

高速鉄道に生じる蛇行動のヒステリシス特性  
(軌条輪を利用した実験及び非線形解析)

2020年3月

Wei Weiyan

高速鉄道に生じる蛇行動のヒステリシス特性  
(軌条輪を利用した実験及び非線形解析)

Wei Weiyan

システム情報工学研究科  
筑波大学

2020年3月

# 目次

<b>第1章</b>	<b>序論</b>	<b>4</b>
1.1	はじめに . . . . .	4
1.2	本研究の背景と従来研究の概要 . . . . .	4
1.2.1	線形特性による蛇行動現象 . . . . .	4
1.2.2	3次非線形成分による臨界速度以下の蛇行動の発生 . . . . .	8
1.2.3	5次非線形成分によるヒステリシス現象 . . . . .	10
1.2.4	先行研究と問題点 . . . . .	12
1.3	本論文の目的と構成 . . . . .	13
<b>第2章</b>	<b>軌条輪実験装置と蛇行動ヒステリシス現象の測定</b>	<b>16</b>
2.1	緒言 . . . . .	16
2.2	実験装置 . . . . .	17
2.3	測定対象と測定手法 . . . . .	19
2.4	実験結果と解析 . . . . .	21
2.4.1	安定な定常振幅 . . . . .	21
2.4.2	不安定な定常振幅 . . . . .	28
2.5	結言 . . . . .	29
<b>第3章</b>	<b>一輪軸台車モデルとその運動方程式の導出</b>	<b>34</b>
3.1	緒言 . . . . .	34
3.2	一輪軸台車モデル構造とその非線形運動方程式 . . . . .	34
3.3	線形解析 . . . . .	43
3.3.1	線形臨界速度 . . . . .	43
3.3.2	クリープ係数同定 . . . . .	45

3.3.3	根跡図 . . . . .	46
3.4	結言 . . . . .	46
<b>第4章</b>	<b>蛇行動ヒステリシス現象の理論解析法</b>	<b>48</b>
4.1	緒言 . . . . .	48
4.2	中心多様体理論を用いたアプローチ . . . . .	48
4.2.1	中心部分空間への低次元化 . . . . .	48
4.2.2	非線形座標変化による標準化 . . . . .	53
4.2.3	標準形の導出 . . . . .	55
4.2.4	標準形の非線形係数の同定 . . . . .	56
4.3	非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開アプローチ . . . . .	58
4.3.1	非線形成分の代表項 . . . . .	58
4.3.2	多重尺度法による多時間尺度の設定 . . . . .	59
4.3.3	非自己随伴行列による可解条件 . . . . .	61
4.3.4	標準形の導出 . . . . .	64
4.3.5	非線形成分を代表した非線形項係数の同定 . . . . .	65
4.6	結言 . . . . .	67
<b>第5章</b>	<b>台車の線形パラメータによるヒステリシス特徴への影響</b>	<b>68</b>
5.1	緒言 . . . . .	68
5.2	線形臨界速度の変化 . . . . .	68
5.3	ホップ分岐種類の変化 . . . . .	71
5.4	ヒステリシス特性の変化 . . . . .	74
5.5	在来線と新幹線の線形特性の考察 . . . . .	76
5.6	線形特性と非線形特性を同時に上げる手法 . . . . .	76
5.7	結言 . . . . .	77

第 6 章	台車ばね定数によるヒステリシス特性変化の実験検証	83
6.1	緒言	83
6.2	実験と数値例の比較	83
6.3	結言	84
第 7 章	結論	86
付 録 A	外乱の大きさによる蛇行動ヒステリシス速度範囲の変化	88
付 録 B	車輪とレールの相対位置による非線形クリープ係数	90
付 録 C	非線形座標変換の非線形係数選定	101
	本論文に関連した公表論文と研究発表	105
	謝辞	106
	参考文献	107

# 第1章 序論

## 1.1 はじめに

近年、鉄道車両の高速化に伴って、乗客の乗り心地、車両の走行安定性・安全性がますます要求され、鉄道車両の設計の段階における重要な研究・開発課題となった [1]。高速車両を実現するうえで解決すべき問題は車両・レールの相互作用による振動やそれらの振動による騒音などに代表される [2]。これらの問題に対する様々の研究によって、鉄道車両のパラメータの設計方針が明らかにされ、低振動、低騒音のより良い高速車両が生まれて来た。例えば、Dai ら [3] はレールの枕木の不備に注目して数値解析を行い、枕木の不備による車両システムの振動応答への影響を明らかにした。Han ら [4] は車輪とレールの3次元接触モデルを構築し、走行速度、フラット長さ、車輪荷重などによる車輪とレールにかかる最大応力の位置変化を解析することによって、車輪・レールにダメージが付きやすい部分を明らかにし、メンテナンスへ有意義な結論をまとめた。

