

DA

1000

1991

(4)

寄	贈
石橋一弘氏	平成
	年
	月
	日

工学博士学位論文

ベナール対流の乱流解

筑波大学大学院博士課程

工学研究科構造工学専攻

石橋 一弘



平成3年12月

95003782

ベナール対流の乱流解

石橋 一弘

目次

目次	<1>
要約	<3>
第1章 序論	1
1.1 乱流理論	2
1.2 乱流変動支配方程式	6
第2章 ベナール対流	10
2.1 ベナール対流	11
(1) 熱対流系の乱流	
(2) 熱対流系乱流の研究の現状	
(3) 可視化実験による知見	
2.2 ベナール対流の支配方程式	20
(1) 支配方程式	
(2) 変数分離及びフーリエ変換	
第3章 数値解法	24
3.1 数値計算法	25
(1) 方程式の差分化	
(2) 計算法	
3.2 境界条件と初期値	27
(1) 境界条件	
(2) 初期値	
3.3 予備計算	29
(1) 予備計算の必要性	
(2) 予備計算の結果	
3.4 計算の指針	30
(1) 本計算の概要	
(2) 定常解の判定	

第4章 結果と考察	31
4.1 計算結果	32
(1) 全般的な解の状況	
(2) 非分散型孤立波解	
4.2 実験との比較	53
(1) 平均温度分布	
(2) 乱流強度 (Intensity)	
(3) 温度ゆらぎのスペクトル	
(4) Ra-Nu 曲線	
第5章 結論	61
謝 辞	63
参 考 文 献	64
表及び図の一覧	67

ベナール対流の乱流解

石橋 一弘

非平衡統計力学の第一原則から導かれた乱流変動支配方程式をベナール対流の場合に適用し、平均温度分布と乱流変動の定常解を連立して求めた。得られた乱流変動の解は非分散型孤立波の形をしており、coherentな構造を有していること、境界層と中央領域において顕著な構造の違いがあることが確かめられた。また、それから計算された平均速度変動・温度変動の垂直方向分布、温度ゆらぎのスペクトル、平均温度の分布並びにヌッセルト数は実験値と良く一致した。このようにして、得られた解は既存の実験と満足すべき一致を示し、非平衡統計力学の第一原則から導かれた乱流変動支配方程式が健全な基盤をもつことが示された。

第 1 章

序 論

1. 1 乱流理論

1. 2 乱流変動支配方程式

1. 1 乱流理論

スーパーコンピュータの発達にともなって、CFD（数値流体力学）は乱流の研究に応用され始めた。直接シミュレーション（Direct simulation）の方法においては、ナビエ・ストークスの式を乱流の瞬時値についても成り立つと仮定し、速度や圧力は偶然量としたまま解くが、この仮定の正しさは非圧縮流についてのみ証明済みである^{1,2)}。しかしながら、乱流場を精度よく求めるためには、乱流を構成する大小様々な渦運動をすべてきちんと計算しなければならない。最も小さい渦の大きさは、 $R^{-3/4}$ （ R :レイノルズ数）に比例する³⁾ので、3次元空間の3つの方向にそれぞれ少なくとも $R^{3/4}$ 程度の数の格子点を取らなければならない。このとき、格子点の総数は $R^{9/4}$ 程度になる。また、乱流の時間変動を正確に追跡するためには、時間刻みはコルモゴロフ長さを乱流の速度で割ったもの、すなわち $R^{-3/4}$ 程度に取らなければならない。結局、乱流を精度よく計算するためには、 $R^{9/4} \times R^{3/4} \sim R^3$ に比例する計算時間を必要とする。したがって、記憶容量及び計算時間の両面から、実用的なレイノルズ数における乱流を正確に計算するのは計算機の今後の飛躍的な発展を見越してもなかなか現実的なものになるとは思われない。

一方、ナビエ・ストークス方程式へのくりこみ理論（renormalization group theory:RNG）の応用⁴⁾はナビエ・ストークス式にある強制項を仮定することと、コルモゴロフの $-5/3$ 則が成り立つことを前提とすること以外は第一原則に忠実に作られている。但し、この強制項は流体方程式に熱力学的ゆらぎのレベルまで考慮したときにあらわれる物理的な強制項¹⁾の形をしていないし、スペクトルのコルモゴロフ分布は海洋乱流のような超巨大スケールの乱流以外では存在しない。それにもかかわらずこの理論から求められた壁乱流のカルマン定数は実験ときわめて良く一致する。

このように、レイノルズ数の低い乱流域については直接シミュレーションで精度のよい解を得ることができる。また、きわめて大きなレイノルズ数域についてはくりこみ理論が有力な解法となりつつある。これらの方法においては実用レイノルズ数域へのアプローチが精力的になされている（Fig.1.1 参照）。

needs for solitary - wave solution

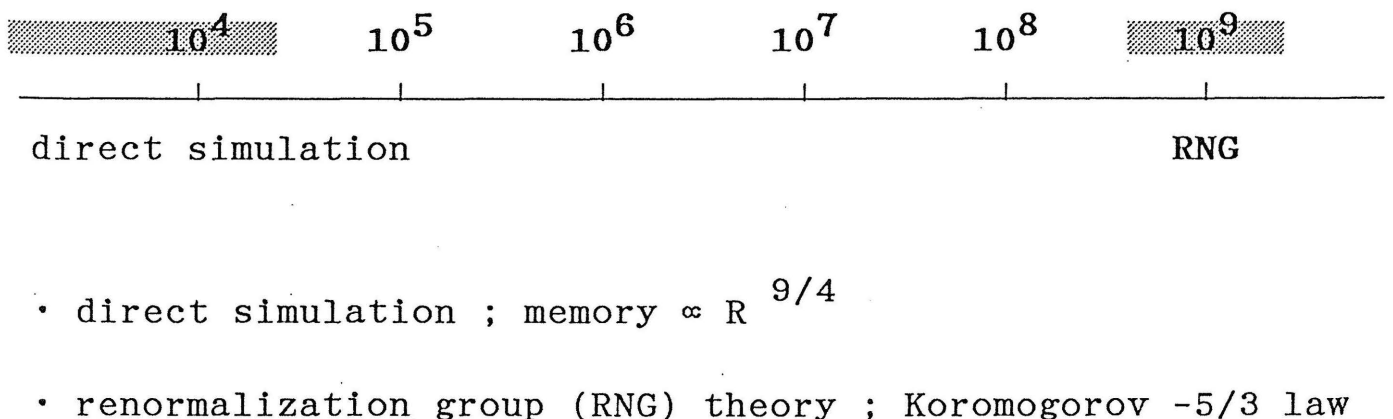


Fig.1.1 Needs for solitary-wave solution

これらの新しい手法に対し、古典的アプローチとして Kármán-Howarth の等方性乱流理論 (1938) に源を発する統計的乱流理論⁵⁾がある。

これは統計量としての流体力学変数 Z_α を

$$Z_\alpha = \langle Z_\alpha \rangle + \Delta Z_\alpha \quad (\alpha=j, 4; j=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

によって平均値と乱流ゆらぎに分け

$$\langle Z_\alpha \rangle, \langle \Delta Z_\alpha \Delta Z_\beta \rangle, \langle \Delta Z_\alpha \Delta Z_\beta \Delta Z_\gamma \rangle, \dots \quad (1.2)$$

を知ることによって偶然量 Z_α を記述しようとするものである。

ここで Z_α は以下のように速度と圧力を総称する：

$$Z_\alpha = \begin{cases} u_j, & (\alpha=j) \\ p, & (\alpha=4) \end{cases} \quad (1.3)$$

また、 Z_α は時空座標 (\vec{x}, t) における量、 \hat{Z}_α は同じく (\vec{x}, t) における量である。

従って式 (1.2) における相関量はすべて異なる点、かつ同じ時間の相関量である。この相関についての時空座標の異・同の選択については4つの可能性があるが、この選択のみが統計力学の第一原則と矛盾しない¹⁾。

ところで、実用にあたって要求される量とは、たとえば機体にあつてはその乱流摩擦抵抗であり、再突入時の熱流束であり、エンジンにおいては、たとえば乱流炎の燃焼伝播速度であり、スクラムジェットでは乱流拡散炎の着火距離である。ここではいずれも平均値だけが要求されており、これらは次の4つの乱流輸送量、すなわちレイノルズストレス、乱流熱流束密度、乱流拡散流束密度、乱流化学反応速度の定常値がわかれば、いわゆるレイノルズ平均を施した気体力学の方程式から求めることができる。この立場と直接シミュレーションの立場の対照を最も直観的に示した可視化写真⁶⁾を Photo.1.1(a), (b) に示す。もちろん、古典的アプローチの立場は (b) に対応する。ところがこの線に沿って問題を定式化すると次のような乱流輸送量があらわれ、これは本来7つの独立変数をもつ：

$$\langle \Delta Z_\alpha(\vec{x}, t) \Delta Z_\beta(\vec{x}, t) \rangle = R_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}, t) \quad (1.4)$$

一方、我々が扱える偏微分方程式の範囲は非定常3次元までであるから、式 (1.4) の右辺の空間変数を多くとも4以内にならなければならない。その一つの可能性はたとえば以下のような一様・等方性の仮定である⁵⁾。

$$R_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}, t) \rightarrow R_{\alpha\beta}(\vec{x} - \vec{x}, t)$$

しかしながら、「等方性」という仮定は非現実的であり、「一様性」という仮定は本質的で一般的な場合に拡張できない。

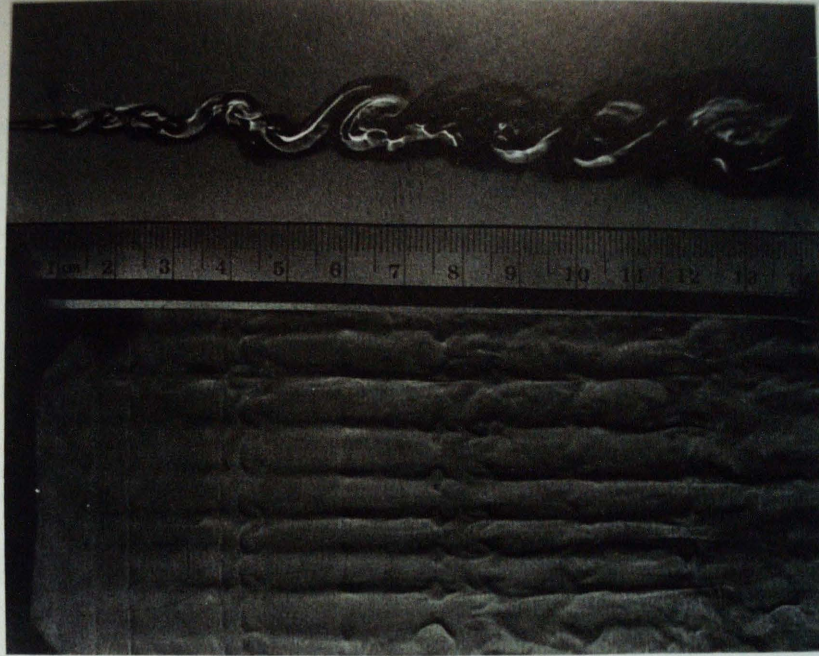


FIGURE 3. Instantaneous Schlieren picture of the helium-nitrogen mixing layer.
 $U_1 = 496$ cm/s, $r = 0.5$, $\rho_2/\rho_1 = 7$, $P_0 = 4$ atm (1-2 μ s exposure).

Photo.1.1(a) Instantaneous Schlieren picture of the mixing layer

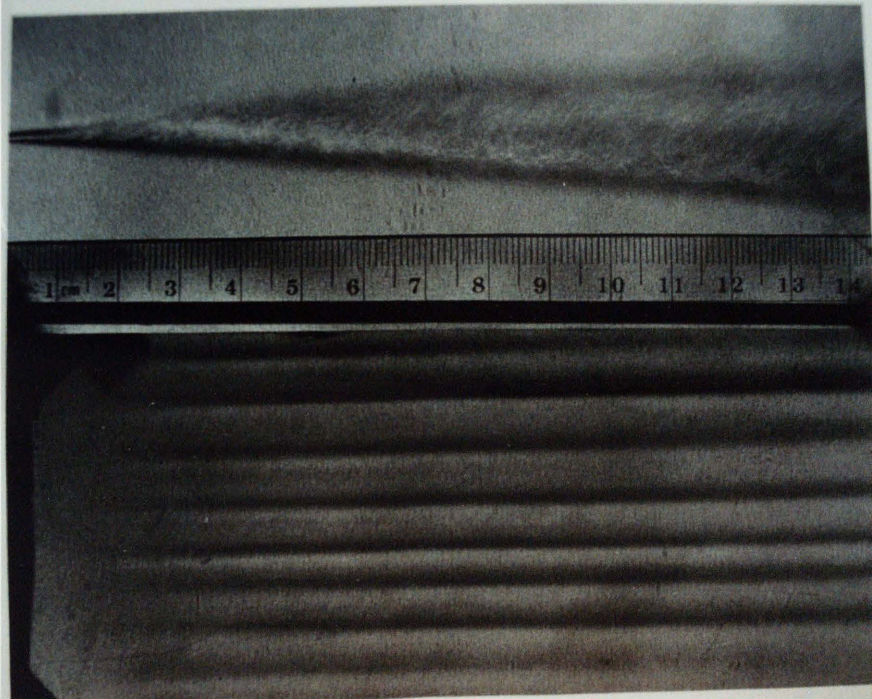


FIGURE 4. Time-exposure Schlieren picture of the helium-nitrogen mixing layer.
Same flow conditions as in figure 3 (2 s exposure).

Photo.1.1(b) Time-exposure Schlieren picture of the mixing layer

他方、次のような考え方も長年行われてきた。レイノルズストレスは3次元空間の量である。

$$(\text{Reynolds stress})_{ij} = [R_{ij}(\vec{x}, \vec{x}, t)]_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}} \quad (1.5)$$

であるから、初めから同一空間点での相関

$$\langle \Delta u_i(\vec{x}, t) \Delta u_j(\vec{x}, t) \rangle$$

を支配する方程式を作ればこのような困難はおこらないではないか、という考えであり、現に多くの方程式がこの考えで作られた。このようにして作られた方程式は本来6次元空間での式(1.4)の支配方程式とは似ても似つかないものになる。例えば、このやり方を一様・等方性乱流について適用するとKármán-Howarthの式は得られず、高階のモーメントを取るにつれ、未知数の数が爆発的に増加するような方程式系となる。現行の多方程式モデル、 $\kappa - \varepsilon$ 法における恣意的なパラメタの存在はこのためである。

相関(1.4)の変数を低減する最も本格的な方法は次の変数分離法である^{1,7,8)}。

$$R_{\alpha\beta}(\vec{x}, \vec{x}, t) = \text{R.P.} \int q_{\alpha}(\vec{x}, t; \Omega) \hat{q}_{\beta}(\vec{x}, t; \Omega) d\Omega \quad (1.6)$$

ここで Ω はある無次元数、ここでは現象の代表速度/代表長で無次元化した周波数に取る。また、R.P.は実数部分を取ることを意味する。3重相関を無視した初期の理論¹⁾によると、このような変数分離法によって q_{α} はOrr-Sommerfeldと同型の方程式を満たすこと、ただし線形安定論との相違として q は本質的に複素量であること、一方、 $R_{\alpha\beta}$ は観測可能な物理量であるから実数でなくてはならないこと、又このテンソルは対称テンソルでなくてはならないことから(統計粒子の力学的対称性)

$$\hat{q} = q^* \quad (* : \text{共役複素}) \quad (1.7)$$

であるべきこと、が導かれた。

のちに、この変数分離法は、ある条件下では q の支配方程式の非線形性を許しても成り立つことが示された^{7,8)}。この条件が方程式系を閉じさせる条件(closure condition)となる。そして非圧縮性乱流については q は(変換された空間で)ナビエ・ストークスの方程式をみたすことがわかった。

このようにすれば、任意の非一様乱流を、独立変数を3次元物理空間にとどめたまま定式化することができる。本論文ではこの様な手法をベナール対流に適用した。

1. 2 乱流変動支配方程式

Tsuge^(9,10)により非平衡統計力学の第一原則から導かれた非反応性圧縮性乱流の支配方程式は以下の通りである。

平均流の支配式：

$$L_0 : \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m_r}{\partial x_r} = 0 \quad (1.8)$$

$$L_j : \frac{\partial m_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left[\frac{m_j m_r}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} q_j q_r^* d\Omega + p \delta_{jr} + (p_{jr})_{NS} \right] = 0 \quad (1.9)$$

$$L_4 : \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{m_j^2}{2\rho} + \frac{1}{2\rho} \int_{-\infty}^{\infty} q_j q_j^* d\Omega + \frac{1}{\gamma-1} p \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x_r} \left[\frac{m_r m_j^2}{2\rho^2} + \frac{m_r}{2\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} q_j q_j^* d\Omega + \frac{m_j}{\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} q_j q_r^* d\Omega \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma-1} \frac{m_r}{\rho} p + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{-\infty}^{\infty} q_4 q_r^* d\Omega + (p_{jr})_{NS} \frac{m_r}{\rho} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_r} \right] = 0 \quad (1.10)$$

ここで

$$m_j = \rho u_j + \langle \Delta \rho \Delta u_j \rangle$$

$$(p_{jr})_{NS} = -\mu \left[\frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{m_j}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{m_r}{\rho} \right) - \frac{2}{3} \delta_{jr} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{m_k}{\rho} \right) \right]$$

また、 ρ は密度、 p は圧力、 u_j は速度成分、 γ は比熱比、 Ω は無次元周波数（後述）、 μ は粘性係数、 λ は熱伝導係数である。

乱流変動の支配式：

$$\Delta L_0 : Dq_0 + \frac{\partial q_r}{\partial x_r} = 0 \quad (1.11)$$

ここで

$$Dq \equiv -i\omega^* \Omega q + \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{m_r}{\rho} q \right) \\ \Delta L_j : D \left(q_j + \frac{m_j}{\rho} q_0 \right) + \frac{\partial q_{4j}}{\partial x_j} + \frac{\partial q_{jr}}{\partial x_r} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{m_j}{\rho} q_r \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} q_j (\tilde{\Omega}) q_r (\Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} = 0 \quad (1.12)$$

ここで ω^* は変数分離定数、また

$$q_{4j} = q_4 + c^2 q_0, \quad c^2 = p/\rho$$

$$q_{jr} = -\mu \left[\frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{q_j}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{q_r}{\rho} \right) - \frac{2}{3} \delta_{jr} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q_k}{\rho} \right) \right] \\ - \frac{d\mu}{dT} \frac{q_4}{\rho R} \left[\frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{m_j}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{m_r}{\rho} \right) - \frac{2}{3} \delta_{jr} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{m_k}{\rho} \right) \right]$$

$$\Delta L_4 : D \frac{q_4 \omega}{\gamma-1} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{m_j^2}{2\rho^2} q_r \right) + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{m_r}{\rho} q_4 \omega \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x_r} (c^2 q_r) \\ + \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{q_4}{\rho} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{m_j}{\rho^2} \int_{-\omega}^{\omega} q_i(\tilde{\Omega}) q_r(\Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} \\ + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{1}{\rho} \int_{-\omega}^{\omega} q_r(\tilde{\Omega}) q_4(\Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{m_r}{\rho} \right) (q_{jr})_{Ns} = 0 \quad (1.13)$$

式中、 L_0 、 L_j 及び L_4 は各々、連続の式、運動量保存則及びエネルギー保存則を表し、 Δ はそのゆらぎの量を表している。ここで u_r は平均速度、 p は平均圧力、 T は平均温度、 ω_0 は周波数の次元をもつ変数分離定数で固有値として定められる。この式で $(u_j, p, T; q_0, q_j, q_4)$ は連立して解かれ、平均速度分布、平均温度分布、レイノルズストレス R_{jr} 及び乱流熱伝達は同時に定められる。式(1.12) はフーリエ変換

$$q_j(\vec{x}, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\Omega s} f_j(\vec{x}, s) ds \quad (1.14)$$

によって2つの時間 (t, s) をもつ Navier-Stokes の方程式に帰着される。これらの式は、本来、非平衡統計力学から導かれる流体モーメントの方程式として得られたもので、物理量の瞬時値を用いて書いた現象論的表示 L_0 、 L_j 、 L_4 を使用すれば、平均値と乱流変動の式は次の形に書かれる (Table.1.1 参照)。

$$\langle L_\alpha \rangle = 0 \quad (\alpha : 0, j, 4) \quad (1.15)$$

$$\langle q_\alpha \hat{L}_\beta + \hat{q}_\beta L_\alpha \rangle = 0 \quad (\alpha, \beta : 0, j, 4) \quad (1.16)$$

ここで、 $\hat{}$ は相関をとる第2点の物理量を表す。
変数 q_α と乱流変動量 Δ との対応は次のようである。

$$\begin{array}{ccc} q_0 & & \Delta\rho \\ q_j & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} & \rho\Delta u_j \\ q_4 & & \rho R\Delta T \end{array} \quad (1.17)$$

また乱流相関は次の式で与えられる。

$$\langle \Delta u_j \Delta \hat{u}_r \rangle = \rho^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} q_j \hat{q}_r d\Omega \quad (1.18)$$

$$\langle \Delta u_j \Delta \hat{T} \rangle = (\rho^2 R)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} q_j \hat{q}_4 d\Omega \quad (1.19)$$

ここで

$$\Omega = \omega/\omega_0$$

は無次元周波数である。(ω_0 : 現象の代表的周波数 ; U/L)

この変数分離された方程式は以下の2つの特徴を持っている。

- 1) 2種類の時間依存
- 2) 合成型の (convolutional) 非線形積分項

第1の特徴は、 $i\omega \cdot \Omega$ という乱流特有の混沌性と、 $\partial/\partial t$ という連続的時間微分可能であるコヒーレントな時間依存を持っていることを示している。第2の特徴は、非線形な3次以上の高次相関をこの合成型積分が表していることである。

この方程式は複雑な連立非線形微積分方程式であり、ようやく最近になって乱流一次元火炎について解が得られ、火炎伝播速度、スペクトルなどについて実験値とよい一致を見た¹¹⁾。本研究の目的は、この方程式をベナール対流に適用し、その乱流状態を解明すると共に、この方程式が健全な基盤を有することを示すにある。

Table.1.1 Structures of nonequilibrium statistical mechanics and phenomenological theories

