数とは何かを巡って

井　上　直　昭

0　序

P. ベナセラフの論文「数は何でありえないか」[1]は数学の哲学においてもはや古典的と呼べる論文であるけれど，今日でもこの分野の多くの研究に刺激と影響を与え続けている。この論文でベナセラフは数は本当は何であるかという探求はまったくの見当違いな試みであり，そもそも「数は対象ではありえない」と結論している。もしこの結論が正しいならば，プラトニズム（数学的実在論）は成立しない。

「数は対象ではありない」というベナセラフの主張に対しては様々な応答が試みられてきた。三平氏の論文「フレーゲとベナセラフ：数とは何かを巡って」[2]もその試みの中の一つであるけれど，氏の議論は一般的な脈絡にあるというよりは，G. フレーゲのプラトニズムに対して本当にベナセラフは鉄槌を打ち込んだのかどうかという脈絡でベナセラフの議論を考察している。最終的に三平氏は，ベナセラフの議論はある種のプラトニズムに対しては鉄槌を打ち込んではいるが，フレーゲのプラトニズムに対してはいかなる打撃も与えはしなかった，と結論している。ベナセラフの議論によってフレーゲが苦境に陥ったように見えるとしたら，それはフレーゲのプラトニズムの誤った理解によるのだ，と三平氏は結論している。

本論も三平氏の論文と同様にフレーゲのプラトニズムとベナセラフの議論という脈絡にある。しかし私の見解からすれば，ベナセラフの議論に対する三平氏の応答は成功していない。三平氏によれば，「実在のうちには一つの確定した数の領域，つまり，本当の数領域があり，それを発見して描写するのが算術の課題だ」[3]とフレーゲは考えていたわけではなく，それゆえ数は本当は何であるかという探求はまったくの見当違いな試みであるというベナセラフの主張が正しいとしても，そのことはフレーゲのプラトニズムに対する反論にはならないというのである。しかしプラトニズムは数学的対象の実在論であり，数学的対象がわれわれの心からは独立に存在すると考える立場である。『算術の基礎』[4]は「数１とは何か，記号１は何を意味するか」という問いで始まる。そしてフレーゲの立場がプラトニズムであるならば，この問いと「数１とは本当は何か，記号１は本当は何を意味するか」という問い

に何か本質的な違いがあるわけではない。

フレーゲの理論はラッセルのパラドックスに見舞われる。しかし，もしベナセラフの議論が正しいのだとしたら，フレーゲの理論が矛盾によって破綻しようがしまいが，「数とは何か？」と問う試みがそもそも虚しい努力だったということになる。本論の目的は，「数は対象ではありえない」という結論を導いたベナセラフの議論と「数は論理的対象である」と主張したフレーゲの論理主義との対立点をはっきりさせることを通して，「数とは何か？」というフレーゲの問いがまったくの見当違いな試みであったのかどうか，また「数７とジュリアス・シーザーは同一であるか否か？」という問いの試みが虚しい努力だったのかどうか，これらの問題をあらためて吟味することである。結論を述べるならば，「数とは何か？ 数７とジュリアス・シーザーは同一であるか？」という問いのかなりの部分に対してフレーゲの応答は成功していたのであり，ベナセラフが投げかける疑念がフレーゲを悩ませたということではないのである。

1　数は対象ではありえない！？

「数は対象ではありえない」という結論へ到るベナセラフの議論は，まず「数は集合ではありえない」という議論を経由するのだけれど，その粗筋を要約しておこう。

まず次の等式を考えよ：

数 n ＝集合 s.

ここで左辺には数を表示する通常の算術的表現，つまり数詞が入る。右辺には数を説明すると見なされる集合を表示する通常の集合論的表現が入る。数概念に関して正しいと思われる集合論的説明は多く存在するけれど，ここでは次の二つの説明を考慮すれば十分である。その説明では，数はある特定の集合，すなわちツェルメロ数およびフォン・ノイマン数として与えられる：

フォン・ノイマン数：$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, …
ツェルメロ数：$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, …

