	Goodwin	7320	324772	computational fluid dynamics problem	7320	34.06011733	7321	1.99E+01
407	4	Graham	9035	335472	computational fluid dynamics problem	9035	0.878544677	9036	2.26E-01
408	2	HB	1107	5664	directed weighted graph	1107	10030.31361	1108	2.21E+03
409	4	HB	115	421	directed weighted graph	81	4.32E-11	116	3.07E-04
410	1	HB	185	975	directed weighted graph	185	35.04201454	186	4.18E+02
411	3	HB	216	812	directed weighted graph	216	0.275173285	217	5.25E-01
412	2	HB	216	812	directed weighted graph	216	1470684431	217	4.33E+11
413	5	HB	343	1310	directed weighted graph	343	17.85043498	344	1.00E+00
414	3	HB	512	1976	directed weighted graph	512	1.052491413	513	3.05E+00
415	4	Fluorem	7980	430909	computational fluid dynamics problem	7980	0.025293894	7981	1.20E-06
416	1	Hamrle	32	98	circuit simulation problem	32	0.05319039	33	4.03E-01
417	3	Hamrle	5952	22162	circuit simulation problem	5952	13.82882028	13	3.14E-12
418	1	MathWorks	500	2636	directed graph	500	2.046612349	501	1.42E+00
419	5	Hamm	105676	513072	circuit simulation problem	8742	9.61E-11	3660	8.70E-11
420	2	Norris	3557	1385317	2D/3D problem	3557	0.049811819	3558	2.49E-04
421	5	Norris	2339	680341	2D/3D problem	2339	0.000104536	2340	4.85E-04
422	1	Norris	2339	680341	2D/3D problem	2339	0.000303247	2340	8.07E-05
423	5	Pajek	27240	342437	directed graph	27240	2.8E+16	612	2.60E+04
424	3	Pajek	27770	352807	directed graph	27770	2.43E+18	594	2.12E+01
425	3	HB	434	4182	directed weighted graph	434	36.10614802	435	1.74E+00
426	5	HVDC	24842	158426	power network problem	24842	5.356716545	24843	3.82E+00
427	1	HVDC	189860	1339638	power network problem	189860	0.88	189860	9.89E-02
428	3	Zitney	5308	22680	chemical process simulation problem	5308	176086.3774	5309	2.74E+05
429	2	Zitney	5308	22592	chemical process simulation problem sequence	5308	1350605.878	5309	5.89E+06
430	4	Schenk_IBMSDS	51448	537038	semiconductor device problem	51448	1480000000	13709	7.52E-11
431	2	HB	32	126	directed graph	32	2.87E-08	33	9.90E-08
432	4	Schenk_ISEI	10938	130500	semiconductor device problem	10938	244.3294263	10939	4.59E-03
433	2	Szczerba	20896	191368	computational fluid dynamics problem	20896	0.00000167	20897	7.36E-06
434	3	HB	207	572	chemical process simulation problem	207	20.46686471	208	2.29E+01
435	4	HB	137	400	chemical process simulation problem	137	4.46731532	138	2.32E+00
436	3	HB	425	1255	chemical process simulation problem	425	18.27772173	426	1.72E+01
437	4	HB	225	1303	chemical process simulation problem	225	0.46929969	226	1.11E+01
438	5	Sandia	1813	11156	circuit simulation problem sequence	883	7.79E-11	679	3.51E-11
439	4	Oberwolfach	11730	328323	model reduction problem	11730	44243348.74	11731	4.06E+11
440	2	Pajek	124651	207214	directed weighted graph	124651	7.59E+12	124652	3.10E+15
441	5	POLYFLOW	30412	1793881	computational fluid dynamics problem	30412	596.7035436	30413	nan
442	4	Meszaros	3001	9000	linear programming problem	3001	1786.770832	3002	7.62E+03
443	5	Hollinger	6774	33744	economic problem	6774	1495.303201	6775	1.89E+08
444	4	Hollinger	6774	33744	economic problem	6774	4387337.44	6775	1.71E-08
445	5	Hollinger	13694	72734	economic problem	13694	14194.57575	13695	4.57E+07
446	4	Hollinger	13694	72734	economic problem	13694	2694842.184	13695	4.32E+05
447	4	Hollinger	20614	111903	economic problem	20614	56014.82737	20615	1.39E+07
448	3	Hollinger	20614	111903	economic problem	20614	53702148.06	20615	7.13E+05
449	4	Hollinger	27534	151063	economic problem	27534	199215.4704	27535	1.02E+08
450	1	Hollinger	27534	151063	economic problem	27534	6461859173	27535	5.11E+04
451	3	Hollinger	34454	190224	economic problem	34454	2675706.293	34455	8.32E+06
452	1	Hollinger	34454	190224	economic problem	34454	69206858.76	34455	1.24E+06
453	2	Hollinger	41374	229385	economic problem	41374	267852581.2	41375	6.95E+06
454	1	Hollinger	41374	229385	economic problem	41374	4.32E+11	41375	5.32E+06

455	3	HB	9	50	counter-example problem	4	3.2E-15	5	3.20E-15
456	1	HB	11	76	counter-example problem	11	0.011550999	12	7.06E-03
457	4	HB	991	6027	semiconductor device problem	67	6.74E-11	64	7.43E-11
458	2	Rommes	40337	144945	eigenvalue/model reduction problem	40337	0.002474907	40338	1.27E+05
459	1	MathWorks	8765	42471	counter-example problem	8765	7.54E-08	8766	1.89E+12
460	2	Pajek	4470	12731	directed graph	4470	5.97E+20	4471	4.55E+21
461	4	Raju	67173	3788857	computational fluid dynamics problem	67173	0.00129516	67174	1.21E-01
462	5	Tromble	399130	1216334	directed weighted graph	44	1.35E-11	45	5.94E-12
463	3	QLi	440020	5240084	optimization problem	440020	301000	440020	1.25E+05
464	5	Pajek	8843	41601	directed multigraph	8843	1.04E+21	8844	7.55E+18
465	5	LeGresley	2508	16727	power network problem	2026	9.02E-11	1173	4.09E-11
466	2	LeGresley	4908	30482	power network problem	4908	0.008722912	4909	5.43E-03