レールの不備や車輪の破損のような問題は車両安全性に影響する後天性問題である。これらの問題に対して、車両の車輪勾配によって生じる蛇行動問題は鉄道システムにおける特有な動的不安定問題であり、長く研究されてきた最も重要な問題の1つである [5]。蛇行動の発生要因は鉄道車両の特徴である受動的な自己操舵機能によるもので、蛇行動は鉄道システムにおいて必ず存在する問題である。本研究はこの蛇行動現象に注目して、臨界速度の近傍における非線形挙動についてを解析する。

## 1.2 本研究の背景と従来研究の概要

### 1.2.1 線形特性による蛇行動現象

蛇行動とは、鉄道車両がある臨界速度を超えて走行する時に、図 1.1 のように直線走行であっても、横方向とヨーイング方向に揺れながら走行する共振現象である。こ

の現象は車輪とレールの金属同士が転がり接触した時の滑りによって生じるクリープ力に起因した自励振動であり [6]、乗り心地を悪化させ、車輪とレールにダメージを与え、脱線事故を引き起こす可能性がある [7,8]。鉄道車両は受動的な自己操舵機能を得るために、車輪踏面は円錐や円弧をつなぎ合わせた形状になっている。このような踏面形状により左右振動が生じることは鉄道が発明された初期から知られていた。George は 1821 年に一輪軸台車の蛇行動発生原理を明らかにした [9]。台車が左右に変位した時に、左右の車輪とレールの接触半径に差が生じ、接触位置での転がり速度が異なるようになる。また、左右の車輪は車軸によりつながっていて、台車とともに、一定な速度でレール方向に走行するため、左右の車輪とレールの間に滑りが生じる。この滑りによってクリープ力が働き、台車を中心の位置に戻させる。このような車輪を中心位置に戻させる復元力が存在するため、鉄道車両は曲線を転がる時には自動的にレールに沿って曲がる機能を発揮するというような受動的な自己操舵機能を持つようになる。しかし、車両が中心位置から片方のレールに寄せた場合、車両をレールを中心位置に戻ろうとする復元力が働き、この力によって車両がレールを中心位置に戻り、中心位置を超えて反対側のレールに寄せることになる。また、逆向きの復元力が車両に働き、こういった繰り返し運動が発生する。よって、車両は左右に振動する蛇行動特性を持つ。

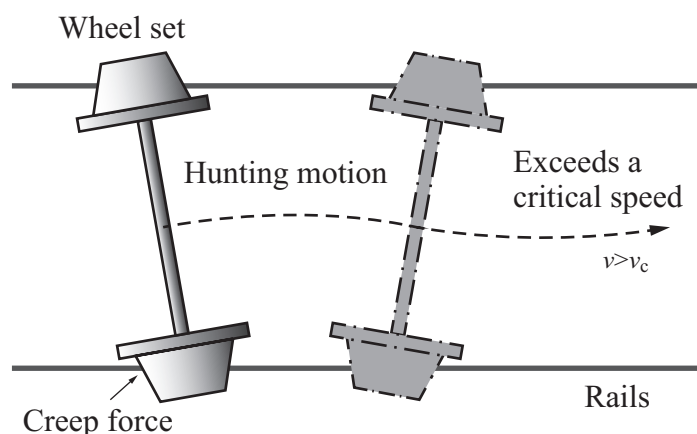


図 1.1: Phenomenon of hunting motion in vehicle railway.

実際の車両は輪軸に台車、台車に車体が連結してて、ばねやダンパーによって拘束されているため、通常の走行速度では蛇行動が生じず、安定な走行ができる。クリープ力は台車に減衰力と振動させる力を同時に働き、低速でクリープ力による減衰力が支配的だが、速度が上がると、減衰力が下がり、車両慣性力、輪軸に働く支持ばねのばね力、クリープ力による振動させる力と同等になり、振動が臨界速度で

始まり、蛇行動が発生する。また、鉄道車両の構造によって、輪軸蛇行動、台車蛇行動、車体蛇行動がそれぞれ存在するが [10]、それぞれの蛇行動現象の発生原理は同じであるため [9,58]、本研究は輪軸蛇行動（本研究で用いた一輪軸台車モデルの輪軸と台車は一体になるため、輪軸蛇行動に相当する）に注目して解析する。

