2019筑波大学附属駒場論集59集

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

―中高６か年から大学へ（５年計画の３年次）―

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
三井田裕樹・薄井　裕樹・鈴木　清夫
須田　　学・須藤　雄生・町田多加志
吉崎　健太

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

―中高６か年から大学へ（５年計画の３年次）―

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
三井田　裕樹・薄井　裕樹・鈴木　清夫・須田　　学
・須藤　雄生・町田 多加志・吉﨑　健太

要約

2017 年度にスーパーサイエンスハイスクールⅣ期目に指定され，今年で通算 18 年目となる。この 18 年間で数学科は日々の授業において生徒が探求的で深い学びにつながる数学的活動の契機となるような教材の開発及び実践・発信・共有に取り組んできた。また，大学の教員による数学特別講座を引き続き実施し，Ⅳ期目より新たに企画した本校 SSH 研究で育った OB を活用する数学オリンピックワークショップも３年目を迎え，更なる拡充を目指している。さらに課題研究等の主体的な探求活動を支援するための取り組みも，多くの SSH 研究発表会に参加し生徒が活躍することで成果を出している。本稿は数学科の取り組みの報告と，これからの計画について記載したものである。

キーワード：探究的で深い学び，中高大院連携

1　はじめに

本校は 2002 年度から 4 期 20 年にわたりスーパーサイエンスハイスクール（以下，ＳＳＨ）の指定を受け，本年度は SSH の第Ⅳ期の中間評価の年である。高等教育においても探求型の学びや対話的な学びが教育の柱となりつつある昨今において，中等教育においても高等教育機関での学びの視点に立った学習指導で活用する教材の開発はますますその重要性を高めている。

数学科としては本校 SSH 第Ⅳ期の研究主題「国際社会に貢献する科学者・技術者の育成を目指した探求型学習システムの構築と教材開発」のもと，これまで 17 年間継続して取り組んできた教材及びカリキュラムの開発により一層注力するとともに，数学オリンピック参加や課題研究等，生徒の探求的な活動を支援する取り組みについても，これまでの実践及び経験を踏まえつつ，新しい取り組みも実践している。

数学科ではこれら様々な取り組みの基盤は授業であると考えている。日々の授業の目標は，知識や技能及び表現力などを身に付けさせながら創造性の基礎を培い，数学のよさを認識して積極的に活用することや数学的論拠に基づいて判断する態度を育てることである。そして，日々の授業において生徒も教師もわくわくして取り組めるような教材を教師が開発し実践することが，生徒の生涯にわたって積極的に数学にかかわっていく能力や態度を育む契機になると考えている。

これまでの 18 年間，数学科は大学や社会に繋がる中高の教材を開発すべく研究を行ってきた。数学の様々な分野において，これまでに開発した教材数は 100 を超えようとしている。また，これらの教材を効果的に実践するため開発した，これまでの中高６カ年のカリキュラムも深化を図り，本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへ配置するとともに，実践例を教育研究会・教員研修会等で授業案と教材として発信・公開し，その効果を確認している。

さらに，教材・カリキュラム開発以外に，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」，探求型学習システムとして「課題研究（高 2・高 3）」および「テーマ学習（中 3）」，数学オリンピックへの参加支援や数学研究部など生徒の数学的活動の支援等を実施している。

また，新しい取り組みとして本校ＯＢで国際数学オリンピックのメダリスト達に協力を仰ぎ，「数学オリンピックワークショップ」を 2017 年度より継続実施している。

2　今年度(2019 年度)の研究

2.1　教材・カリキュラムの開発

教材開発はいうまでもなく日々の授業において絶え

<Project research>
Creative Teaching Materials, Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

ずなされているものである。先述のとおり，本校数学科ではすでに100近い教材開発の事例を蓄積しているが，ほとんどの教材に通底しているのは，扱いたい中心課題と，それに対する生徒の発想や反応が対となっていることである。教材によっては，生徒の発想がさらに次の課題を生み出し，数学的活動のサイクルが展開しているものもある。これが，本校数学科における教材開発の基本姿勢として「教師と生徒との相互作用で築き上げること」を掲げている所以である。

教材を束ねるカリキュラムの開発に関しても，発想はトップダウンではなく，ボトムアップであると言えるだろう。すなわち教師は，日々の教材開発において，授業を通して生徒との相互作用で教材を磨きつつ，次にどのような教材を提示するか，どのような課題へとつなげるかを考え，理解や深化，発展や一般化への流れを組み立てる。例えば，関数のグラフの和や差について扱う教材については，中学校での比例・反比例の学習から高校での微分・積分の学習までを一貫し，さらに大学における数学をも見通した中心概念として，長年の教材開発の蓄積が，一種のカリキュラムとして成立しつつある。

ひとつの教材に対し，教師と生徒が授業の中でともに知恵を出し合い，さらに定例の数学科教科会を通して教師間でもさらに深める。この繰り返しが，本校数学科の教材開発と実践研究の中心である。開発教材集として提示しているものは，日々の膨大な授業の中で試行錯誤しながら，一定の成果としてまとまったものの一部にすぎない。また，開発教材自体も完成されたものではなく，同じ教材を異なる教師が扱い，異なる生徒が取り組むことで，さらに新しい視点や，深い考察が生まれていく事例もある。

第Ⅳ期を迎えた本校SSH事業において，今まで以上に求められるのは，新たな教材開発はもちろんのこと，既に開発し共有している教材についても，本校に限らず広く他校で実践していただき，その反応をもとにさらに洗練していくことである。そして，個々の教材と，それを貫くカリキュラムという視点で既存のカリキュラムや教材を見直し再構成することが，研究主題として標榜する「探究型学習システムの構築」にもつながっていくのではないかと考えている。

2.2 教員研修会の実施

前節で述べたとおり，開発した教材・カリキュラムをSSH数学科教員研修会で公開し，全国に向けて共有するとともに，本校における今後の研究の指針を得ることとしている。今年度は8月に沖縄県立球陽高等学校，11月には本校教育研究会にて公開授業と研究協議会を，それぞれ実施した。

2.2.1 SSH数学科教員沖縄研修会

《実施概要》

日　程：2019年8月28日（水）

会　場：沖縄県立球陽高等学校

参加者：本校教員，沖縄県中高数学科教諭，行政職
　述べ50名

■ 研究授業　10:05〜10:55

授業1「数と式」

生徒：沖縄県立球陽中学校3年生 40名

授業者：須田　学（本校教諭）

中学3年生研究授業

授業2「2次関数」

生徒：沖縄県立球陽高等学校 2年生　44名

授業者：町田　多加志（本校副校長）

■ 研究協議およびSSH教材等についての報告

1. 球陽高等学校 発表

「球陽SSH数学の現状と課題」 徳門　潔先生

2. 筑波大学附属駒場中・高等学校 発表

①「筑駒数学科のSSH」三井田裕樹

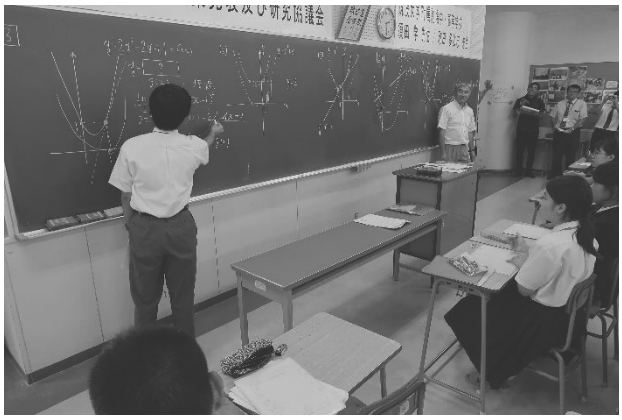
②「不等式の活用」　吉崎 健太
③「スターリング数に関する教材」薄井 裕樹
④「反転の愉しみ」更科 元子
⑤「3 次関数と面積比」　須藤 雄生
⑥「微分方程式への誘い」鈴木 清夫

研究授業の協議会や，各校の発表に対し，大変熱心に協議に参加してくださる沖縄県の先生方が多く，数学教育に携わる者としての情熱が印象的であった。

生徒アンケートの自由記述では以下のような感想があった。

・微分を使わずに 2 次関数の接線を求める方法がわかった。3 次関数やそれより次数が高い関数にも応用できるか試したい。
・微分以外にも接線を求める方法があることを初めて知りました。今までに習った知識でも工夫をすれば難しい問題が解けることを知りました。
・2 次関数を足してズラして考えるような方法は初めてだったので，考え方にとてもびっくりした。
3 の問いで，この方法の応用が出来て，2 次関数の問いでこれから使ってみようと思いました。
・今日の授業で，2 次関数について直線と放物線を合わせたとき，どのような形になるか知ることができた。切片が入ったり，放物線が移動したりすることになって，いろいろな形になることがわかった。
・２つの関数を使うと平行移動しているように思えた。最後の問題で，微分を使わないで簡単に接線を求めることができることに感嘆した。

また，研修に参加した先生方からは以下のような感想があった。
・対戦ゲーム（中学授業）に取り組む過程で，法則を見出そうという姿勢が見られ，生徒の思考が深まっていると感じた。中 3 の教科書の範囲であり，日常の授業に生かせる内容だった。数学の楽しさを感じるとともに，事柄に潜む数学の見方を広げる効果的な在り方に触れることができ，とても有意義だった。
・レベルが高すぎる教材だったが，数学のおもしろさ，深さを感じることのできる教材だった。須田先生の生徒の反応に合わせる柔軟さにも感心した。「数学の感覚を養う」ことのできる数学の授業（教材や展開）は，市町村立中学校の教員も学ぶべきだと感じた。市町村も早く受験数学，学力調査の数値を意識した数学から解放されるべき。駒場の先生方はどの先生も個性的で，日ごろから数学の面白さや奥深さについて考えているのだろうなと刺激を受けた。
・今後「探求」ということがキーワードになってくるのではないかと思う。そのために授業改善はもちろんのこと，探求したくなるような題材や教材が大事になってくる。大変参考になりました。
・色々な力をつけて高校に進学させてあげないといけないと感じた。規律も大切ですが，筑駒の先生方は職員間の関係性もフランクで，とても良い関係であることが，学力の向上に結びついていると思った。
・筑駒の先生方のキャラの濃さが一番印象に残りました。全員が「数学好き」ということが伝わり，日ごろのコミュニケーションや授業の取り組み方，考え方のレベルの高さを感じました。
・全国のトップ校の数学教員の研究成果を伺うことができて，これからも頑張ろうという気持ちになりました。
・２つの研究授業とも，球陽の生徒の良さを引き出す教材と展開で，とても刺激を受けました。特に高校生向けの関数の合成では，三角関数の合成が急に出てくるなと思っていたので，この分野で合成を導入しておくと考えが広がり深まるなと感じました。展開では，生徒の言葉を広げて自然につなげていく展開が見事で，生徒の集中力が高まっていくのが印象的でした。特に，生徒自身の発見を十分に活用できる課題が最後にあり，それで考えがさらに深まっていて，本当にすごいなと思いました。楽しさをもって学んでいきたいと思いました。



生徒の発見を引き出し，生徒が課題を解決した瞬間

・教科書とは違う視点で 2 次関数の接線の方程式を求める考えが大変参考になった。三角関数の合成を「ストローグラフ」でやっていたが，今日の「グラフを上に押し出す」というイメージを持てば，2 次関数でもできると知り，ぜひ自分の授業でもやってみたいと

思った。
・数学のおもしろさ，不思議さなど，あらためて数学の魅力を深く感じられた。教材ダウンロードして楽しんでみたいと思います。
・普段の研修では学べないような貴重な機会だった。公立中学校でどれほど持ち帰れるのかわからないが，自分自身の視点をしっかり持ちたい。自校の数学好きの生徒をどう伸ばしたら良いのか，高校にどうつなげたら良いのか，考える機会になった。
・授業の「わくわく感」を大切にしているという言葉を聞いて，生徒がアクティブに楽しめる授業を企画するためには，教員も楽しむ心を忘れてはいけないと改めて感じました。生徒が考える・わかることが楽しいと感じていると，生徒がどんどん話してくれて，その中でも気づきが生まれてく様子を見て，自分自身も生徒主体の授業を創っていけるよう，研究に励みたい。
・カバリエリの原理に感動しました。