467	3	LeGresley	87936	593276	power network problem	87936	0.092477639	87937	1.26E-01
468	4	Mallya	1477	18427	chemical process simulation problem	1477	56.71730681	1478	6.33E-02
469	5	Mallya	2954	36875	chemical process simulation problem	2954	112.59312	2955	9.37E+02
470	1	Mallya	4101	81057	chemical process simulation problem	4101	84.67920343	4102	1.21E-03
471	3	Mallya	4101	82682	chemical process simulation problem	4101	65.69885039	4102	1.72E-01
472	3	Mallya	7337	154660	chemical process simulation problem	7337	148.0020572	7338	6.22E-13
473	1	Mallya	7337	156508	chemical process simulation problem	7337	38.18766144	7338	nan
474	4	Mallya	10672	228395	chemical process simulation problem	10672	45.22994623	10673	1.88E+12
475	4	Mallya	10672	232633	chemical process simulation problem	10672	36.66134418	10673	nan
476	3	Mallya	10964	231806	chemical process simulation problem	10964	44.08921961	10965	7.60E-05
477	3	Mallya	10964	233741	chemical process simulation problem	10964	19.10012996	10965	nan
478	5	Mallya	14270	305750	chemical process simulation problem	14270	152.1709865	14271	nan
479	3	Mallya	14270	307858	chemical process simulation problem	14270	145.427595	14271	nan
480	3	Mallya	17576	379761	chemical process simulation problem	17576	66.47043744	17577	7.39E-01
481	2	Mallya	17576	381975	chemical process simulation problem	17576	318.4930858	17577	nan
482	4	Mallya	35152	746972	chemical process simulation problem	35152	134.6979236	35153	3.51E+00
483	3	Mallya	35152	764014	chemical process simulation problem	35152	144.4042446	35153	5.74E-01
484	5	Mallya	70304	1494006	chemical process simulation problem	70304	102.1669388	70305	5.74E+00
485	1	Mallya	70304	1528092	chemical process simulation problem	70304	189.6624326	70305	nan
486	4	Li	22695	1215181	electromagnetics problem	22695	0.000186057	22696	3.18E-02
487	3	Sorensen	324085	1208908	directed weighted graph	324085	24600000000	6	3.01E-01
488	5	HB	131	536	computational fluid dynamics problem	131	3.98315059	132	2.72E-04
489	4	HB	3937	25407	computational fluid dynamics problem	3937	0.304796641	3938	2.10E-03
490	3	HB	511	2796	computational fluid dynamics problem	511	0.075615972	512	3.31E-03
491	1	HB	131	536	computational fluid dynamics problem	131	0.004408853	132	1.78E-06
492	4	HB	511	2796	computational fluid dynamics problem	511	0.049220056	512	9.31E-02
493	5	HB	3937	25407	computational fluid dynamics problem	3937	0.115300419	3938	1.07E+00
494	3	Bai	163	935	statistical/mathematical problem	163	6.86E-08	164	1.97E+01
495	2	Norris	1650	7419	computational fluid dynamics problem	1650	0.000309407	228	9.04E-11
496	2	Norris	109460	492564	computational fluid dynamics problem	109460	0.011796828	211	9.17E-11
497	2	Rommes	682	1633	eigenvalue/model reduction problem	682	0.031435468	683	3.22E+00
498	3	Rommes	528	1317	eigenvalue/model reduction problem	528	0.530096786	529	1.53E-02
499	1	JGD_Homology	200200	800800	combinatorial problem	200200	826.7792617	200200	8.26E+02
500	3	Rommes	1182	2881	eigenvalue/model reduction problem	1182	1.134412766	1183	8.83E+00
501	2	Rommes	1028	2547	eigenvalue/model reduction problem	1028	0.062789646	1029	9.40E-02
502	1	Rommes	2182	5341	eigenvalue/model reduction problem	2182	0.33019982	2183	7.36E+00
503	2	Rommes	2028	5007	eigenvalue/model reduction problem	2028	0.427151983	2029	5.93E-03
504	2	Rommes	4182	10261	eigenvalue/model reduction problem	4182	0.249477754	4183	8.93E+01
505	4	Rommes	4028	9927	eigenvalue/model reduction problem	4028	20.13406152	4029	2.24E-03
506	3	Williams	206500	1273389	economic problem	206500	3.9556E+15	206500	4.99E+21
507	3	HB	1258	7682	economic problem	1258	0.00821695	1259	7.87E-04
508	5	QLi	160000	1750416	optimization problem	259	9.78E-11	92	7.72E-11
509	2	Hollinger	9129	52883	economic problem	9129	220.6433719	9130	2.19E+06
510	2	Hollinger	9129	52883	economic problem	9129	3769308.985	9130	4.59E+08
511	4	Hollinger	18289	106803	economic problem	18289	23.87153947	18290	2.41E+02
512	2	Hollinger	18289	106803	economic problem	18289	7805.305285	18290	8.52E+06
513	4	Hollinger	27449	160723	economic problem	27449	103.057383	27450	1.09E+02
514	5	Hollinger	27449	160723	economic problem	27449	1260809.97	27450	1.84E+06
515	2	Hollinger	36609	214643	economic problem	36609	118.9424844	36610	8.07E+00
516	5	Hollinger	36609	214643	economic problem	36609	60625.12001	36610	1.71E+06
517	4	Hollinger	45769	268563	economic problem	45769	5057.009628	45770	3.23E+02
518	1	Hollinger	45769	268563	economic problem	45769	5858.661789	45770	4.86E+05
519	4	Hollinger	54929	322483	economic problem	54929	398.0668921	54930	6.86E+03
520	4	Hollinger	54929	322483	economic problem	54929	84197.79887	54930	7.55E+05
521	2	Hollinger	64089	376395	economic problem	64089	2698.158816	64090	4.63E+05