	Nonequilibrium statistical mechanics	Phenomenological theory
	BBGKY hierarchy	Fluid moments L_α $\alpha: 0, J, 4$ master eqs.
1-pt.	$D_1 f = J_1 [ff+g]$ $g=0$ Chapman (1917) Enskog (1917) Grad (1949) $g \neq 0$ Tsugé-Sagara (1976)	$L_\alpha = 0$ identical $\rightarrow L_\alpha = 0$ (laminar eqs.) identical if $\Delta\rho=0$ $\rightarrow \bar{L}_\alpha = 0$ (Reynolds average turbulent eqs.)
2-pt.	$D_2 g = J_2 (fg+h)$ $h=0$ Tsugé-Sagara (1974) $\langle \Delta \hat{\xi}_\alpha \hat{L}_\beta + \Delta \hat{\xi}_\beta \hat{L}_\alpha \rangle = 0$ $g = \int \hat{\phi} \hat{\phi}^* d\Omega$ Tsugé (1979)	$\Delta \hat{\xi}_\alpha \Delta \hat{L}_\beta + \Delta \hat{\xi}_\beta \Delta \hat{L}_\alpha = 0$ Kármán-Howarth (1938) Tsugé (1984a) $\langle \Delta \hat{\xi}_\alpha \Delta \hat{\xi}_\beta \rangle = \int q_\alpha \hat{q}_\beta^* d\Omega$ ($\Delta \hat{\xi}_\alpha; \Delta \rho, \rho \Delta u_j, \rho R \Delta T$)
...
N-pt.	$D_N f_N = 0$ (Liouville; master eq.)	...

unique procedure

nonunique procedure

第 2 章

ベ ナ ー ル 対 流

2. 1 ベナール対流

- (1) 熱対流系の乱流
- (2) 熱対流系乱流の研究の現状
- (3) 可視化実験による知見

2. 2 ベナール対流の支配方程式

- (1) 支配方程式
- (2) 変数分離及びフーリエ変換

2. 1 ベナール対流

(1) 熱対流系の乱流

熱対流系の乱流の特徴は、その乱流に至る道すじが大へん明確なことである。最近では、低温ヘリウム（約 5K）気体が Rayleigh-Benard対流の実験に用いられ、極めて高いレイリー数（ $Ra \sim 10^{15}$ ）またはレイノルズ数（ $Re \sim 10^7$ ）が実現されている¹²⁾。レイリー数（ Ra ）は

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\kappa \nu} \quad (2.1)$$

で定義される。ここで、 α は定圧膨張係数、 g は重力係数、 ΔT は2平板間の温度差、 L は2平板間の距離、 κ は熱拡散定数、 ν は動粘性係数である。理想気体では、一般に $\kappa, \nu \sim v l$ （ v :分子の速度、 l :平均自由行程）が成立しており、ヘリウムは最も低温まで気体で存在できるため、 κ 及び ν のほとんど量子限界に近い値が実現でき、小さな系で極めて高いレイリー数が達成できる。また、 $l \sim 1/p$ の関係から、気体の圧力を変えることにより、広い範囲（約12桁）でレイリー数を変化させることができるため、対流の開始、層流、振動状態、カオス、乱流の開始、初期乱流、発達乱流等の状態を一つの系ですべて実現できる。Fig.2.1 にその一例を示す。

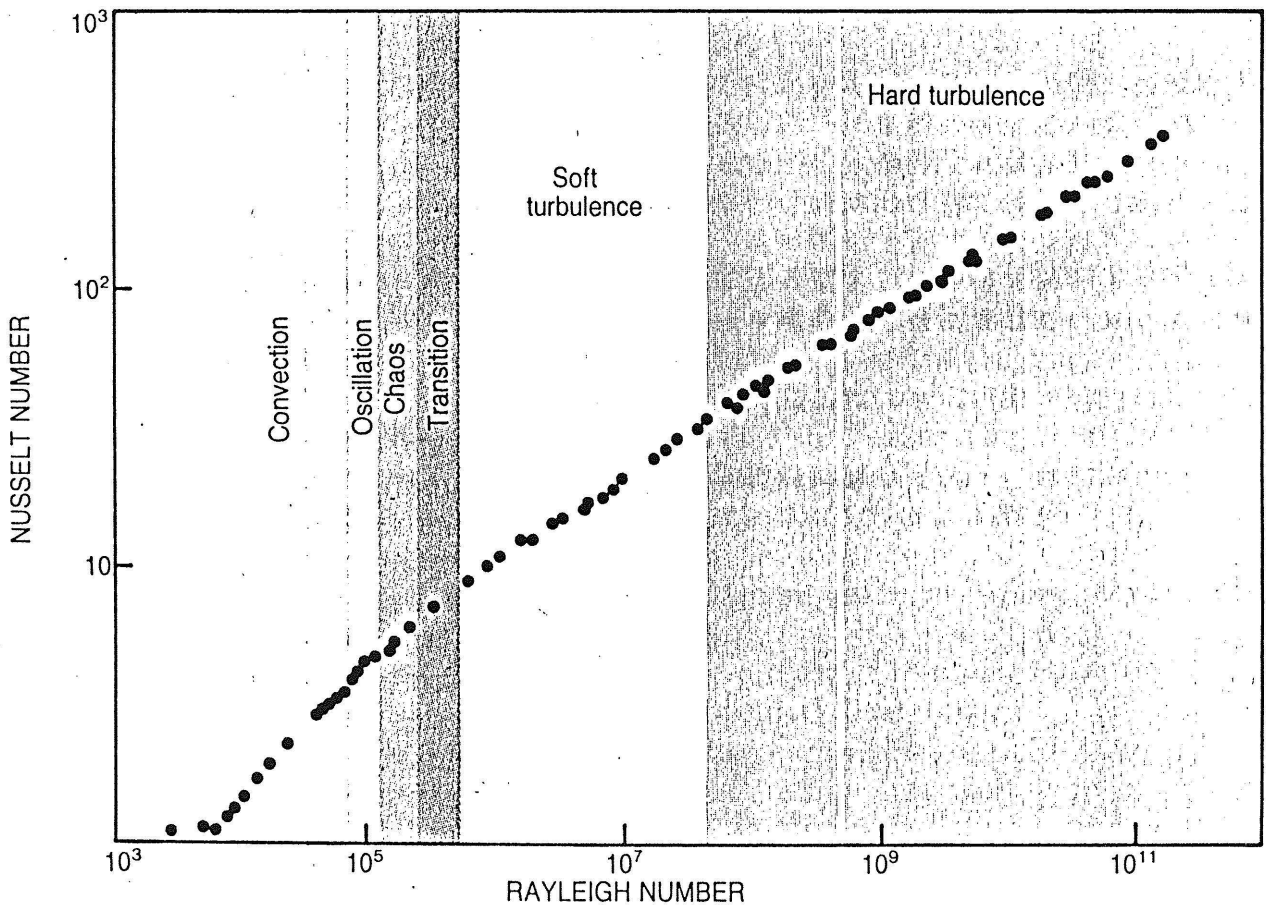


Fig.2.1 Nusselt number against Rayleigh number

縦軸はヌッセルト数 (Nu) で次のように定義される。

$$\text{Nu} = \frac{Q}{\lambda \Delta T / L} \quad (2.2)$$

ここで、 Q は 2 平板間の熱流束密度、 λ は熱伝導係数である。したがって、ヌッセルト数が 1 でないということは熱伝達が分子的熱伝導以外の要素すなわち対流または乱流によっておこることを表している。さらに、熱対流系に存在する作動流体の物性を表す無次元数としてプラントル数 (Pr) がある。プラントル数の定義は

$$\text{Pr} = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda} \quad (2.3)$$

のように粘性係数と熱拡散係数の比として表される。

Fig.2.1 に沿って、熱対流が乱流状態にいたる道すじを説明すると以下のようになる。

- 1) レイリー数が小さい間は、熱が (線形) 熱伝導によって下から上へ運ばれるだけで、流体は静止している。
- 2) 一般に、レイリー数が $Ra=1707.76$ を越えると、実験容器の深さにほぼ等しい直径を持つロール状対流が出現し、これはプラントル数 Pr やアスペクト比 AR (実験容器の横縦比) にほとんど依存しない。
- 3) これから Ra を更に増大すると、ロールの軸が歪んできて、その歪みが波動として軸に沿って伝わっていく。流れ場全体は周期的に振動する。この変化の様子は、Pr と AR に敏感に依存する。Pr が 2 を越える場合には振動現象の出現は大きく遅れ、Pr が 50 を越えると、振動の性格は流体力学的ではなくて熱的になり、熱い熱の塊と冷たい塊がぐるぐるとロールの中を上下する現象が現れる。
- 4) 周期的振動状態からカオティックな振舞いに至る道すじは多様である事が確認されているが、Ra の増大に伴って波動型ロール構造が次第に壊れていき、流れ場は非周期的な振舞いをするようになる。
- 5) さらに Ra を上げていくと、境界層付近で局在した burst 現象が現れ、ついにはカオスから乱流へ転移する。
- 6) 乱流への転移については、現在までに、実験的に詳しく調べられており、2 つの異なった乱流状態が起こることが分かっている (Table.2.1 参照)¹³⁾。

Table.2.1 Character of turbulence (Ref.13)

	soft turbulence	hard turbulence
pdf of temperature	gaussiann	exponential
Ra - Nu scaling	$Nu \sim Ra^{1/3}$	$Nu \sim Ra^{2/7}$
characteristic frequency		0.491 $\omega_c \sim Ra$
velocity field	large fluctuation	large scale coherent flow
power spectrum		some asymptotic behavior

(2) 熱対流系乱流の研究の現状

流体力学的安定性理論、特に静止流体層における自由対流の発生問題から出発した熱対流系の研究は、現在、「カオスと乱流」にその努力が指向されている。そのほとんどが実験的研究であり、これは熱対流系が物理測定に対して有利な点を有しているからである。例えば、流体が静止している容器に閉じ込められているので機械的振動が入る余地が少ない、初期条件をある程度制御できる、実験データは再現性に富んでいる、等である。最近になって、局所的な温度・速度が測定され、カオスから乱流への転移、2つの異なった乱流状態が見いだされた^{12,13)}。また、可視化技術の進歩により、カオスから乱流へ転移する際の境界層付近での局在した burst 現象、乱流状態における2次元的 wave と heat plume の存在が確認され、coherent な構造を有していることが分かった¹²⁻¹⁴⁾。

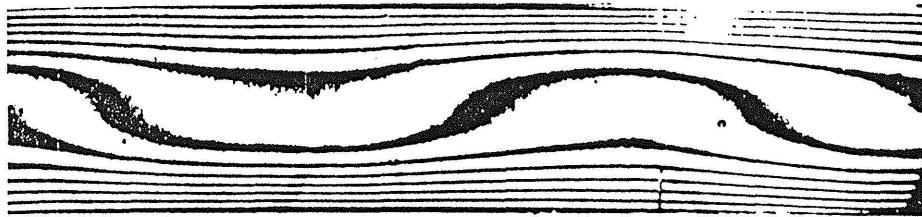
一方、理論研究の方は scaling law¹⁵⁾ 及びプラントル数無限大のマントル対流に関する研究¹⁶⁾ が幾らかあるのみであったが、米国シカゴ大学のグループが、有限幅におけるダイレクト・シミュレーション ($Ra \sim 10^8$) を行っていることが報告された(米国物理学会、1992.11)。

(3) 可視化実験による知見

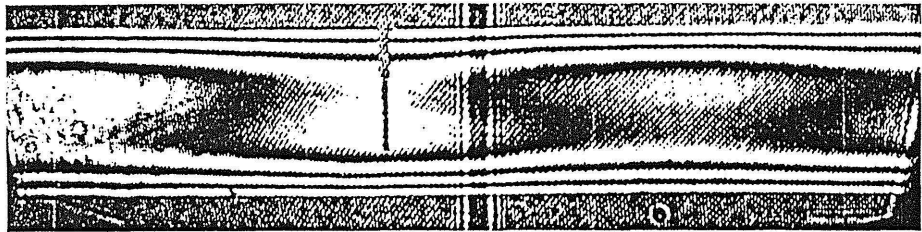
最近の進歩した可視化技術は、乱流の研究にも応用され、著しい成果が報告されている。ベナール対流においては、大きなレイリー数での実験が可能となった事と相まって、乱流状態中の熱輸送の担い手の正体が heat plume であるらしいことが分かってきた。これまでに報告された結果を用いて、ベナール対流の構造を整理すると以下のようなになる。

Fig.2.2 (a),(b) はそれぞれレイリー数が $Ra = 7.0 \times 10^3$ 及び $Ra = 9.6 \times 10^3$ の静止状態の横断面の可視化写真¹⁷⁾ である。(a) は作動流体が空気、(b) は作動流体が水の場合である。熱は対流によって下から上へ運ばれ、流れは層流である。

Fig.2.3 (a),(b) はともにロール状対流の横断面の可視化写真¹⁷⁾ であり、違った瞬間を撮影したものである。このときのレイリー数は $Ra = 3.15 \times 10^4$ 、作動流体は水である。対流によるロール構造が認められ、流体は隣合ったロール内で互いに逆向きに回転している。温度の高い下面に近い流体部分が暖められ膨張して浮力によって上昇するが、温度の低い上面に到達すると、そこで熱を奪われ収縮し重くなって再び下へ降りてくる。



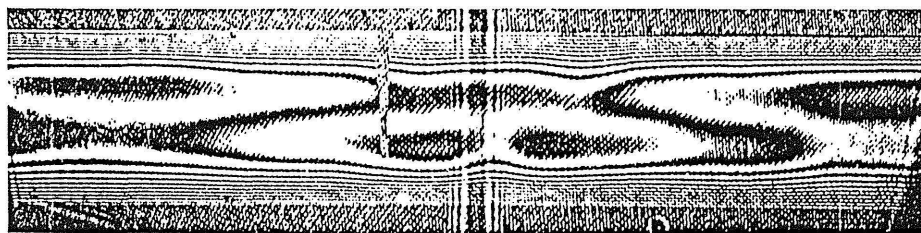
(a)



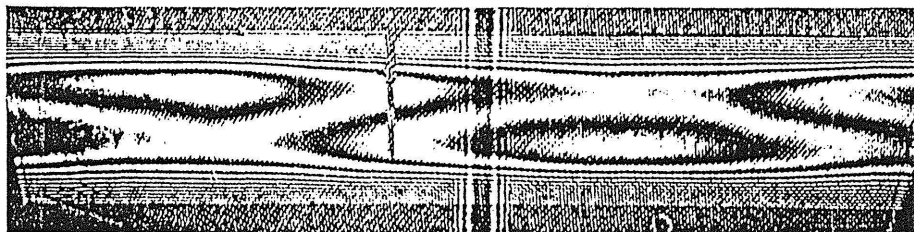
(b)

FIGURE 6. Laminar convection patterns. (a) Air; $Ra = 7.0 \times 10^3$, $D = 1.90$ cm, $\Delta T = 11.10$ °C. (b) Water; $Ra = 9.6 \times 10^3$, $D = 1.27$ cm, $\Delta T = 0.265$ °C.

Fig.2.2(a),(b) Laminar convection patterns



(a)



(b)

FIGURE 7. Laminar convection patterns in water. $Ra = 3.15 \times 10^4$, $D = 1.27$ cm, $\Delta T = 0.857$ °C.

Fig.2.3(a),(b) Laminar convection patterns in water

Fig.2.4 は (a) → (f) の順番で連続する横断面の可視化写真¹⁷⁾ であり、レイリー数は $Ra = 2.23 \times 10^6$ 、作動流体は水である。下面の境界層付近に確認される熱い熱塊が境界層からでてきて、ついには離れていくのが分かる。

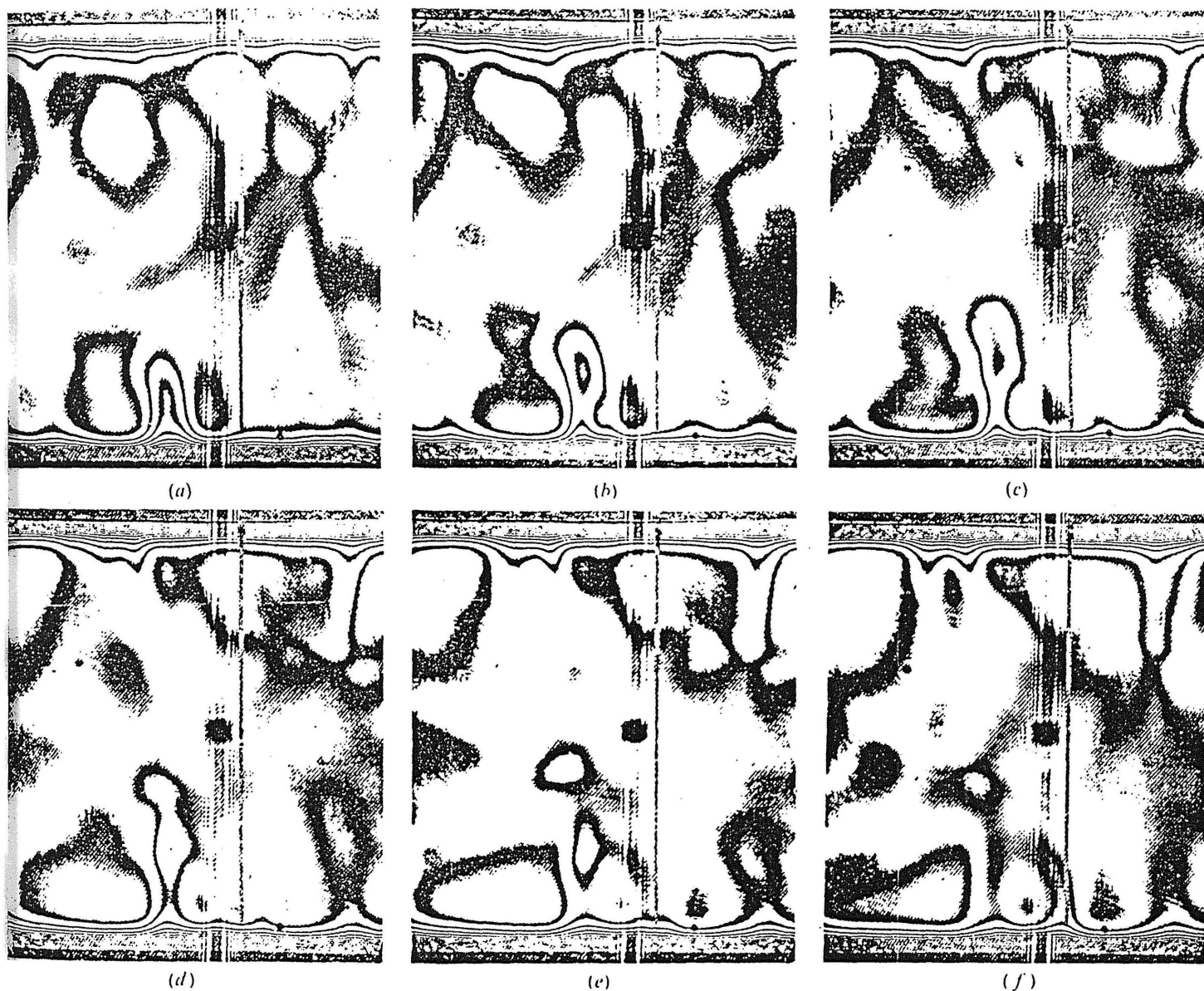


FIGURE 8. Release of a thermal from the boundary layer in water. 21 s sequence;
 $Ra = 2.23 \times 10^6$, $D = 5.07$ cm, $\Delta T = 1.36$ °C.

Fig.2.4 Release of a thermal from the boundary layer in water

Fig.2.5 も同様に (a) → (f) の順番で連続する横断面の可視化写真¹⁷⁾ であり、レイリー数は $Ra = 6.55 \times 10^7$ 、作動流体は水である。熱い熱塊が境界層から離れた後の下面の境界層付近の様子が示されており、水平方向の挙動 (wave) がよく分かる。Fig.2.4 及び Fig.2.5 はそれぞれ乱流状態の垂直方向、水平方向の特徴的な構造を示しており、さらには境界層と中央領域における構造の違いがはっきりと認められる。

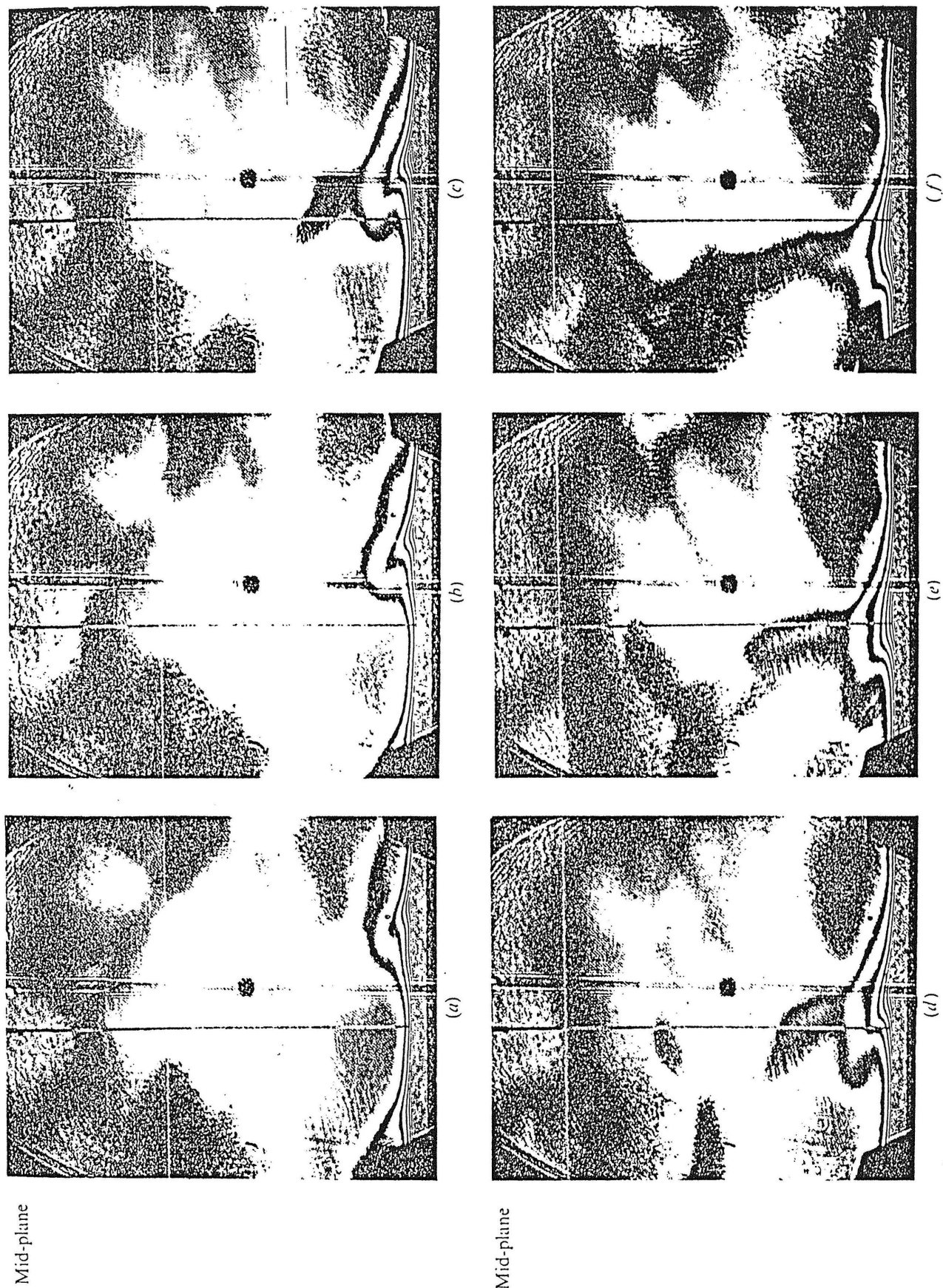


Fig.2.5 Horizontal movement of s thermal in a water layer

つぎに、乱流状態における heat plume の詳細を示す可視化写真¹²⁾ を挙げる。Photo.2.1 は下面の境界層付近の様子で、左が平面写真、右が断面写真である。レイリー数は $Ra = 4.0 \times 10^7$ で、作動流体は水である。左は光の入射角の違いにより 2 次元の wave を捕らえ、右はレーザービームの照射により温度の差を可視化したもので、白く光るところは特に温度の高いところである。plume は 3 次元の (スポット) であるのに誘起された波は著しく 2 次元ののであるのが興味深い。