本校数学科の“鉄板”教材「微分をしない微積の教材」

・元気がでました。また参加したい。
・本校も今年からSSHに指定され，数学科としてどのように課題研究に取り組むか，日々の工夫をどうするか考えているところです。今まで知らなかったことや新しい視点での切り込み，とても参考になりました。
　球陽高校の取り組みも大変勉強になりました。学校に持ち帰って，還元し，また発展していける取り組んでいきたいです。
・「生徒は難しい問題ほど算数で解きたがる」という言葉がとても印象的でした。本校の生徒にはない考え方。多面的な視点で物事を捉えるという数学の本質が生徒にも伝わっている証拠だと思います。

沖縄県立球陽高等学校との共催で，2 つの研究授業，研究協議会，SSH 教材等についての報告と研究協議を実施した。アンケート結果から，本校の教材発表に対する評価が高く，また，このような研修会を実施する意義が大きいことが分かる。今後も，教材を開発し続け，本校以外の生徒への授業も実施し，教材の提示の仕方も含めて，広く一般に普及するように努めたい。

2.2.2 第 46 回教育研究会

《実施概要》
日程：2019（令和元）年 11 月 23 日（土・祝）
会場：本校
研究会主題『主体的で探究的な深い学びをめざして』
研究授業：
中学 2 年『乗法公式を活用した活動』吉崎　健太
高校 1 年『2 次関数のグラフ』薄井　裕樹
数学科公開授業・研究協議会参加者数：約 180 名

高校 1 年生の研究授業の様子

　本校で年に 1 度, 11 月に開催される教育研究会では，数学科は隔年（西暦奇数年）で公開研究授業および研究協議会を実施している。広く全国の教育関係者に，本校の授業を実際に見て，フィードバックをいただける貴重な機会となっている。今年度は中学 2 年生でカードゲームを取り入れた乗法公式と整数の性質に関する授業，高校 1 年生でグラフの座標軸と式の多面的な見方を問う 2 次関数の授業を公開した。研究協議会では，授業内容に関する協議に加えて，数学科 SSH としての取り組みや教材開発の視点，本校数学科での日頃の教科会と教材検討の体制についても，フロアの多数の教育関係者とともに意見を交換することができた。今後も教材の質，授業の質を高めることはもちろん，その成果を通して，全国の数学教育の現場とつながって情報を共有するという面でも，本校教育研究会の場

が主要な役割を担うことに変わりはないであろう。

2.3 数学特別講座の実施

今年度に実施した特別講座のテーマと日程・講師は以下の通りである。回数は第Ⅰ期SSHからの通算，テーマと内容は生徒への募集案内に記載したものである

募集案内を配布して希望者を募り，期末考査後の特別授業期間中に講義して頂いた。

○第49回数学特別講座

『高次元の統計解析とその応用』

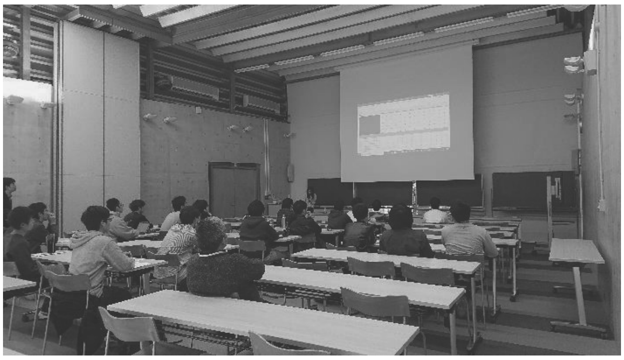
日時：令和元年12月16日（月）13:30～15:30

場所：50周年記念会館

講師：石井　晶　氏

（東京理科大学 理工学部 助教）

参加者：中1から高3までの希望者23名



内容：（参加募集案内，石井先生執筆）

現代科学のデータは，ビッグデータと言われるように巨大化する一途を辿っています．例えば，ゲノム科学・情報工学・金融工学では，データの次元数が標本数より圧倒的に大きい，高次元小標本 (HDLSS)データに対する統計解析が必要不可欠です．

従来の統計学は，大標本を前提とするため，HDLSSデータ解析に精度を保証する解を与えられません．そこで，我々の研究室は，「高次元統計解析」という新たな理論と方法論を提唱し，HDLSSデータの理論的な扱い方を研究してきました．高次元統計解析の著しい発展は，2010年代に入ってからのことで，いまも発展し続けています．

本講演では，数万を超えるゲノムデータを，数十程度の標本数で解析するために，どのような高次元統計解析が必要なのか，具体的な例を用いてお話をします．ゲノムデータのような高次元データは，非常に大きなノイズを含んでいます．我々が提唱する高次元統計解析は，その巨大なノイズを捨てるのではなく，有効に活用することで，精度を保証する解を与えます． 当日は，高次元統計解析の応用に重点をおきながら，そのアイディアや，理論的な側面もお話しします．高次元統計解析については，青嶋 誠・矢田 和義 著『高次元の統計学』(共立出版)を参考にしてください．

《検証》

本講座では，中学生や高校生向けに，最先端の統計学として，高次元小標本統計解析について，応用例を交えながら，本質的な意義を実に明快に分かりやすく解説してくださった。

アンケート結果から，参加者の中には高い興味関心を持って臨み，期待通りあるいは期待以上の内容に満足し，数学に関する興味関心を深めたようであった。また，自由記述では主に以下のような生徒の感想が寄せられた。

・小標本においても理論上検定できる遺伝子解析のような分野において，検定の妨げとなるようなノイズの処理をすることで実用化できるという点が興味深かった。（高3）

・これらの統計解析を通して，医療においての診断がなされていることは身近に感じた。数学の最先端を見ることが出来たことは貴重な体験であったと思います。また，学問が技術をリードしているところが，数学により魅力を感じた。（高2）

・最先端で未知な問題について，あるキーポイントをつかんでそこに注目し解明が進んでいて，一つの点でもここまで奥が深い研究ができるのはとても興味深かった。（高1）

・全データについて同様に対処できる数式があると思い込んでいた自分が甘いなあと痛感した。データ変換をしても性質が失われないことに驚いた。（中 3）

2.4 数学オリンピックワークショップの実施

日　時：2019年9月21日（土）13:30～16:30

場　所：本校オープンスペース

講　師：尾高　悠志氏（京都大学大学院准教授・本校52期卒業生・国際数学オリンピックメダリスト）

TA３名（数学オリンピックで活躍した本校OB）

助言者：カーナハン　スコット

（筑波大学数理物質系・数学域　准教授）

参加者：生徒46名

（本校27名，市川学園中高12名，豊島岡女子中高７名）

尾高先生の講演

TA に作成してもらった事前問題を，1 週間前に，参加者（及び希望者）に配布した後，当日は次のように進行した。

1. 講師による講座
2. 事前問題及び当日問題の演習
（及び TA によるアドバイス）
4. TA による問題解説，体験談
5. 講評，助言

昨年度は 9 月と 12 月の 2 日間に分けて実施したが，12 月はオリンピック予選に近すぎるとの反省があり，本年度は 9 月に 1 回の実施とした。その関係で，TA に用意してもらう分野別の事前演習問題には，昨年度の 1 回目に扱ったような基本問題も含めてもらった。

講師の尾高先生は自身の体験談などの後，一つの問題を提示した。これの解答は示されず，参加生徒が解答に向かって考えることで数学の力を培えるようなものであった。

講座の様子

今回の TA は 63 期～66 期の本校卒業生で，昨年度も担当した 3 名である。問題演習の時間は 5，6 名のグループを作り，相談しながら考えるようにした。この間 TA には，解答のポイントやヒントを全体に示したり，個別にアドバイスを行ってもらった。解答解説の後，TA からオリンピックに向けて練習問題をどのように探すかについての経験談も話してもらった。

《評価・検証》

参加した生徒のアンケートの結果は次の通り。

［アンケート結果］（参加者 46 名が回答）

・講座の内容を理解できたか。

よく理解できた	17%
まあ理解できた	57%
あまり理解できなかった	27%
理解できなかった	0%

・講座を受講した動機（複数回答可）。

受講が必修	2%
面白そうな内容	48%
学習に役立つ	33%
講師の先生にひかれて	6%
友達に誘われて	6%
その他	6%

・講座の内容は期待通りだったか。

期待以上	44%
期待通り	41%
ほぼ期待通り	15%
あまり期待通りでない	0%
期待はずれ	0%

・講座の内容は学習の役に立ったか。

大いに役立った	37%
役立った	61%
あまり役立ちそうにない	2%
役立たなかった	0%

基本問題を含めたためか，内容の理解についてのポイントは昨年の 62%から 74%と向上した。他の項目を含め満足度は極めて高く，自らすすんで数学を学習する絶好の契機となったと思われる。

TA はいずれも経験者であり，参加者の状況を理解し，適切に問題作りや解答解説を行ったことが，アンケートの記述回答に現れている。また，昨年に続き参加した生徒も充実したとの感想を記述しており，企画の狙い通りの成果が得られていると思われる。

（アンケート自由記述　抜粋）

・当日問題が難しく５問中１問しか完答できなかったが，解説を聞いてほぼ理解できたので，良い学習機会になった。（本校　高２）
・数論から幾何まで，幅広い分野を扱ってもらいよかった。不等式を考えるのがとても面白く興味を引かれた。（本校　中２）
・まだ難しい内容もあったが，これから役立ていきたい。数学は面白い！！！（本校　中１）
・内容のレベルがよい。また，他高の人と話せてよかった。（市川　高１）
・グラフ理論の話が非常に興味深かった。（市川　高１）
・難しかったが，ひらめいた。また解説を聞いて分かった時に快感を感じ，数学の楽しさを改めて感じた。とても楽しかった。（市川　中３）
・TA の方に直接アドバイスを頂けて嬉しかった。どんな考え方をするのか，どんな点に着目して進めていけばよいのかが分かったので，今後の勉強に役立てたい。（豊島岡　高２）
・家に帰り，今日の事を復習します。昨年も参加させて頂いたのだが，すごく好きです。（豊島岡　高２）
・久しぶりにさっぱりわからない問題に出会えてとても楽しかったし，嬉しかった。新しい考え方にも出会えたし，いろいろな人と話し合って考えることもできて，本当に良い経験になった。（豊島岡　中３）

TA による解説

TA の人選や事前問題の集約など運営の難しさはあるが，本年度の形態で来年も実施し，さらに充実させたい。

2.5 探究型学習の実践

2.5.1 高校２年課題研究（数学）

本校の「課題研究」「理科課題研究」は，教育課程において，まず高校２年生に１単位設定され，各教科が開講する講座のなかから，全員がいずれかを選択して受講する。数学科では毎年講座を開設している。2018 年度は，講座名を「三千年紀の数学で話そう」，2019 年度は「Say Hello to Euler」とし，受講生徒自身が自らの感性で数学の様々な側面に注目して課題をそれぞれに設定し，各自の内容について発表や議論を通じて受講生全員で考察や研究を進めることを掲げている。

《実施概要》

１学期の間は，高校１年時の授業で扱った発展課題を継続研究していた生徒の発表を中心とし，彼らが夏のマス・フェスタで先行して外部発表会に出展することとした。また，残る生徒は 10 月の明治大学「高校生による MIMS 現象数理学研究発表会」に，全員がポスターまたは口頭発表で出展することとした。さらに，2 学期～3 学期にかけて，研究の中間発表をゼミナール形式で行い，3 学期には研究成果を論文としてまとめ，例年通り SSH 課題研究として，論文集を発行することにしている。時間割内で設定された「課題研究」の枠においては，筑波大学数理物質系より坂井公准教授・スコットカーナハン准教授をアドバイザーとして迎えるとともに，筑波大学の大学院生にも加わってもらい，活発な議論を交わしている。