522	5	Hollinger	64089	376395	economic problem	64089	1019.827053	64090	8.38E+05
523	1	Schenk_IBMSDS	103430	1205518	semiconductor device problem	103430	17081471776	1478	6.69E-11
524	3	Schenk_IBMSDS	125329	893984	semiconductor device problem	125329	6766482.197	9971	5.63E-08
525	5	HB	496	49920	economic problem	496	3.847283143	497	8.60E+00
526	1	HB	496	49920	economic problem	496	10.68214921	497	2.33E+01
527	4	HB	496	41063	economic problem	496	52.29068474	497	4.66E+02
528	2	HB	180	2659	2D/3D problem	180	0.184549426	102	5.86E-11
529	2	HB	765	24382	2D/3D problem	765	0.016966636	367	6.63E-11
530	5	Grund	2904	58142	circuit simulation problem	2904	54005.01946	2905	3.07E+04
531	5	Hamm	17758	99147	circuit simulation problem	1090	9.85E-11	326	6.88E-11
532	5	Bai	3200	68026	electromagnetics problem	3200	0.030410373	3201	8.40E+04
533	4	Bai	4800	102252	electromagnetics problem	4800	12.12039396	4801	2.78E+06

534	5	Bai	416	8562	electromagnetics problem	416	0.07271983	417	1.09E+01
535	2	Rommnes	13251	48737	eigenvalue/model reduction problem	13251	0.00000867	13252	1.15E+08
536	3	Rommnes	13250	48735	eigenvalue/model reduction problem	13250	11.29929777	33	6.71E-11
537	4	Rommnes	13309	48872	eigenvalue/model reduction problem	13309	0.026767217	13310	5.22E+06
538	5	POLYFLOW	29957	1990919	computational fluid dynamics problem	29957	0.048048537	29958	nan
539	1	Janna	377002	27582698	structural problem	7082	8.89E-11	1700	8.12E-11
540	5	Sandia	25187	193276	circuit simulation problem sequence	1180	9.99E-11	2819	9.89E-11
541	1	Sandia	25187	193276	subsequent circuit simulation problem	25187	0.0000947	1781	3.23E-11
542	2	Sandia	25187	193216	subsequent circuit simulation problem	25187	3672.271057	595	3.88E-11
543	2	JGD_Homology	105	210	combinatorial problem	3	3.17E-11	1	1.00E+00
544	2	JGD_Homology	6435	51480	combinatorial problem	1	1	1	1.00E+00
545	5	Schenk_ISEI	18588	237130	semiconductor device problem	18588	0.021425251	18589	8.65E-05
546	4	HB	1374	8588	2D/3D problem	1374	0.002017106	1375	1.50E+03
547	1	HB	261	1500	2D/3D problem	261	0.039493895	262	2.74E-02
548	4	HB	666	4032	2D/3D problem	666	0.010919691	667	1.20E+00
549	5	Rommnes	11685	44941	eigenvalue/model reduction problem	11685	0.0000374	186	8.33E-11
550	4	Barabasi	325729	929849	directed graph	325729	220	200	1.34E+00
551	1	FEMLAB	20414	1679599	computational fluid dynamics problem	1278	8E-11	3542	9.82E-11
552	3	Bai	400	1201	2D/3D problem	400	0.000130351	401	3.38E-02
553	3	Pajek	2909	18246	directed multigraph	2909	0.421624355	2910	5.44E+00
554	1	Schenk_ISEI	181343	6869939	semiconductor device problem	181343	0.003041717	181343	3.79E-04
555	1	Bai	100	396	computational fluid dynamics problem	100	7.36E-10	73	1.77E-11
556	3	Bai	1000	3996	computational fluid dynamics problem	1000	0.000000324	1001	1.73E+04
557	1	Bai	2000	7996	computational fluid dynamics problem	2000	0.000000341	2001	1.43E+06
558	5	Bai	500	1996	computational fluid dynamics problem	500	1.17E-08	501	1.67E+07
559	3	Bai	5000	19996	computational fluid dynamics problem	5000	0.00000145	5001	2.02E+06
560	1	ATandT	36057	335552	frequency-domain circuit simulation problem	36057	381276.6023	36058	9.08E+06
561	5	ATandT	36057	222596	frequency-domain circuit simulation problem	36057	52489466	36058	6.07E+07
562	1	HB	2529	90158	economic problem	2529	21.34211146	2530	3.34E-02
563	1	HB	1030	6858	computational fluid dynamics problem	1030	1.14E-09	448	5.40E-11
564	1	HB	886	5970	computational fluid dynamics problem	886	7.54E-10	468	7.34E-11
565	3	HB	2205	14133	computational fluid dynamics problem	353	5.14E-11	414	6.79E-11
566	3	Sandia	430	1544	circuit simulation problem sequence	430	1.506099789	431	1.18E+01
567	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	5.65533462	431	4.69E-01
568	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.531443273	431	6.12E+00
569	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.814961766	431	1.70E-01
570	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.506214318	431	3.50E+00
571	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.055881581	431	2.82E+01
572	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.019280575	431	4.33E-02
573	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.37821242	431	1.12E+01
574	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	5.781335521	431	1.92E+00
575	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.452628103	431	4.95E-01
576	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.157167279	431	7.98E-02
577	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.393709248	431	3.93E-01
578	2	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.23123033	431	7.57E-02
579	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.654017302	431	9.09E-01
580	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.852697649	431	1.26E-02