すると各々の説明のうちどちらが本当に正しい説明なのかという問いが発生する。そこでわれわれは次の二つの選択肢をもつことになるだろう：

1) 二つの説明が本当に正しいか，
2) ただ一つの説明が正しい。

とはいっても，明らかに選択肢1は取りえない。なぜなら，フォン・ノイマン数では数3は集合 {∅，{∅}，{∅，{∅}}} と同定され，一方ツェルメロ数では数3は，{{{∅}}} と同定されるけれど，これら二つの説明が排他的であることは明白だからである。しかし選択肢2も取りえない。なぜなら，数についての説明の二つの可能性のうちから，一つだけを取り出す原理的理由が見出せないからである。したがって，どちらの選択肢も取りえないのであるから，数を特定の集合として与える数詞の意味と指示の説明がそもそも間違っていたことになる。「もしここで述べてきた事柄が説得的だとすれば，ほとんど次のように結論せざるをえない。説明部分のうちで，数3をある一つの集合と同定するようなものは，どれも余計な説明部分であり，したがって3およびその仲間の数たちは決して集合ではありえないだろう，と」[5)]

ここでの論点は，上のベナセラフの議論からも明らかであるように，数詞がその一辺ないし両辺に登場するような等式の有意味性にある。ベナセラフは数詞がその一辺ないし両辺に登場するような三つのタイプの等式を問題にしている[6)]：

(a) 右辺にも左辺にも何らかの算術的表現が登場する等式。
例えば「$2^{17}=4892$」等。
(b)「*Fs* の数」のように，標準的な算術的表現以外のやり方である数を表示する表現がその一辺に登場する等式。
例えば「7＝小人の数」等。
(c)「ジュリアス・シーザー」や「{{{∅}}}」のように，(a) と (b) にも該当しない指示対象がその一辺に登場する等式。
例えば「7＝ジュリアス・シーザー」等。

(a) のようなタイプの等式の有意味性は特に問題にはならない。また (b) のようなタイプの等式の有意味性は基数性の概念を解明することによって無害なものとなる。数的陳述が概念についての言明であると考えたのはフレーゲの洞察である。フレーゲは，基数等式「概念 *F* の数と概念 *G* の数は同一である」の意味と「*F* に帰属する対象たちと *G* に帰属する対象たちが一対一に対応する ―― *F* と *G* は同数的である ――」の意味が同じであると約定することによって基数性概念の解明をはかった[7)]。そしてこの約定を第二階論理に唯一の非論理公理として加えた理論から第二階のペアノーデデキント算術

が導出されることが知られている。それゆえ，(b) のようなタイプの等式の有意味性は完全に説明される。

しかしフレーゲは (c) のタイプの等式の意味を説明することに非常に大きな問題があると考えた。彼は『基礎』第66節で，基数等式「概念 F の数と概念 G の数は同一である」の意味と「F と G は同数的である」の意味が同じだという約定によっては，等式「ジュリアス・シーザーと概念 G の数は同一である」の有意味が説明されないという困難を提起した。それというのも，等式「概念 F の数と概念 G の数は同一である」の意味と「F と G は同数的である」の意味が同じだという約定は，等式の両辺に「概念 F の数」という形の表現が現れた場合だけを説明するに過ぎないからである。そしてフレーゲは，ここでの困難が対象が様々に与えられるにもかかわらずそれをわれわれが再認できるという等式の多様で重要な利用価値が説明されないという困難を示している，と考えた。この問題がいわゆるジュリアス・シーザー問題である。

シーザー問題に直面してフレーゲは次のことを要求したとベナセラフは考える[8)]：

> 数詞によって名指され，数がそれと同一でありうるような，そういった何らかの「対象」を見出す必要があるとフレーゲは感じた。数は本当は対象の集まりのうちのどれなのかという問いに答える必要があると思われてくるのは，まさにこの地点であった。それというのも，明らかに，「数」という単純な答えでは役に立たないからである。… フレーゲにとって，二つの名前（ないし記述）のどれについても，それらが名指すものは同一の対象なのか，それとも異なる対象なのかと問うことは意味をなす。