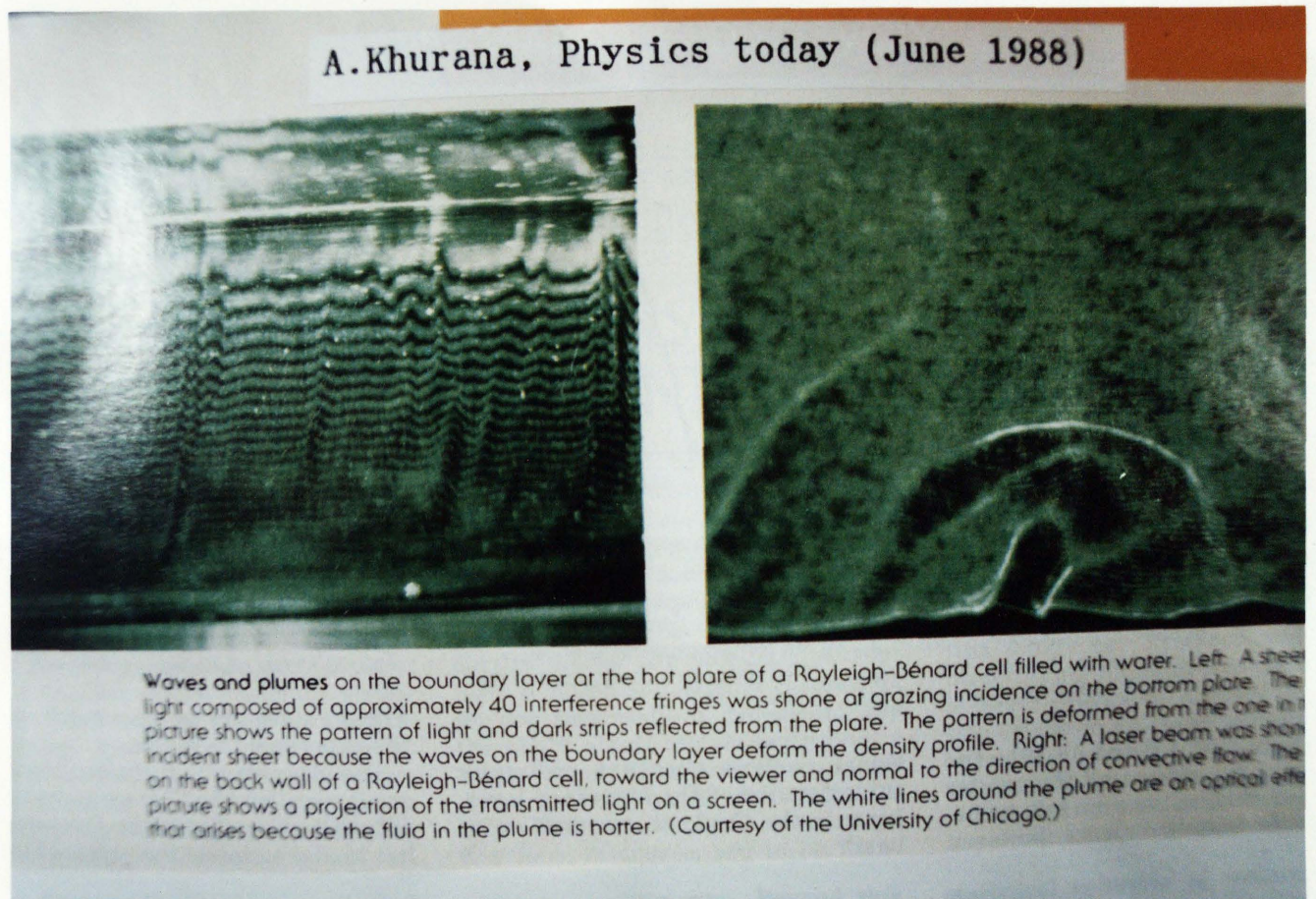


Photo.2.1 Waves and plumes in the lower boundary layer

Photo.2.2(a)~(c) は、この順番の連続写真¹⁴⁾ で、液晶により下面の状況が可視化されている。オレンジ色に光る波の先端が左奥から右手前に移ってきているのが確認される。 Photo.2.2(d) は同じ下面をレーザービームの照射により可視化した¹⁴⁾ もので、ここでもきわめて2次元的な構造を有している。

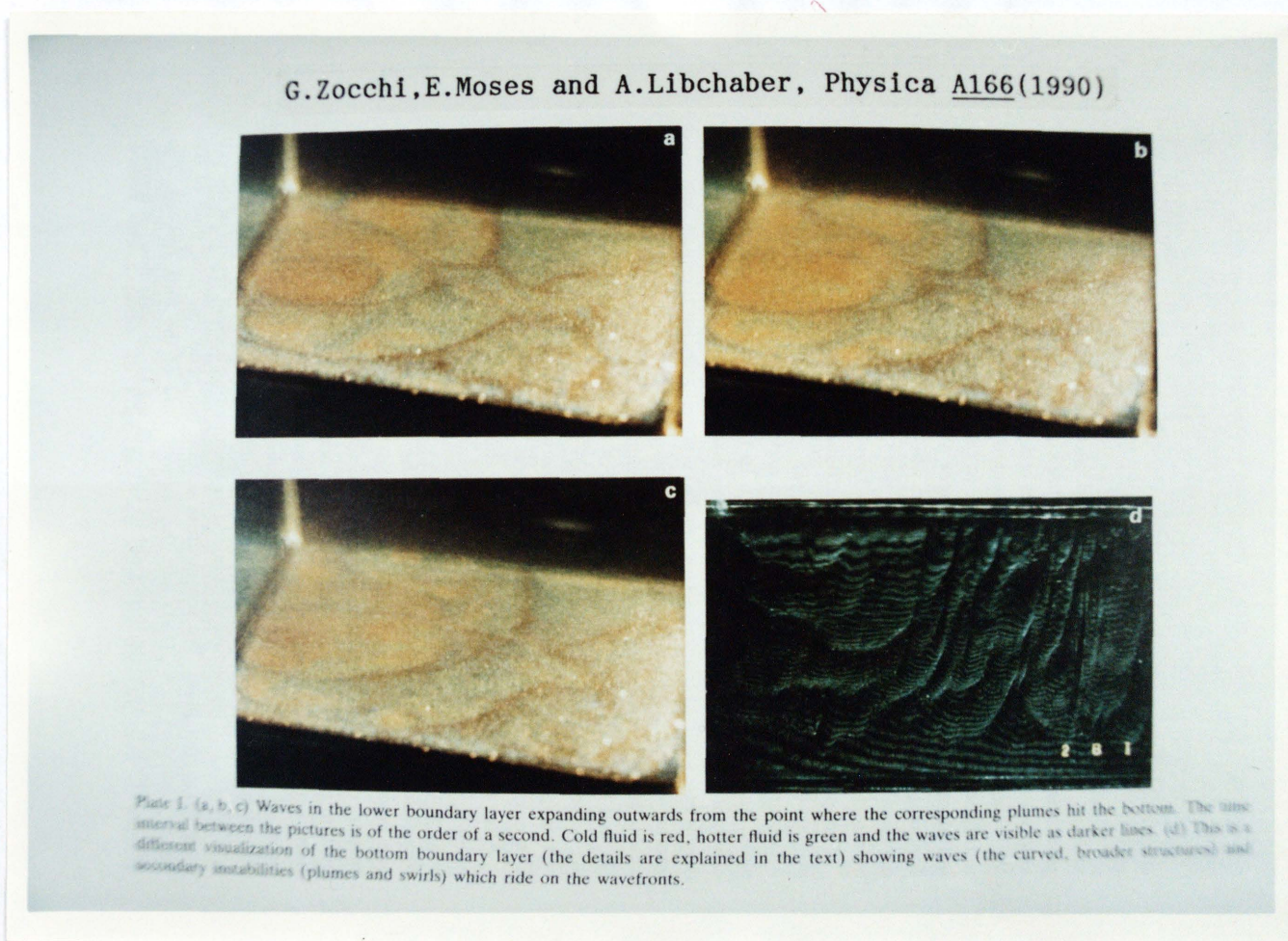


Photo.2.2(a)-(d) Waves in the lower boundary layer

Photo.2.3(a)~(d)はこの順番の連続写真¹⁴⁾で、液晶により上面(低温壁)付近の断面を可視化したものである。濃寒色の部分が温度が高く、暖色の部分が温度が低い。境界層から突き出てきたきのこ状の塊(冷塊)が下方へ伸びていき、ついには離れてしまう。

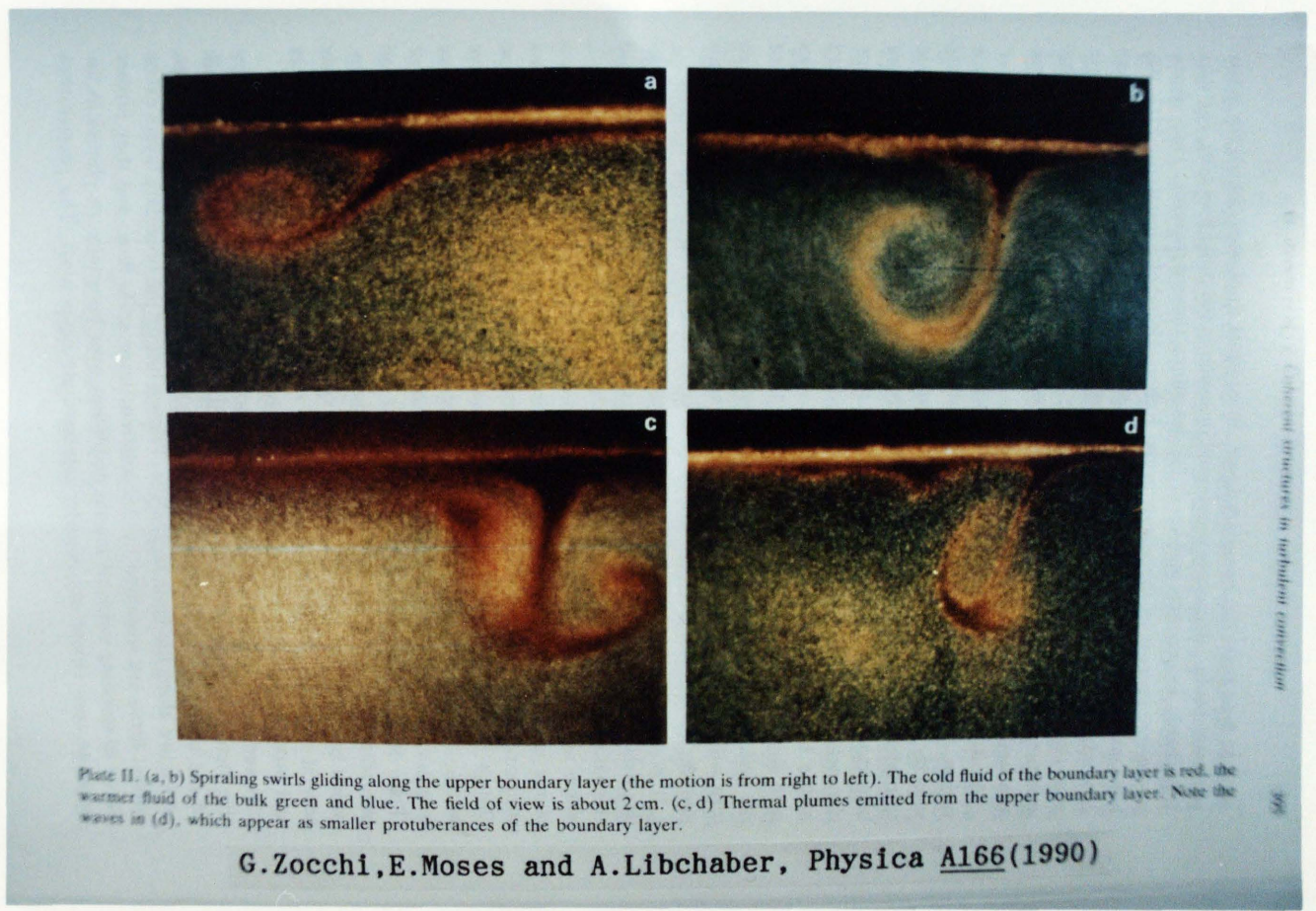


Photo.2.3(a)-(d) Plumes in the upper boundary layer

高温壁側と低温壁側で構造に違いがあるのかどうかは詳しく調べられていないが、乱流状態のベナール対流において、少なくとも水平方向には2次元 wave、垂直方向には heat plume という特徴的な構造が見いだされる。この知見は乱流解の解析にあたって極めて大きな示唆を与えてくれる(次節)。

2. 2 ベナール対流の支配方程式

(1) 支配方程式

前節で述べた非反応性圧縮性乱流一般について成立する式をベナール対流に適用した。これらの式に浮力の項を加え、平均圧力一定すなわち平均流は存在しないとした ($p = \text{const.}$ 、 $m_j = 0$)。これらの条件のもとで、2平板 $x_3 = 0, L$ にはさまれた流体のベナール対流の基礎方程式は乱流変動の式に Boussinesq 近似を用いて次のようになる。

$$L_4 : -\lambda \frac{dT}{dx_3} + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{-\infty}^{\infty} q_4 q_3^* d\Omega = -\lambda \left(\frac{dT}{dx_3} \right)_w \quad (2.4)$$

$$\Delta L_0 : \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.5)$$

$$\Delta L_1 : \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial q_{4\theta}}{\partial x_1} - \nu \nabla^2 q_1 + \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} q_j(\tilde{\Omega}) q_1(\Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} = 0 \quad (2.6)$$

$$\Delta L_3 : \frac{\partial q_3}{\partial t} + \frac{\partial q_{4\theta}}{\partial x_3} - \nu \nabla^2 q_3 + q_{\theta} g + \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} q_j(\tilde{\Omega}) q_3(\Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} = 0 \quad (2.7)$$

$$\Delta L_4 : \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x_r} (c^2 q_r) - \frac{\lambda}{\rho R} \nabla^2 q_4 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} q_j(\tilde{\Omega}) q_4(\Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} = 0 \quad (2.8)$$

ここで、 x_1 は平板に水平な方向、 x_3 は平板に垂直な方向であり、

$$-\lambda \left(\frac{dT}{dx_3} \right)_w = Nu\lambda \frac{T_0 - T_1}{L} \quad (2.9)$$

は2平板間の熱流束密度、 Nu はヌッセルト数を表す。

(2) 変数分離及びフーリエ変換

前章において述べたように、可視化により確認された知見として、 x_1 方向の周期的な乱流 heat plume がある。これが非定常な流れの中でも (x_1 方向に) 形を変えないことから、乱流ゆらぎは次の形の波 (非分散波) として存在することを意味している。

$$q_\alpha(x_1, x_3, \Omega) = Q_\alpha(x_3, \Omega) \exp(i\Omega x_1/L) \quad (\alpha; 1, 3, 4, 40) \quad (2.10)$$

この物理的要請は上記の非線形微積分方程式が変数分離できるための数学的要請とまさに照合する。これを方程式に代入すると、非線形項が合成型であるために指数部分すなわち x_1 依存性が消失し、次のようになる。

$$L_4 : \quad -\lambda \frac{dT}{dx_3} + \frac{1}{\rho L} \frac{\gamma}{\gamma-1} \int_{-\infty}^{\infty} Q_4 Q_3 d\Omega = -\lambda \left(\frac{dT}{dx_3} \right)_w \quad (2.11)$$

$$\Delta L_0 : \quad i\Omega Q_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial x_3} = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_1 : \quad & \frac{\partial Q_1}{\partial t} + i\Omega Q_{40} - \nu \left[(i\Omega)^2 Q_1 + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_3^2} \right] \\ & + i\Omega \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(x_3, \tilde{\Omega}) Q_1(x_3, \Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(x_3, \tilde{\Omega}) Q_3(x_3, \Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_3 : \quad & \frac{\partial Q_3}{\partial t} + \frac{\partial Q_{40}}{\partial x_3} - \nu \left[(i\Omega)^2 Q_3 + \frac{\partial^2 Q_3}{\partial x_3^2} \right] + Q_{40} g \\ & + i\Omega \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(x_3, \tilde{\Omega}) Q_3(x_3, \Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} Q_3(x_3, \tilde{\Omega}) Q_3(x_3, \Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_4 : \quad & \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[i\Omega c^2 Q_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} (c^2 Q_3) \right] - \frac{\lambda}{\rho R} \left[(i\Omega)^2 Q_4 + \frac{\partial^2 Q_4}{\partial x_3^2} \right] \\ & + \frac{\gamma}{\gamma-1} i\Omega \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(x_3, \tilde{\Omega}) Q_4(x_3, \Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} \\ & + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} Q_3(x_3, \tilde{\Omega}) Q_4(x_3, \Omega - \tilde{\Omega}) d\tilde{\Omega} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

これらの式を次の式にしたがってフーリエ変換する。

$$Q_\alpha(x_3, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(x_3, s) \exp(-i\Omega s) ds \quad (2.16)$$

すると合成積分は単なる積となり、さらに無次元化を導入すると、以下のように (z, σ) 平面での非線形偏微分方程式が得られる。各変数は次のように変換した。

$$\begin{aligned}
x_3 &= LZ & ; & \quad s = L\sigma & & L : 2 \text{ 平板間の幅} \\
T &= T_1 + \beta \bar{L}\bar{T} & [& \beta = (T_0 - T_1)/L, \quad T_0 > T_1] & & T_0 : \text{高温壁の温度} \\
f_1 &= \rho u^* \bar{f}_1 & ; & \quad f_3 = \rho u^* \bar{f}_3 & & T_1 : \text{低温壁の温度} \\
f_4 &= \rho R L \beta \bar{f}_4 & ; & \quad f_{40} = \rho u^{*2} \bar{f}_{40} & & u^* : \text{乱流の特性速度}
\end{aligned}$$

$$L_4 : \frac{d\bar{T}}{dz} = -Nu + \frac{1}{2\pi} \text{PrRe} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_4 \bar{f}_3 d\sigma \quad (2.17)$$

$$\Delta L_0 : \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \bar{f}_3}{\partial z} = 0 \quad (2.18)$$

$$\Delta L_1 : \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}_{40}}{\partial \sigma} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{f}_1 + \bar{f}_1 \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \sigma} + \bar{f}_3 \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

$$\Delta L_3 : \frac{\partial \bar{f}_3}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}_{40}}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \bar{f}_3 + \bar{f}_1 \frac{\partial \bar{f}_3}{\partial \sigma} + \bar{f}_3 \frac{\partial \bar{f}_3}{\partial z} - \frac{\text{Ra}}{\text{Re}^2} \frac{1}{\text{Pr}} \bar{f}_4 = 0 \quad (2.20)$$

$$\Delta L_4 : \bar{f}_3 \frac{d\bar{T}}{dz} - \frac{1}{\text{PrRe}} \nabla^2 \bar{f}_4 + \bar{f}_1 \frac{\partial \bar{f}_4}{\partial \sigma} + \bar{f}_3 \frac{\partial \bar{f}_4}{\partial z} = 0 \quad (2.21)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\text{Pr} = \frac{\rho c_p \nu}{\lambda} ; \quad \text{Re} = \frac{u^* L}{\nu} ; \quad \text{Ra} = \frac{g \alpha L^4 \beta}{\kappa \nu}, \quad \kappa = \lambda / \rho c_p$$

ここで、Nuはヌッセルト数、Prはプラントル数、Reはレイノルズ数、Raはレイリー数である。

式中、密度ゆらぎ f_0 は以下のようにして熱力学の関係を用いて f_4 で表してある。

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp$$

$$\alpha = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad \alpha : \text{定圧熱膨張係数}$$

$$\therefore f_0 = -\rho \alpha \frac{f_4}{\rho R} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T f_{40} \approx -\frac{\alpha}{R} f_4 \quad (\text{Boussinesq 近似})$$

L_4 を積分して $z = 1$ とおくとヌッセルト数Nuを与える表示

$$\text{Nu} = 1 + \frac{1}{2\pi} \text{PrRe} \int_0^1 dz \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_4 \bar{f}_3 d\sigma \quad (2.22)$$

を得る。

つぎに以下の変換を行うと、最終的に解くべき方程式を得る。

$$B = \frac{1}{2\pi} \text{PrRe} \quad ; \quad f_j^* = \sqrt{B} \bar{f}_j \quad (j=1,3,4,40) \quad ; \quad \text{Re} = \sqrt{Ra}$$

$$L_4 : \frac{dT}{dz} = -Nu + \int_{-\infty}^{\infty} f_4 f_3 d\sigma \quad (2.23)$$

$$Nu = 1 + \int_0^1 dz \int_{-\infty}^{\infty} f_4 f_3 d\sigma \quad (2.24)$$

$$\Delta L_0 : \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

$$\Delta L_1 : \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_{40}}{\partial \sigma} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 f_1 + \frac{1}{\sqrt{B}} \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + f_3 \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.26)$$

$$\Delta L_3 : \frac{\partial f_3}{\partial t} + \frac{\partial f_{40}}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 f_3 + \frac{1}{\sqrt{B}} \left(f_1 \frac{\partial f_3}{\partial \sigma} + f_3 \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) - \frac{1}{\text{Pr}} f_4 = 0 \quad (2.27)$$

$$\Delta L_4 : f_3 \frac{dT}{dz} - \frac{1}{\text{PrRe}} \nabla^2 f_4 + \frac{1}{\sqrt{B}} \left(f_1 \frac{\partial f_4}{\partial \sigma} + f_3 \frac{\partial f_4}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.28)$$

ここでは、* 及び $\bar{\quad}$ は省略した。この方程式は、 σ 方向に関して f_1 は奇関数、 f_3 、 f_4 及び f_{40} は偶関数の解をもつことが分かる。さらに次式

$$\langle \Delta Z_\alpha \Delta Z_\beta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha f_\beta d\sigma$$