581	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.046442111	431	2.93E-02
582	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.071740578	431	3.79E-03
583	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.052870934	431	6.18E-01
584	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.341823893	431	2.95E+01
585	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.37179837	431	3.17E-01
586	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.604678547	431	3.01E-01
587	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.487592218	431	5.96E+01
588	2	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.241638348	431	1.88E-02
589	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.941407578	431	1.68E-01
590	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	3.581076299	431	1.40E-01
591	2	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	2.816148456	431	9.78E-01
592	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.003041446	431	1.34E-02
593	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.709690258	431	8.87E-02
594	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	2.155655882	431	4.69E-02
595	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	13.38834973	431	7.78E-02
596	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.049912503	431	8.18E-02
597	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.123919445	431	1.57E+00
598	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.54823202	431	4.33E-02
599	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.01897083	431	7.17E+00
600	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	4.247208149	431	1.59E-01
601	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.091305884	431	9.37E-01
602	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.009853882	431	2.31E+00
603	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.187114723	431	7.63E-01
604	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.154691327	431	1.37E+00
605	5	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.071570333	431	8.97E-01
606	2	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.567319377	431	6.50E-02
607	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.113043256	431	3.64E-02
608	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.483016413	431	2.39E+00
609	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	3.233460185	431	1.31E-02
610	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.068096823	431	1.41E+00
611	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.592181803	431	3.03E-01
612	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.035441743	431	2.00E-02

613	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.361261861	431	1.72E-01
614	2	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.300319675	431	1.05E+00
615	1	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.12054139	431	2.01E-01
616	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.421310713	431	1.72E+00
617	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	3.595423444	431	2.59E-01
618	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.289210505	431	8.74E-01
619	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	1.688936726	431	5.08E-01
620	4	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.21002735	431	1.68E+00
621	3	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.175194382	431	2.64E-02
622	2	Sandia	430	1544	subsequent circuit simulation problem	430	0.264898471	431	2.39E-01
623	5	Sandia	430	1614	circuit simulation problem	430	0.000314769	431	6.84E-01
624	1	SNAP	10879	39994	directed graph	10879	68.56017142	10880	1.18E+01
625	4	SNAP	8846	31839	directed graph	8846	2.166326337	8847	1.31E+00
626	3	SNAP	8717	31525	directed graph	8717	8.936495445	8718	4.36E+01
627	4	SNAP	6301	20777	directed graph	6301	5.140148069	6302	3.59E+00
628	5	SNAP	8114	26013	directed graph	8114	2.275198535	8115	2.99E+00
629	4	SNAP	26518	65369	directed graph	26518	0.439784095	26519	1.20E+00
630	5	SNAP	22687	54705	directed graph	22687	0.855030511	22688	2.05E-01
631	3	SNAP	36682	88328	directed graph	36682	2.97020675	36683	3.29E+01
632	5	SNAP	62586	147892	directed graph	62586	14.8	62586	1.48E+01
633	1	Schenk_ISEI	155924	2094873	subsequent semiconductor device problem	155924	0.0206	155924	1.41E+01
634	2	Schenk_ISEI	153226	2930882	semiconductor device problem	153226	1.76	153226	7.63E-05
635	2	Schenk_ISEI	155924	2094873	semiconductor device problem sequence	155924	0.001542913	155924	2.78E+00
636	1	Schenk_ISEI	155924	2094873	subsequent semiconductor device problem	155924	0.000915712	155924	6.14E-03
637	3	Schenk_ISEI	155924	2094873	subsequent semiconductor device problem	155924	0.0062	155924	1.24E-01
638	3	Schenk_ISEI	155924	2094873	subsequent semiconductor device problem	155924	0.00927	155924	1.26E-01