線形解析で車両システムの固有値を求めることにより、蛇行動が発生する臨界速度は求められる [9]。この線形解析で求めた臨界速度は線形臨界速度と呼ばれる。図 1.2 は線形解析から得られた鉄道車両の走行速度による振幅変化の分岐図で、横軸は走行速度、縦軸は台車の横定常振幅、太い実線は安定な定常振幅、太い破線は不安定な定常振幅、 $v_c$  は線形臨界速度を示す。速度ゼロから線形臨界速度まで、台車はゼロの安定な定常振幅を持つから、車両は安定した走行ができる。線形臨界速度を超えると、自明な定常振幅は不安定になり、すなわち、図の中の丸マークで示す微小な外乱（現実に必ず存在するレール・車輪表面の不整など）に起因して生じる振動が発散する。これが蛇行動である。一方、線形臨界速度以下のところでは、外乱の大きさによらず蛇行動は発生しない。以上が線形解析の結果である。

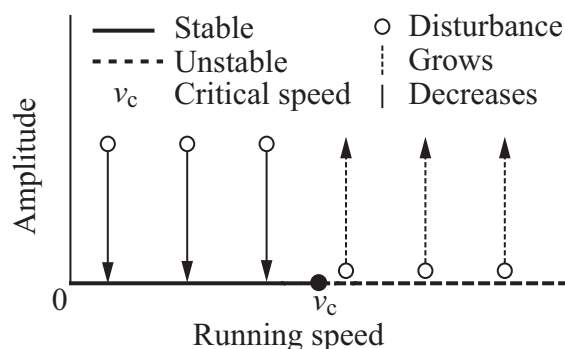


図 1.2: Amplitude response of vehicle according to linear analysis.

蛇行動を引き起こすクリープ力は車輪とレールの接触面の微小な滑りによって生じる。その接触面は弾性接触論 [11] により、図 1.3(a) のような楕円形状となり、粘着領域と滑り領域に分けられる。車両の走行方向の前は粘着領域で、後ろは滑り領域となることが分かる。図 1.3(b) は滑り率（レールと車輪から見た接触面の相対速度と台車走行速度の比）とクリープ力の関係を示す図で、その関係は非線形性を表す [12,13]。これは Carter [14]、Johnson [15]、Kalker [16] の理論によって明らかにされた。特に、車輪が完全に滑っているときに、クリープ力は滑り摩擦力（クーロン力）と一致する。



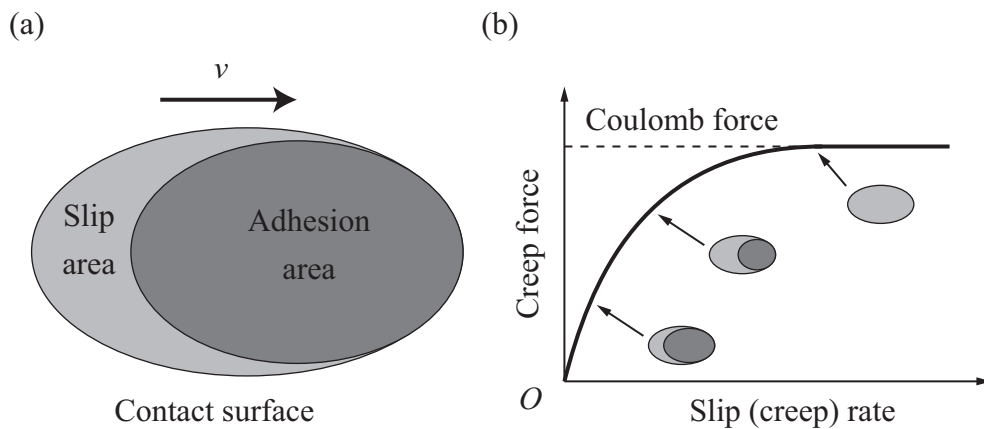


図 1.3: Creep force in the wheel-rail system. (a) Contact surface, (b) creep force curve.