ベナセラフは，すべての等式が有意味だというフレーゲの観念がそもそも非常に疑わしいのであり，このような同一性に関するフレーゲの見解は矛盾を含意するフレーゲの論理学から由来しているのだろうと考えている[9)]。そしてベナセラフの提案は，すべての等式が有意味だという見解を拒否し，(c) のタイプの等式のすべてを無意味もしくは非文法的であると見なして切り捨てようということである。そもそも同一性言明が意味をなすのは，もっぱら，「可能な個体化条件 *possible individuating conditions* があるような文脈においてである。」[10)] 対象の個体化条件については実例によって説明されている。x と y がある街灯柱であるとき，それらが実際に同一の街灯柱であるかどうかという問いは，それらの色や歴史，質量，位置等々によって確定されることになるだろう。しかし x と y がある数であるとき，それらが同一の数であるのかどうかという問いは街灯柱のように色や歴史，質量，位置等々に

よって確定されるわけではない。つまり，あるものをある特定の街灯柱として個体化する諸条件は，それをある特定の数として個体化する諸条件ではありえない。そしてこのような個体化条件の相違は，それらの間の同一性を無意味と見なすための重要な条件の一部として見なされるべきだ，というわけである。つまり，ベナセラフの見解は対象の概念はカテゴリー依存的ないし理論依存的なのだという見解である。同一性が多義的ではなく常に対象の等しさを意味するという点でフレーゲに同意するとしても，対象の概念は諸々の理論ないしカテゴリーに応じて変動すると主張することが可能である。まさに「対象の概念は理論から理論，カテゴリーからカテゴリーに応じて変動する」[11] という点を見落としたところに，(c) のようなタイプの等式が有意味だと考えたフレーゲの臆見がある，というのがベナセラフの診断である。

以上のベナセラフの分析が示唆していることは，数とは何かという問いを考察する際は諸対象に課せられる何らかの条件が重要なのではなくて，重要なのは，集合に限らずそれら対象がそのもとで前進列を形成するような関係に課せられる条件だということである。「『対象』は諸々の数の役割を一つ一つ果たすわけではない。そうではなくて，全体としての構造がその役割を果たすか，さもなくばその役割を果たすものは何もないか，なのである。」[12] そして，「諸対象からなるある体系が整数の構造を呈するということは，その構造の諸要素が構造に依存しない何らかの特性をもつということを含意している。それら諸対象を，それらがその構造において果たす役割とは独立に個体化することが可能でなければならない。しかしまさにこのことこそは数についてはなしえないことなのである。」[13]

かくしてベナセラフの構造主義的見解が提示されることになる [14]：

> したがって，算術は，すべての前進列が単に前進列だということによって共有する抽象的構造を仕上げるような科学である。算術は，特定の対象 —— 数 —— を扱う科学ではない。数が本当は独立に同定可能な特定の対象のうちのどれなのか（集合か？ジュリアス・シーザーか？）についての探求は見当違いなものである。

以上が「数は対象ではありえない」という結論を導いたベナセラフの議論の粗筋である。

2　指示の不可測性なのか？

前節でわれわれは「数は対象ではありえない」という結論を導いたベナセ

ラフの議論を概観したけれど，三平氏はそこでの論点が数詞の指示の不可測性ないし翻訳の不確定性であると理解している[15]。三平氏は「[ベナセラフの議論が示していることは］クワインの翻訳の不確定性の特別な場合に過ぎず，したがって数を対象と見なすことがウサギを対象と見なすこと以上に擁護不可能なことを示していない」[16]というヘイゼンの言葉を引用し，それゆえ，ベナセラフの議論を踏襲する限り，「ウサギも人間も，他の様々なものも対象ではありえず，ウサギや人間といったものは存在しない」[17]と結論されることになるだろうと述べている。そして，もしかしたらそのような可能性もありうるかもしれないということがベナセラフが主張したかったことではまったくないのだから，ベナセラフの議論は自己論駁的なのだということになる。

にもかかわらず三平氏はこのようにベナセラフの議論を締めくくった後で次のような見解を表明している[18]：

> すると，ここからさらに，ベナセラフの議論はプラトニズムに打撃を与えなかったと言えるだろうか。残念ながら，そうではないように思われる。たしかに，ベナセラフの議論は支持できない。しかし，数は集合（対象）であると主張することが許されたのは，我々がベナセラフの要求に従わなかったからである。だが，この要求が意味してるのは，実際には，算術は一つの確定した領域を扱うという，伝統的なプラトニズムの立場とされているものに他ならないだろう。算術をこのように見る限りでは，ベナセラフの議論は，その際には大きな困難が生じてしまうことを見事に示している，と考えられる。