639	1	Schenk_ISEI	155924	2094873	subsequent semiconductor device problem	155924	0.00327	155924	1.43E-01
640	4	Pajek	240547	560943	directed weighted graph	240547	5.57E+25	26	7.85E+02
641	4	MathWorks	8081	13036	counter-example problem	119	7.27E-11	121	8.86E-11
642	4	Bai	225	1065	2D/3D problem	71	5.15E-11	70	9.56E-11
643	3	Bai	2961	14585	2D/3D problem	221	6.49E-11	185	7.64E-11
644	3	Bai	900	4380	2D/3D problem	144	2.02E-11	132	8.05E-11
645	5	Oberwolfach	2025	100015	model reduction problem	2025	0.000114344	2026	2.89E-05
646	5	MathWorks	102	306	statistical/mathematical problem	30	7.86E-11	22	7.42E-11
647	5	HB	1919	9662	2D/3D problem	1919	4.03E+11	1920	4.04E+11
648	1	HB	362	1760	2D/3D problem	362	7.08E+13	363	7.42E+13
649	1	FEMLAB	367	2417	computational fluid dynamics problem	72	8.55E-11	69	9.12E-11
650	4	FEMLAB	13514	352762	computational fluid dynamics problem	184	3.61E-11	192	6.36E-11
651	1	FEMLAB	85623	2374949	computational fluid dynamics problem	341	9.64E-11	408	7.58E-11
652	3	Newman	1490	19025	directed multigraph	1490	6.239992476	1491	5.02E-01
653	1	Grund	4008	8188	economic problem	35	3.13E-11	36	3.13E-11
654	2	Grund	15575	33033	economic problem	36	6.29E-11	37	6.29E-11
655	2	Grund	16955	37849	economic problem	35	7.8E-11	36	2.05E-11
656	2	Grund	33833	73249	economic problem	42	6.86E-11	43	7.81E-11
657	5	HB	30	180	computational fluid dynamics problem	30	0.002230163	31	1.05E+00
658	4	HB	1224	9613	computational fluid dynamics problem	1224	0.914198981	1225	8.14E-03
659	3	HB	532	3474	computational fluid dynamics problem	532	0.000881584	403	9.15E-11
660	1	LiuWenzhuo	15838	64424	power network problem	15838	12.44145657	15839	1.71E+00
661	3	Fluorem	161070	8185136	computational fluid dynamics problem	161070	0.24	161070	7.57E+03
662	1	FEMLAB	415	2779	2D/3D problem	103	9.15E-11	416	2.91E+00
663	5	HB	3140	543160	economic problem	2137	8.22E-11	39	2.51E-11
664	1	HB	3140	540022	economic problem	3140	39.85875467	3141	1.13E+01
665	3	HB	3140	543160	economic problem	50	2.52E-11	3141	3.83E-11
666	5	Bai	1484	6110	power network problem	1484	50.13002423	1485	2.51E-04
667	3	Bai	768	2934	power network problem	768	0.000266449	769	9.59E-04
668	4	Bai	882	3354	power network problem	882	0.001034489	883	1.14E-03
669	2	Zitney	1048	13299	chemical process simulation problem	1048	3.893673826	1049	9.73E+01
670	2	Simon	3242	293409	computational fluid dynamics problem sequence	291	9.66E-11	292	9.78E-11
671	2	Simon	3242	293551	subsequent computational fluid dynamics problem	524	8.01E-11	430	5.91E-11
672	2	Simon	21200	1488768	computational fluid dynamics problem	21200	0.000243484	211	1.58E-04
673	5	Simon	6316	167178	structural problem	6316	2748836.297	27	8.25E-11
674	2	Simon	3402	130371	structural problem	3402	0.0000109	28	4.30E-11
675	3	Pajek	24	81	directed weighted graph	24	2.42E+11	25	2.68E+10
676	5	Pajek	23	64	directed weighted graph	23	1321561984	24	1.35E+09
677	4	Rajat	263743	1300261	circuit simulation problem	263743	1.58641E-06	263743	2.51E-02
678	4	Rajat	6833	43250	circuit simulation problem	6833	0.013579997	6834	4.55E-02
679	2	Rajat	7602	32653	circuit simulation problem	257	8.17E-11	143	8.54E-11
680	2	Rajat	1041	8725	circuit simulation problem	1041	0.0000136	357	4.97E-11
681	3	Rajat	301	1250	circuit simulation problem	301	0.186054221	302	3.84E-04
682	2	Rajat	135	665	circuit simulation problem	135	0.000370509	100	1.82E-11
683	3	Rajat	1879	12818	circuit simulation problem	1879	622.3583621	414	4.74E-11
684	4	Rajat	7598	48762	circuit simulation problem	7598	600.3254928	158	9.29E-11
685	1	Rajat	180	1475	circuit simulation problem	180	0.0000322	85	6.41E-11
686	2	Rajat	37261	443573	circuit simulation problem	37261	6288971.974	37262	3.74E-01
687	3	Rajat	94294	476766	circuit simulation problem	94294	0.000125017	94295	1.49E-04
688	4	Rajat	94294	479246	circuit simulation problem	94294	0.003467119	94295	1.15E-01
689	2	Rajat	94294	479151	circuit simulation problem	94294	0.010293268	94295	1.59E-04
690	2	Rajat	1157	3699	circuit simulation problem	1157	0.000288796	1158	7.88E-05
691	3	Rajat	86916	604299	circuit simulation problem	86916	4.93E+12	86917	2.43E-09

692	1	Rajat	411676	1876011	circuit simulation problem	411676	4.57	411676	6.86E-02
693	4	Rajat	39899	195429	circuit simulation problem	39899	0.000351036	39900	5.66E-08
694	2	Rajat	110355	555441	circuit simulation problem	110355	0.036476565	110356	1.30E-08
695	2	Rajat	358172	1946979	circuit simulation problem	358172	0.015968944	92355	2.48E-09
696	4	Rajat	87190	606489	circuit simulation problem	87190	35.45744605	87191	8.59E-11
697	1	Rajat	51032	247528	circuit simulation problem	51032	0.000936286	51033	2.98E-08
698	2	Rajat	20640	97353	circuit simulation problem	20640	0.00451249	20641	1.48E-03