本校の課題研究は高校2年生の1年間で実施するが，高校３年生になっても希望者は１単位を選択することができる。2017 年度に「半素数の逆数有限和による１の分割について」を研究した生徒が 2018 年度も研究続行を希望した。なお，2019 年度は，３名が研究続行を希望し，引き続き研究を進めている。

本校数学科では，課題研究が学校設定科目として設定されるより前から，ゼミナール形式の課題学習を取

り入れ，長きにわたり実践してきている。そのなかで2018 年度は，外部発表会への参加をより強化したり，生徒の希望にこたえるかたちで，スーパーコンピューターの利用によって課題研究を進展させたり，といった，これまでの実践の蓄積・継承だけでない，新たな可能性を見いだす 1 年にもなったといえる。今期のSSH 事業のなかで，どのタイミングで，どのような指導を入れることによって，生徒の課題研究が開花するかといった，より実践的なノウハウが蓄積できればと考えている。

2.5.2 中 3 テーマ学習

本校では，1993 年度より中学 3 年を対象に，教師が設定したいくつかのテーマの中から，生徒が好きなテーマを選択し，半年間を通して主体的に学習する活動として，「テーマ学習」を設けている。当初は「選択科目」として，現在は「総合的な学習の時間」として位置づけられており，土曜活用日に 7 回の活動を行っている。

このテーマ学習は, 高校 2 年で行われる「課題研究」や「理科課題研究」への継続性はないが，主体的に研究する姿勢を体験する場として大いに有効な取り組みであり，ここで数学を選択した生徒の大半が高校 2 年の課題研究でも数学を選択している。

《実施概要》

「テーマ学習」では，受講生がグループを編成し，一つのテーマについてグループ研究を行う。2019 年度の実施例を下記に示す。

① オリエンテーション（教師からプレゼン）
② 数学テーマ学習のガイダンス，先輩の講演
③ 個人研究の発表，グループ分けとテーマ決め
④ グループ研究
⑤ グループ研究および中間報告
⑥ 発表準備および研究発表会
⑦ 数学体験館へ見学

上記以外に本校高 2 の課題研究の発表を聞く機会がある。また，大学や他の高校で行っている高校生による数学についての研究発表会にも数回参加し，発表についてのレポート提出などの課題にも取り組んでいる。

2018 年度と 2019 年度の各グループが取り組んだテーマは

2018 年度（20 名）
・U(x)を利用して様々な図形を一つの式に実装する(3 名)
・平面を色々な長方形でしきつめる（立体に拡張するかも）(4 名)
・P 進法における整数 (Niven 数など)　目標 : P-Niven 数を完全に理解する(4 名)
・自然数 n を相異なる 1〜m の整数に分割するとき，その分割方法の通り数から規則を発見する。「カックロ分割」(2 名)
・部屋分けの最高黒マス　「クリノ」というパズルを作る(4 名)
・自然界においてのらせん　らせんの拡大縮小(3 名)

2019 年度（18 名）
・組み合わせ論(3 名)
・組み合わせについて(4 名)
・論理クイズ or 少ない方が勝ちのオセロ(3 名)
・作図について，円について(4 名)
・フィボナッチ数列(4 名)

日頃，自分の興味ある数学について友達と話す機会は少ないが，このテーマ学習の時間は，特に数学好きが集まっているため，数学に関する話を遠慮することなく話し合える雰囲気となっている。グループ活動している個々の様子を見ると，充実した時間を過ごしていることが感じられる。また，グループ活動の延長として，いろいろな数学コンテストへの参加も呼び掛けている。なかでも，名古屋大学社会連携課が行っている日本ジュニア数学コンクールは団体戦があり，仲間とともに参加できるので，このテーマ学習を選択した生徒同士でチームを組み，参加している。

2.6 学年を超えた少人数学習の研究と実践

数学科では毎年，外部の発表会等に学年を超えて参加し，他校の生徒との研究交流，異学年の生徒との研究交流の機会としている。

2.6.1 全国 SSH 生徒研究発表会

全国ＳＳＨ研究成果発表会は，全国のＳＳＨ校がすべて集まり, 研究成果をポスター発表するものである。

発表参加校は200校を超え，来場者も非常に多いため，参加する生徒は多くの人とサイエンスコミュニケーションを中心とした交流が期待できる。2019年度は数学課題研究から研究続行を希望した高3が2名，高2が1名参加した。

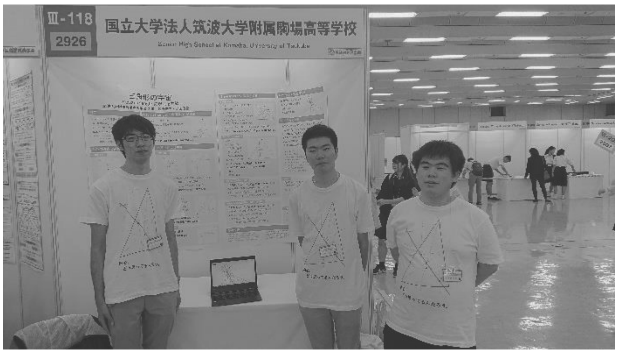
《実施概要》

日　程：2019年8月7日（水）8日（木）

会　場：神戸国際展示場（兵庫県神戸市）

学校に対して1つブースが与えられる形式のポスター発表で，多くの学校が1つの研究内容を発表する中，本校のブースは以下のポスターを掲示した。

『三角形の宇宙-Cevian Triangleに現れる共線-』



会場が広く，他校の生徒の研究発表準備を目の当たりにし，少し緊張をした様子であった。純粋数学の問題を独自の視点で研究をしており，タイトルも本格的な数学を予見させるようなものであったため，主たる来場者の高校生からは敬遠されていたように感じた。そうした中でも，審査員の先生方をはじめ，数学の研究者，本当に興味を持った人が話を聞きに来てくれたことに大きな喜びを感じていたようだ。本格的すぎたのか，大衆賞で思うように票を獲得できなかったが，「地味な研究があってもいいじゃないか。科学の基盤がそうなのだから」と自然科学への探求心と志を新たにしたことが最大の成果であろう。

2.6.2　横浜サイエンスフロンテフィア高校(YSFH) MATH Forum（数学生徒研究発表会）

《概要》

「YSFH MATH Forum（数学生徒研究発表会）」は，SSH校である横浜サイエンスフロンテフィア高校が毎年実施しているものある。数学に興味・関心をもつ高校生たちが全国から集まることで，互いの研究発表を通して交流し，研究を深めていくことができる。本校は高校2年生5名と中学3年生5名が参加し，高校生は全員ポスター発表(内1名は口頭発表も)を行った。

《実施概要》

日時：2019年12月14日（土）8:30～16:00

会場：横浜サイエンスフロンテフィア高校交流棟

日程：8:30～受付

9:00～開会式

9:10～口頭発表（3本）

10:25～基調講演

（根上生也横浜国立大学副学長・教授）

12:00～ポスター発表①

13:00～ポスター発表②

13:50～口頭発表（2本）

14:40～ワークショップ

15:50～講評・閉会式

7校33本のポスター発表（内，5本は口頭発表も）の他，根上生也横浜国立大学副学長・教授による講演，ワークショップが行われた。

《本校からの研究発表》

本校の参加者は高2課題研究数学選択生徒がポスター発表5名（内1名は口頭発表も），参観（中学3年生）4名。発表タイトルは次の通り。

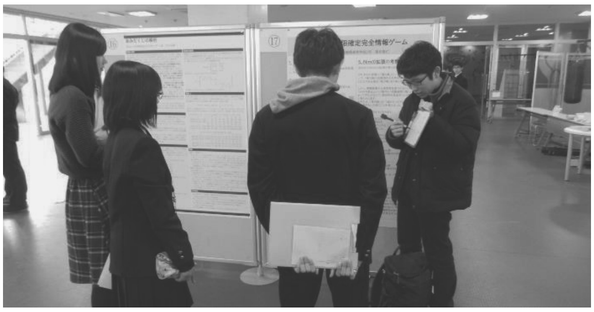
『あみだくじの解析』（口頭・ポスター）

『Z2における挿話についての考察』（ポスター）

『Fibonacci符号に関する考察』（ポスター）

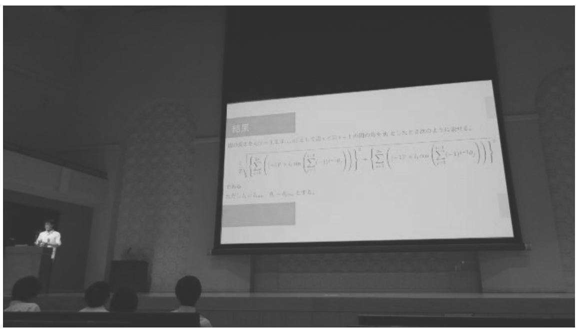
『立体構造の最適化』（ポスター）

『二人零和有限確定完全情報ゲーム』（ポスター）



《検証》
午前中はYSFHの１年生が参観し，賑やかな発表会であった。本校生も立派な口頭発表と，熱心なポスター発表を行うことができた。また，本校生徒の内２名は携帯白板を持参し，ポスター発表やワークショップで活用していた。ワークショップは根上先生がグラフ理論に関係する課題を提示する形のものであったが，手ごろな性質を調べるもので，本校生を含めて相談しながらみな熱心に取り組んでいた。立派な設備の中，本校の発表者も充実した時間を持てたと思われる。

2.6.3 マス・フェスタ（数学生徒研究発表会）
《仮説》
「マス・フェスタ（全国数学生徒研究発表会）」は，SSH校である大阪府立大手前高等学校が毎年実施しているもので，今回が11回目である。数学に興味・関心をもつ高校生たちが全国より集まることで，互いの研究発表を通して交流し，研究を深めていくことができる。本校も昨年度に続き代表生徒３名が参加した。
《実施の概要》
日時：2019年８月24日（土）9:30〜16:00
会場：関西学院大学（兵庫県宝塚市）
3. 本校からの研究発表
高２課題研究数学選択生徒１名が口頭発表とポスター発表，２名がポスター発表を行った。
『n角形に内接する特殊なn角形の考察』（口頭・ポスター）
『長方形を直角二等辺三角形で分割する』(ポスター)



《検証》
今回の参加者３名は高２課題研究数学受講者で，日頃教室で仲間に研究を発表している生徒である。大好きな数学を通して全国からの参加者とすぐに打ち解け，数学の課題研究を行う者同士，仲間意識を高めたようであった。また，発表時の指導・助言をもとにして，今後の研究をどう進めたらよいかのヒントが得られたようで，２学期以降の本校での活動で研究をさらに発展させることができ，口頭発表は本校で取り組む台湾の台中での研究発表（12月）にも参加する予定である。このイベントは大阪開催ということで前泊し，発表時間まで熱心に準備をする姿に熱意を実感した。また，それぞれから，自らの発表経験の重大さに気が付いた，他校の発表に刺激を受けたとの感想を得た。

2.6.4 部活動「数学科学研究会（MATHIC）」活動支援
数学に興味関心を持った生徒が集まり，研究活動を通して数学を楽しむ部活動「数学科学研究会」の支援を，数学科として行っている。現在，中学・高校あわせて約30名の部員を擁し，文化祭での発表において多数の来場者を得るとともに，研究レポート集“Café Bollweck”も刊行している。

2.6.5 数学オリンピック参加支援
特別講座同様，生徒の数学への興味関心を高めるために数学オリンピック(JMO)・数学ジュニアオリンピック(JJMO)への参加を募り，学校で一括申込している。今年度は中学・高校あわせて247名（うちJMO 63名，JJMO 184名）が申し込んだ。国際数学オリンピックには，日本が初参加した第32回大会から2018年夏の第57回大会までに，のべ43名の生徒が日本代表として出場している。
《国際数学オリンピック（IMO）での近年の成績》
2016　第57回IMO香港大会
　日本代表　銀メダル２名（2016年７月）
2017　第58回IMOブラジル大会
　日本代表　銀メダル１名 銅メダル１名
　（2017年７月）
2018　第59回IMOルーマニア大会
　日本代表　銀メダル１名（2018年７月）