によって乱流強度と結びつくので、この積分が存在するためには $f(z, \pm\infty) = 0$ でなければならない。したがって、 f は (z, σ) 面で孤立波としての性格を持つべきことが分かる。また、 f_1 と f_3 の相関は σ 方向に関して前者は奇関数、後者は偶関数であることから 0 となる。ここでは 1. 2 節の式(1.11)に表れる変数分離定数 ω^* を 0 とおいているが、それはこの物理的要請を満たすためのものである。

第 3 章

数 値 解 法

3. 1 数値計算法

(1) 方程式の差分化

(2) 計算法

3. 2 境界条件と初期値

(1) 境界条件

(2) 初期値

3. 3 予備計算

(1) 予備計算の必要性

(2) 予備計算の結果

3. 4 計算の指針

(1) 本計算の概要

(2) 定常解の判定

3. 1 数値計算法

(1) 方程式の差分化

前章で導出した方程式 (2.33)~(2.38) を時間進行法で解き、 $t \rightarrow \infty$ で到達する定常解から乱流熱伝達 Nu を固有値として解くことを考える。数値解法は、非圧縮性ナビエーストークス方程式の陽的解法であるMAC法 (Marker and cell method) を基本的に用いた。すなわち、式(2.26) と式(2.27) から得られる次式

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_{40} = & - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) + \frac{1}{Pr} \frac{\partial f_4}{\partial z} \\ & - \frac{1}{\sqrt{B}} \left[f_1 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) + f_3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

を式(2.25) の代わりに解く。式(2.25) は式(3.1) の右辺第1項において差分化したときに

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right]^{n+1} = 0$$

として扱って満足させる。cellの構造はFig.3.1 に示すような staggerd cellを用い、時間微分項に前進差分、非線形項に2次精度の風上差分、その他の項には中心差分を用いた。

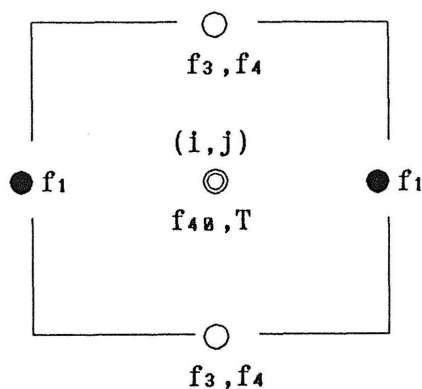


Fig.3.1 Staggerd cell

(2) 計算法

これらの解くべき方程式において、平均温度 T 及びヌッセルト数 Nu は f_3 と f_4 を用いて表すことができる。すなわち、式 (2.28) の左辺第 2 項の dT/dz には式 (2.23) 及び式 (2.24) を使用して平均温度 T を陽的に解くことなく、かつヌッセルト数 Nu が時間と共に変化するようにした。したがって、 f_1 、 f_3 、 f_4 及び f_{40} のみを解いて、これらが定常解に落ち着いてすべての計算が終了した後に平均温度 T を一度だけ計算して求めた。

式 (2.26)、式 (2.27) 及び式 (2.28) から f_1 、 f_3 及び f_4 、そして式 (3.1) から f_{40} が独立して求められ、計算を省力化している。また、この種の解法の難点であった f_{40} の値が市松模様に波打つ spurious 誤差の発生は、各 f を異なる点に定義する Staggerd cell の使用によって抑えられている。

式 (3.1) の解法には S O R 法 (Successive over-relaxation method) を用いた。この際、離散時間ステップが $n+1$ の f_{40} の計算においては、前のステップで計算された速度の発散を残して計算を行っている。また、加速係数は 1.05 ~ 1.45 にとり、一回毎に計算順序を反転させ、収束を早めている。

3. 2 境界条件と初期値

(1) 境界条件

境界条件は σ 方向及び z 方向に関して次のようにおいた。

$$f_1 = f_3 = f_4 = 0 \quad \text{at} \quad \sigma = \pm\infty \quad \text{and} \quad z = 0, 1$$

$$f_{40} = 0 \quad \text{at} \quad \sigma = \pm\infty ; \quad \frac{\partial f_{40}}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, 1$$

$$T = 1 \quad \text{at} \quad z = 0 ; \quad T = 0 \quad \text{at} \quad z = 1$$

離散化した形で書くと次のようになる。

$$f_1(0+1/2, j) = f_1(imx+1/2, j) = 0 \quad (1 \leq j \leq jmx)$$

$$f_1(i+1/2, 0) = -f_1(i+1/2, 1) \quad (0 \leq i \leq imx)$$

$$f_1(i+1/2, jmx+1) = -f_1(i+1/2, jmx) \quad (0 \leq i \leq imx)$$

$$f_3(0, j+1/2) = -f_3(1, j+1/2) \quad (0 \leq j \leq jmx)$$

$$f_3(imx+1, j+1/2) = -f_3(imx, j+1/2) \quad (0 \leq j \leq jmx)$$

$$f_3(i, 0+1/2) = -f_3(i, jmx+1/2) = 0 \quad (1 \leq i \leq imx)$$

$$f_4(0, j+1/2) = -f_4(1, j+1/2) \quad (0 \leq j \leq jmx)$$

$$f_4(imx+1, j+1/2) = -f_4(imx, j+1/2) \quad (0 \leq j \leq jmx)$$

$$f_4(i, 0+1/2) = -f_4(i, jmx+1/2) = 0 \quad (1 \leq i \leq imx)$$

$$f_{40}(0, j) = -f_{40}(1, j) \quad (1 \leq j \leq jmx)$$

$$f_{40}(imx+1, j) = -f_{40}(imx, j) \quad (1 \leq j \leq jmx)$$

$$f_{40}(i, 0) = f_{40}(i, 1) \quad (1 \leq i \leq imx)$$

$$f_{40}(i, jmx+1) = -f_{40}(i, jmx) \quad (1 \leq i \leq imx)$$

σ 方向の境界条件はすべて $\sigma = \pm\infty$ で設定されているが、有限値を用いて予備計算を行い、解の存在する範囲を確かめて σ の領域を決定した。

(2) 初期値

この方程式は一切の実験的半経験的パラメータを含んでいないので、いかなる初期値を与えても定常解を得ることができるが、好ましい初期値を与えれば定常解を得るための計算時間をそれだけ短縮することができる。

この方程式は σ 方向に関して f_1 は奇関数、 f_3 、 f_4 及び f_{40} は偶関数の解が存在し、 z 方向に関しては f_1 と f_{40} は偶関数、 f_3 と f_4 は奇関数の解が存在するが、 z 方向のこの解は物理的な要請を満たさない。なぜなら、もし f_3 と f_4 が奇関数であるならば、これらの乱流強度及び相関は中心でゼロとなり、例えば平均温度の傾きは中心部と壁面付近で同じ値を取る、すなわち中心部で急激な平均温度の傾きが存在することになる。したがって、 z 方向に対称な解はないと考えられる。

予備計算の際の初期値としては、 f が取り得る全ての choice 並びに全くランダムな値をいれて解の収束状況を見た。初期値の生成は、 f を合成型の関数として σ 方向および z 方向に試験関数を造り、合成した。このとき、境界条件を満足するように試験関数にはルジャンドル多項式を用いた。これは、同じ境界条件で何種類もの関数が造れることによる。

3. 3 予備計算

(1) 予備計算の必要性

この方程式の解は孤立波としての性質を有しているため、解くに当たって次の2つの困難な点がある。すなわち、遠方ではすべての量がゼロとなるので、数値的に解く場合、境界条件及び領域の設定が難しいこと、ソリトンのような解析解がまだ見つかっていないので基本的な解の特性がつかみにくいこと、である。

σ 方向の境界条件はすべて $\sigma = \pm \infty$ で設定されているので、有限値にするために解くべき領域を捜さなければならない。また、各 f は可積分の条件から σ の境界で微分もゼロで入ることが予想されるので、全域ゼロ（トリビアル）の値に落ち着く可能性がある。さらに、 f_1 、 f_3 、 f_4 及び f_{40} のとる σ の領域がほぼ同じ範囲なのか、もしくはそれぞれに特異な領域をとるのかも分からない。 z 方向に関しては境界層が形成されてくることが予想されるが、これも各 f によってどのような状況になるのか分からない。数値計算上の排除すべき困難点を整理すると次のようになる。

- 1) 解くべき σ の領域の決定
- 2) 必要な mesh のサイズと集中すべき領域
- 3) トリビアルな解の可能性
- 4) 好ましい初期値

したがって、本格的な計算を行う前に、これらの事を解決しなければならない。

(2) 予備計算の結果

解くべき σ の領域を確認すると同時に解の基本的な性質を見極めて好ましい初期値を得るために予備計算を行った。まず、等間隔の幾分粗い格子 (σ 方向に 80 程度、 z 方向に 60 程度) を用いて数種類の初期値を設定し、レイリー数 $Ra = 10^6$ 、プラントル数 $Pr = 6.1$ を与え、 σ の領域を大きくとって計算を始めた。その後、解の存在する範囲を確かめながら σ の範囲を絞り込んだ。同時に解の形状と振幅の大きさを確かめながら初期値を少しずつ改良した。その結果、次の事が明らかになった。

- 1) σ は $-5 \leq \sigma \leq 5$ の範囲で十分であり、すべての f はこの範囲に収まる。
- 2) すべての f が孤立波型の解であり、それぞれに特徴的な構造を有する。
- 3) σ 方向に関して f_1 は奇関数、 f_3 、 f_4 及び f_{40} は偶関数である。
- 4) $z = 0, 1$ の壁面付近において境界層が生成されつつある。

また、好ましい初期値が得られて後、作動流体の物性定数すなわちプラントル数 Pr を2種類 ($Pr = 6.1, 0.6$) 使用してどの様な変化があるのか見てみたところ、 Pr の効きは鈍いが、 Pr が小さくなるとヌッセルト数 Nu はわずかに大きくなることが確認された。これは実験で得られる知見と一致する。このとき、 f_4 の振幅が少し小さくなり、 f_1 及び f_3 の振幅は増加する。そして σ 方向に孤立波が太ってきて、 σ の範囲を $-7.5 \leq \sigma \leq 7.5$ 程度に取る必要が生じた。

3. 4 計算の指針

(1) 本計算の概要

予備計算で得られた好ましい初期値を用いて、計算を開始した。 f のそれぞれに特徴的な構造があり、レイリー数の影響を予測することは困難なので、格子は、当初 σ 方向に 200 点、 z 方向に 150 点ずつ等間隔にきって、解の状況を見て必要になったときに格子点の数とその間隔を変化させることにした。実際、 $Ra \geq 5.0 \times 10^7$ では z 方向の格子点を 150 に増やしかつ境界層付近に集中させ、さらに σ 方向は両端で粗く中心部で細くなるようにして計算を行った。

この方程式は一切の実験的半経験的パラメーターを含んでいないので、レイリー数 Ra のみを与えれば計算が開始できる。クーラン数は $Cr = 0.2$ 前後で計算を行った。

レイリー数 Ra は予備計算で使用した $Ra = 10^6$ から開始し、段階的に大きくして行った。このときの初期値は前のレイリー数で得られた解を使用している。次に、 $Ra = 10^6$ から、段階的に小さくして計算を行ったが、実験でヒステリシスの存在が報告されている領域¹⁸⁾ ではその逆でも計算を行っている。

プラントル数は、 $Pr = 6.1$ (水の値) と、 $Pr = 0.67$ (ヘリウムの値) で計算を行った。

(2) 定常解の判定

定常解の判定は、初期値として仮定した孤立波から時間発展を追跡し、各 f について、それぞれの乱流強度 (intensity)、及び平均温度 T 並びにヌッセルト数 Nu の時間的变化がなくなったところを定常解とした。

また、ヌッセルト数 Nu は式 (2.24) で与えられるが、壁面での (無次元) 温度勾配としても現れるので、3 種類 (式 (2.24)、高温壁及び低温壁での温度勾配) のヌッセルト数を書かせて全てが一致することを確認している。

第 4 章

結 果 と 考 察

4. 1 計算結果

- (1) 全般的な解の状況
- (2) 非分散型孤立波解

4. 2 実験との比較

- (1) 平均温度分布
- (2) 乱流強度 (Intensity)
- (3) 温度ゆらぎのスペクトル
- (4) Ra-Nu 曲線

4. 1 計算結果

(1) 全般的な解の状況

すべての f は非分散型孤立波の解であり、coherent な構造を有している。レイリー数 Ra の増加とともに、境界層と中央領域の構造の違いが顕著に現れ、水平方向の質量流束密度のゆらぎ f_1 及び温度のゆらぎ f_4 はそのピークが境界層付近に近づき、中央領域では均一な状態に近づいてくる。垂直方向の質量流束密度のゆらぎ f_3 は中央領域のみの変化となる。いずれにおいても、境界層付近の構造はそこでの振幅が増加する点を除けば、ほぼ同じ様な形態であり、中央領域では、振幅の減少とともに波の数が増加していることはすべての f について共通している。また、 z については f は中心について対称でも反対称でもないことは重要である。この理論で確率密度関数の概念は入らないので soft turbulence と hard turbulence の違いは特定できない。ただ、後者の領域においては境界層と homogeneous な状態の区別が明確になるのが特徴である。したがって、平均温度 T は境界層でのみ急変化し、中央領域では一定値となる。詳しくみると温度変化は単調ではなく、オーバーシュートとアンダーシュートがある。この境界層の厚さはレイリー数 Ra の増加とともに減少する。

プラントル数の違いによる孤立波解への影響は、予備計算で得られたように Pr が小さくなると f_4 の振幅が減少し、 f_1 及び f_3 の振幅が増加する。また、 σ 方向に孤立波が大きくなるのが主な特徴である。

(2) 非分散型孤立波解

レイリー数が $Ra = 5.0 \times 10^5$, 1.0×10^6 , 1.0×10^7 , 5.0×10^7 のときの孤立波解及び平均温度分布をそれぞれ Fig.4.1 (a)~(e) , Fig.4.2 (a)~(e) , Fig.4.3 (a)~(e) , Fig.4.4 (a)~(e) に示す。このとき、プラントル数は $Pr = 6.1$ で、(a) は f_1 (水平方向の質量流束密度のゆらぎ)、(b) は f_{40} (圧力のゆらぎ)、(c) は f_3 (垂直方向の質量流束密度のゆらぎ)、(d) は f_4 (温度のゆらぎ)、(e) は平均温度分布である。

乱流変動の解 f は非分散型孤立波の形をしており、さらに σ 方向の境界において微分もゼロになっている。したがって、 σ 方向の無限積分が実行できるので、ただちに観測可能な物理量を計算することができる。

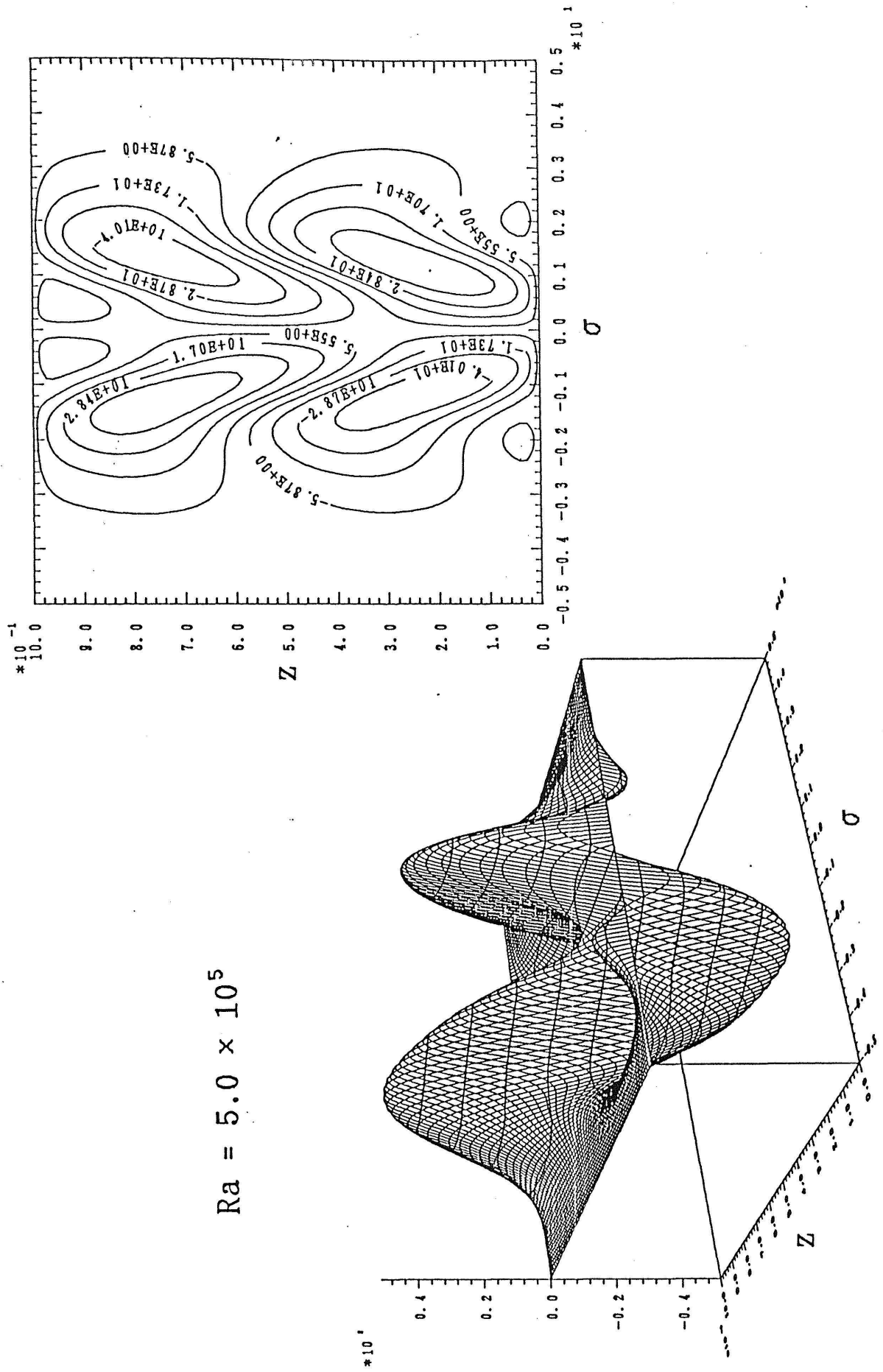


Fig.4.1(a) Solitary wave solution of f_1 ($Ra=5.0 \times 10^5$)

$Ra = 5.0 \times 10^5$

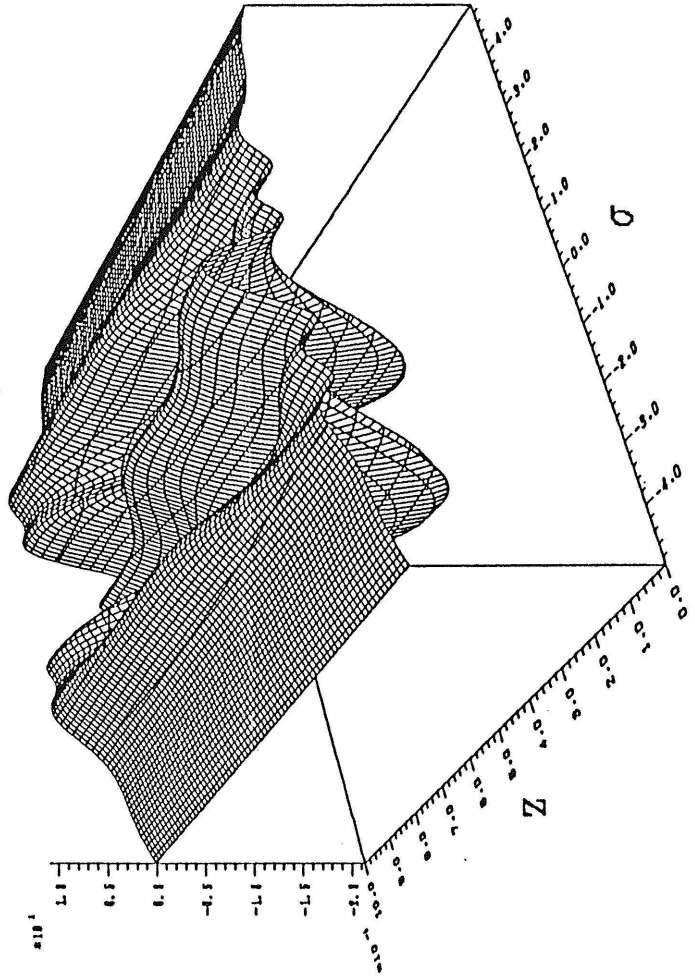
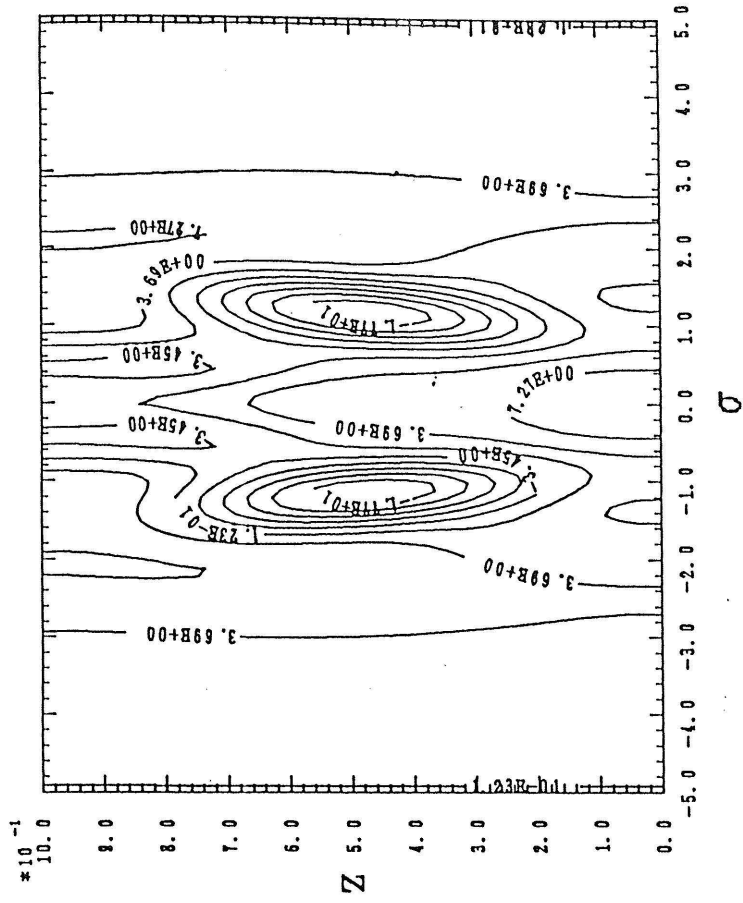