699	4	Rajat	87190	606489	circuit simulation problem	87190	0.000118599	87191	3.88E-09
700	3	Bai	480	17088	robotics problem	480	6.429194346	481	6.40E+00
701	4	Bai	480	17088	robotics problem	480	16.0141591	481	3.36E+01
702	3	Bai	1250	7300	computational fluid dynamics problem	123	2.38E-11	107	5.95E-11
703	4	Bai	1250	7300	computational fluid dynamics problem	138	8.66E-11	329	7.79E-11
704	5	Bai	200	1120	computational fluid dynamics problem	35	6.05E-11	36	7.84E-11
705	5	Bai	200	1120	computational fluid dynamics problem	47	9.59E-11	51	5.68E-11
706	2	Bai	2048	12032	computational fluid dynamics problem	176	9.9E-11	237	9.04E-11
707	3	Bai	2048	12032	computational fluid dynamics problem	134	9.89E-11	139	5.88E-11
708	4	Bai	3200	18880	computational fluid dynamics problem	229	9.76E-11	315	4.59E-11
709	3	Bai	450	2580	computational fluid dynamics problem	62	7.55E-11	65	3.65E-11
710	3	Bai	450	2580	computational fluid dynamics problem	74	7.81E-11	451	1.83E-04
711	4	Bai	5000	29600	computational fluid dynamics problem	287	5.43E-11	332	5.45E-11
712	2	Bai	800	4640	computational fluid dynamics problem	110	8.81E-11	474	9.02E-11
713	4	Bai	968	5632	computational fluid dynamics problem	122	7.74E-11	413	8.99E-11
714	1	Zitney	4134	94408	chemical process simulation problem	4134	8788163.442	4135	2.14E+02
715	5	Zitney	3198	56834	chemical process simulation problem	3198	1.140821795	3199	1.49E+04
716	1	Zitney	2398	61896	chemical process simulation problem	2398	4307.749883	2399	3.27E+00
717	4	HB	10	76	counter-example problem	4	1.02E-14	5	1.02E-14
718	2	Goodwin	22560	1014951	computational fluid dynamics problem	22560	2.842141049	22561	4.86E+00
719	3	Fluorem	381689	37464962	computational fluid dynamics problem	381689	0.248	381689	1.74E+02
720	5	Bova	46835	2329092	computational fluid dynamics problem	46835	0.053061463	46836	1.83E-02
721	4	Morandini	120	870	robotics problem	120	0.010004983	121	1.72E+02
722	5	Pajek	1022	5075	directed graph	1022	3.93363001	1023	4.42E+00
723	3	Morandini	100	708	structural problem	100	0.057797504	101	nan
724	3	Morandini	791	10685	structural problem	791	0.012976712	792	5.80E-01
725	1	Bai	136	479	statistical/mathematical problem	136	302.1781142	137	2.16E+02
726	5	Bai	496	1859	statistical/mathematical problem	496	14328395.76	497	2.51E+06
727	5	Bai	5151	20199	statistical/mathematical problem	5151	2.23E+15	5152	5.37E+14
728	2	Rommes	682	1633	eigenvalue/model reduction problem	682	0.031435468	683	3.22E+00
729	3	Rommes	528	1317	eigenvalue/model reduction problem	528	0.530096786	529	1.53E-02
730	3	Rommes	1182	2881	eigenvalue/model reduction problem	1182	1.134412766	1183	8.83E+00
731	4	Rommes	1028	2547	eigenvalue/model reduction problem	1028	0.062789646	1029	9.40E-02
732	5	Rommes	2182	5341	eigenvalue/model reduction problem	2182	0.33019982	2183	7.36E+00
733	5	Rommes	2028	5007	eigenvalue/model reduction problem	2028	0.427151983	2029	5.93E-03
734	3	Rommes	4182	10261	eigenvalue/model reduction problem	4182	0.249477754	4183	8.93E+01
735	5	Rommes	4028	9927	eigenvalue/model reduction problem	4028	20.13406152	4029	2.24E-03
736	3	HB	238	1128	computational fluid dynamics problem	238	0.729924923	239	1.84E-06
737	5	Pajek	3084	10413	directed multigraph	3084	1.65E+19	3085	2.13E+19
738	4	Hamm	170998	958936	circuit simulation problem	170998	0.002015513	170999	1.87E-01
739	4	JGD_Homology	200200	800800	combinatorial problem	200200	3940	200200	3.93E+03
740	5	HB	1080	23094	computational fluid dynamics problem	1080	0.153592192	1081	7.56E+01
741	2	HB	5005	20033	computational fluid dynamics problem	4866	8.38E-11	441	4.09E-11
742	1	HB	1104	3786	computational fluid dynamics problem	150	9.08E-11	116	2.21E-11
743	2	HB	3312	20793	computational fluid dynamics problem	1966	7.28E-11	249	2.18E-11
744	4	Shen	3432	25220	2D/3D problem	3432	137.7106615	3433	1.64E+00
745	2	Shen	18510	145149	2D/3D problem	18510	20857.98351	18511	3.82E+15
746	5	Shen	6136	53329	2D/3D problem	6136	49519.52702	6137	9.88E+03
747	2	HB	663	1687	optimization problem sequence	663	24.05375736	664	1.16E+01
748	3	HB	663	1726	subsequent optimization problem	663	76.86512925	664	1.53E+01
749	1	HB	663	1712	subsequent optimization problem	663	41.3346657	664	9.37E+01
750	1	Shyy	76480	329762	computational fluid dynamics problem	76480	747.1550359	76481	7.41E+02
751	2	Shyy	4720	20042	computational fluid dynamics problem	4720	2791.017361	4721	3.77E+03
752	5	MathWorks	2290	14873	counter-example problem	2290	5375818297	2291	8.52E+03
753	4	Hohn	7500	283992	materials problem	7500	20.76554039	7501	2.35E+01
754	5	Hohn	11532	551184	materials problem	11532	247.3507047	11533	1.37E+01
755	3	Hohn	16428	948696	materials problem	16428	47.88754945	16429	8.71E+01
756	2	Pajek	1059	4919	directed multigraph	1059	4.74E+17	1060	2.06E+17
757	3	Pajek	396	994	directed multigraph	396	1.95E+15	397	8.29E+16