3　開発教材一覧および開発教材の実際

次ページ以降，表の★印で示した教材を抜粋掲載する。

開発教材一覧（筑波大学附属駒場中・高等学校数学科）2019年度

表左端のアルファベットの記号は各分野の略であり，中学は小文字，高校は大文字，数字は実施学年である。もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。教材名の末尾の数字は開発年度である。

A.「代数(Algebra)」		
a1.	整数	2008
a1-2.	有理数	2007
a1-3.	剰余類の演算とウィルソンの定理	2014
a1-4.	速算術	2015
a1-5.	最大公約数と差が等しい数の組み合わせ	2017
a3.	暗号理論と整数論	2006
A1.	数と方程式	2008
A1-2.	平方根の連分数展開について	2012
A1-3.	高校における整数問題	2014
A1-4.	開平法と連分数による平方根の近似値	2014
A1-5.	オイラー関数について	2015
A1-6.	集合と場合の数の導入	2016
A1-7.	**多項式から見た二項係数とスターリング数**	**2019★**
A2.	離散な数列と連続な関数	2009
A2-2.	ΣK＾4と区分求積法	2011
A2-3.	斜交座標の薦め	2015
A2-4.	漸化式	2015
A2-5.	**確率漸化式と課題研究**	**2018★**
A3.	置換と正多面体群	2007
A3-2.	１次変換の線形性	2008
A3-3.	複素数と複素数平面	2015
A3-4.	複素数平面における1次分数変換	2017

An.「解析(Analysis)」		
an1.	2元1次方程式とその応用	2007
an2.	合成関数とグラフ	2009
an3.	絶対値を含む関数のグラフ	2009
an3-2.	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウエアによるグラフ描画	2010
an3-3.	中学での2次関数の扱い	2017
An1.	2次関数	2007
An1-2	2次関数（２）	2009
An1-3	和や積のグラフ	2010
An1-4.	図で証明する三角関数の性質	2013
An1-5.	**2次関数の係数決定**	**2019★**
An1-6.	**加法定理の色々な証明**	**2019★**
An2.	円周率の近似	2007
An2-2.	三角関数表を作る	2006
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011

G.「幾何(Geometry)」		
g1.	四角形の合同条件	2008
g1-2.	作図の教材	2009
g1-3.	四角形の性質（包含関係）	2010
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角	2012
g1-5.	三平方の定理	2013
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007
g3.	立方体の切断	2007
g3-2.	反転法	2007
g3-3.	立方体の切断（２）	2009
g3-4.	ヘロンの公式の幾何的証明と応用	2013
g3-5.	双心四角形の性質	2015
g3-6.	円を使う作図の教材	2017
g3-7.	**作図の応用問題**	**2018★**
g3-8.	**反転を利用した教材**	**2019★**
G1.	四面体の幾何	2008
G1-2.	デカルトの円定理	2009
G1-3.	正多角形と等積な正方形の作図法	2013
G2.	正１７角形の作図	2008
G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011
G2-3.	正射影ベクトルと内積・外積	2017

P.「確率(Probability)」		
p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011
Pf1.	組み合わせの確率モデル	2007
Pf2.	EBIと確率・統計	2007
Pf3.	無限集合の確率	2008

S.「統計(Statistics)」		
s1.	統計の基本	2006
s2.	標準偏差・近似直線	2006
s3.	正規分布と標準化	2006
s3-2.	シミュレーションによる授業	2006
S1.	回帰直線・近似曲線	2006
S1-2.	数理統計学入門	2009
S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007
S3.	主成分分析入門	2007
S3-2.	正規分布の平均の推定	2008
S3-3.	中心極限定理	2016

D.「微分方程式(Differential Equation)」		
d1.	**自然数の和，平方数の和，立方数の和 からの拡張**	**2019★**
d1-2.	『数える』	2010
d2.	グラフや図形の移動・変形	2006
d2-2.	**不等式の活用**	**2019★**
d3.	２次関数の接線	2006
d3-2.	面積・体積	2006
d3-3.	最大・最小	2006
d3-4.	放物線で囲まれる面積	2013
d3-5.	場合の数 ～樹形図から漸化式へ～	2014
D1.	包絡線	2006
D2.	グラフ描画の方法 －テクノロジーへの挑戦－	2007
D2-2.	３次関数の性質	2014
D2-3.	**定積分と面積**	**2019★**
D3.	包絡線(その２)	2006
D3-2.	微分方程式	2006
D3-3.	微分方程式の応用	2006
D3-4.	関数のグラフの描画法	2008
D3-5.	曲線と面積	2008
D3-6.	**微分方程式の応用（懸垂線）**	**2019★**

「O. その他(Others)」		
Of.	4元数を高校数学へ	2007
O2.	有限世界の数学	2007

QRコードはこちら⇩

筑駒数学科HPより，PDFファイルを閲覧できます
https://www.komaba-s.tsukuba.ac.jp/ssh/math/

A1-7.　多項式から見た二項係数とスターリング数

関連分野	：数と式
高等数学	：組合せ論，離散数学
対象学年	：高校 1 年生，高校 2 年生
関連単元	：式の展開，二項定理，場合の数
教 材 名	：二項係数と第 2 種スターリング数の関係

《はじめに》

数学 I の初めに式の展開を学習する。授業では係数についてパスカルの三角形を作り，その規則性について説明することをよくやる。二項係数は $(x+y)^n$ を展開したときに出てくる各項の係数であるが，x^n を階乗関数 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ の和で表現したときにもそれと似たような性質をもつ係数（第 2 種スターリング数）が出現する。この第 2 種スターリング数を生徒に計算させ，パスカルの三角形のようなものを作りながら二項係数との類似点を見つけ，それぞれの特徴を捉えるような授業を実践した。授業では二項係数と第 2 種スターリング数の組合せ論的な説明も加えた。実践してみて感じたことは組み合わせの考えが十分身についた段階で教材として提示する方がよかった印象が少しある。しかし，多方面への応用が考えられるものなので，うまく加工して教材にするとよい。x^n と階乗関数の和の関係は数列の和を公式を算出する際にも使われるものなので，一度学習しておくとよい。

《導入～二項係数の復習》

問 1. $(x+y)^5$ における x^3y^2 の係数を求めよ。

解 1. パスカルの三角形は次のようになる。

$$\begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots \end{array}$$

$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$ なので，係数は 10 である。

□

$(x+y)^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ をそれぞれ展開し，各係数を並べるとパスカルの三角形を作ることができるが，他の式の係数を並べてパスカルの三角形のようなものを作ってみようと生徒になげかけた。その 1 つの例として x^n を $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ の和で表現したときの係数を挙げた。

次のような問題を解かせ，その係数を三角形上に並べるよう指示し授業を展開した。

《展開～第 2 種スターリング数の発見》

問 2. $n,\ k$ は自然数で $n \geqq k$ とする。
x^n を $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ の和で表現したときの各 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ の係数を ${}_nS_k$ とする。このとき，(1)～(3) の各 $\boxed{{}_nS_k}$ を求めよ。

(1) $x^2 = \boxed{{}_2S_1}\cdot x + \boxed{{}_2S_2}\cdot x(x-1)$

(2) $x^3 = \boxed{{}_3S_1}\cdot x + \boxed{{}_3S_2}\cdot x(x-1) + \boxed{{}_3S_3}\cdot x(x-1)(x-2)$

(3) $x^4 = \boxed{{}_4S_1}\cdot x + \boxed{{}_4S_2}\cdot x(x-1) + \boxed{{}_4S_3}\cdot x(x-1)(x-2) + \boxed{{}_4S_4}\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)$

解 2. (1) $1\cdot x+1\cdot x(x-1)=x^2$ となるので

$${}_2S_1=1,\ {}_2S_2=1$$

である。

(2) $1\cdot x+3\cdot x(x-1)+1\cdot x(x-1)(x-2)=x^3$ となるので

$${}_3S_1=1,\ {}_3S_2=3,\ {}_3S_3=1$$

である。

(3) $1\cdot x+6\cdot x(x-1)+7\cdot x(x-1)(x-2)+1\cdot x(x-1)(x-2)(x-3)=x^4$ となるので

$${}_4S_1=1,\ {}_4S_2=6,\ {}_4S_3=7,\ {}_4S_4=1$$

である。

(1)～(3) の係数と三角形状に並べると次のようになる。

$$\begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 3\ 1 \\ 1\ 7\ 6\ 1 \end{array}$$

□

パスカルの三角形と上記の三角形状に並べた係数を比較させ，特徴の違いに注目した。

$$\begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 3\ 1 \\ 1\ 7\ 6\ 1 \\ \vdots\quad\vdots \end{array}$$

この時点で「左右対称ではなくなる」と気づく生徒がほとんどであった。さらに次の行に出てくる数字がどうなるのかを考えていた。勘が鋭い生徒は「1, 7, 6, 1 の次に出てくるのは 1, 15, 25, 10, 1 かな？」と早くも気付いている生徒もいた。

そこで，三角形状に並べた係数の上下の行の関係に着目させた。その際にパスカルの三角形では，

$$ {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r $$

という関係があるように，上2つを足せば下の数がだせるような特徴があったことを発問した。問2で作った三角形状に並べた係数の各行の上下にも同じような関係があるだろうかと発問し，それを見つけさせるような授業展開にした。

生徒は問2で作った三角形をよく観察し，特徴を捉えようとしていた。特に左右対称ではなくなるポイントである「1, 7, 6, 1の7」に着目している様子がうかがえた。しかし，パスカルの三角形の ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$ のような関係を見出すには至っていない様子であった。

各係数の関係を出すために問3を解かせ，${}_nS_r$ と ${}_{n-1}S_{r-1}$ と ${}_{n-1}S_r$ の関係を発見させた。

問 3. 問 2. と同様に

$$x^2 = {}_2S_1 \cdot x + {}_2S_2 \cdot x(x-1) \cdots\cdots ①$$

$$\begin{aligned} x^3 &= {}_3S_1 \cdot x + {}_3S_2 \cdot x(x-1) \\ &\quad + {}_3S_3 \cdot x(x-1)(x-2) \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 &= {}_4S_1 \cdot x + {}_4S_2 \cdot x(x-1) \\ &\quad + {}_4S_3 \cdot x(x-1)(x-2) \\ &\quad + {}_4S_4 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &\qquad \cdots\cdots ③ \end{aligned}$$

とする。このとき，

(1) ① の両辺に x を掛け，② と比較することにより ${}_3S_2$ を ${}_2S_1$，${}_2S_2$ を用いて表せ。

(2) ② の両辺に x を掛け，③ と比較することにより ${}_4S_2$，${}_4S_3$ を ${}_3S_1$，${}_3S_2$，${}_3S_3$ を用いて表せ。

解 3. (1) $x^2 = {}_2S_1 \cdot x + {}_2S_2 \cdot x(x-1)$

両辺に x を掛けると

$$\begin{aligned} x^3 &= {}_2S_1 \cdot x \cdot x + {}_2S_2 \cdot x(x-1) \cdot x \\ &= {}_2S_1 \cdot x \cdot \{1+(x-1)\} + {}_2S_2 \cdot x(x-1) \cdot \{2+(x-2)\} \\ &= {}_2S_1 \cdot x + \boxed{({}_2S_1 + 2 \cdot {}_2S_2)}\, x(x-1) \\ &\quad + {}_2S_2 \cdot x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

よって，$x(x-1)$ の係数を比較すると

$$ {}_3S_2 = {}_2S_1 + 2 \cdot {}_2S_2 $$

(2) $x^3 = {}_3S_1 \cdot x + {}_3S_2 \cdot x(x-1) + {}_3S_3 \cdot x(x-1)(x-2)$

両辺に x を掛けると

$$\begin{aligned} x^4 &= {}_3S_1 \cdot x \cdot x + {}_3S_2 \cdot x(x-1) \cdot x \\ &\quad + {}_3S_3 \cdot x(x-1)(x-2) \cdot x \\ &= {}_3S_1 \cdot x \cdot \{1+(x-1)\} \\ &\quad + {}_3S_2 \cdot x(x-1) \cdot \{2+(x-2)\} \\ &\quad + {}_3S_3 \cdot x(x-1)(x-2) \cdot \{3+(x-3)\} \\ &= {}_3S_1 \cdot x \\ &\quad + \boxed{({}_3S_1 + 2 \cdot {}_3S_2)}\, x(x-1) \\ &\quad + \boxed{({}_3S_2 + 3 \cdot {}_3S_3)} \cdot x(x-1)(x-2) \\ &\quad + {}_3S_3 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