Fig.4.1(b) Solitary wave solution of f_{40} ($Ra=5.0 \times 10^5$)

$Ra = 5.0 \times 10^5$

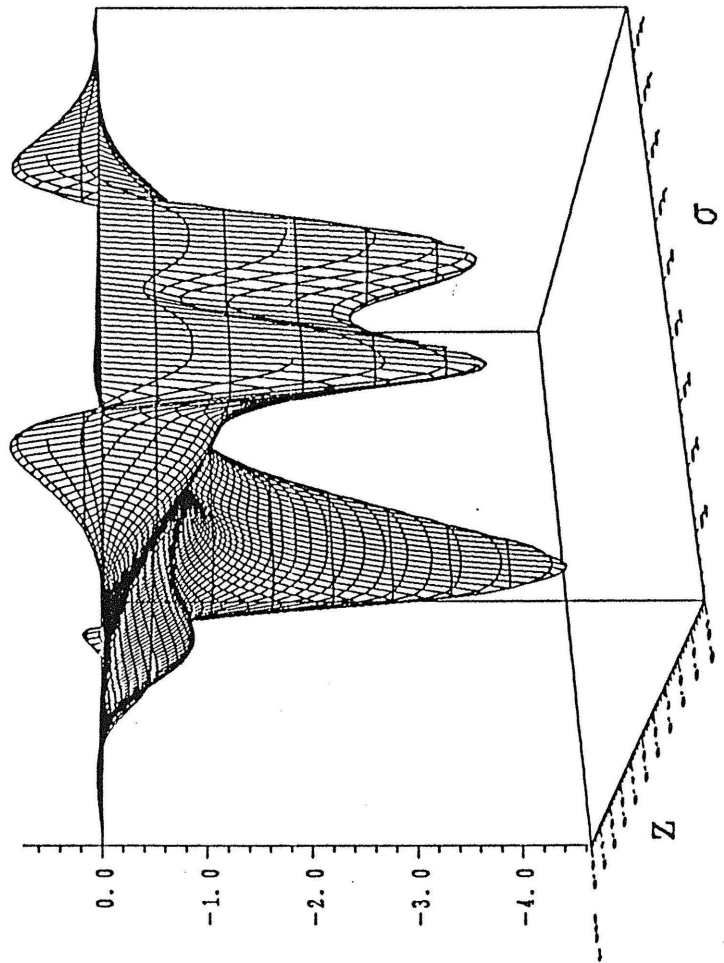
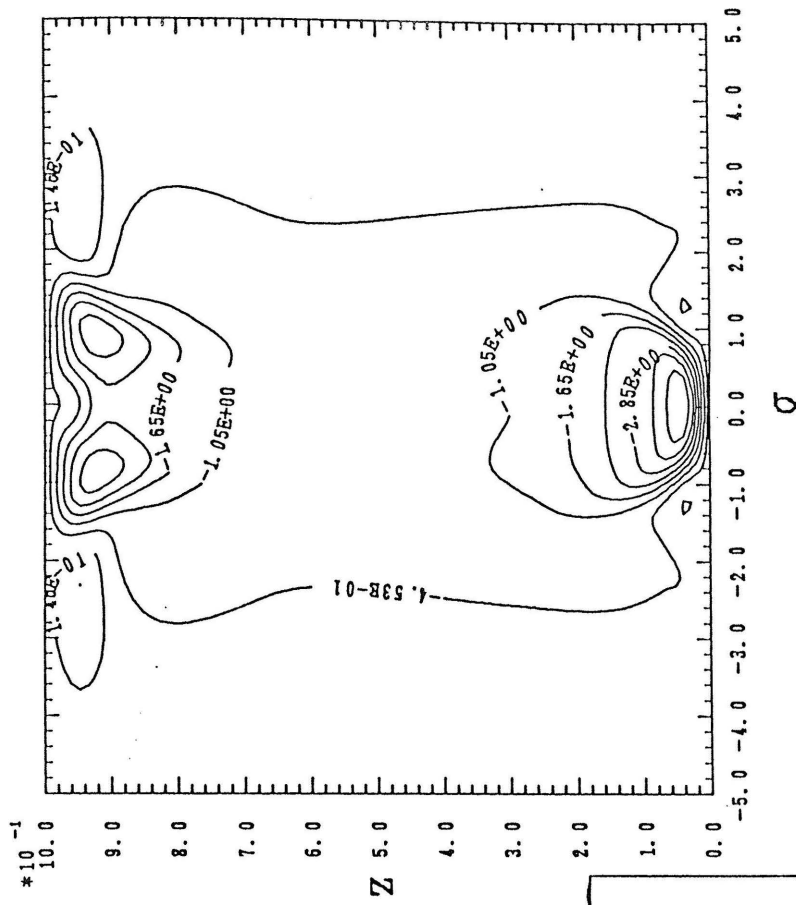


Fig.4.1(d) Solitary wave solution of f_4 ($Ra=5.0 \times 10^5$)

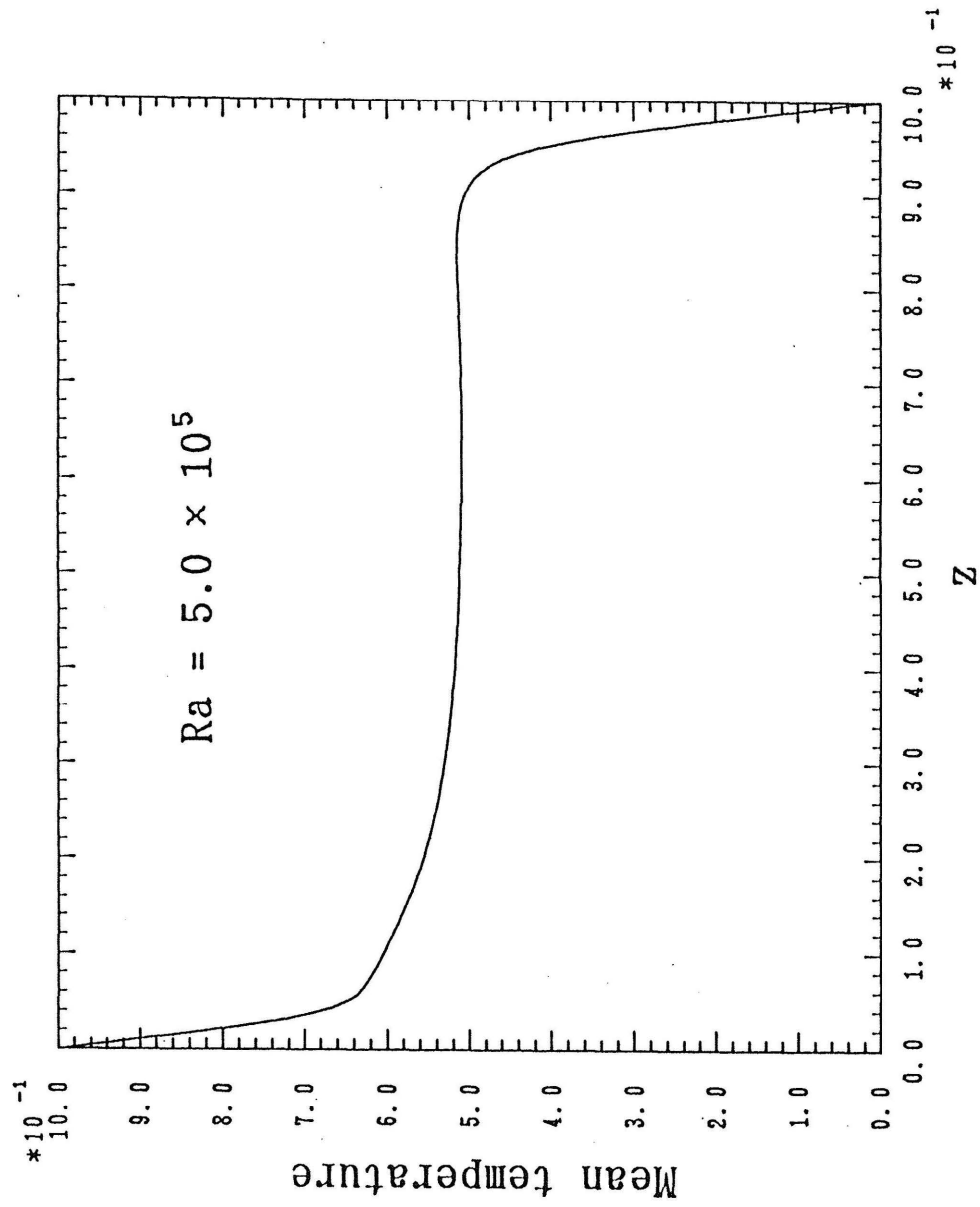


Fig.4.1(e) Mean temperature distribution ($Ra=5.0 \times 10^5$)

$Ra = 1.0 \times 10^6$

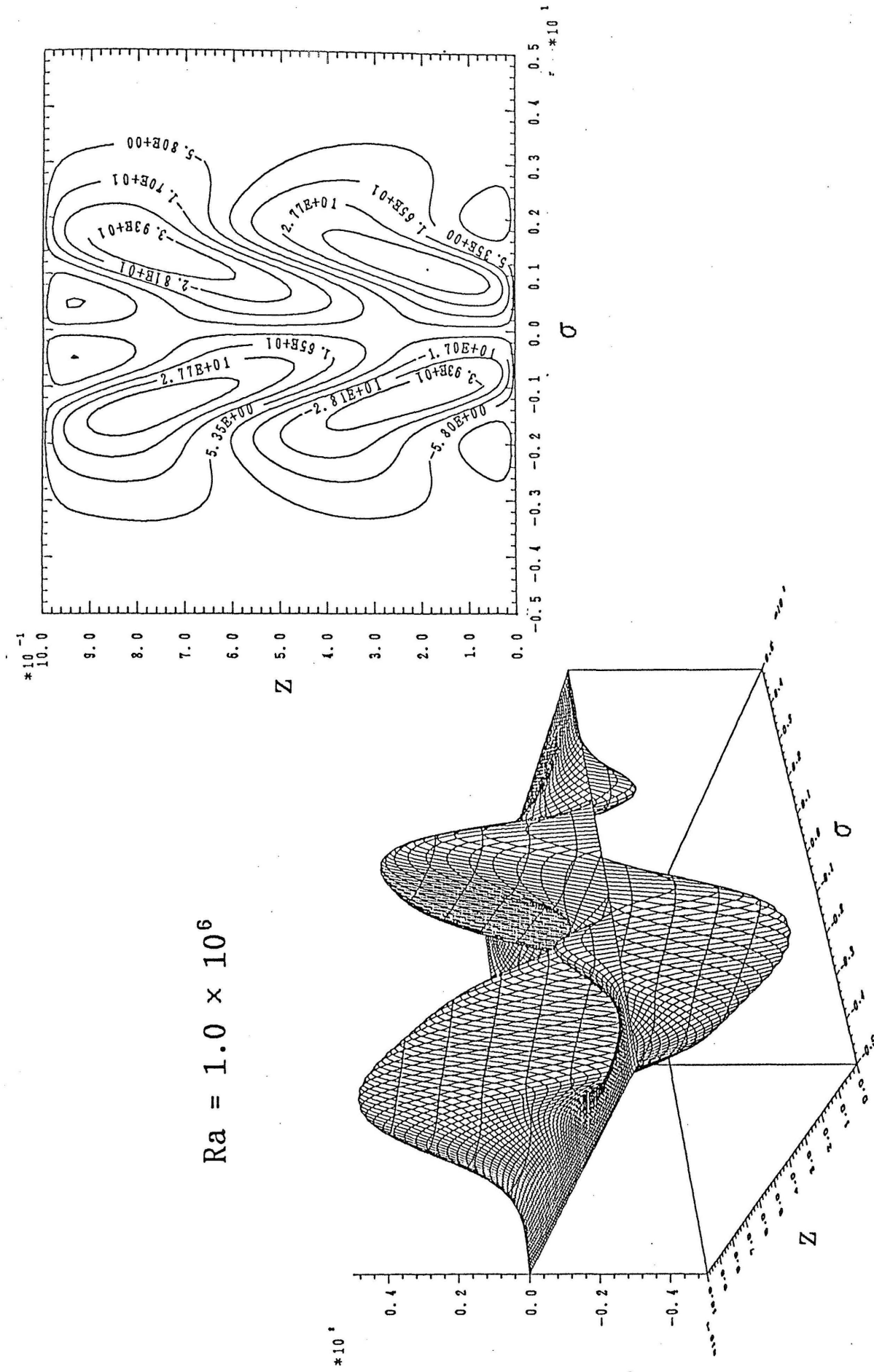


Fig.4.2(a) Solitary wave solution of f_1 ($Ra=1.0 \times 10^6$)

$Ra = 1.0 \times 10^6$

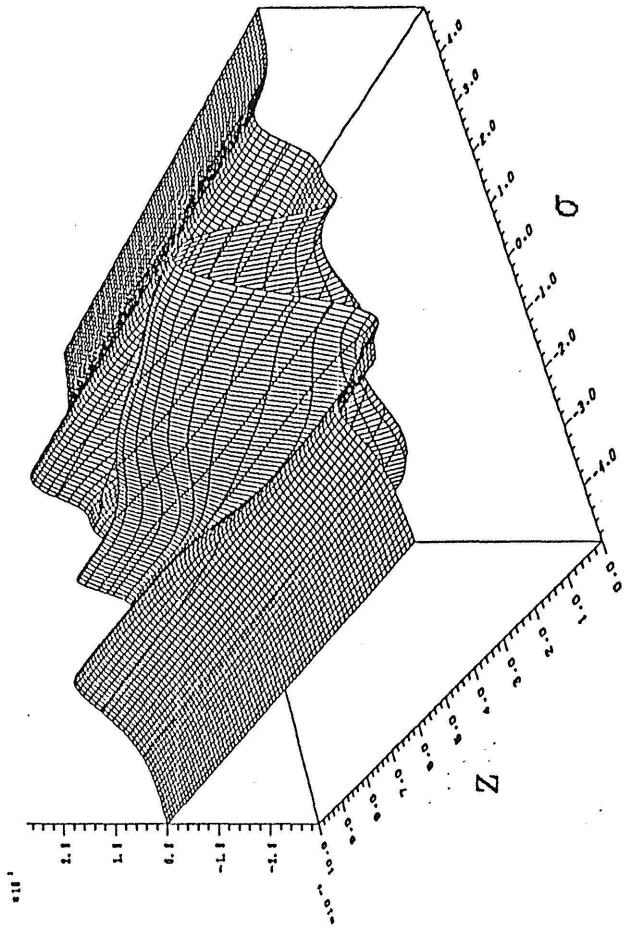
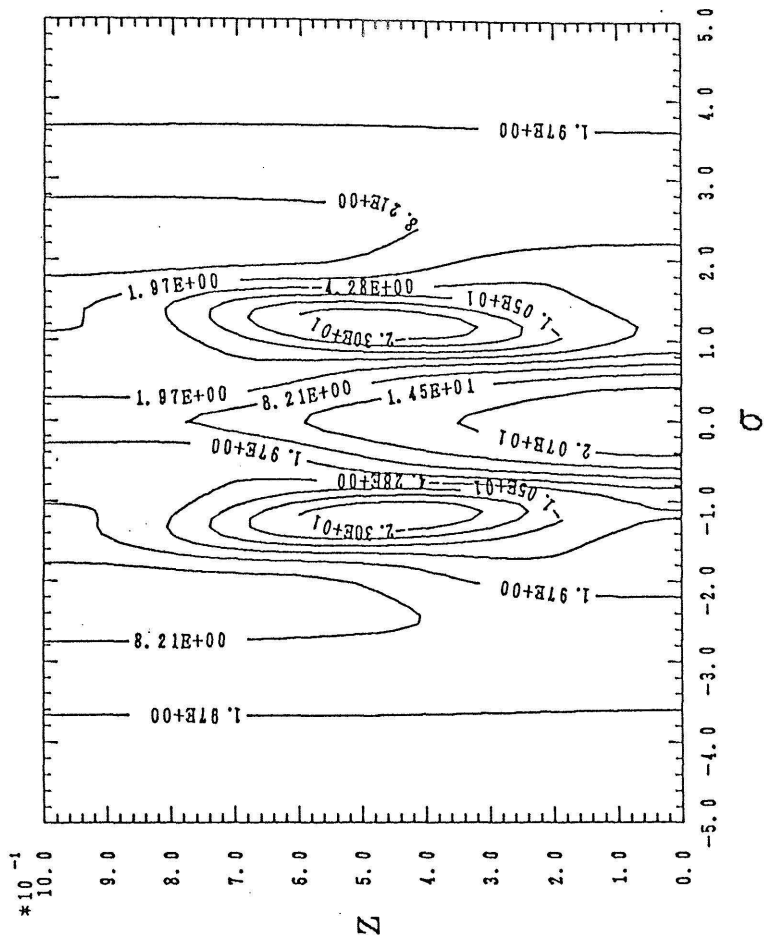


Fig.4.2(b) Solitary wave solution of f_{40} ($Ra=1.0 \times 10^6$)

$Ra = 1.0 \times 10^6$

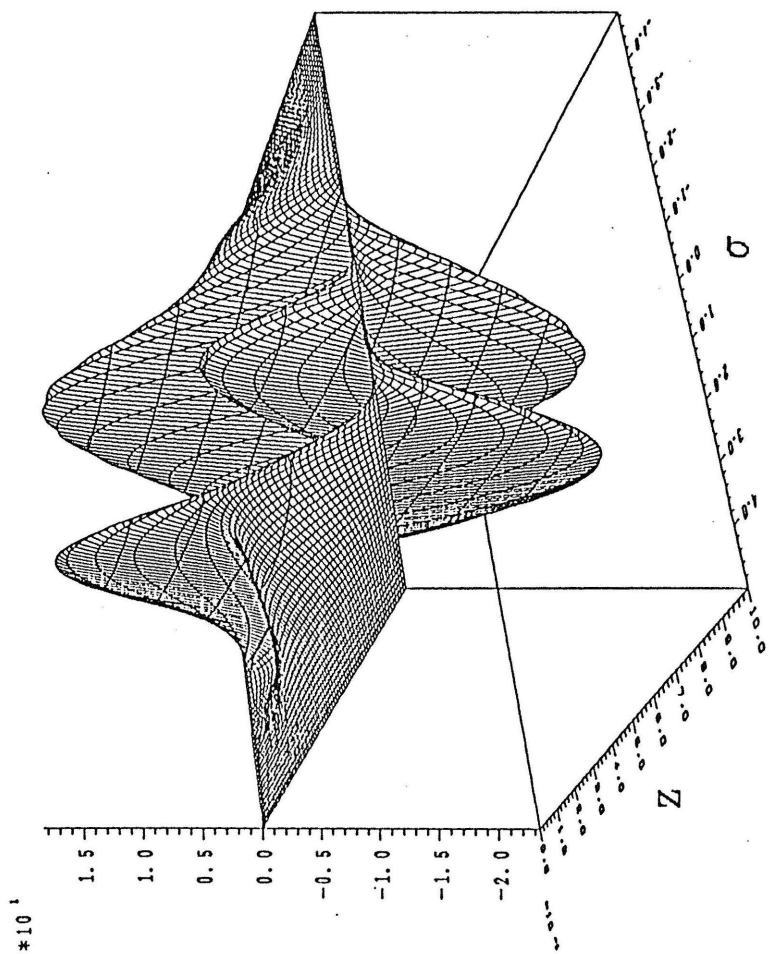
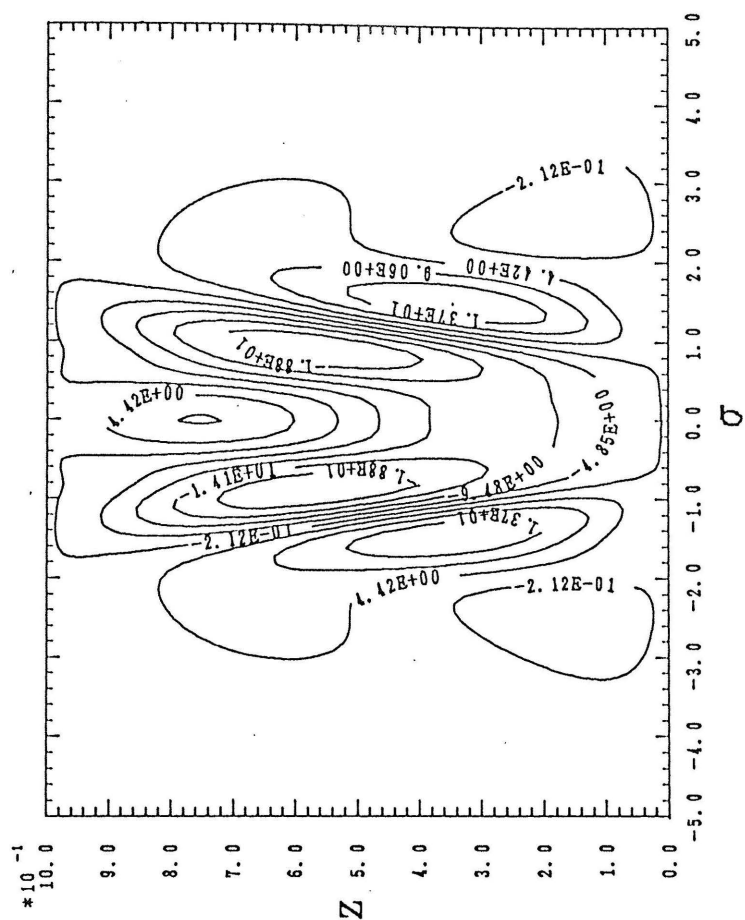


Fig.4.2(c) Solitary wave solution of f_3 ($Ra=1.0 \times 10^6$)