ここで三平氏が「ベナセラフの要求」として理解しているのは，「数詞の指示の正しい説明は，もしあるとすれば，ただ一つでなければならない」[19]という要求である。そして三平氏は，この要求は結局のところ「算術は一つの確定した領域を扱うという伝統的なプラトニズムの立場」[20]からの要求であり，そもそもフレーゲのプラトニズムは「実在のうちには一つの確定した数の領域，つまり，本当の数領域があり，それを発見して描写するのが算術の課題だと考えている」[21]わけではなく，「このような描像は，結局のところ，後の哲学者によってフレーゲに押しつけられた過度の単純化」[22]であり，それゆえ「ベナセラフの議論は，フレーゲのプラトニズムにはいかなる打撃も与えなかった」[23]，と応答している。

もちろん事はそう単純ではない。もしベナセラフの議論が結局のところ数詞の指示の不可測性の問題であるならば，その議論は数に限らずウサギや人

間や，そういった様々なものにも適用されるべきであり，そして最後には真相が知られたならば対象と見なされるものなど存在しないのだ，という帰結になるだろうということだった。しかしこの議論が「その際には大きな困難が生じてしまうことを見事に」示しているケースが，三平氏が述べているように，「実在のうちには一つの確定した数の領域，つまり，本当の数領域があり，それを発見して描写するのが算術の課題だ」という考えであるのだとしたら，当然次のようにも主張されねばならないはずである：「実在のうちには一つの確定した生物の領域，つまり，本当の生物領域があり，それを発見して描写するのが生物学の課題だと考えているわけではない。このような描像は，結局のところ，後の生物学者によって押しつけられた過度の単純化である。」しかし三平氏の議論を私が理解した限りでは，もしかしたらそのような可能性があるかもしれないということは，三平氏が主張したいことではまったくないように思われる。

このように議論がねじれてしまった原因はベナセラフの議論の論点が数詞の指示の不可測性にあると理解されたからである。指示の不可測性は何でもありだから，もしベナセラフの議論が数詞に関する指示の不可測性の議論であるとしたら，最終的にはその議論は自己論駁的になるほどまでにあらゆる対象を巻き込んでしまうのは当然なのである。しかしベナセラフの議論の論点は指示の不可測性とか翻訳の不確定性にあるのではない。指示の不可測性の問題は，われわれが「猫がマットの上にいる」と主張するとき，この文の中に現れる名辞「猫」の意図された指示を固定するものが世界のどこにも —— われわれの心の中にでさえ —— 存在しないという問題である。なるほど確かに，数詞 '3' が集合 {∅，{∅}，{∅，{∅}}} を指示するのか，それとも集合 {{{∅}}} を指示するのかを決定する原理的根拠が見出せないというベナセラフの議論は指示の不可測性のような印象を与える。しかしベナセラフの議論はそのように理解されてはならないのであって，そこでの論点はある特定の集合を指示するというように数詞の指示の唯一性を示すことができないという点にある。数詞の意図された指示を固定できないということと数詞の指示の唯一性を示すことができないということは違う問題である。

このように数はある特定の集合ではありえないというベナセラフの議論の論点は数詞の指示の唯一性にあるのだが，彼はそこからさらに同一性および個体化可能性条件という論点を提示することによって「数は対象ではありえない」という結論を導いていた。以下ではこれら二つの論点に着目し，ベナセラフの見解とフレーゲの見解との対立点を明確にする。

3　同一性と個体化可能性条件

ベナセラフの構造主義的見解とフレーゲの論理主義との対立は，「ジュリアス・シーザー＝概念 F の数」という形式の等式，つまりベナセラフが提示していた (c) のようなタイプの等式の有意味性の問題という場面で先鋭化してくる。そしてここでの問題の焦点は，多かれ少なかれ，何かが対象であると認可されるための基準を巡っている。ベナセラフの考えでは，あるＣが対象であると認可されうるのはＣを個体化するための諸条件がある程度はっきりした仕方で働いている場合なのであって，そのような制約された文脈でのみ同一のＣを問うことが意味をなす。ジュリアス・シーザーの場合には，歴史的出来事や人種，階級等々によって個体化が可能である。一方数３の場合には，それが三つのメンバーを含むのかそれとも唯一つのメンバーしか含まないのかということによって個体化可能であるわけではない。数３であるということは，数２に直続するということや素数であるというような「すべての前進列が単に前進列だということによって共有する抽象的構造」に課せられる条件のもとで説明される。それゆえ一般に数の場合には，各々の数を個体化するための諸条件が希薄だというのではなく，そもそもそのような諸条件が存在しないように見える。したがって数は対象ではありえない。