よって，$x(x-1)$，$x(x-1)(x-2)$ の係数をそれぞれ比較すると

$$ {}_4S_2 = {}_3S_1 + 2 \cdot {}_3S_2 $$

$$ {}_4S_3 = {}_3S_2 + 3 \cdot {}_3S_3 $$

□

よって，この三角形状に並べた係数の各行の上下には

$$ {}_nS_r = {}_{n-1}S_{r-1} + r \cdot {}_{n-1}S_r $$

といった関係があり，これに従って次の行を計算すると「1, 31, 90, 65, 15, 1」が出てくる。

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 3_{\times 2} \quad 1_{\times 3} \\ 1 \quad 7_{\times 2} \quad 6_{\times 3} \quad 1_{\times 4} \\ 1 \quad 15_{\times 2} \quad 25_{\times 3} \quad 10_{\times 4} \quad 1_{\times 5} \\ 1 \quad 31 \quad 90 \quad 65 \quad 15 \quad 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

《発展 ①～第2種スターリング数の意味づけ》

二項係数 ${}_nC_r$ には組み合わせ的な意味があった。この係数 ${}_nS_r$ は第2種スターリング数という名前がついていて，実は組み合わせ的な意味もあることを発展として説明した。

〈二項係数〉

${}_nC_r$：異なる n 個のものから r 個を選ぶ組合せの総数

$(x+y)^2$，$(x+y)^3$ の展開式を一般化すると

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} y + \cdots \\ &\quad \cdots + \underbrace{\overbrace{{}_nC_r}^{\text{二項係数}} \; x^{n-r} y^r}_{\text{一般項}} + \cdots\cdots + {}_nC_n y^n \end{aligned}$$

ここで，各項 $x^{n-r}y^r$ の係数は n 個の $(x+y)$ のうち，r 個から y を，$n-r$ 個から x を選ぶ組み合わせの総数 ${}_nC_r$ に等しい。

$$\begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

〈第 2 種スターリング数〉
${}_nS_r$: 異なる n 個のものを r 個のグループに分割する場合の数を表す。

$$
\begin{array}{c}
1\ 1 \\
1\ 3\ 1 \\
1\ 7\ 6\ 1 \\
1\ 15\ 25\ 10\ 1 \\
1\ 31\ 90\ 65\ 15\ 1 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}
$$

この ${}_nS_k$ の組み合わせの意味を踏まえて，なぜ x^n を階乗関数 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ の和で表現したときの係数に第 2 種スターリング数が出てくるのかを説明した。問題 3. の式 ②

$$x^3 = \boxed{{}_3S_1} \cdot x + \boxed{{}_3S_2} \cdot x(x-1) + \boxed{{}_3S_3} \cdot x(x-1)(x-2)$$

に $x = 5$ を代入すると

$$5^3 = \boxed{{}_3S_1} \cdot 5 + \boxed{{}_3S_2} \cdot 5 \cdot 4 + \boxed{{}_3S_3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

3 人を A, B, C, D, E の 5 つの部屋に振り分ける場合の数を考える。ただし，空室があってもよいものとする。各 3 人がそれぞれ A, B, C, D, E のどの部屋に入るかを自由に選べるので，すべての場合の数は 5^3 である。これが左辺である。

一方，右辺はまず組み分けを先にしてしまってから後で部屋を割り振ると考えている。

(i) 3 人を 1 組に分ける場合の数は ${}_3S_1$ 通り。この 1 組の部屋の入り方は 5 通り。よって $\boxed{{}_3S_1} \cdot 5$ 通り。

(ii) 3 人を 2 組に分ける場合の数は ${}_3S_2$ 通り。この 2 組の部屋の入り方は $5 \cdot 4$ 通り。よって $\boxed{{}_3S_2} \cdot 5 \cdot 4$ 通り。

(iii) 3 人を 3 組に分ける場合の数は ${}_3S_3$ 通り。この 3 組の部屋の入り方は $5 \cdot 4 \cdot 3$ 通り。よって $\boxed{{}_3S_3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ 通り。

よって

$$5^3 = \boxed{{}_3S_1} \cdot 5 + \boxed{{}_3S_2} \cdot 5 \cdot 4 + \boxed{{}_3S_3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

となる。

5 を任意の自然数 x に置き換えても成り立つので

$$x^3 = \boxed{{}_3S_1} \cdot x + \boxed{{}_3S_2} \cdot x(x-1) + \boxed{{}_3S_3} \cdot x(x-1)(x-2)$$

これを例にして下記問 4. を解かせて，${}_nS_r$ がなぜ出てくるのかを実感させた。

問 4. 問題 3. の式 ③ に $x = 5$ を代入した式

$$
\begin{aligned}
5^4 = \boxed{{}_4S_1} \cdot 5 + \boxed{{}_4S_2} \cdot 5 \cdot 4 \\
+ \boxed{{}_4S_3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \\
+ \boxed{{}_4S_4} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2
\end{aligned}
$$

の組み合わせ論的な意味を考察せよ。

解 4. 4 人を A, B, C, D, E の 5 つの部屋に振り分ける場合の数を考える。ただし，空室があってもよいものとする。各 4 人がそれぞれ A, B, C, D, E のどの部屋に入るかを自由に選べるので，すべての場合の数は 5^4 である。これが左辺。

一方，右辺は

(i) 4 人を 1 組に分ける場合の数は ${}_4S_1$ 通り。この 1 組の部屋の入り方は 5 通り。よって $\boxed{{}_4S_1} \cdot 5$ 通り。

(ii) 4 人を 2 組に分ける場合の数は ${}_4S_2$ 通り。この 2 組の部屋の入り方は $5 \cdot 4$ 通り。よって $\boxed{{}_4S_2} \cdot 5 \cdot 4$ 通り。

(iii) 4 人を 3 組に分ける場合の数は ${}_4S_3$ 通り。この 3 組の部屋の入り方は $5 \cdot 4 \cdot 3$ 通り。よって $\boxed{{}_4S_3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ 通り。

(iv) 4 人を 4 組に分ける場合の数は ${}_4S_4$ 通り。この 4 組の部屋の入り方は $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ 通り。よって $\boxed{{}_4S_4} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ 通り。

よって

$$
\begin{aligned}
5^4 \quad = \quad & \boxed{{}_4S_1} \cdot 5 + \boxed{{}_4S_2} \cdot 5 \cdot 4 \\
& + \boxed{{}_4S_3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \\
& + \boxed{{}_4S_4} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2
\end{aligned}
$$

となる。

《発展②〜第2種スターリング数とべき乗和について》

第 2 種スターリング数を用いて $\sum_{k=1}^{n} k^2$ や $\sum_{k=1}^{n} k^3$, $\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求める方法がある。

> m を自然数とする。このとき, $\sum_{k=1}^{n} k^m$ に関して
>
> $$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{r=1}^{m} r! \cdot {}_mS_r \cdot {}_{n+1}C_{r+1}$$
>
> が成り立つ。ただし, ${}_mS_r$ は第 2 種スターリング数を, ${}_{n+1}C_{r+1}$ は二項係数を表す。

Proof. $x^{\underline{r}} := x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)$ とする。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^m &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{m} {}_mS_r k^{\underline{r}}\right)\\ &= \sum_{r=1}^{m} {}_mS_r \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\underline{r}}\right) \quad \cdots\cdots\ (*)\end{aligned}$$

このとき $\sum_{k=1}^{n} k^{\underline{r}}$ について考えると

$$(k+1)^{\underline{r+1}} - k^{\underline{r+1}} = (r+1)\cdot k^{\underline{r}}$$

なので

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{\underline{r+1}} - k^{\underline{r+1}}\right) &= \sum_{k=1}^{n}(r+1)k^{\underline{r}}\\ (n+1)^{\underline{r+1}} - 1^{\underline{r+1}} &= (r+1)\sum_{k=1}^{n} k^{\underline{r}}\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\underline{r}} = \frac{(n+1)^{\underline{r+1}}}{r+1}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{r=1}^{m} {}_mS_r \cdot \frac{(n+1)^{\underline{r+1}}}{r+1}\\ &= \sum_{r=1}^{m} {}_mS_r \cdot \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r+1)}\\ &= \sum_{r=1}^{m} r!\cdot {}_mS_r \cdot \frac{(n+1)!}{(n-r)!\cdot(r+1)!}\\ &= \sum_{r=1}^{m} r!\cdot {}_mS_r \cdot {}_{n+1}C_{r+1}\end{aligned}$$

□

これを用いて $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, $\sum_{k=1}^{n} k^4$ を計算する。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{r=1}^{2} r!\cdot {}_2S_r \cdot {}_{n+1}C_{r+1}\\ &= 1!\cdot 1\cdot {}_{n+1}C_2 + 2!\cdot 1\cdot {}_{n+1}C_3\\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{r=1}^{3} r!\cdot {}_3S_r \cdot {}_{n+1}C_{r+1}\\ &= 1!\cdot 1\cdot {}_{n+1}C_2 + 2!\cdot 3\cdot {}_{n+1}C_3 + 3!\cdot 1\cdot {}_{n+1}C_4\\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)n(n-1)\\ &\qquad + \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)\\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \sum_{r=1}^{4} r!\cdot {}_4S_r \cdot {}_{n+1}C_{r+1}\\ &= 1!\cdot 1\cdot {}_{n+1}C_2 + 2!\cdot 7\cdot {}_{n+1}C_3\\ &\qquad + 3!\cdot 6\cdot {}_{n+1}C_4 + 4!\cdot 1\cdot {}_{n+1}C_5\\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + 7\cdot\frac{1}{3}(n+1)n(n-1)\\ &\qquad + 6\cdot\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)\\ &\qquad + \frac{1}{5}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\\ &= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)\end{aligned}$$

□

《おわりに》

この教材は数学 I を学習し始めるときに提示したものであるが, 高校 1 年生にはやや早かった印象がある。特に式の意味を考えていくときに組み合わせの考えが不可欠であり, 数学 A や数学 II でやるのが望ましいと考えられる。しかし, 生徒はよく活動していた印象がある。数列の和に関する話題もあるため, 工夫次第では様々な方面への応用も期待できる教材である。

(2019　薄井)

d2-2 不等式の活用

関連分野：微積分
高等数学：無限級数，実数論
対象学年：中学 2 年生
関連単元：不等式
教材名：不等式の活用

不等式の教科書的な扱いは，解くことに主眼が置かれており，両辺に負の数をかけると不等号の向きが変わること以外は 1 次方程式と操作があまり変わらないと認識している生徒は多い。数学教育の研究会でも，不等号の向きが変わることをどう教えるかといったことに主眼が置かれており，もちろんそれは大切なことではある。しかし，ここでは生徒が不等式そのものの良さや，考えたことを表現するために有効な武器であると感じるような教材を提案したい。この報告には一見すると不等式の教材ではないものも収録してあるが，不等式を活用することで，分かりやすい表現が可能になるようなものを紹介する。

2-2.1 整数問題への活用

問 1
$11x+1$ が x^2+3 の倍数になるような正の整数 x をすべて求めよ。

解　倍数の関係から，$x^2+3 \leq 11x+1$ が成立する。+3 も +1 も無視すると $x^2 < 11x$，$x>0$ なので $x<11$ まで絞ることができる。x は正の整数なので，$x=1$ から順番に調べていき，題意を満たすものを探すと，$x=1, x=5$ の 2 つが解となる。□

不等式の活用を指導するために，倍数の関係に注目した解法である。

高校生は，$y=x^2+3$ のグラフ（放物線）と $y=11x+1$ のグラフ（直線）をかいて，2 次方程式 $11x+1=x^2+3$ の 2 解の間にある整数のうち，題意を満たすものを見つければ良いが，この 2 次方程式の解の数値はやや複雑である。