758	1	FEMLAB	12504	874887	structural problem	3164	9.8E-11	3066	9.52E-11
759	3	FEMLAB	29067	2081063	structural problem	3737	9.97E-11	3724	8.46E-11
760	5	FEMLAB	42930	3148656	structural problem	6546	8.32E-11	8348	2.97E-06
761	4	SNAP	75888	508837	directed graph	75888	66.7	84	4.98E-02
762	5	SNAP	131828	841372	directed weighted graph	131828	64.2	15	1.63E-01
763	2	SNAP	77357	516575	directed weighted graph	77357	99.1	112	0.146
764	5	SNAP	81871	545671	directed weighted graph	81871	133	98	3.09
765	3	SNAP	82144	549202	directed weighted graph	82144	51.6	98	89
766	1	SNAP	77360	905468	directed graph	77360	26.62702652	77361	9.43E+01
767	5	SNAP	82168	948464	directed graph	82168	1820.929235	82169	9.96E+01
768	2	Kanvar	281903	2312497	directed graph	281903	557	565	1.20E+00
769	2	VanVelzen	21982	1248213	chemical process simulation problem	21982	5.78E+12	21983	8.07E+12
770	3	VanVelzen	21982	498771	chemical process simulation problem	21982	382429379.5	21983	8.65E+06

771	1	VanVelzen	21982	1455374	chemical process simulation problem	21982	178588450.6	21983	1.30E+08
772	3	VanVelzen	21982	531826	chemical process simulation problem	21982	2323889.378	21983	4.00E+05
773	4	HB	240	2248	computational fluid dynamics problem	240	0.000112795	22	5.41E-11
774	2	HB	600	5660	computational fluid dynamics problem	109	7.78E-11	9	2.55E-11
775	3	HB	80	314	computational fluid dynamics problem	80	0.000261446	29	8.53E-11
776	4	Norris	213360	3021648	2D/3D problem	387	4.96E-11	297	7.58E-11
777	4	HB	363	2454	optimization problem sequence	363	3.679862761	364	3.77E+00
778	4	HB	363	3068	subsequent optimization problem	363	3.39080356	364	7.57E+00
779	2	HB	363	3157	subsequent optimization problem	363	10.04296909	364	5.97E+00
780	2	HB	363	3279	subsequent optimization problem	363	54.14973037	364	5.09E+00
781	3	Wang	3169	20841	semiconductor device problem sequence	33	8.53E-11	29	6.62E-12
782	4	Wang	3169	20841	subsequent semiconductor device problem	73	7.77E-11	51	2.85E-11
783	5	TKK	9801	87025	structural problem sequence	108	8.98E-11	175	7.99E-11
784	3	TKK	9801	87025	structural problem sequence	108	8.98E-11	175	7.99E-11
785	1	Bindel	10605	424587	thermal problem	10605	958.5242264	10606	3.29E+04
786	2	Bindel	10605	424587	thermal problem	10605	0.000439461	10606	1.63E-03
787	4	Brunetiere	3456	66528	thermal problem	34	4.39E-11	32	4.43E-11
788	4	Botonakis	204316	2846228	thermal problem	7737	9.94E-11	204316	3.26E+00
789	2	Pajek	11	29	directed graph	11	7.32E+13	12	6.93E+13
790	3	Pajek	11	36	directed graph	10	1.28E-11	11	2.36E-12
791	4	Pajek	11	41	directed graph	11	557584140.4	12	3.46E+07
792	5	Pajek	11	48	directed graph	9	7.76E-11	10	3.68E-11
793	1	Bai	1090	3546	computational fluid dynamics problem	1090	44851.67498	129	9.42E-11
794	1	Bai	2000	5184	computational fluid dynamics problem	2000	43.41940333	149	4.86E-11
795	1	Bai	340	2196	computational fluid dynamics problem	340	2.91E-08	96	2.38E-11
796	5	Bai	4000	8784	computational fluid dynamics problem	4000	24.57988328	163	5.12E-11
797	5	Bai	90	1746	computational fluid dynamics problem	75	6.4E-11	44	1.49E-11
798	2	MathWorks	500	28726	computer graphics/vision problem	241	8.78E-11	20	4.33E-11
799	2	Norris	116158	8516500	2D/3D problem	116158	0.0000445	49793	1.51E+00
800	1	Norris	115967	1033473	2D/3D problem	68	4.3E-11	41	3.93E-11
801	3	Norris	259156	4429042	2D/3D problem	353	3.43E-11	135	5.21E-11
802	4	IBM_EDA	116835	749800	circuit simulation problem sequence	116835	19482074.46	299	6.45E-11
803	2	IBM_EDA	116835	749800	subsequent circuit simulation problem	116835	0.002188497	483	3.79E-11
804	5	Freescale	178866	961368	circuit simulation problem	178866	1.547013788	178867	1.92E-01
805	5	MathWorks	2142	45262	counter-example problem	2142	7855.263515	2143	6.61E+03
806	2	TSOPF	5374	205399	power network problem	5374	0.281998165	5375	2.90E-01
807	2	TSOPF	15374	610299	power network problem	15374	1.115813805	15375	6.15E-01
808	4	TSOPF	20374	812749	power network problem	20374	0.2784448	20375	4.24E-01
809	4	TSOPF	25626	6761100	power network problem	25626	2099.14038	25627	6.19E+02
810	1	TSOPF	38120	16171169	power network problem	38120	938	38120	2.66E+01
811	4	TSOPF	38120	16171169	power network problem	38120	930	38120	2.89E+01
812	3	TSOPF	14538	1474325	power network problem	14538	4.452667297	14539	3.31E+00
813	2	TSOPF	28338	2943887	power network problem	28338	17.87492511	28339	7.12E+00
814	3	TSOPF	42138	4413449	power network problem	42138	9.679302948	42139	2.68E+01
815	2	TSOPF	38098	684206	power network problem	38098	533977915.8	38099	2.30E+08
816	2	TSOPF	60098	1079986	power network problem	60098	126158040.9	60099	3.36E+07
817	2	TSOPF	14098	252446	power network problem	14098	151027266.7	14099	7.71E+08
818	2	TSOPF	18696	4396289	power network problem	18696	11.10527583	18697	1.58E+00