けれどもブーロスが指摘したように，数についてのゼロの情報に対してはベナセラフの議論は成立しないように思われる[24]。つまり，ベナセラフの議論は「数はある特定の対象Ｃ —— 現在の場合であれば集合 —— ではありえない」という主張を非常にもっともらしい仕方で確立はしたけれど，「数は ξ ではありえない」という文の‘ξ’の場所に「数それ自体」を代入すれば，「数は数それ自体ではありえない」というパラドキシカルな結論を導くことになる，というのがブーロスの指摘である。

ブーロスの指摘は非常に的を射ている，と私は思う。ブーロスの指摘は，もっとも単純に考えれば，数詞が対象変項の場所に出現するという事実だけから理解することができる。「数は ξ ではありえない」という述語 —— より適切には「ξ は数ではない」という述語 —— を，フレーゲの用語法を用いて述語‘$\neg\exists F$ (ξ ＝ 概念 F の数)’と表記するならば，ブーロスの指摘はベナセラフの議論が次のような帰結をもたらすという指摘として理解することができる：

$$\forall x \neg\exists F\ (x = \text{概念}\ F\ \text{の数})。$$

明らかにこれはパラドキシカルな帰結である。それというのも，この式から

すぐさま「すべての概念について，それに属する基数がまさにそれに属する基数と同一でない —— $\forall F \neg$（概念 F の数＝概念 F の数）——」ということが導かれるからである。しかしブーロスが指摘した留保はフレーゲの論理主義にとっては何の援護にもならないということは明白である。なぜなら，フレーゲの論理主義の核心は「数は対象である」というだけでなく，「数は論理的対象である」という数についての情報を含んでいるからである。

フレーゲの論理主義においては，何かが対象であると認可されるための基準として個体化可能性はほとんど問題とされない。フレーゲの論理主義の見解からは，何かが対象であるための条件は，少なくとも，それを表示する表現がどこにも空所をもたないということ —— フレーゲの言葉で言えば「飽和していること」——，そしてその指示の唯一性が常に保証されているということである。

第１節で見たように，フレーゲは，等式「概念 F の数と概念 G の数は同一である」の意味と「F と G は同数的である」の意味が同じだという約定によっては，等式「ジュリアス・シーザーと概念 G の数は同一である」の有意味が説明されないという困難を提起していた。フレーゲはこの困難に直面して概念の外延を既知の存在者として導入し，概念Fの数を次のように定義した[25]：

概念 F の数＝概念〈F と同数的〉の外延。

そしてフレーゲは，数の場合に限らず方向や三角形の形のような抽象的対象が概念の外延によって定義される可能性をも考えている：

直線 a の方向＝概念〈直線 a と平行〉の外延。
三角形 d の形＝概念〈三角形 d と相似〉の外延。

これらの定義はどれも‘q’が抽象的対象を表示する表現であるところで

q ＝概念 F の外延

という形式をしている。つまりここでフレーゲが意図していることは，概念の外延の対象としての役割を，再認文としての等式の利用価値の一般性と一致するという地点まで拡大させるということである。

もちろん‘q’がジュリアス・シーザーといった抽象的対象とは異なったカテゴリーの対象を指示する場合も考慮される。『算術の基本法則』第１巻[26]

第10節ではもっぱら真理値の場合が考察されているが，qが真理値以外の対象であるときも，真理値の場合の解決策が適用可能である。すなわち，qを概念〈qと同一〉の外延と同一視するのである：

q＝概念〈qと同一〉の外延。

それゆえフレーゲの理論では，'q' がシーザーを指示するときは，シーザーは彼自身が唯一そこに帰属するような概念の外延として導入されることになる。この一連の手続きはフレーゲの体系に矛盾を持ち込むような手続きではない。フレーゲの理論の無矛盾な部分でこの約定が成立するようなモデルを構成すことができる[27]。かくしてシーザーは概念の外延であるのか，もしそうであるならばどの概念の外延であるのかという問いに対しては一応の解決が与えられる。シーザーを概念〈シーザーと同一〉もしくは，同じことであるがシーザーが唯一そこに帰属するような概念の外延と同一視することは可能である。