中学生は $x^2=x\times x$ とみて，1 次関数的な増え方と 2 次関数的な増え方を比較して，$x=11$ あたりで逆転することを観察する。本稿に述べた解法にかなり近い着想である。

問 2
1 から n までの数の和を計算したら，間違えてある数を 2 回足してしまい，求めた和は 2019 になった。
間違えて足してしまったある数と n を求めよ。

解　間違えて 2 回足した数を k とすると，

$$(1+2+3+4+\cdots+n)+k=2019$$

である。$1 \leq k \leq n$ であるので，

$$\frac{n(n+1)}{2} < 2019 \leq \frac{n(n+1)}{2}+n$$

を満たす n から見つけていく。左の不等式に着目し，2019 ≒ 2000 より，

$$n^2 < n(n+1) < 4000$$

という評価ができる。すると，$60\times 60=3600$ から，だいたい $n=62$ か $n=63$ くらいだと予想できる。実際に計算をしてみると，$n=63$ が与式を満たし，このとき，$k=3$ である。□

もちろん，和の公式から導出した不等式を 2 次不等式として解いても構わないが，ここでは上記のような変形をして，「おおざっぱな評価」で解を予想する活動をさせたい。次の問題では唯一性の証明で不等式を活用できる。

問 3
$l \leq m \leq n$ を満たす自然数が $lmn=l+m+n$ を満たすとき，(l,m,n) の組をすべて求めよ。

解　$l \leq m \leq n$ より，$l+m+n \leq 3n$.
ゆえに $lmn \leq 3n$. $n>0$ なので $lm \leq 3$.
これで $(l,m)=(1,1),(1,2),(1,3)$ のみを調べれば良い。したがって $(l,m,n)=(1,2,3)$ のみ。□

問 4
$k \leq l \leq m \leq n$ を満たす自然数が
$klmn = k + l + m + n$ を満たすとき，
(k, l, m, n) の組をすべて求めよ。

問 3 から変数が 1 つ増えただけである。先の問題と同様に不等式を活用して絞り込めば $(1, 1, 2, 4)$ であることが分かる。

数の個数が増えれば素因数分解の組み合わせが発生して煩雑になるが，原理的には何個でも和と積が等しい組み合わせは発見できる。生徒のレベルに合わせた出題すると良い。

問 5
$\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{2}$ を満たすような
自然数 (m, n) の組をすべて求めよ。

解　$m \leq n$ とする。与式を変形し

$$2(m + n) = mn$$

を満たす (m, n) を探せばよい。$m \leq n$ であるから，

$$mn = 2(m + n) \leq 4n.$$

$n > 0$ なので，$m \leq 4$。
したがって $m = 1, 2, 3, 4$ しかないことがわかる。全部調べれば $(m, n) = (3, 6), (4, 4)$. □

本問のような，等価な文字を複数含む問題では，$m \leq n$ といった仮定を自分でつけられるかどうかが鍵である。必要であれば教員がヒントとして提示するが，ゆくゆくは自分で仮定をつけられるように指導したい。

2-2.2 無限級数への活用

本節では，数学的にも奥深く，さまざまな美しい証明が知られている以下の課題をオープンな課題として，不等式の自由度を体感し，身につけさせるような教材を紹介する。

課題
自然数の逆数和
$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{8} + \dots$
が発散することを示せ。

この問題は，級数を面積で表現し，$y = \dfrac{1}{x}$ の下の部分の面積で評価して積分で示す解法が重要な問題である。この解法は，問題の級数が対数関数で評価でき，対数関数が発散することから，追い出しの原理で示すものである。

ここでは不等式を活用し，追い出しの原理に持ち込みたい。中学生は極限の議論はせず，自分たちが作った n の式が，ある一定の n 以上では 1 億を超え続けられれば発散，とした。

授業では，さまざまな値で不等式評価をする活動からスタートする。

問 1
不等式 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} < 3$ が正しいことをどう説明しますか。

解 1　左辺 $= \dfrac{13}{12} < 3$. □

解 2　左辺のすべての項が 1 より小さいから。□

解 1 は何の紛れもなく正しいが，実際の不等式評価の場面では，簡単に計算することが出来ない場面がたくさんある。解 2 も当たり前だが，「項別に評価している」という点が不等式を活用するにあたって有用な考えである。

不等式の右辺を少し小さな値にする。

問 2
不等式 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} < \dfrac{3}{2}$ が正しいことをどう説明しますか。

解　左辺で最大の $\dfrac{1}{2}$ を 3 回足す. □

項別に評価する，という発想を強調された直後なので，この発想は自然に出る。このまま進めても良いのだが，ここでの目的は不等式の自由度の高さを伝えることなので，

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}$　は何より大きい？

と問うてみる。今度は一番小さい $\dfrac{1}{4}$ を 3 回足して $\dfrac{3}{4}$ だろうと予想する生徒が多ければ，教員側で 0 などを提示して，不等式の自由度の高さを強調する。

次に，右辺の数値が大きな不等式を与え，数値を小さくするために各自が工夫する活動を取り入れたい。ほんの少しでも右辺の数値を小さくできたらＯK，という立場で，大らかに生徒を褒めながら進めたい。さまざまな生徒のさまざまな工夫を，丁寧に全体と共有し，全体で課題を解決していくように留意する。

> 問 3
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<x<7$$
> となるような x を求めなさい。

解 1　左辺の最大は $\frac{1}{2}$. 項が 7 項あるので
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<\frac{7}{2}<7.$ □.

解 2　$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ である。
残り 4 つの分数は 1 より小さいので
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<5<7.$ □.

解 3　$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$，残り 4 つのうち最大の $\frac{1}{4}$ で評価すると，
与式 $<1+\frac{1}{4}\times 4=2<7.$ □.

解 4　2 ベキごとに 1 を作る。

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$
$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$
$$=1+1+\frac{1}{8}=2.125<7$$

解 2 の素朴な感性を大切にしたい場面である。他の解と比較すれば，数値をもっと小さくすることはできるが，「まとまりで評価する」という着想がある。これまでは項ごとにしか評価してこなかったが，計算しやすい部分をまとめて評価するというアイディアにより，解 3 のようなさらに小さな数値による評価が得られる。そして，解 4 は自然数逆数和の発散の証明そのものの解法である。

> 問 4
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<2$$
> であることを証明しなさい。

解　まず，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ である。
次に $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. 残りを $\frac{1}{5}$ で評価して，
$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<\frac{3}{5}$ を得る。したがって，
$1+\frac{3}{8}+\frac{3}{5}=\frac{79}{40}<2.$ □

これまでの考察を踏まえれば，以下の問はすぐに取り組める。

> 問 5
> 自然数の逆数和
> $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\dots$$
> が発散することを示せ。

証明　問 3 における解 4 のアイディアをそのまま使う。2 ベキごとに下から評価すると，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\cdots$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdots$$

ここで，1 に $\frac{1}{2}$ を少なくとも 2 億回足せば，1 億を超えるので発散する。□

1 億でなくても，もっと大きな数を設定しても超えられる，と指摘した生徒もおり，もちろん，それが本当の発散の定義である。

2-2.3 発散する級数の評価への活用

さて，算数，数学の問題の世界では，その答えが 100 を超えることが少ないように感じる。答えの数値は数学の学習が進めば進むほど，$\frac{1}{2}$ や，π などが答えとなり，1 次関数でも傾きが 5000 の直線というものはほとんど考えることはない。もちろんそれは，概念の修得が本質的な目標であり，概念の修得をしやすいような数値設定が練り抜かれているからである。そこで，数の感覚をひろげ，磨くような教材を，この単元で実践することにした。

問 1
自然数の逆数和
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\dots$
から，各桁に 1 を含むものを除外した
逆数和，すなわち
$\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\dots$
は，40 よりも小さいことを示しなさい。

証明　各桁に 1 を含まない n 桁の数は $8\times 9^{n-1}$ 個ある $(1\le n)$。そして分母が 1 桁のものはすべて $\dfrac{1}{2}$ で，分母が 2 桁のものはすべて $\dfrac{1}{20}$ で，のように桁ごとに評価すると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\dots\\ &<\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{20}\times 8\times 9+\frac{1}{200}\times 8\times 9^2\dots\\ &=\frac{8}{2}(1+\frac{9}{10}+(\frac{9}{10})^2+(\frac{9}{10})^3+\dots)\\ &=4\times\frac{1}{1-9/10}=40\end{aligned}$$

となり，題意は成立する。□

この問題はややテクニカルではあるが，高校生には桁ごとに評価すれば良いことを見抜かせたい。中学生には，n 桁の数で各桁に 1 を含まない数はいくつあるかを考える活動を行い，数え上げの工夫や 9 進法などのアイディアを引き出し，丁寧に証明に取り組ませたい。

ところで，発散するはずの自然数の逆数和，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\dots$$

から分母の各桁に少なくとも 1 つ 1 を含む分数を除いたら有限の値で押さえられる，ということを強調すると中学生も高校生もかなり驚く。さらに，無限に発散するものから有限の値を引いて残った級数は，無限に発散するはずなので，次の問題に証明が与えられるはずである。

問 2
各桁に 1 を少なくとも 1 つ含む逆数の和，
すなわち
$1+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\dots$
は，発散することを示せ。

証明 1　「各桁の末尾が 1 のものだけを選ぶ」問題の級数は

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\dots\\ &>\frac{1}{1}+\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\dots\end{aligned}$$

と評価できる。部分的な級数を作っているのでこの評価は当然であろう。これをさらに，

$$>\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots$$

と評価すれば，

$$=\frac{1}{10}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots)$$

であり，自然数の逆数和は発散するので，追い出しの原理により発散する。□

証明 2「各桁が 1 のみの数の k 乗のみを選ぶ」

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\dots\\ &>\sum_{k=1}^{n}((\frac{1}{11})^k+(\frac{1}{111})^k+(\frac{1}{1111})^k\dots).\end{aligned}$$

各桁の個数ごとに等比数列の和の公式を用いると，この式は

$$\begin{aligned}&=\frac{11}{10}+\frac{111}{110}+\frac{1111}{1110}+\dots\\ &>1+1+1+1+\dots\square\end{aligned}$$

証明 1. の系として，「最高桁の数が 1」であるような数のみを抽出しても同様の議論で示すことができるが，似たような計算なので割愛する。また，問 1 で議論できたような，n 桁の数がいくつあるかは非常に数えづらいが，不等式を活用することで証明がうまくいく。

証明 2. は，高校生の授業ではかなり盛り上がった。中学生には紹介するにとどめたが，理解できる生徒にとってはかなり面白い証明であった。

いずれの証明においても，たとえば $\dfrac{1}{213}$ などは除外されていることを確認することは大切である。この教材は，生徒が不等式の自由度を体感しながら，自分なりの不等式評価がだいたい上手くいく，というものである。個性も発揮されるので，発表活動に時間を割きたい。

問 1，問 2 の 2 つの命題は，いずれも実はかなり自然であることを伝えると，1 人 2 人と「そうか」と気が付く生徒が現れる。

収束を自然だと理解させるには，まず 1000 桁のような桁数が大きな数を考える。すると，10 進法である以上，どこかしらの桁に 1 はだいたいあるだろうから実はほとんど除外されている，と伝えるとすぐ納得はできる。2 桁だけで観察すると，まず 10 から 19 までがすべて抜け，その後は 22 から 30,32 から 40 などが残り，だいたい残っているように感じられる。しかし，先に述べたように，桁数が大きい方ではほとんどが除かれるのである。

同様の考察をすれば発散することも自然で，その理由は級数の" 後半" は，ほとんどそのまま残っているからである。

2-2.4 おわりに

末尾になるが，解決すべき課題は 1 つ残っていて，収束するはずの

$$\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\dots$$

が，いったい何に収束するか，である。評価を精密化する活動もかなり盛り上がるのでぜひ実践していただきたい。ただ，筆者の調べたところによると，この級数の収束値はいまだ解決されておらず，情報分野に強い生徒によると，この級数の近似値は 13.089... とのことであった。

探究的な学習活動の中で，高校生による数学的な解決を願っている。

【参考文献】: Kempner, A. J. (February 1914). "A Curious Convergent Series". American Mathematical Monthly. Washington, DC: Mathematical Association of America. 21 (2): 4850.