819	2	TSOPF	35696	8781949	power network problem	35696	32.84732338	35697	2.04E+01
820	1	TSOPF	7224	54082	power network problem	7224	2.34E+11	7225	1.12E+14
821	2	Bai	100	396	computational fluid dynamics problem	100	0.000208418	101	1.48E-08
822	1	Bai	1000	3996	computational fluid dynamics problem	1000	0.019843556	1001	1.11E-04
823	1	ATandT	120750	1206265	frequency-domain circuit simulation problem	120750	263.1076275	120751	nan
824	3	TOKAMAK	1700	21509	electromagnetics problem	1700	0.000191213	1701	1.97E-03
825	5	TOKAMAK	300	3155	electromagnetics problem	300	0.466371975	301	3.89E-02
826	2	TOKAMAK	3060	42211	electromagnetics problem	3060	0.000000334	3061	1.34E-01
827	4	TOKAMAK	5940	83842	electromagnetics problem	5940	0.001579934	5941	1.98E-01
828	3	Simon	62424	1717792	computational fluid dynamics problem sequence	34186	9.38E-11	232	6.82E-11
829	1	Simon	62424	1717763	subsequent computational fluid dynamics problem	62424	0.02174914	62425	1.21E+07
830	4	Simon	62424	1717777	subsequent computational fluid dynamics problem	62424	0.491070557	62425	9.46E+09
831	1	Quaglino	4326	61166	materials problem	492	6.57E-11	322	7.99E-11
832	3	Quaglino	32769	381326	materials problem	931	9.96E-11	612	9.04E-11
833	2	Mancktelow	37762	1133641	materials problem	37762	0.000000698	37763	3.74E-01
834	4	Wang	2903	19093	semiconductor device problem sequence	446	5.07E-11	191	3.19E-11
835	3	Wang	2903	19093	subsequent semiconductor device problem	455	7.44E-11	194	8.11E-11
836	1	Wang	26064	177168	semiconductor device problem	367	9.67E-11	269	7.11E-11
837	1	Wang	26068	177196	semiconductor device problem	590	4.77E-11	305	8.50E-11
838	2	Rudnyi	60740	2035281	computational fluid dynamics problem	28521	9.56E-11	5030	9.62E-11
839	3	HB	1856	11360	computational fluid dynamics problem	95	9.6E-11	174	8.75E-11
840	5	HB	1856	11550	computational fluid dynamics problem	515	7.52E-11	344	9.29E-11
841	3	Gleich	9914	36854	directed graph	9914	23.85757551	9915	6.25E+02
842	3	SNAP	325729	1497134	directed graph	325729	1250000	325729	1.25E+06
843	5	SNAP	281903	2312497	directed graph	281903	662000	7	3.26E+00
844	2	HB	67	294	chemical process simulation problem	67	1.854440775	68	4.32E+00
845	3	HB	132	413	chemical process simulation problem	132	0.435518857	133	9.29E-01
846	3	HB	156	362	chemical process simulation problem	156	0.019724277	157	1.34E-03
847	4	HB	167	506	chemical process simulation problem	167	147.3683172	168	1.86E+02
848	1	HB	381	2134	chemical process simulation problem	381	3.242936016	382	4.59E+00
849	5	HB	479	1888	chemical process simulation problem	479	11.79822955	480	1.27E+01

850	2	HB	497	1721	chemical process simulation problem	497	107.6817765	498	2.81E+01
851	5	HB	655	2808	chemical process simulation problem	655	4.29075646	656	4.01E+00
852	1	HB	989	3518	chemical process simulation problem	989	71.10327393	990	2.62E+02
853	3	HB	1505	5414	chemical process simulation problem	1505	871.6797716	1506	2.21E+02
854	2	HB	2021	7310	chemical process simulation problem	2021	26557.61639	2022	3.81E+04
855	3	SNAP	8297	103689	directed graph	8297	14.76055306	2729	1.68E+00
856	4	HB	199	701	structural problem	199	2.122543261	200	2.95E+00
857	2	HB	57	281	semiconductor device problem	57	2160.239451	58	2.44E+03
858	2	Pajek	82670	132964	directed weighted graph	82670	567000	327	4.77E+08
859	2	Rommex	66	1194	eigenvalue/model reduction problem	66	0.001330607	67	1.95E-04
860	2	Rommex	13251	48737	eigenvalue/model reduction problem	13251	0.00000867	13252	1.15E+08
861	4	Ronis	48600	1181120	materials problem	1264	9.98E-11	1603	6.18E-11
862	5	Ronis	157464	3866688	materials problem	1444	9.71E-11	1901	5.66E-11
863	4	Rommex	13250	48735	eigenvalue/model reduction problem	13250	6728465.533	33	6.71E-11
864	1	Rommex	20944	74386	eigenvalue/model reduction problem	20944	0.00005	20945	1.75E+01
865	5	HB	841	3988	acoustics problem	701	8.83E-11	842	1.10E-08
866	2	VanVelzen	22835	1642407	chemical process simulation problem	22835	237289756.4	22836	3.15E+09
867	1	VanVelzen	22835	676439	chemical process simulation problem	22835	1201785583	22836	1.04E+04
868	2	VanVelzen	22835	1915726	chemical process simulation problem	22835	340594917.9	22836	4.13E+09
869	5	VanVelzen	22835	713907	chemical process simulation problem	22835	1036.541525	22836	2.98E+03
870	1	VanVelzen	22835	1711557	chemical process simulation problem	22835	360156085	22836	4.71E+07
871	1	VanVelzen	22835	663643	chemical process simulation problem	22835	29284.84715	22836	4.24E+02
872	1	Rommex	13296	48827	eigenvalue/model reduction problem	13296	25394300.15	33	6.71E-11
873	2	Pajek	6752	54233	directed multigraph	6752	9.02E+19	6753	2.56E+20
874	4	Zhao	33861	166453	electromagnetics problem	46	8.84E-11	55	2.47E-11
875	1	Zhao	33861	166453	electromagnetics problem	1734	6.18E-11	7702	7.48E-11