フレーゲは，『基礎』の時期には，概念の外延を概念と言い換えることができると考えていた[28]。しかし，もしそうであれば概念の外延は先に述べた対象であるためのフレーゲの条件を満たさない。概念を表示する表現はその中に少なくとも一つの空所を持っているはずであり，それゆえもし概念の外延が概念によって言い換え可能であるならば，概念の外延は対象ではありえない。『基本法則』に至る頃までには，フレーゲは概念の外延を概念によって言い換えられるとは考えなくなったけれど，そのことは概念の外延を表示する表現 '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' の形成法からもはっきりする[29]。それは，操作子 '$\dot{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$' が概念名 '$\Phi(\xi)$' の空所を埋めることによって飽和した表現として提示される。そして表現 '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' の指示性 —— フレーゲの理論で常に何かを指示するということ —— は，操作子 '$\dot{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$' の意味論的約定 —— $\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$と$\dot{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$が同一であるのは，$\Phi$と$\Psi$が共外延的であるときそのときに限る —— に基づいて，等式 '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)=\dot{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$' の有意味性を論証することによって示されると考えられている。そのことはまた同時に表現 '$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' の指示の唯一性を示すということでもある[30]。

何かが対象であると認可される基準がどのような基準であるべきか，もしくはその必要条件がどのような条件であるべきかという問題は非常に難しい問題である。少なくともベナセラフの個体化可能性条件を対象であるための認可証とする限り，数に限らず抽象的対象と考えられている存在者たちを対象として認可することはできないように思われる。私の主張としては，抽象的対象と考えられている存在者たちを対象と見なすことに寛容な立場の人々

は，ベナセラフの個体化可能性条件を対象であるための必要条件としては拒否するべきである。そこで，フレーゲ主義者が応答せねばならないと思われるベナセラフの議論の中にある二つの問題について考えてみよう。

まず一つは，集合であれ外延であれ，そのような存在者によって数を説明した場合に，本来ならば数が持つ必要がないような特性を数に付加することになるのではないかという問題である。確かに三つの対象をそのメンバーとして含むという特性や，それどころかそもそも何かをメンバーとして含むという特性は数 3 の本来的特性ではないように思われる。しかしこのような事態の発生は，集合論の内部でもしくはフレーゲの理論の内部で数の理論を展開するということが企てられたときからもはや運命づけられている。しかし個体化可能性条件を対象であるための条件としては拒否するならば，メンバーシップ性によって数を個体化できないということ，三つのメンバーを含んでいるということによって数 3 を個体化できないということは数から対象であるための権利を剥奪することにはならない。われわれは 'q' がジュリアス・シーザーのような対象を指示するときには，それを概念〈q と同一〉の外延と同一視することができるということを見たけれど，そのことによってジュリアス・シーザーがメンバーシップ性によって個体化できると主張しているわけではない。むしろメンバーシップ性といった性質は，集合ないし外延によって導入される被導入項であるところの存在者の特性なのではなく，導入項であるところの集合ないし外延が背景としている理論に相対的な仕方でもたらされる性質である。フレーゲの論理主義の確立にとって重要なのは，数が外延として導入されることによって，数が論理的対象として正当化されるということである。それゆえ，メンバーシップ性が数の特性ではないだろうということ，また三つのメンバーを含んでいるということが数 3 の特性ではないだろうということはフレーゲの論理主義を確立するうえで何ら障害にはならないように思われる。

もう一つの問題は「数は集合ではありえない」という主張を確立するためにベナセラフが議論していた数の多重還元の問題である。基数性に基づいたフレーゲによる基数の定義はフォン・ノイマン数の先駆けと見なすことができるけれど，ツェルメロ数はそのような仕方で説明されてはいない。にもかかわらず，算術を展開するという観点から考えればどちらも数の説明として充分にその使命を果たしているように思われる。もしツェルメロ数を数の定義と見なすならば，数の本性が概念間の同数性関係に基づくという見解を擁護することは非常に困難になる。この問題は非常に難しい問題であり，数に限らず，抽象的対象のプラトニズムを擁護する際には常に付き纏う問題である。この問題にどのような応答が可能なのかということは今後の大きな課題