$Ra = 1.0 \times 10^6$

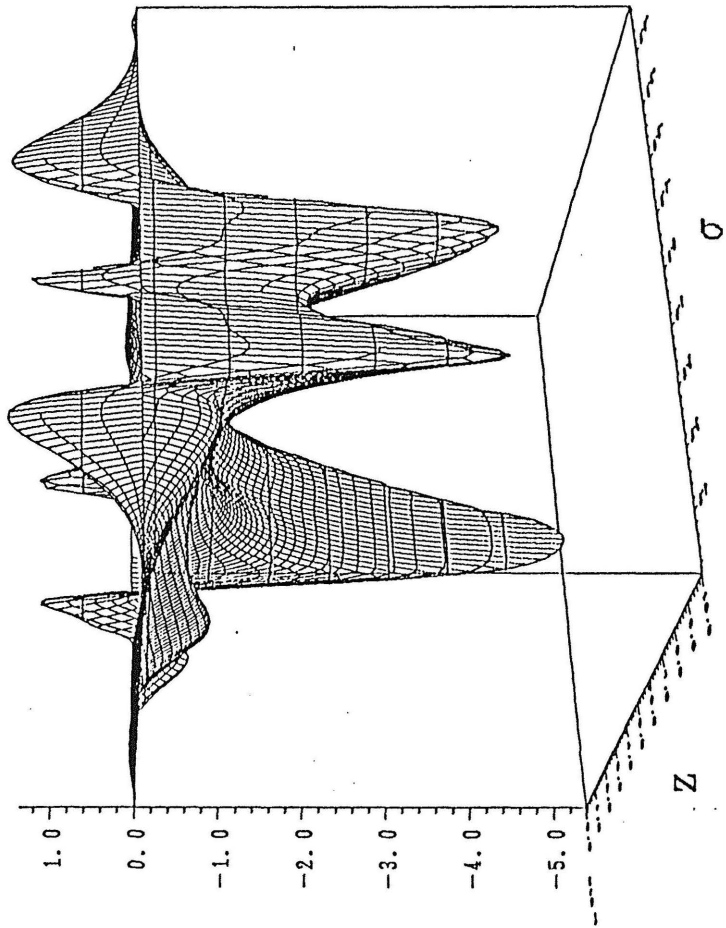
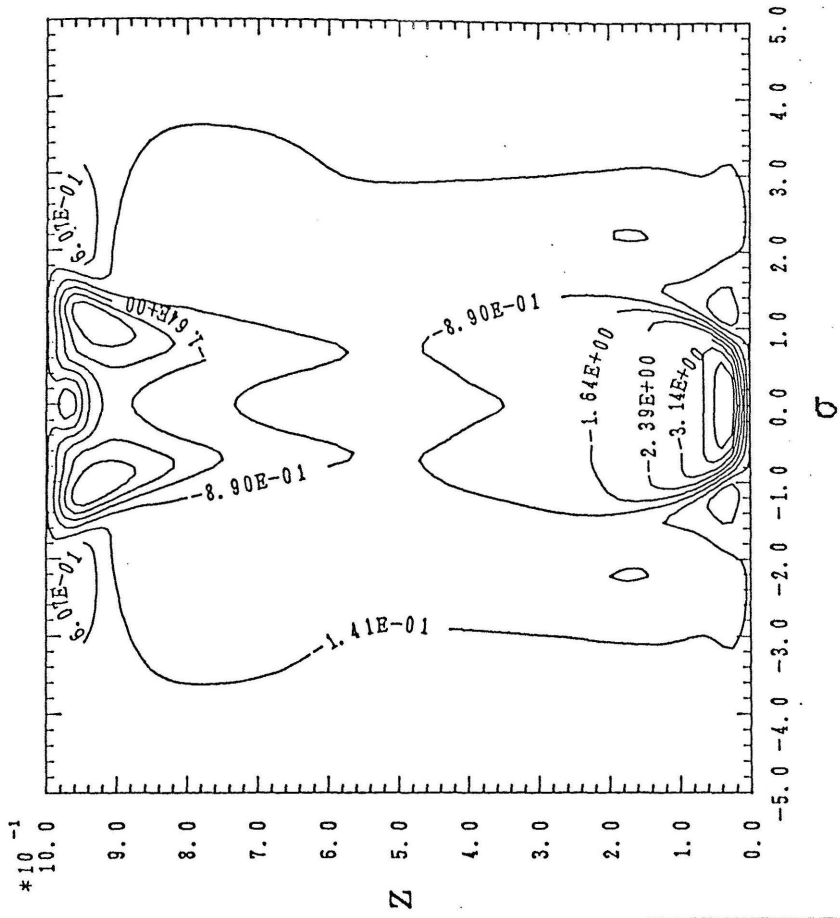


Fig.4.2(d) Solitary wave solution of f_4 ($Ra=1.0 \times 10^6$)

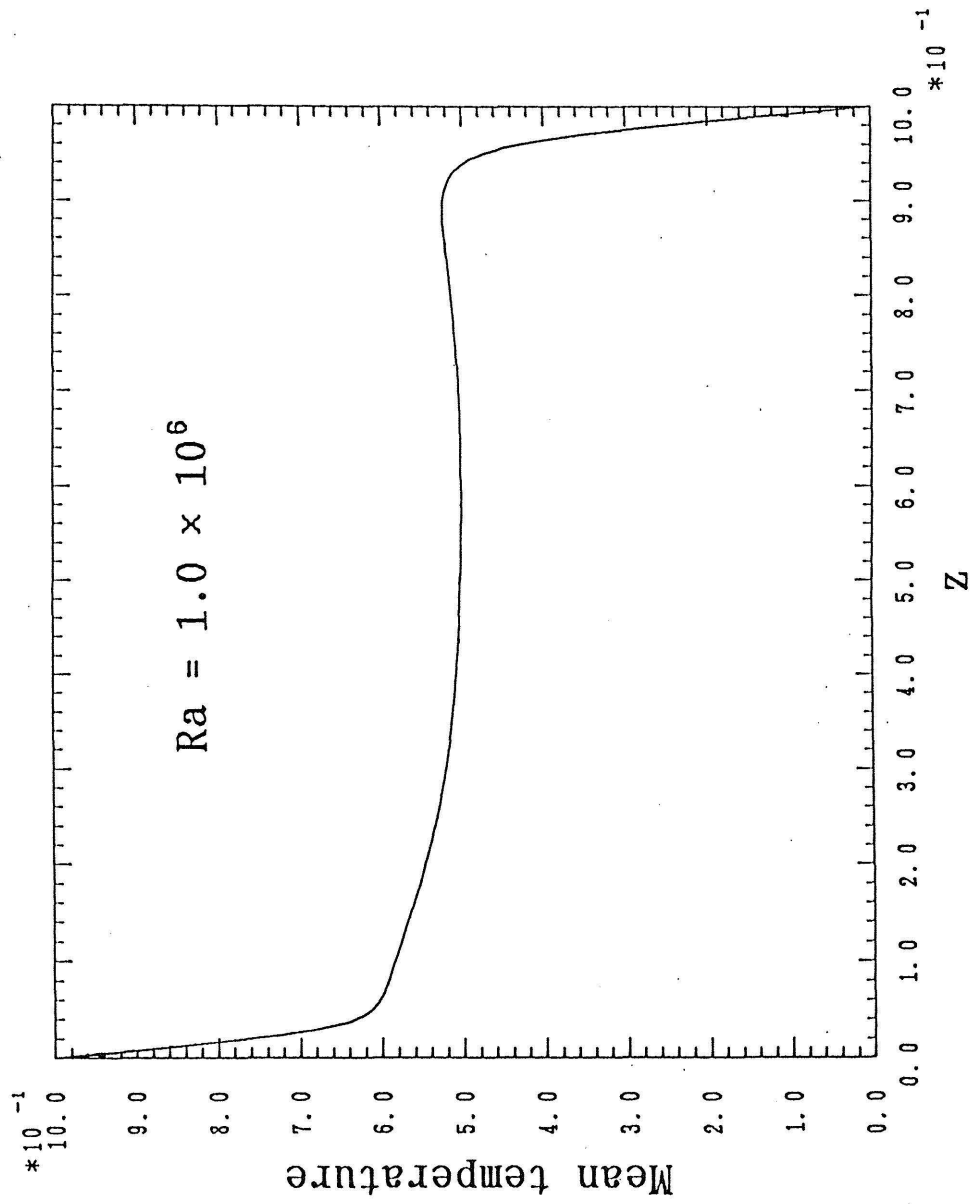


Fig.4.2(e) Mean temperature distribution ($Ra=1.0 \times 10^6$)

$Ra = 1.0 \times 10^7$

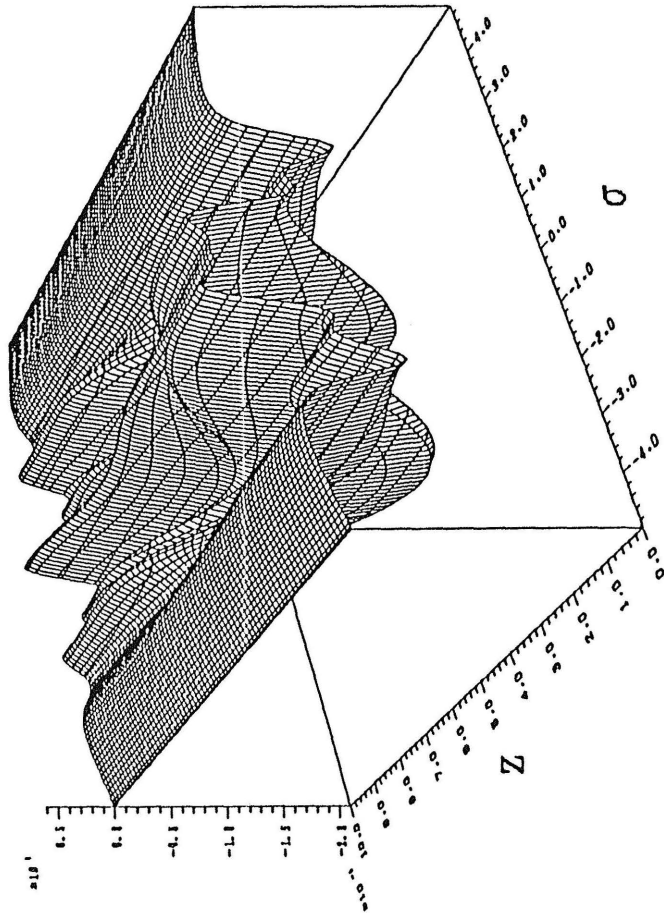
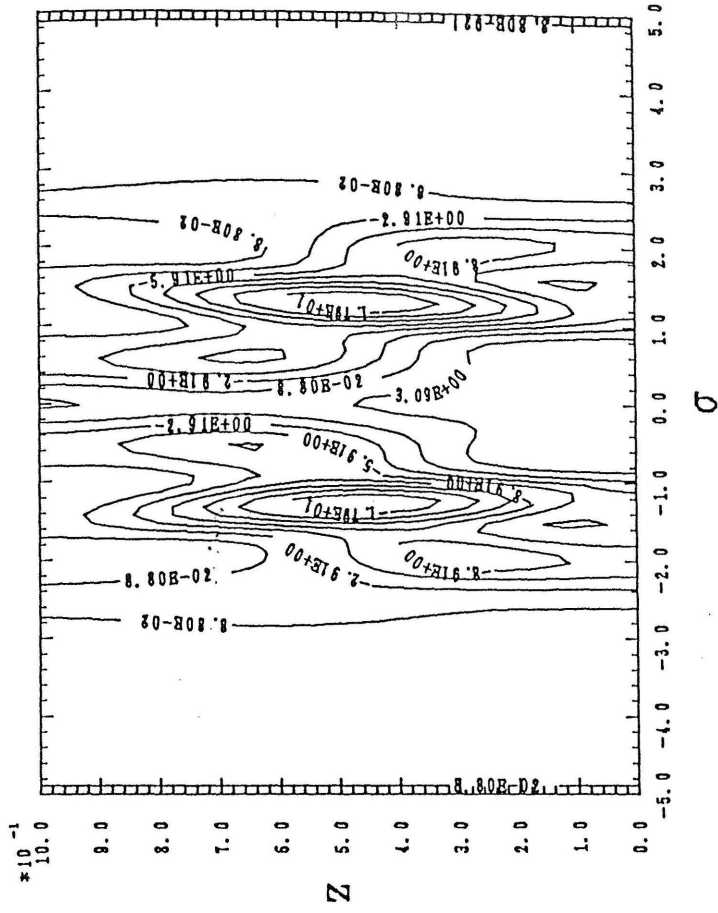


Fig.4.3(b) Solitary wave solution of f_{40} ($Ra=1.0 \times 10^7$)

$Ra = 1.0 \times 10^7$

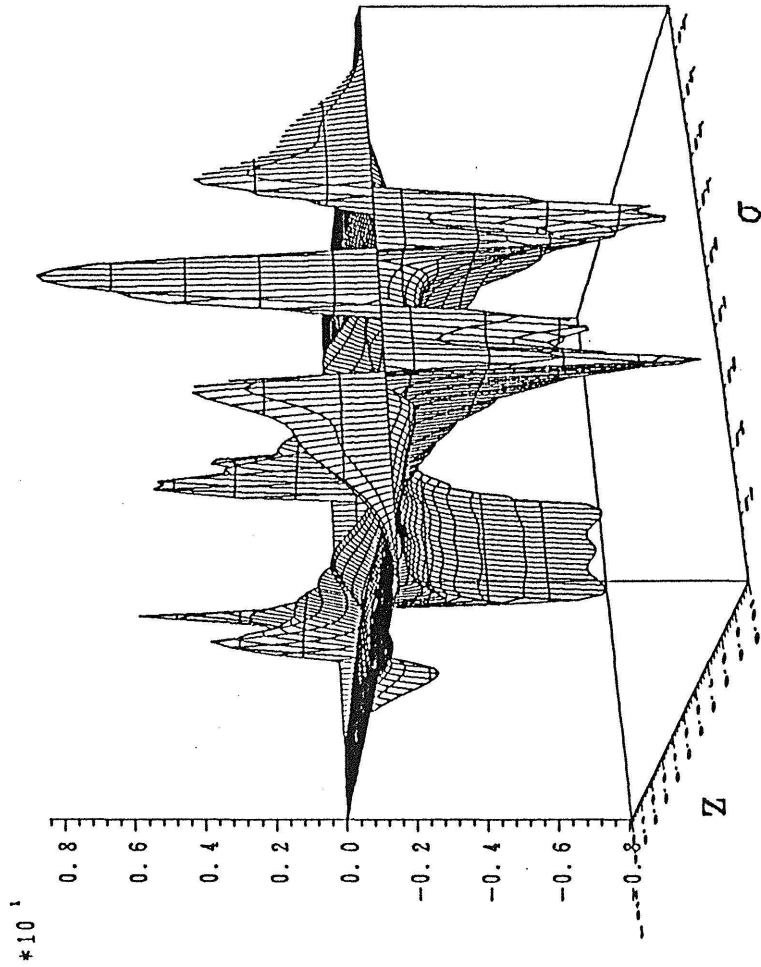
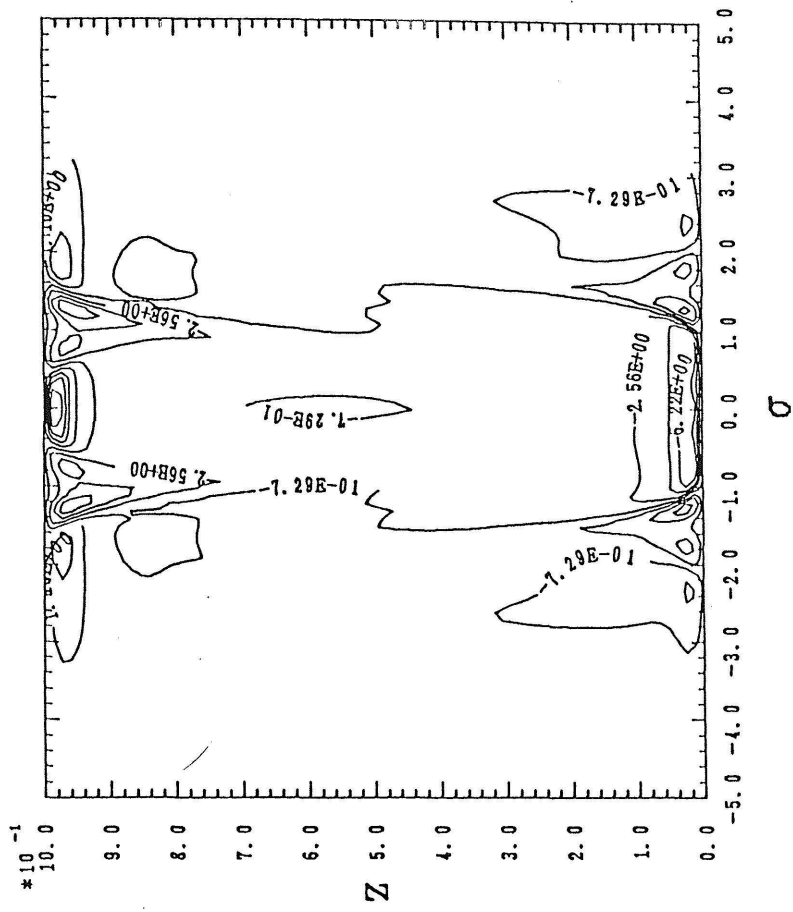


Fig.4.3(d) Solitary wave solution of f_4 ($Ra=1.0 \times 10^7$)

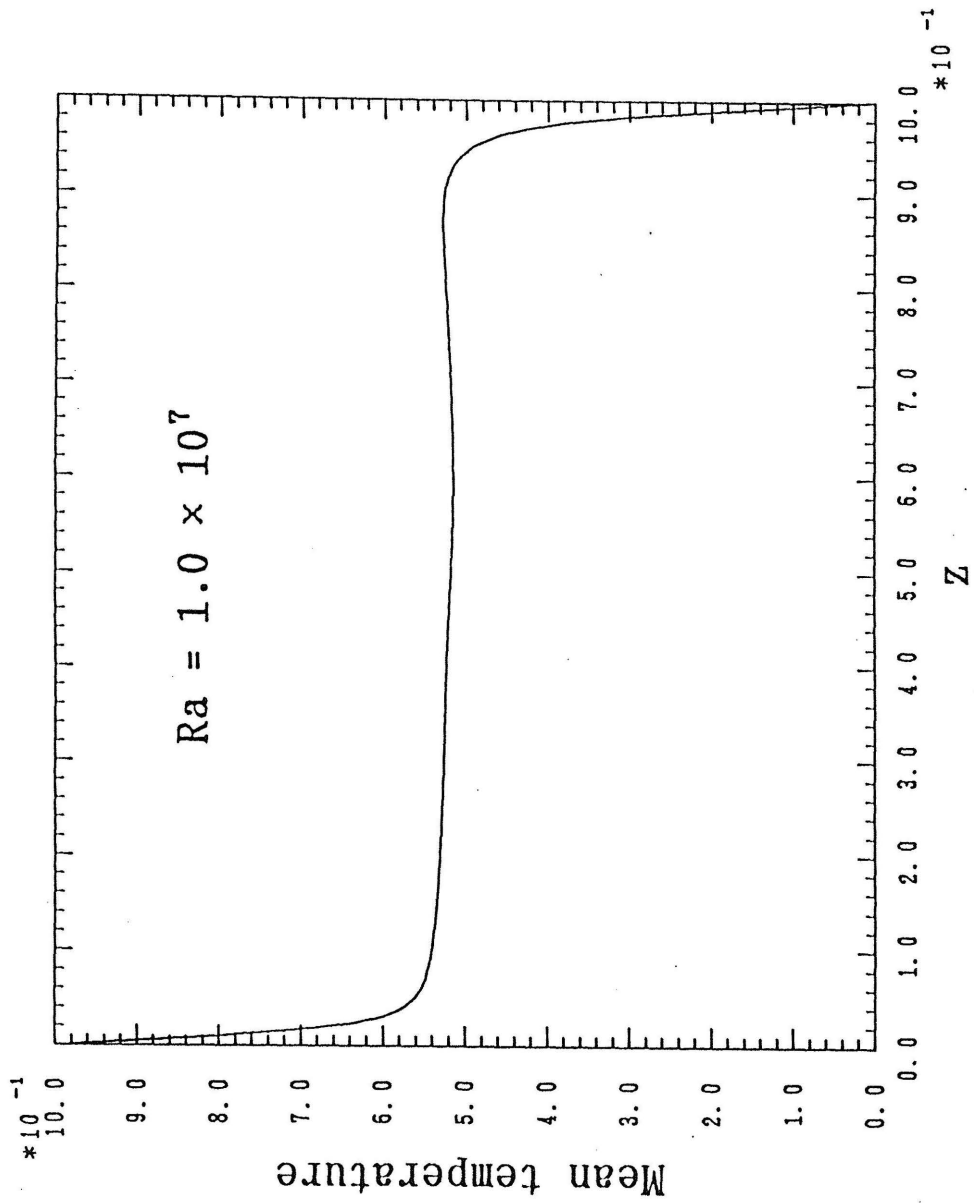


Fig.4.3(e) Mean temperature distribution ($Ra=1.0 \times 10^7$)

$Ra = 5.0 \times 10^7$

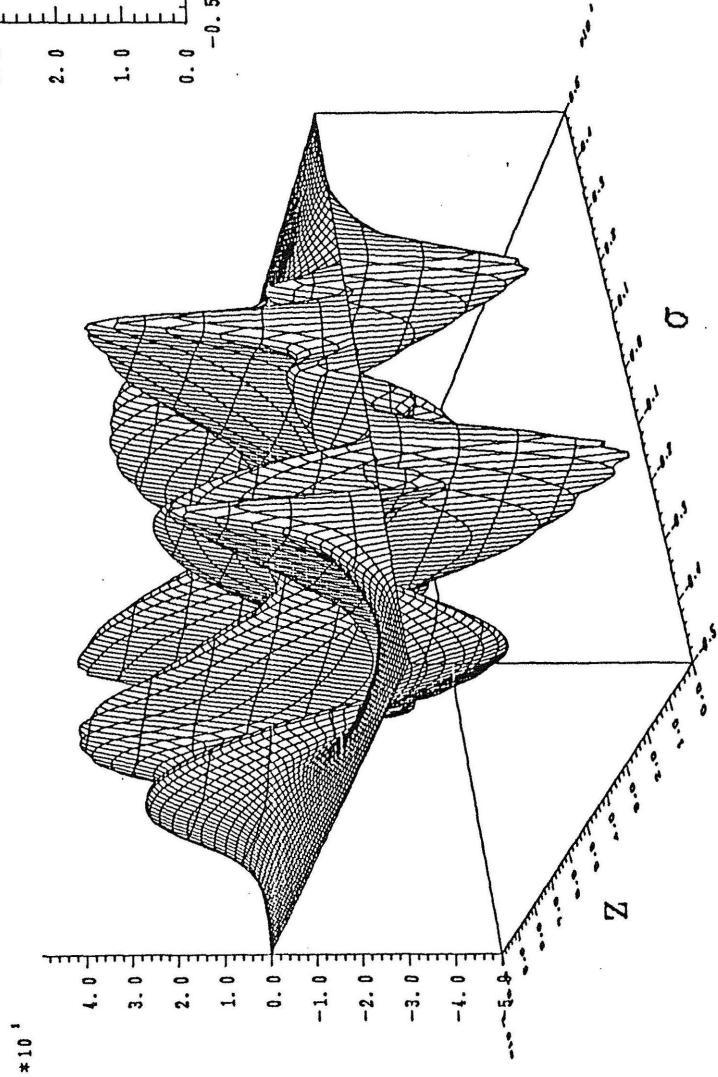
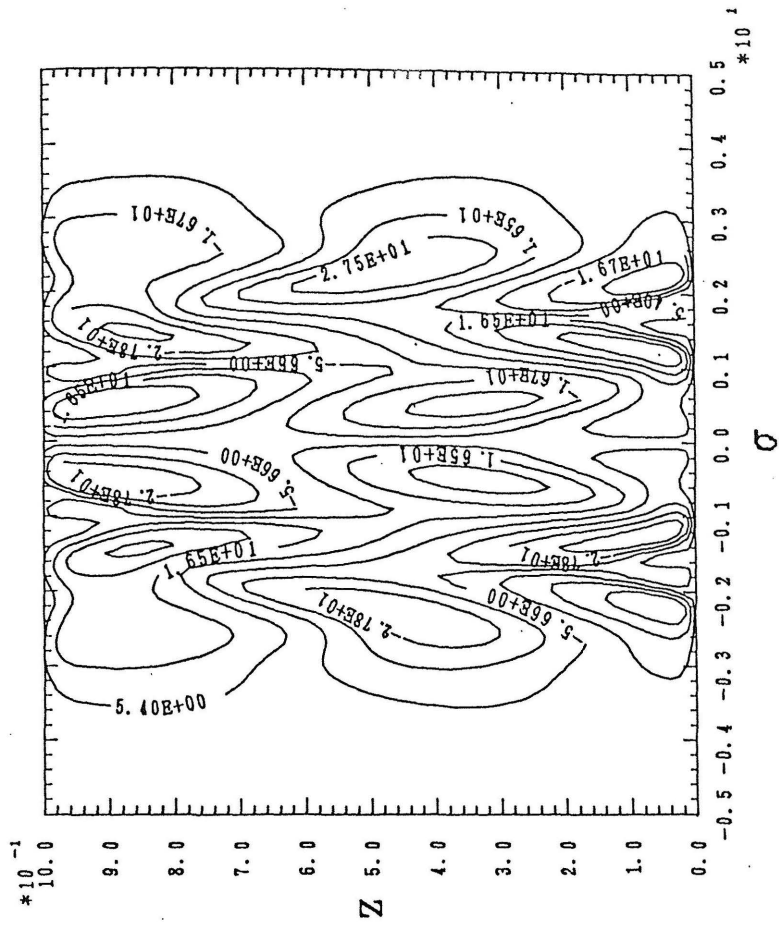


