氏　　　　　　　名	安福　智明
学　位　の　種　類	博　士　（理　学）
学　位　記　番　号	博　甲　第　9361　号
学位授与年月日	令和2年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審　査　研　究　科	数理物質科学研究科
学　位　論　文　題　目	

A Study on Combinatorial Games
（組合せゲームについての研究）

主　　　　　　　査	筑波大学准教授	博士（理学）	照井　章
副　　　　　　　査	筑波大学教授	博士（理学）	佐垣　大輔
副　　　　　　　査	筑波大学准教授	博士（数理学）	平山　至大
副　　　　　　　査	筑波大学アソシエイト	理学博士	坂井　公

論　文　の　要　旨

本論文で扱われているテーマは組合せゲーム理論に関するものである。組合せゲーム理論が対象とするゲームは、プレイヤーが交互に手を指すゲームで、確定性（ゲームの各差し手が偶然の要素に依存しない性質）および完全情報性（ゲームの開始時点から終了局面までに各プレイヤーが指しうる手や局面の情報がすべて公開されている性質）を持つ。これに加え、本論文では、以下の特徴を持つゲームを対象にしている。

1.　プレイヤーは 2 人で、交互に手を打つ。
2.　ゲームは有限の手数で終了する（有限性）。
3.　同じ局面が 2 度以上現れることはない。
4.　ゲームの任意の局面において、双方のプレイヤーが打つ手の選択肢の集合が常に等しい（不偏性）。

特に、上記の特徴の 4 番目の「不偏性」を備えたゲームは「不偏ゲーム」と呼ばれる。

本論文で扱われている研究テーマは以下の2点であり、いずれも不偏ゲームの代表例の一つである石取りゲーム（Nim）を拡張したゲームを対象にした研究である。

1.　複数の山を持つ Nim の拡張であるゲームに対する Grundy 数の公式の解析。
2.　Nim の別の拡張に対する Grundy 数の公式の導出。

ここで、「Grundy 数」は、不偏ゲームにおいてゲームの局面に対応して定義される非負整数で、各局面における必勝戦略の存在判定と深い関わりがある。

第 1 の研究テーマでは、石取りゲームの一つで Wythoff と呼ばれるゲームを発展させた形のゲームを対象にしている。Wythoff は、石の山の数が 2 個あり、後手が必勝戦略を持つ局面が知られているが、任意の局面に対するGrundy数の明示的な公式はまだ知られていない。著者は、Wythoffと類似のルールを持つゲームを考案し、その Grundy 数の明示的な公式を導いたが、そのゲームは既知のゲームで Cyclic Nimhoff と呼ばれており、Grundy 数の公式の解析もすでに行われていた（なお、Cyclic Nimhoff においては、山の数が任意の有限個に拡張されている。）そこで、本研究において、制限 Nim と呼ばれるルールを追加した形で Cyclic Nimhoff を拡張したゲームを考案している。制限 Nim は、各山から各プレイヤーが取り去ることが可能な石の個数をいくつかの種類に制限するルールである。著者は、このゲームにおいて、各山のゲームの Grandy 数列が任意の数列から h-stair と呼ばれる規則で生成される数列で表される際に、このゲームの各局面に対する Grandy 数の公式を与え、さらに、このゲームにおける任意の制限 Nim のルールに対し、その Grundy 数列に対する h-stair を Grundy 数列に持つようなゲームを与える新たな制限 Nim のルールを与えている。

第2の研究テーマでは、Delete Nim と呼ばれる Nim に類似したゲームを取り上げ、その解析を行っている。本研究では、Delete Nim における Grundy 数の公式を、論理和を含む式の形で与えている。さらに、既存のゲームで Grandy 数の公式が知られていなかったゲームに対し、ゲーム木が一致するという意味でこのゲームが Delete Nim と同型であることを用いて、このゲームの Grundy 数の公式を（論理和を含む式の形で）新たに与えている。

審　査　の　要　旨

〔批評〕

組合せゲーム理論の主な研究テーマは、ゲームの各局面において、先手や後手、もしくは 2 人のプレイヤー（「右」および「左」と呼ばれる）に必勝戦略が存在するかどうかの解析である。歴史的には上述の石取りゲーム(Nim)の解析が 20 世紀初頭から知られているが、多くの組合せゲームが解析の対象になったのは 1960-70 年代以降とされている。

不偏ゲームにおける Grundy 数は、終了局面より再帰的に定義されるので、原理的には任意の局面における Grundy 数を求めることが可能ではあるが、終了局面からゲームの局面をさかのぼって Grundy 数を求めることは、ゲームの局面の組合せが一般に指数関数的に増えるため、現実的ではない。そこで、各局面に対し、Grundy 数の明示的な公式を求めることは、必勝戦略の存在判定の上で、不偏ゲームの解析における重要な研究テーマの一つである。

第1の研究テーマにおいては、研究対象のゲームに対し、数列に対する h-stair の規則を巧みに用いることにより、各山のゲームの Grundy 数の公式が特定の規則に従う際に、それらの山から構成されるゲームの Grandy 数の公式を導いたり、Grundy 数の公式が既知のゲームに対し、Grandy 数が明示的な公式で表されるような新たなゲーム（のルール）を導いたりすることで、Grundy 数による必勝戦略の解析が可能なゲームを増やした点が評価できる。

第2の研究テーマにおいては、まず、多くのゲームにおいて Grundy 数の公式が排他的論理和を用いて

表される中で、Grundy 数の公式が論理和を含む式の形で与えられるゲームの存在を示した点が注目される。さらに、Delete Nim との（ゲームとしての）同型を用いることで、これまでゲーム自体は知られていたが Grundy 数の公式が知られていなかったゲームに対し、Grundy 数の公式が論理和を含む式で表されることを示した点が注目に値する。特に、今回 Grundy 数が明らかになったゲームにおいては、Grundy 数の公式が論理和を含む式で表されることは、もしそのゲームのみを観察対象にしていたならば直ちに明らかになっていたとは限らず、今回、ゲームの同型を用いることによって Grundy 数が明らかになった点は興味深い。

以上、本論文が対象としたいずれの研究テーマにおいても、研究対象とするゲームの Grundy 数の公式を明らかにした点は、将来的に各ゲームの必勝戦略を解析する上で有効なものであり、組合せゲーム理論の研究の進展に貢献する成果として評価できる。

〔最終試験結果〕

令和 2 年 2 月 12 日、数理物質科学研究科学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。