として残されている。

4　結　論

フレーゲは等式「ジュリアス・シーザーと概念 F の数は同一である」の有意味性の問題が，一般に 'q' が抽象的対象を表示するところで

$$q = \text{概念}\ F\ \text{の外延}$$

という明示的定義を与えることによって解決されると考えた。われわれが考察したように，そこでフレーゲが意図していることは，概念の外延の対象としての役割を再認文としての等式の利用価値の一般性と一致するという地点まで拡張させるということである。『基礎』でフレーゲが想定していた概念の外延についての既知性は，それがジュリアス・シーザーと異なった種の対象であるということが一般的に承認されているということに論点があるのではなく，われわれが概念について語っているときは常にその概念に対応した外延が念頭に置かれているということが暗黙的ではあれ承認されているではないかということに論点がある。したがって，フレーゲにとってシーザー問題は「数は本当は対象の集まりのうちのどれなのか」という問題ではない。というよりは，シーザー問題は，「数は本当は何であるか」という問いが「数は何であるか」という問いとは異なった何か重みがあるような問題ではない。だから，シーザー問題に対するフレーゲの応答は，対象の集まりの中から概念の外延を選び出して数詞の指示対象と見なすという応答でもない。シーザー問題に対するフレーゲの応答は，数といった抽象的対象についてわれわれが語っているときは常にその背景で概念から外延へと到ることが想定されており，そのことによって抽象的対象に対する指示が正当化されるという応答である。

『基礎』第 107 節で「概念の外延に訴えることに決定的な重要性を置いているわけではない」と述べているように，この時期のフレーゲは概念の外延に対してアンビバレントな態度であった。しかし『基本法則』に至る頃までには，フレーゲは概念の外延なくしては彼の論理主義のプロジェクトは確立できないと明確に意識するようになった。そして『基礎』では概念の外延の既知性ということで曖昧に想定されていた事柄が，フレーゲの論理の基本法則としてはっきりと提示された。それが「$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ と $\grave{\varepsilon}\Psi(\varepsilon)$ が同一であるのは，Φ と Ψ が共外延的であるときそのときに限る」という約定であり，この約定がフレーゲの第 5 公理として形式化された。

第５公理から包括原理と呼ばれる原理が導出されることはよく知られている：

包括原理：$x \in \dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon) \leftrightarrow \Phi(x)$.

包括原理は概念の外延が論理的対象と呼ぶに相応しいという保障を与える。それというのも，ある概念の外延のメンバーになっている対象たちはまさにその概念によって決まってくる対象たちに限られるということが，包括原理が述べていることだからである。

『基本法則』では意義と意味の理論を背景に，真理値が他の対象から区別されなくなると，真理値は外延なのか，そうならばどの概念の外延なのかという問題が発生した。フレーゲは『基本法則』第１巻 第10節で 'q' が真理値の名前であるところで，q を概念〈q と同一〉の外延と同一視することができるということを示して，ここでの問題を解決した。この解決策は真理値に限らずわれわれに値域からは独立に与えられているすべての対象に対しても適用可能である。

このようにフレーゲの理論の最終段階では，概念の外延の対象としての役割が極大的に一般化される。何であれ対象が様々な仕方で与えられるにもかかわらず，それを再認するために使用される等式の利用価値の一般性と一致する地点まで外延の対象としての役割を拡大させることによって，フレーゲはどのようなタイプの等式であれ，その有意味性を保障することができたと考えた。そして真理値はフレーゲの理論では紛れもない対象として扱われるので，フレーゲの理論における有意味性は，単称名辞であれ文であれ，指示というソリッドな観念によって説明される：'q' がどのような対象を指示しようとも，等式 '$q = \dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' は真ないし偽を指示し，もし真を指示するならば，その際 '$\Phi(\xi)$' はどのような概念を指示するのか。論理がその一般性においてあらゆる理論を凌駕するという意味で極大的に一般的な理論であるのと相即的に，フレーゲの論理においては「ドメインを構成するという役割」および「述語がそれについて真であったり偽であったりする役割」を担うものとして概念の外延は極大的に一般的である。'q' が何を指示しようとも，等式 '$q = \dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' が常に何かを指示するということを要請したということは，そういうことである。外延の概念がカテゴリーに応じて変動するということなどありはしない。それゆえ，「対象の概念は理論から理論，カテゴリーからカテゴリーに応じて変動する」からといって，異なった種の対象を表示する名辞間の等式が非文法的である，もしくは非有意味（非指示的）であるというような中間的状態を許す余地などフレーゲの理論にはありはしない。そ