Fig.4.4(a) Solitary wave solution of f_1 ($Ra=5.0 \times 10^7$)

$Ra = 5.0 \times 10^7$

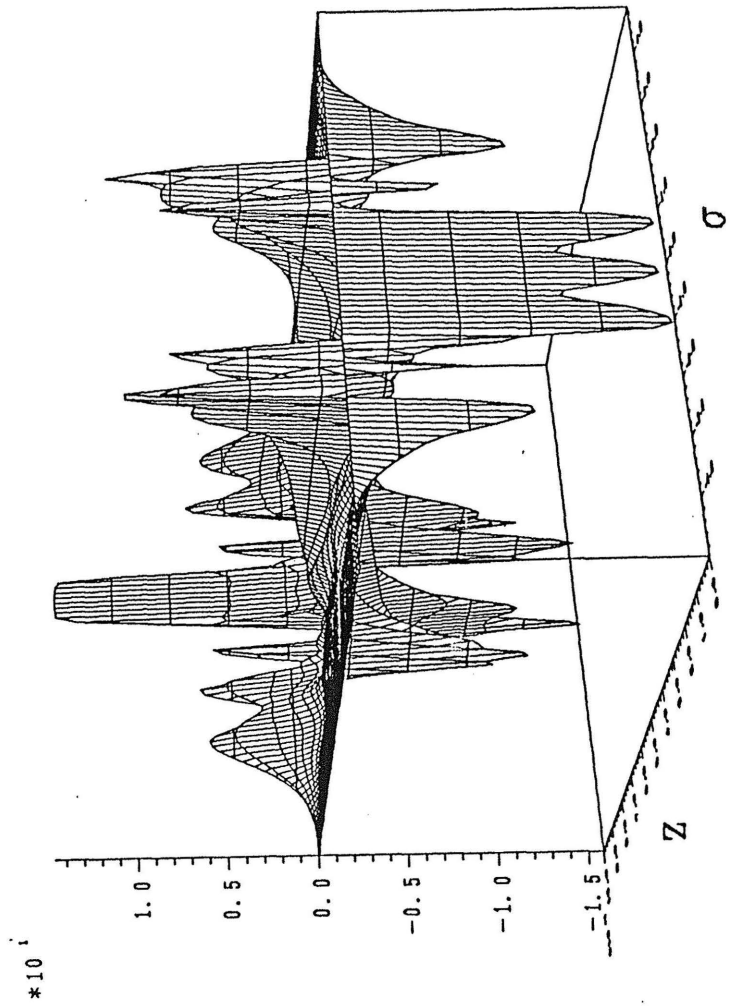
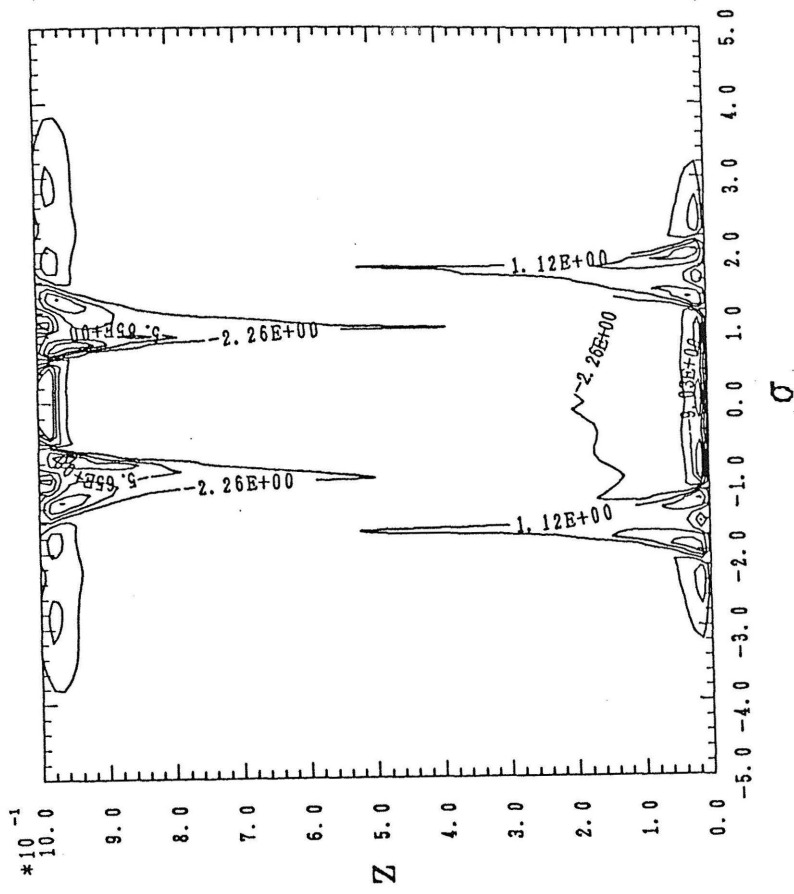


Fig.4.4(d) Solitary wave solution of f_4 ($Ra=5.0 \times 10^7$)

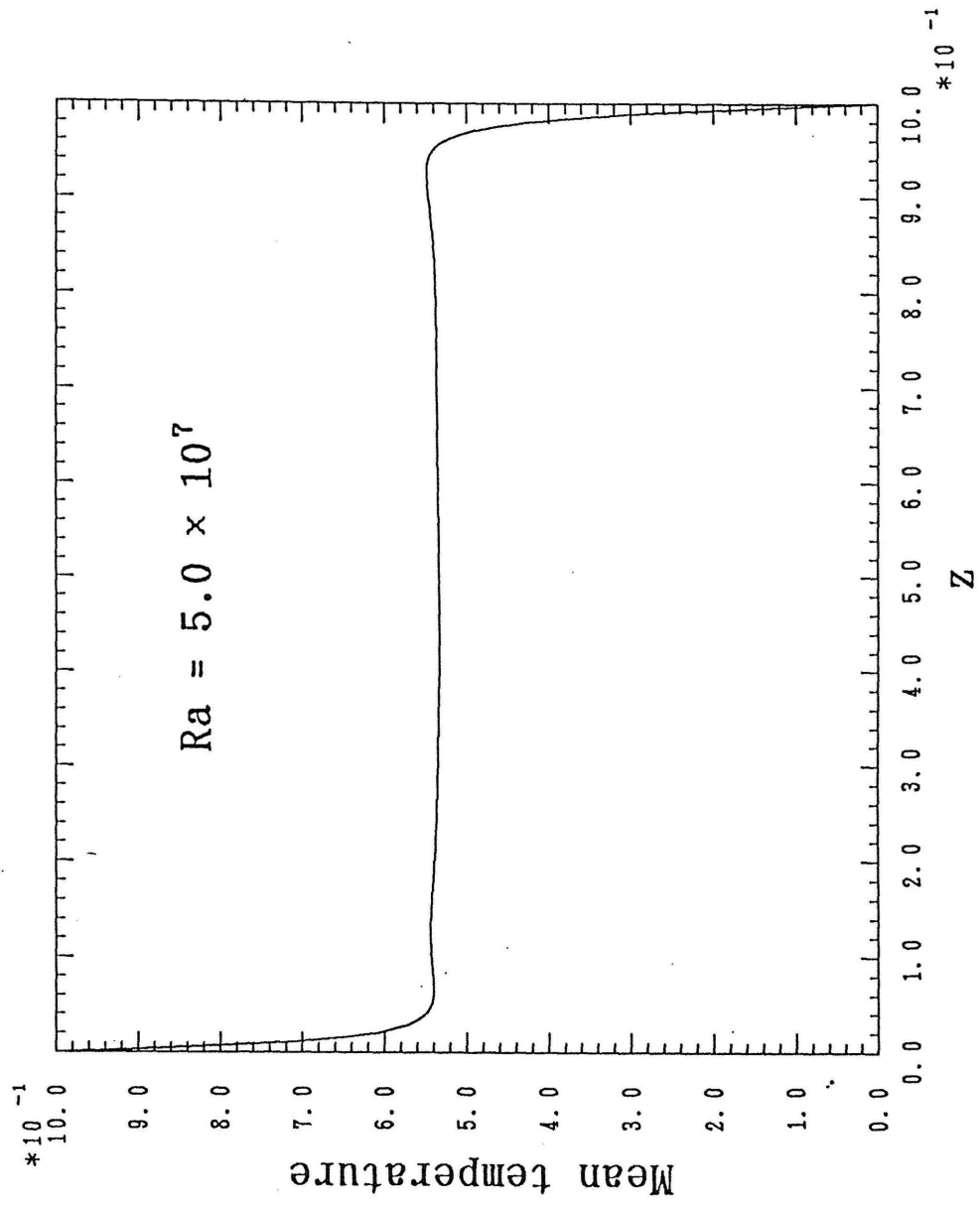


Fig.4.4(e) Mean temperature distribution ($Ra=5.0 \times 10^7$)

4. 2 実験との比較

(1) 平均温度分布

Fig.4.5 に実験値¹⁹⁾ との比較を示す。実験において使用されたレイリー数は $Ra = 3.97 \times 10^6$ であるので同じ値を用いて計算した。両者は良く一致しているが、計算値の方が境界層をよりシャープに表している。

平均温度分布の平坦部の両端にみられるオーバーシュート・アンダーシュートは実験¹⁷⁾ ではレイリー数が低いときのみ観測されているが、計算ではその性質が保存され、レイリー数が大きくなっても幾らか見られる。

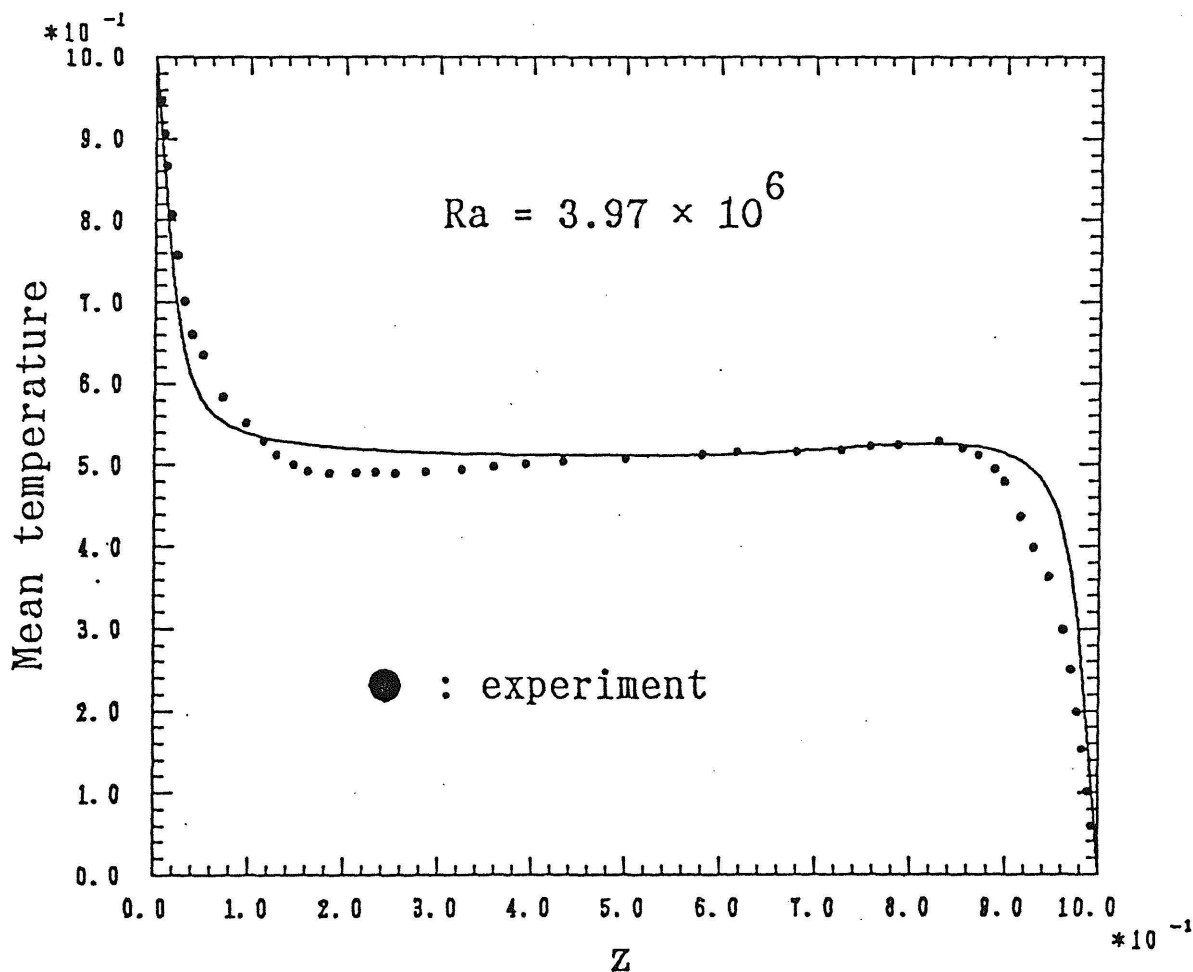


Fig.4.5 Mean temperature distribution ($Ra=3.97 \times 10^6$)

(2) 乱流強度 (Intensity)

乱流変動の解 f は非分散型孤立波の形をしているが、以下のような積分によってただちに乱流強度を計算することができる。

$$\langle \Delta u_1^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2 d\sigma \quad (4.1)$$

$$\langle \Delta u_3^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_3^2 d\sigma \quad (4.2)$$

$$\langle \Delta T^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_4^2 d\sigma \quad (4.3)$$

実験²⁰⁾ との比較を Fig.4.6 (a)~(c) に示す。いずれも計算値の方が sharp にでていますが、実験値と良く一致していると言える。特に、温度ゆらぎの乱流強度は境界層で鋭いピークをもち、中央領域ではほぼ一定となる。

(3) 温度ゆらぎのスペクトル

温度ゆらぎのスペクトルは以下のようなフーリエ変換によってただちに計算することができる。

$$S(\Omega) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_4 \exp(-i\Omega s) ds \right]^2 \quad (4.4)$$

実験²¹⁾ と同じようにセルの中心部分付近の温度ゆらぎのスペクトルを計算し、比較した。Fig.4.7 に示すように実験値と良く一致している。実験値にみられる低周波での振動が本理論の場合には現れていないが、これは実験が有限幅 (x_1 および x_3 方向) で行われているために生じている回流の影響であると考えられる。

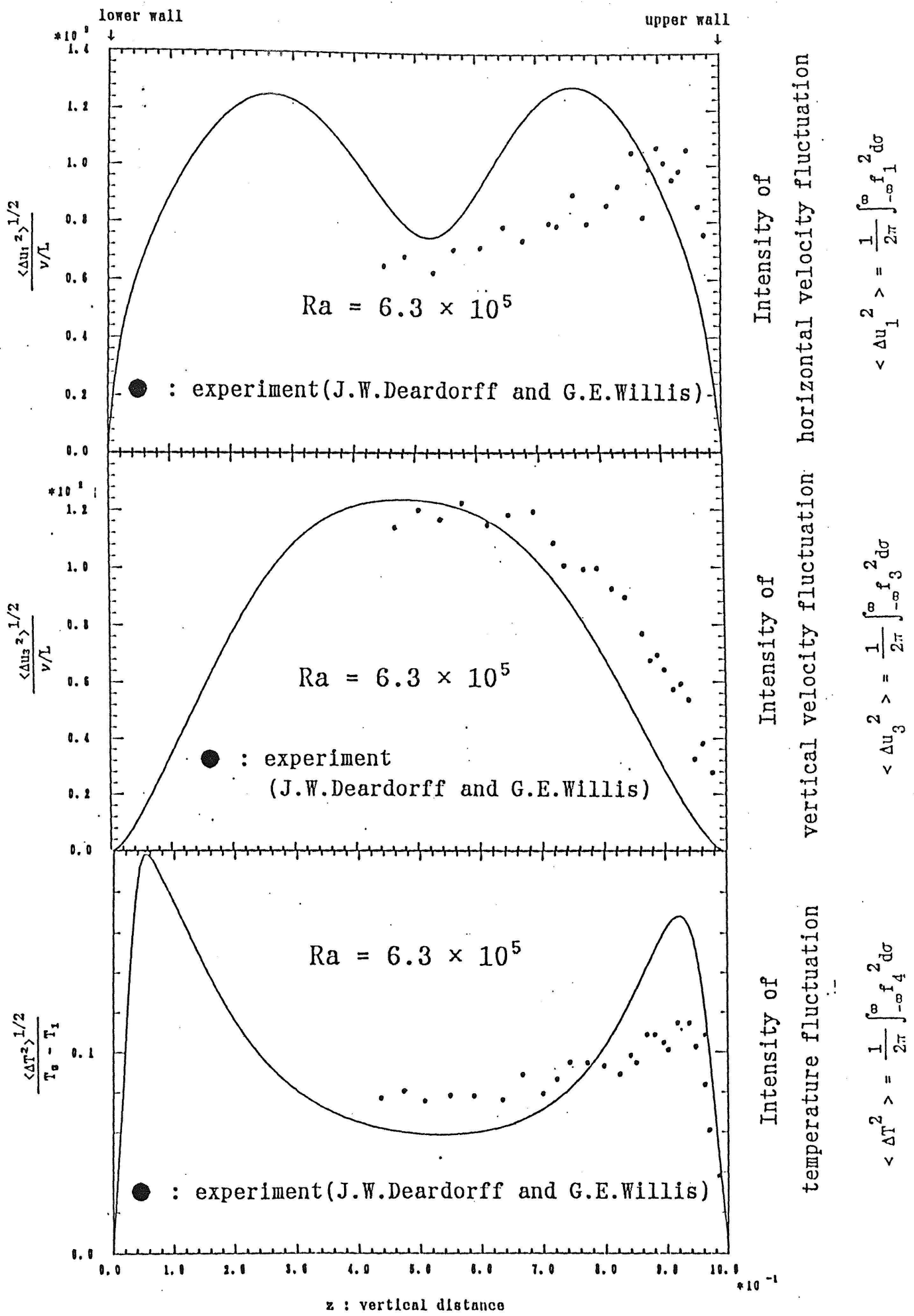


Fig.4.6(a) Intensities of fluctuations ($Ra=6.3 \times 10^5$)

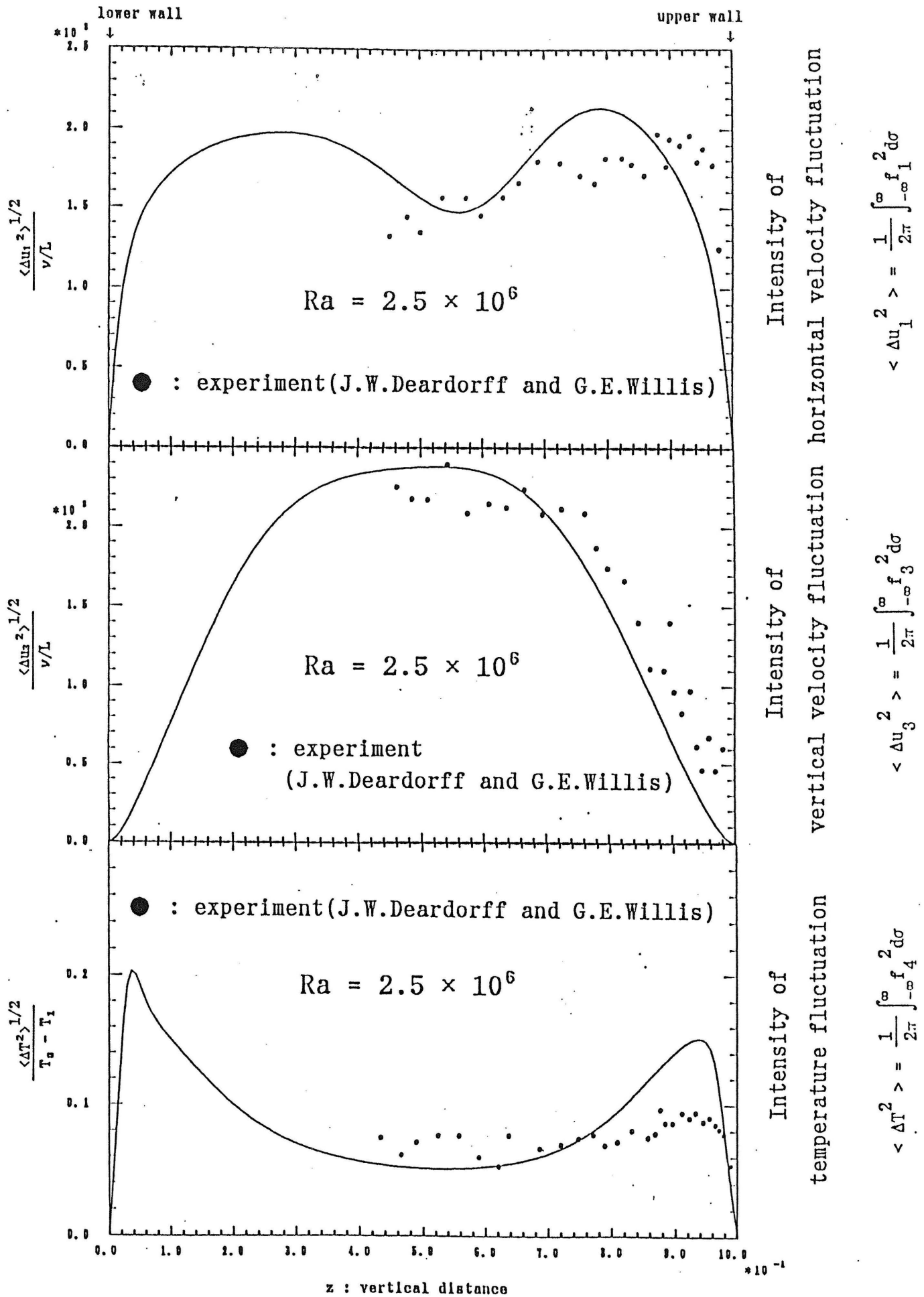


Fig.4.6(b) Intensities of fluctuations ($Ra=2.5 \times 10^6$)