(2019. 吉崎)

D2-3. 定積分と面積比

関連分野 ：代数幾何
高等数学 ：解析学
対象学年 ：高校２年生
関連単元 ：微分法と積分法
教 材 名 ：3 次関数と直線が囲む面積の比

《はじめに》

放物線と直線の囲む図形の面積については，もとより教科書や参考書でよく知られた公式がある。放物線に直線が接する場合や，3 次関数に直線が接する場合も同様である。しかし，3 次関数に直線が交わる場合の面積については，特に有名な公式が知られているとはいえない。一方で本校では，等積変形や相似，グラフの移動などを用いて面積を調べる活動を，中学生の段階からふんだんに取り入れている。これに表記の簡便さで一日の長がある定積分の考えを持ち込めば，図形の面積についてさらに深い考察を加えることもできるのではないかと考えた。

ここでは，過去の本校開発教材との関連性をふまえ，「学年をこえての相互の関連付け」という視点も交えながら，3 次関数と直線が囲む図形に関する「定積分と図形の面積比」についての教材を提案する。

《カバリエリの原理と定積分》

本校では，中学校の１次関数の学習において，関数 $y=ax+b$ のグラフを直線 $y=ax$ と直線 $y=b$ の和としてとらえる活動から始めて，グラフの「和」や「差」を考える教材を多く開発している。例えば，反比例のグラフを扱ったあとには，$y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフの概形をとらえる活動なども行う。

さらに，中学校から高等学校にかけて，「2 つの立体をある軸に垂直な平面で切った切り口の面積がつねに等しいならば，もとの 2 つの立体の体積は等しい」というカバリエリの原理を応用して，関数のグラフで囲まれた図形の面積を等積変形により求める活動なども行う。カバリエリの原理は，数学史上においても「定積分の夜明け前」といえる考え方であり，一般に数学Ⅱの定積分で扱うような，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積

$$S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

は，ほぼカバリエリの原理の定式化といってよい。

本稿で提案する教材は，この考えを基盤として，平行移動や等積変形を用いて，3 次関数のグラフと直線が囲む面積について考察を試みようとするものである。

《平行移動と定積分》

まず，グラフの平行移動と定積分の性質として，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{p+a}^{p+b}f(x-p)dx$$

が成り立つことを利用する。(学習指導要領上はこの内容は数学Ⅲの置換積分とする扱いだが，座標平面上での図形の移動とするならば，数学Ⅱ範囲の微積分でも十分に扱えると考える。)

このことから，放物線と直線が囲む図形の面積（通称「6 分の 1 公式」として多くの参考書に掲載されているもの）は，次のように導くことができる。

$p=\beta-\alpha$ として，

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_0^p x(x-p)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{px^2}{2}\right]_0^t=-\frac{p^3}{6}$$

《放物線に関する面積公式とその図形的解釈》

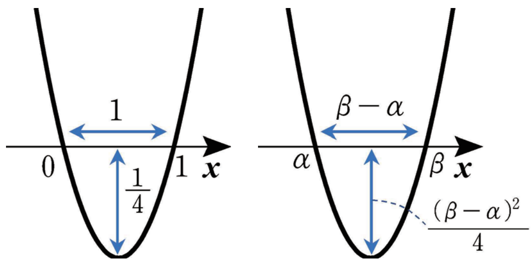
前項で得た結果

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

について，すべての放物線がたがいに相似であることを認めると，下の図のように，面積が $(\beta-\alpha)^3$ に比例することが直観的に理解できる。また，x^2 の係数（ある生徒はこれを「たわみ具合」と呼んだ。1 次関数でいう「傾き」に相当する語である）が 1 でないものも，カバリエリの原理を援用すれば「一方の切り口がつねに他方の k 倍ならば，体積（面積）も k 倍となる」ことが分かり，ここから

$$\int_\alpha^\beta kf(x)dx=k\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

が得られるから，同様に解釈可能である。



《3 次関数のグラフへの拡張》

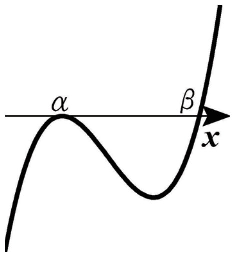
ここからは，2 次関数を 3 次関数に次元上げしてみる。例えば次のような拡張であれば，さほど計算の負荷も重くない。

$p=\beta-\alpha$ として，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=\int_0^p x^2(x-p)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{px^3}{3}\right]_0^p=-\frac{p^4}{12}$$

これは図形的には「(α，0）で x 軸に接し，（β，0）で x 軸と交わる 3 次関数のグラフと，x 軸が囲む図形の面積」を表しており，参考書で先述の「6 分の 1 公式」にあわせて「12 分の 1 公式」などと紹介されていることも多い。



一方で 3 単解をもつ 3 次関数のグラフと x 軸が囲む図形の面積については，あまり紹介されているものを見たことがない。ただこれも同様の拡張は可能である。

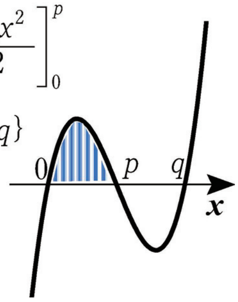
$p=\beta-\alpha$，$q=\gamma-\alpha$ として，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=\int_0^p x(x-p)(x-q)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{(p+q)x^3}{3}+\frac{pqx^2}{2}\right]_0^p$$

$$=\frac{p^3}{12}\{3p-4(p+q)+6q\}$$

$$=\frac{p^3}{12}(2q-p)$$



これをある生徒が，

「3 つの交点のうち，『近い区間の長さ』を 3 乗し，『遠い区間の 2 倍から，近い区間を引いた長さ』をかけて 12 で割ると，面積が求まる」

と表現した。根拠を伴ったものとはいえないのだが，面積を求める「操作」のみに着目して単純化して表現しているのは興味深い。

《3 次関数のグラフの対称性と面積》

以上を道具として揃えたのち，次の課題を考える。

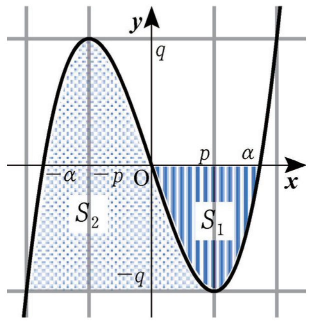
課題

次の図は 3 次関数 $f(x)=x(x+\alpha)(x-\alpha)$ について，$y=f(x)$ のグラフをかいたものである。($\alpha>0$)

(1) 図中の α，q をそれぞれ p で表せ。

(2) $f(2p)=q$ であることを示せ。

(3) $S_1=\int_0^{\alpha}-f(x)\,dx$，$S_2=\int_{-2p}^{p}\{f(x)+q\}\,dx$ とおくとき，$S_1:S_2$ を求めよ。



解答例

(1) $f(x)=x^3-\alpha^2x$ より，$f'(x)=3x^2-\alpha^2$
図から $f'(p)=0$ であるから，$3p^2-\alpha^2=0$
よって，$\alpha=\sqrt{3}\,p$ （$\alpha>0$，$p>0$）
また，$f(x)=x^3-3p^2x$ となるから，
$q=f(-p)=2p^3$

(2) $f(x)=x^3-3p^2x$ に $x=2p$ を代入すると，たしかに $f(2p)=8p^3-6p^3=2p^3=q$ である。

(3) 前項で得た結果を利用すると，

$$S_1=\int_0^{\alpha}x(x+\alpha)(x-\alpha)\,dx$$

$$=\frac{\alpha^3}{12}(4\alpha-\alpha)=\frac{\alpha^4}{4}=\frac{9p^4}{4}$$

$$S_2=\int_{-2p}^{p}(x-p)^2(x+2p)\,dx$$

$$=\frac{(3p)^4}{12}=\frac{27p^4}{4}$$

すなわち，$S_1:S_2=1:3$ を得る。

(1)(2)は，3 次関数の対称性として，これも参考書ではよく目にする性質である。しかし，先述のとおり，S_1 のような面積を求めることがあまり扱われていないからか，(3)の結果（1：3 というある種の「きれいな」面積比が得られること）も，生徒にとっては目新しいものと思われる。

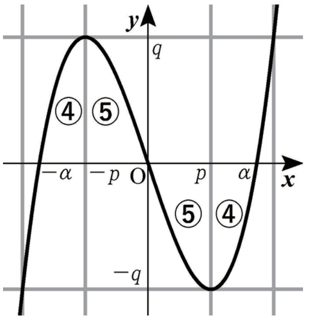
《3 次関数のグラフが囲む図形の面積比》

前項の計算を進める上で，$q=2p^3$ であるということから，図に示された 8 枚の長方形の面積ひとつひとつが $2p^4$ であることに気づいた生徒がいた。ここから，「この図に現れている図形の面積はすべて p^4 の定数倍となり，つまり面積比がすべて整数比になるのでは」という方向へと探究が進んだ。

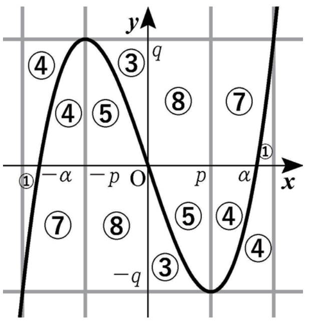
例えば，試しに $S_3=\int_0^p-f(x)\,dx$ とすると，次のような計算となる。

$$S_3 = \int_0^p -(x^3 - 3p^2x)dx$$
$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3p^2x^2}{2} \right]_0^p = \frac{5}{4}p^4$$

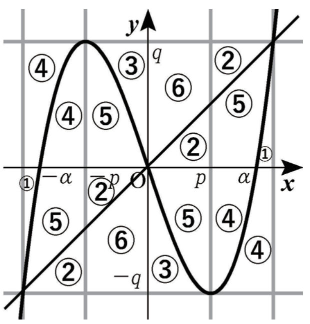
この時点で，対称性も考慮すると，次のような結果（面積比S_3：S_1＝⑤：⑨）が得られたことになる。以下，丸付き数字で比を表していくことにする。



さらに，長方形１つが$2p^4$であることから，上の図においては長方形は⑧と表され，先ほど得られた$S_2 = \frac{27}{4}p^4$（すなわち㉗）もふまえると，ここから先は積分計算すら不要となり，以下のような結果が得られる。



ここで，図の左下から右上へ直線$y = \frac{q}{2p}x$，すなわち$y = p^2x$をひいてみると，（切り分けられる領域はただの直角三角形のため，これも一度も積分計算をしないまま）以下の結果が得られる。

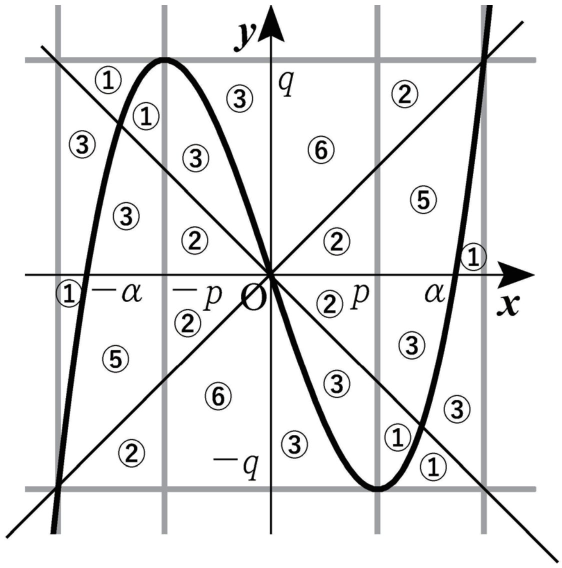


さらにある生徒が「ここまできたら$y = -p^2x$も引いたらどうか」というので，きれいな結果が得られるのか（発言した生徒も含めて）半信半疑のまま計算を続けることになった。