してわれわれが考察してきたように，この問題に対するフレーゲの解決はかなりの部分まで成功しているのである。

概念の外延が包括原理によって導入されるということが概念の外延が論理的対象であるということを説明する。しかしその背景で想定されている第5公理が矛盾を含意するという事実は，フレーゲの論理主義の核にあるこの思想の根本的修正ないし放棄を迫った。「17＝ジュリアス・シーザー」といったタイプの等式の有意味性を問うということが論理主義という楽園の禁断の木の実なのではなく，フレーゲの第5公理が彼の論理主義の，それゆえ「数は論理的対象である」という中心テーゼの原罪なのである。

註

1）Benacerraf, P., 'What Numbers Could Not Be' (1965), rep in *Philosophy of Mathematics*, 2nd edn, Benacerraf, P and Putnam, H (eds.), Cambridge UP, 1983, pp. 272-294.

2）三平 正明，「フレーゲとベナセラフ：数とは何かを巡って」，『科学哲学』33-2，2000 所収，pp. 147-161.

3）三平［2000］，p. 159.

4）Frege, G., Die Grundlagen der Arithmetik(1884), Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1988.

5）Benacerraf [1965], p. 285.

6）Cf. ibid., pp. 285f.

7）ここでの約定はいわゆるフレーゲ的抽象原理の一事例である．フレーゲ的抽象原理の一般形式は，α と β が同じタイプの変項であり，Σ は '$\Sigma\alpha$' が単称名辞となる操作子であり，$\varepsilon(\alpha, \beta)$ は α と β の間で成立する同値関係であるところで，$\Sigma\alpha = \Sigma\beta \leftrightarrow \varepsilon(\alpha, \beta)$，という形で与えられる．ちなみに，ある関係 R がクラス D 上の同値関係と呼ばれるのはそれが次のような関係であるときである：D の任意のメンバー x，y および z について，Rxx（反射性），$Rxy \rightarrow Ryx$（対称性），$Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz$（推移性）が成立する．同数関係は概念のクラスの上での，平行関係は直線のクラスの上での，そして相似関係は形のクラスの上での同値関係である．

8）Benacerraf [1965], p. 286.

9）Ibid.

10）Ibid.

11）Ibid., p. 288.

12）Ibid., p. 290.

13）Ibid., p. 291.

14）Ibid.

15）Cf. 三平 [2000], p. 155f.

16）Hazen, A., 'MacGinn's Reply to Wright's Reply to Benacerraf', p. 59, in *Analysis* 45, 1985, pp. 273-308. 三平 [2000], p. 155 からの孫引き．

17）三平［2000］，p. 156.

18）Ibid.

19）Ibid., p. 154.

20）Ibid., p. 156.

21）Ibid., p. 159.

22）Ibid.

23）Ibid.

24）Benacerraf, P., 'What Mathematical Truth Could Not Be — I' (1998)，in *The Philosophy of Mathematics Today*, Schirn, M (ed.), Oxford UP, 1998, pp. 33-75, p. 49.

25) Frege [1884], § 68.

26) Frege, G., *Grundgesetze der Arithemetik* I (1893), II (1903), Georg Olms, Hildeshein, 1998.

27) 次の論文を参照．井上直昭，「シーザー問題と『算術の基本法則』第 1 巻 第 10 節におけるフレーゲの約定」，『科学哲学』36-1，2003，pp. 17-28.

28) Frege [1884], § 68 の註を参照。

29) 『基本法則』では概念が関数へと一般化され，概念の外延は関数の値域と呼ばれるようになるのであるが，本論では関数の値域も概念の外延ということで統一しておく．この一般化にともなって幾つかのテクニカルな整備も必要になるのであるが，それらのことは本論の議論とは直接関係がない．

30) Frege [1893], § 31.

（いのうえ・なおあき　筑波大学哲学・思想研究科）