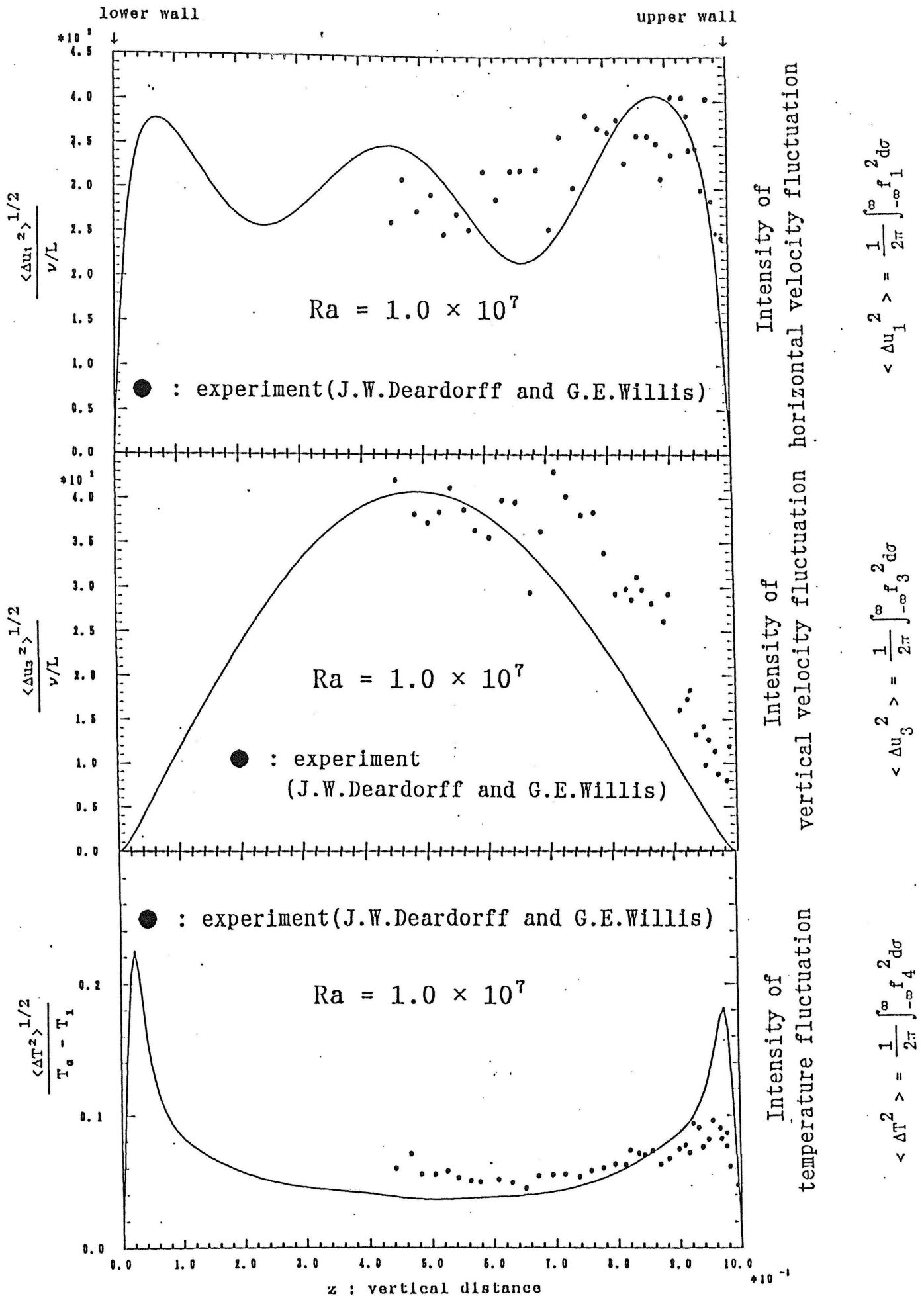
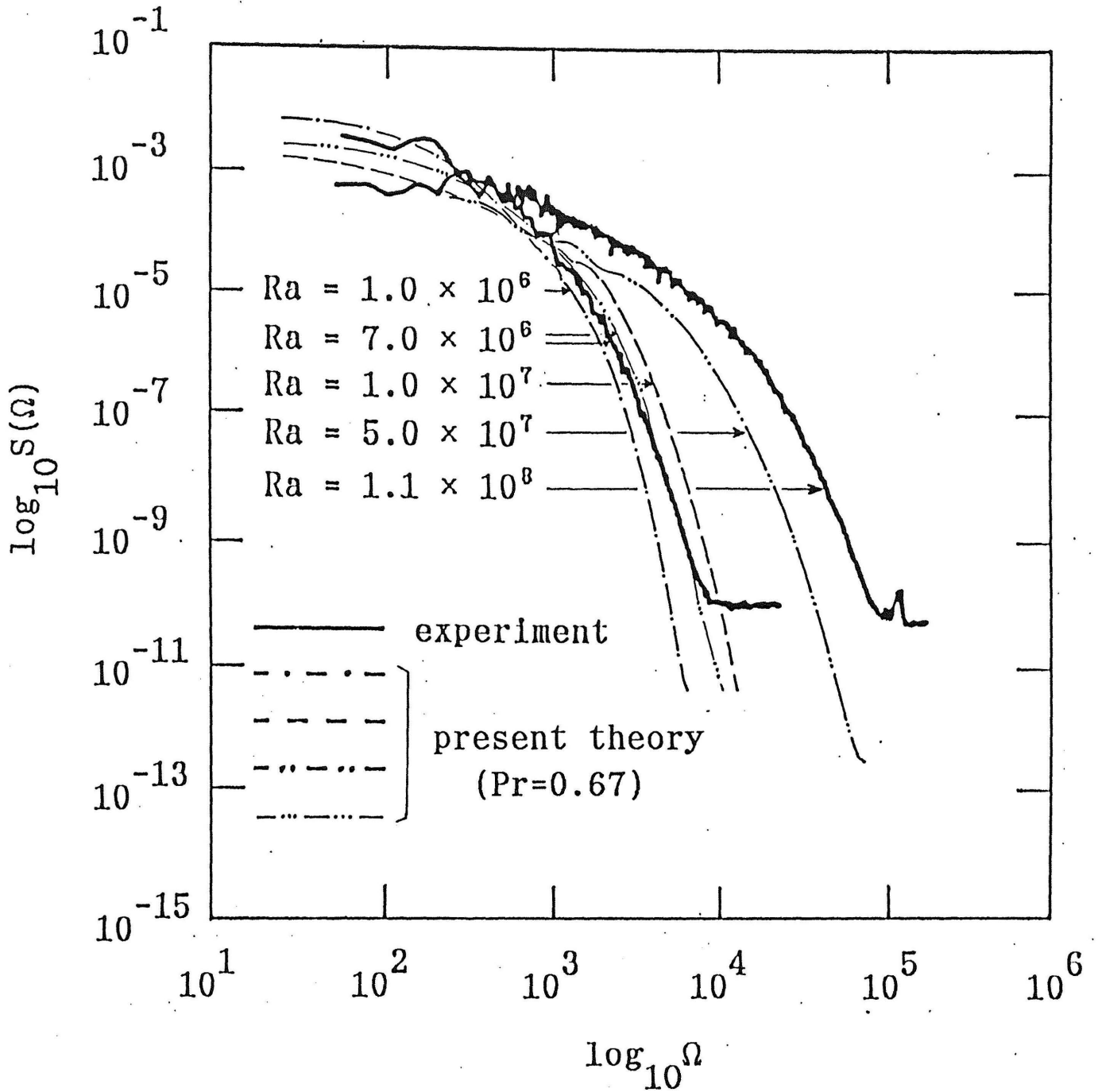


Fig.4.6(c) Intensities of fluctuations ($Ra=1.0 \times 10^7$)

$$S(\Omega) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_A \exp(-i\Omega s) ds \right]^2$$



experiment : X.Z.Wu, L.Kadanoff, A.Libchaber and M.Sano
 (Physical Review Letters, Vol.64,1990)

Fig.4.7 Power-spectra of temperature fluctuations

(4) Ra-Nu 曲線

実験で最も数多く調べられているのが Ra-Nu 曲線であり、各レイリー数・プラントル数における計算結果を Table.4.1に示す。実験¹²⁾との比較は Fig.4.8 に示す。レイリー数が $Ra = 5.0 \times 10^5$ 以上では実験値と良く一致しているが、これ以下では外れてくる。これ以下はカオスすなわち決定論的方程式の領域であり、本理論の守備範囲外なので当然予想されたところである。この限界レイリー数が乱流域の下限値と一致していることは本理論の健全性を傍証するともいえる。

Nu の Ra に対する依存性は本理論の場合、 $Ra \geq 5.0 \times 10^5$ において全域で

$$Nu \sim Ra^{0.28}$$

程度になるようであるが、これは実験¹³⁾及び scaling-law¹⁵⁾で確かめられた hard turbulence の領域における依存性と良く一致している。性格の異なった2つの乱流があるとは本理論においては認められない。

Table.4.1 Nusselt number against Rayleigh number

Ra	Nu (Pr = 6.1)	Nu (Pr = 0.67)
5.0×10^4	10.44	—
1.0×10^5	10.41	—
5.0×10^5	9.68	10.24
6.3×10^5	10.41	10.77
1.0×10^6	12.71	12.83
2.5×10^6	13.86	—
3.97×10^6	15.33	—
7.0×10^6	17.81	19.85
1.0×10^7	19.82	21.66
5.0×10^7	30.85	33.09

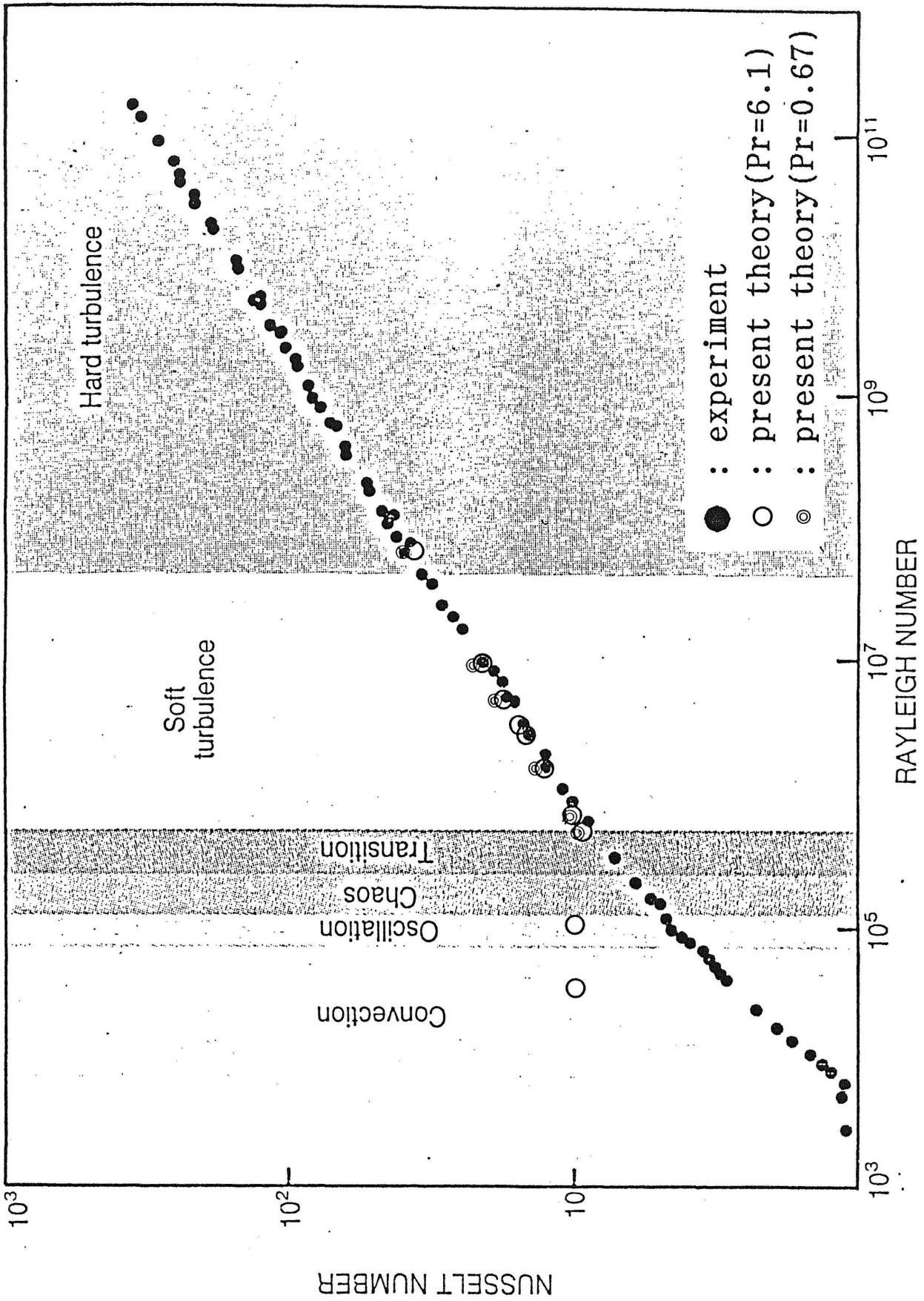


Fig.4.8 Nusselt number against Rayleigh number

第 5 章

結 論

第5章 結論

本論においては、非平衡統計力学に基づいて導かれた“一切の実験的半経験的パラメータを含んでいない”乱流変動支配方程式をベナール対流の場合に適用し、平均温度分布と乱流変動の定常解を連立して求めた。

得られた乱流変動の解は非分散型孤立波の形をしており、coherentな構造を有していること、境界層と中央領域において顕著な構造の違いがあることが確かめられた。また、それから計算された平均速度変動・温度変動の垂直方向分布、温度ゆらぎのスペクトル、平均温度の分布並びにヌッセルト数は実験値と良く一致した。

得られた解の既存の実験との満足すべき一致はこの乱流理論が健全な基盤をもつことを示していると思われる。

謝 辞

本研究・論文を御指導いただきました筑波大学構造工学系柘植俊一教授にこの場をおかりして心から御礼申し上げます。

また、同学系吉沢能政教授並びに村上正秀助教授には論文をまとめるに際し御指導をいただきました。さらに、東北大学電気通信研究所佐野雅巳助教授には実験的見地から、科学技術庁航空宇宙技術研究所数理解析部小川哲主任研究官には数値解析的見地からたくさんの御助言をいただきました。重ねて御礼申し上げます。

同学系山田文彦氏には図表の複写・作成等においてお世話になりました。また柘植研究室の諸兄、特に修士1年の遠藤雅彦君・原崎史彦君そして学部の宮地匡人君には実験値のプロット並びに図表の作成において大変お世話になりました。ありがとうございました。最後に、長い間互いに励ましあってきた同期の古谷博秀氏に御礼を申し添えます。

参 考 文 献

※ 参考文献

1. S.Tsugē, Approach to the origin of turbulence on the basis of two-point kinetic theory. *Phys.Fluids* 17,22-33(1974)
2. S.Tsugē and K.Sagara, A new hierarchy system on the basis of 'master' Boltzmann equation for microscopic density. *J.Statist.Phys.*12,403-425 (1975)
3. L.D.ランダウ, E.M.リフシッツ 流体力学 (東京図書, 1970) P.133
4. V.Yakhot and S.A.Orszag, Renormalization group analysis of turbulence I Basic theory, *J.Sci.Computing* 1,3-51(1986)
5. Th von Kármán and L.Howarth, On the statistical theory of isotropic turbulence, *Proc.Roy.Soc.*A164,192-215(1938)
6. L.P.Bernal and A.Roshko, Streamwise vortex structures in plane mixing layers. *J.Fluid Mech.*170 499-525(1986)
7. S.Tsugē, Separation of variables in the two-point BBGKY equations, *Phys.Lett.*70A,266-268(1979)
8. S.Tsugē, Separability into coherent and chaotic time dependences of turbulent fluctuations, *Phys.Fluids.*27,1370-1376(1984)
9. S.Tsugē; Separation of variables and fluid-moment expansion of a two-particle Kinetic equation. *Rarefied Gasdynamics* (edited by S.Fisher), *Progress in Astronautics and Aeronautics* 74,386-401(1981)
10. S.Tsugē, K.Sagara and S.Kadowaki, Closure in nonlinear convolution of the BBGKY fluctuation equation, *Rarefied Gasdynamics* (edited by H.oguchi, Univ. of Tokyo Press,1984) pp19-26(1984)
11. S.Tsugē, Y.Ohki and S.Ogawa, Solitary wave solution of Premixed turbulent flames (Preprint XIth International Workshop on mathematical methods in combustion, Tsukuba Research Consortium, Tsukuba, Japan 1991) p.p.81-91
12. A.Khurana, Rayleigh-Benard experiment probes transition from chaos to turbulence, *Physics today* (June 1988)17-21
13. B.Castaing, G.Gunaratne, F.Heslot, L.Kadanoff, A.Libchaber, S.Thomae, X.Wu, S.Zaleski and G.Zanetti, Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh-Benard convection, *J.Fluid.Mech.*204,1-30(1989)
14. G.Zocchi, E.Moses and A.Libchaber, Coherent structures in turbulent convection, an experimental study, *Physica* A166,387-407(1990)

15. Zhen-Su She, On the scaling laws of thermal turbulent convection, Phys.Fluids A,6,911-913(1989)
16. A.Umemura and F.H.Busse, Axisymmetric convection at large Rayleigh and infinite Prandtl number, J.Fluid.Mech.208,459-478(1989)
17. T.Y.Chu and R.J.Goldstein, Turbulent convection in a horizontal layer of water, J.Fluid Mech.60,141-159(1973)
18. D.C.Threlfall, Free convection in low-temperature gaseous helium, J.Fluid Mech.67,17-28(1975)
19. A.M.Garon and R.J.Goldstein, Velocity and heat transfer measurements in thermal convection,Phys.Fluid 16,1818-1825(1973)
20. J.W.Deardorff and G.E.Willis, Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates, J.Fluid Mech.28,675-704(1969)
21. X.Z.Wu,L.Kadanoff,A.Libchaber and M.Sano, Frequency power spectrum of temperature fluctuations in free convection, Phys.Rev.Lett.64,2140-2143(1990)

表 及 び 図 の 一 覧

List of Tables and Figures

1. Tables

Table.1.1 Structures of nonequilibrium statistical mechanics and phenomenological theories

Table.2.1 Character of turbulence

Table.4.1 Nusselt number against Rayleigh number

2. Photoes

Photo.1.1(a) Instantaneous Schlieren picture of the mixing layer

Photo.1.1(b) Time-exposure Schlieren picture of the mixing layer

Photo.2.1 Waves and plumes in the lower boundary layer

Photo.2.2(a)-(d) Waves in the lower boundary layer

Photo.2.3(a)-(d) Plumes in the upper boundary layer

3. Figures

Fig.1.1 Needs for solitary-wave solution

Fig.2.1 Nusselt number against Rayleigh number

Fig.2.2(a),(b) Laminar convection patterns

Fig.2.3(a),(b) Laminar convection patterns in water

Fig.2.4 Release of a thermal from the boundary layer in water

Fig.2.5 Horizontal movement of s thermal in a water layer

Fig.3.1 Staggerd cell

Fig.4.1(a) Solitary wave solution of f_1 ($Ra=5.0 \times 10^5$)
Fig.4.1(b) Solitary wave solution of f_{40} ($Ra=5.0 \times 10^5$)
Fig.4.1(c) Solitary wave solution of f_3 ($Ra=5.0 \times 10^5$)
Fig.4.1(d) Solitary wave solution of f_4 ($Ra=5.0 \times 10^5$)
Fig.4.1(e) Mean temperature distribution ($Ra=5.0 \times 10^5$)

Fig.4.2(a) Solitary wave solution of f_1 ($Ra=1.0 \times 10^6$)
Fig.4.2(b) Solitary wave solution of f_{40} ($Ra=1.0 \times 10^6$)
Fig.4.2(c) Solitary wave solution of f_3 ($Ra=1.0 \times 10^6$)
Fig.4.2(d) Solitary wave solution of f_4 ($Ra=1.0 \times 10^6$)
Fig.4.2(e) Mean temperature distribution ($Ra=1.0 \times 10^6$)

Fig.4.3(a) Solitary wave solution of f_1 ($Ra=1.0 \times 10^7$)
Fig.4.3(b) Solitary wave solution of f_{40} ($Ra=1.0 \times 10^7$)
Fig.4.3(c) Solitary wave solution of f_3 ($Ra=1.0 \times 10^7$)
Fig.4.3(d) Solitary wave solution of f_4 ($Ra=1.0 \times 10^7$)
Fig.4.3(e) Mean temperature distribution ($Ra=1.0 \times 10^7$)

Fig.4.4(a) Solitary wave solution of f_1 ($Ra=5.0 \times 10^7$)
Fig.4.4(b) Solitary wave solution of f_{40} ($Ra=5.0 \times 10^7$)
Fig.4.4(c) Solitary wave solution of f_3 ($Ra=5.0 \times 10^7$)
Fig.4.4(d) Solitary wave solution of f_4 ($Ra=5.0 \times 10^7$)
Fig.4.4(e) Mean temperature distribution ($Ra=5.0 \times 10^7$)

Fig.4.5 Mean temperature distribution ($Ra=3.97 \times 10^6$)

Fig.4.6(a) Intensities of fluctuations ($Ra=6.3 \times 10^5$)

Fig.4.6(b) Intensities of fluctuations ($Ra=2.5 \times 10^6$)

Fig.4.6(c) Intensities of fluctuations ($Ra=1.0 \times 10^7$)

Fig.4.7 Power-spectra of temperature fluctuations

Fig.4.8 Nusselt number against Rayleigh number