まず，曲線$y = x^3 - 3p^2x$と直線$y = -p^2x$の交点のx座標を求めると，$x = 0$，$\pm\sqrt{2}p$を得る（この時点できれいな結果にはならないだろうという予想が大勢を占めた）。しかし$S_4 = \int_0^{\sqrt{2}p} \{p^2x - f(x)\}dx$として定積分を計算してみると，次のようになった。

$$S_4 = \int_0^{\sqrt{2}p} -x(x - \sqrt{2}p)(x + \sqrt{2}p)dx$$
$$= \frac{1}{12}(\sqrt{2}p)^3(4\sqrt{2}p - \sqrt{2}p) = p^4$$

この結果から，S_4は見事に④であることがわかった。すべてまとめてみると，下図のような面積比が結果として得られたことになる。



探究活動自体はここまでとしたが，この活動全体を通じて，特に「かつては算数が好きだったが，数学にはいまひとつ苦手意識を感じている生徒」が好反応を示していたことは印象的であった。

《結びに》

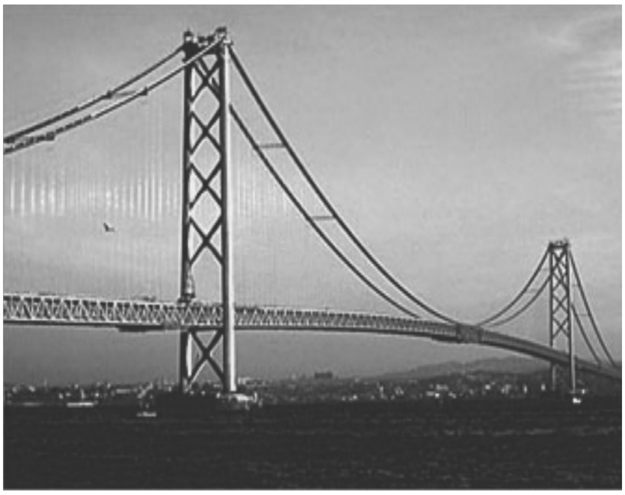
定積分を教材として扱う際，「面積」という，小学校のときから具体物を通して学んできたことを，本来ならもっと活かせるのではないか，と考えていたことが本教材の出発点である。もとをただせば，円を細かく刻んで面積をくふうして求める活動もカバリエリの原理であり，微積分の概念をつかむための素地となる活動である。これらを「伏線」として，高校できちんと回収することは意義深いのではないかと考える。今後，定積分を用いて面積を求める活動を，「面積を求めること」の集大成としてとらえ，「教材間のつながり」「学年間のつながり」を見直す場面として再構築することも目指してみたい。（2019　須藤）

D3-6. 微分方程式の応用（懸垂線）

D3-6.1　懸垂線（カテナリー、*catenary*）

D3-3 にある題材「鬼ごっこでの追跡」の前に取り上げる教材である。力学の関係式を利用するが、必要なものは重力と張力のつり合いだけである。

吊橋のように、重力によって垂れ下がった曲線を描く関数を求めよう。



明石海峡大橋

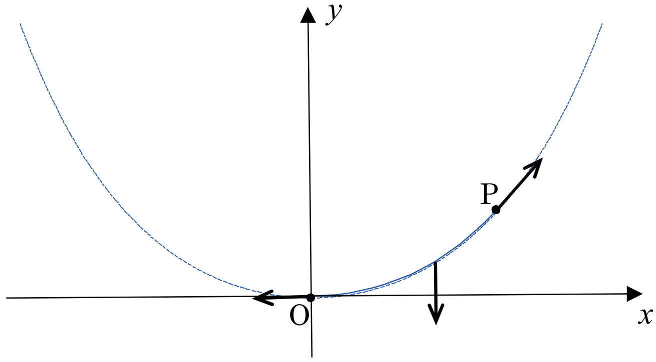
教室で曲線を例示する場合は、鎖の両端をフックで固定して垂れ下げるのが簡便である。

このとき両端の固定点での張力と、鎖の重さによる重力が釣り合っている。

また次のように、端点を曲線の途中の点に移して鎖の長さを変えても、曲線の形は変化しない（最下点は動かない）。

したがって、水平方向の張力は一定である。

さて、対称軸を y 軸、最下点を原点 O、第 1 象限にある曲線上の点を $\mathrm{P}(x, y)$ として、**x, y の微分方程式を導く。**



O,P を鎖の端点、曲線 OP の長さを L 、鎖の単位質量を m とすると、鎖にかかる重力は y 軸負の向きのベクトルで、大きさは mgL （g は重力加速度）。

また、O における張力 $\overrightarrow{T_1}$ は x 軸負の向きのベクトルで、大きさは一定である。

P における張力 $\overrightarrow{T_2}$ は曲線の接線方向のベクトルであり、$\overrightarrow{T_2}$ と x 軸のなす角を θ とすると、

$|\overrightarrow{T_1}| = T_1, |\overrightarrow{T_2}| = T_2$ として、次の式が成り立つ。

$$T_2 \cos\theta = T_1 = k \quad （定数）$$

$$T_2 \sin\theta = mgL$$

2 式より、

$$L = a \tan\theta \qquad （ただし、a = \frac{k}{mg}）\cdot\cdot\cdot ①$$

また接線の傾きと曲線の長さについて、次の式が成り立つ。

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

$$\frac{dL}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \cdot\cdot\cdot ③$$

次に, ①, ②, ③から x, y の関係式を求める。

方法はいろいろ考えられるので、レポート課題にしてもよい。以下、生徒からの解法をいくつか示す。

解法 1)

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dx}{dL}\cdot\frac{dL}{d\theta}$$ であり、

①より、 $$\frac{dL}{d\theta}=\frac{a}{\cos^2\theta}$$

また、$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから、②,③より、

$$\frac{dL}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$=\sqrt{1+\tan^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}$$

したがって、

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dx}{dL}\cdot\frac{dL}{d\theta}=\cos\theta\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}\quad\cdots●1$$
$$=\frac{a}{2}\left\{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right\}$$

よって、

$$x=\int\frac{a}{2}\left\{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right\}dx$$
$$=\frac{a}{2}\{-\log(1-\sin\theta)+\log(1+\sin\theta)\}+C$$
$$=\frac{a}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+C\quad(C\text{は積分定数})$$

$x=0$ のとき、$\theta=0$ だから、$C=0$

したがって、

$$x=\frac{a}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\quad\cdots④$$

また、②より、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}\quad\cdots⑤$$

ここで④より、

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=e^{\frac{2x}{a}}$$
$$1+\sin\theta=e^{\frac{2x}{a}}(1-\sin\theta)$$

よって、

$$\sin\theta=\frac{e^{\frac{2x}{a}}-1}{e^{\frac{2x}{a}}+1}$$

したがって、⑤より

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{\left(\dfrac{e^{\frac{2x}{a}}-1}{e^{\frac{2x}{a}}+1}\right)^2}{1-\left(\dfrac{e^{\frac{2x}{a}}-1}{e^{\frac{2x}{a}}+1}\right)^2}=\frac{\left(e^{\frac{2x}{a}}-1\right)^2}{4e^{\frac{2x}{a}}}$$

$\frac{x}{a}\geqq 0$ であるから、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\frac{2x}{a}}-1}{2e^{\frac{x}{a}}}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

よって、$y=\int\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$

$$=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+C\quad(C\text{は積分定数})$$

$x=0$ のとき、$y=0$ だから、$C=-a$

したがって、

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)-a$$

解法 2)

④の後、y も θ で表す。

②及び●1 より

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\theta}$$
$$=\tan\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

よって、

$$y=\int\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}dx=\frac{a}{\cos\theta}+C \quad (C\text{は積分定数})$$

$y=0$ のとき、$\theta=0$ だから、$C=-a$

したがって、$y=\dfrac{a}{\cos\theta}-a$

これより、$\dfrac{y}{a}+1=\dfrac{1}{\cos\theta}$ ・・・●2

$$\left(\frac{y}{a}+1\right)^2=\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2=1+\tan^2\theta$$

$\tan\theta \geqq 0$ であるから、

$$\tan\theta=\sqrt{\left(\frac{y}{a}+1\right)^2-1} \quad ・・・●3$$

また④より、$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$x=\frac{a}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$
$$=\frac{a}{2}\log\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$$
$$=a\log\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって、

$$e^{\frac{x}{a}}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta$$

●2、●3を用いて、

$$e^{\frac{x}{a}}=\left(\frac{y}{a}+1\right)+\sqrt{\left(\frac{y}{a}+1\right)^2-1}$$
$$\left(e^{\frac{x}{a}}-\left(\frac{y}{a}+1\right)\right)^2=\left(\frac{y}{a}+1\right)^2-1$$
$$e^{\frac{2x}{a}}-2e^{\frac{x}{a}}\left(\frac{y}{a}+1\right)=-1$$
$$2e^{\frac{x}{a}}\left(\frac{y}{a}+1\right)=e^{\frac{2x}{a}}+1$$
$$\therefore y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)-a$$

解法3)

④から、次のようにも導ける。

$$e^{\frac{x}{2a}}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\left(1+\sin\theta\right)^2}{\cos^2\theta}$$

$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$e^{\frac{x}{a}}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta$$

また、

$$e^{-\frac{x}{a}}=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta$$

2式より、

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\tan\theta=\frac{dy}{dx}$$
$$\therefore y=\int\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$
$$=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+C \quad (C\text{は積分定数})$$

$x=0$ のとき、$y=0$ だから、$C=-a$

したがって、

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)-a$$

(2019　鈴木)

4　おわりに（今後の展望）

本校数学科では専任７名が，同じ学年の生徒をできるだけ継続して次年度も担当し，中高６年間，さらに大学での学びをも見通した授業を行うように努めている。そこでの共通した目標は『いろいろな現象や事柄に潜む仕組みや法則を数学的に解析し，その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる』ことである。時に生徒達は，こちらの想定していることを大きく超えたアイディアを見せてくれることがある。ただ，これは我々教員にとって，想定外であっても，教材を作るチャンスである。

そのため，授業では問題や定理の仕組みを問い，解法や照明のアイディアの説明・発表をさせる。自分の考えを発表し，また他者の様々な考え方を知ることは，問題の中に潜む仕組みを一層はっきりと認識させ，理解を深化できる。

数学の面白さは，既成の事実を眺めることで味わうのではなく，既成の事実を疑い，未開の地平で議論ができることにある。本校数学科教員は，日々生徒達から刺激を受けることでアイディアを蓄積し，ここに教材を紹介することが出来ている。

中高一貫の良さは，生徒達が，ゆとりある学校生活を過ごしながら，自分を見つけ出し，何かに熱中し，自分の個性を伸ばすことにある。生徒は教科の勉強だけでなく，学校行事や校外学習，部活動，水田学習などいろいろなものを通して成長していくことにある。数学においても，この６年間を通して，自分で見つけた自分の課題を大切にして納得いくまで個人で研究したり，授業や数学研究のクラブ活動等で友人らと「こんな証明はどうなのだろう」などとわいわい議論して楽しんだり，数学オリンピック・情報オリンピックなどに積極的に何度も挑戦する生徒が多数いる。いうなれば，これらの“数学の特別活動”が活発に行われているということが大切なのであろう。

開発教材の有効性の検証という側面と並行して，より良い教材へと発展させる礎としても，このように教材開発のネットワークを広げていくことは，今後さらに重要性を増すであろう。公開授業・研究協議会や，SSH 数学科教員研修会など，従前より本校数学科では，他校の先生方から直接意見をいただく機会を継続的に設けているが，今後フィードバックの仕組みについて，Web サイトを活用するなど，より集約しやすいものをつくっていくことも大切ではないかと考えられる。

生徒の数学的活動を支援する取組としては，SSH 事業第Ⅳ期より始動した数学オリンピックワークショップについて，4 年目となる来年度はこれまでの取り組みを踏まえ，他校との協力・協同学習についても取り入れながら，発展させていきたい。