蛇行動線形臨界速度は解析対象とする車両モデルの材料変形、振動の自由度数、そして台車荷重など数多くの車両パラメータによって変る。Doyleら [17]とCasanuevaら [18]は蛇行動の線形臨界速度を求める際に、左右車輪にかかるクリープ力が異なるため、輪軸を中点から曲げられ、弾性変形された物体と考えて解析するべきと主張し、様々な状況でのねじれによる蛇行動の線形臨界速度への影響を明らかにした。よく用いられる2自由度台車モデルに対して、LeeとChengは10自由度の二輪軸台車モデルについて解析し、線形クリープ力を考慮に入れた運動方程式を導いて、蛇行動安定性を調べた [19]。Chiらは通常走行状態と蛇行動状態の周波数領域を解析して台車荷重による蛇行動への影響について明らかにした [20]。

車両の蛇行動を抑えるために、車輪・レールの踏面勾配、レールの横幅、輪軸支持剛性や台車回転抵抗などに対して最適設計の手法が用いられている。ヨーダンパを用いた研究として、Ahmadianらは非線形ヨーダンパ装着、フランジ接触を考慮に入れた二輪軸台車モデルを用いて蛇行動に影響する線形および非線形パラメータについて研究した [21]。その結果、ヨーダンパを適切にコントロールすることによって、蛇行動へのロバスト性を上昇されることができると明らかになった。Wickens [22, 23]はばね支持だけを考えた一輪軸フルスケールの台車モデルを用いて、車両安全性において様々な台車パラメータによる影響について線形解析を行った。彼は蛇行動臨界速度を向上できるようなサスペンション及びその他のパラメータの設計方針を指摘し、実験でその設計方針の有効性を検証した。Baldovinらは弾性関節と散逸デバイスで台車とボギーフレームを接続して車両走行性能を向上させ

る手法を提案し、シミュレーションで有効性を検証した [24]。Yabuno らはジャイロを用いて蛇行動現象が安定化できることを実験的および理論的に指摘し、直線走行性能を大幅に向上させる新たな手法を提案した [25]。また、鉄道車両を蛇行動が発生しないメカニズムにするために、左右独立車輪の研究 [26] が行われているが、自己操舵機能がなくなるため、片方の車輪とレールが偏摩耗するといった問題がともに生じた [27]。これらの手法は列車直線走行時の性能、すなわち蛇行動の発生する臨界速度を上げることができるが、列車の曲線通過性能を低下させる場合がある。したがって、直線走行と曲線通過性能が両立できる方法の開発が長年の間望まれてきた。

### 1.2.2 3次非線形成分による臨界速度以下の蛇行動の発生

先行研究により、鉄道システムにおける非線形成分は主に非線形クリープ力、フランジ接触による非線形力、車輪踏面の非線形形状などに影響される [28–30]。車輪とレールの滑りによる非線形クリープ力は鉄道車両のシステムダイナミクスを左右する大きな要素のひとつであり [31]、関連研究が多数行われてきた。その中、Kalker の3次元弾性転がり接触理論は集大成であり、広く応用されている。フランジ接触による非線形力では Wagner 関数 [32] がよく用いられる。蛇行動現象の非線形性に関して数多くの研究が行われてきた。Knudsen らは鉄道車両の分岐とカオスについて研究した [65]。結果として、カオス現象は激しい蛇行動振動より危険ではなく、無視できることを証明した。また、Zboinski ら [34] は曲線通過の鉄道車両の非線形安定性を研究し、直線走行時の特性と同じ特性を持つことを示した。

鉄道における非線形成分は奇数次の非線形成分しか蛇行動に影響を与えないことが知られている [38]。また、3次非線形成分によって、蛇行動線形臨界速度の近傍にホップ分岐が生じることが指摘されている [35, 37]。鉄道システムにおけるホップ分岐は超臨界 (図 1.4(a)) と亜臨界 (図 1.4(b)) 2つに分けられる。そして3次非線形の係数により、線形臨界速度から生じる安定な定常振幅は左 (線形臨界速度より小さい速度の方向) か右 (線形臨界速度より大きい速度の方向) に伸びる。例えば、中国高速列車のタイプ CRH2 と CRH3 は車両パラメータ、車輪形状などの違いにより、それぞれ亜臨界と超臨界ホップ分岐の特性を持つことが明かにされている [36]。また、線形臨界速度はホップ分岐が始まる点に対応している。このホップ分岐点の近傍において、亜臨界と超臨界ホップ分岐は異なる特性を図 1.4 に表す。図 1.4(a) に示すように、超臨界ホップ分岐の場合は、線形臨界速度を超えたときに、振幅は急激に増加することなく、走行速度の増加と共に徐々に大きくなる。この場合、速度の変化に関わらず、安定な定常振幅はいつも1つだけが存在するため、外

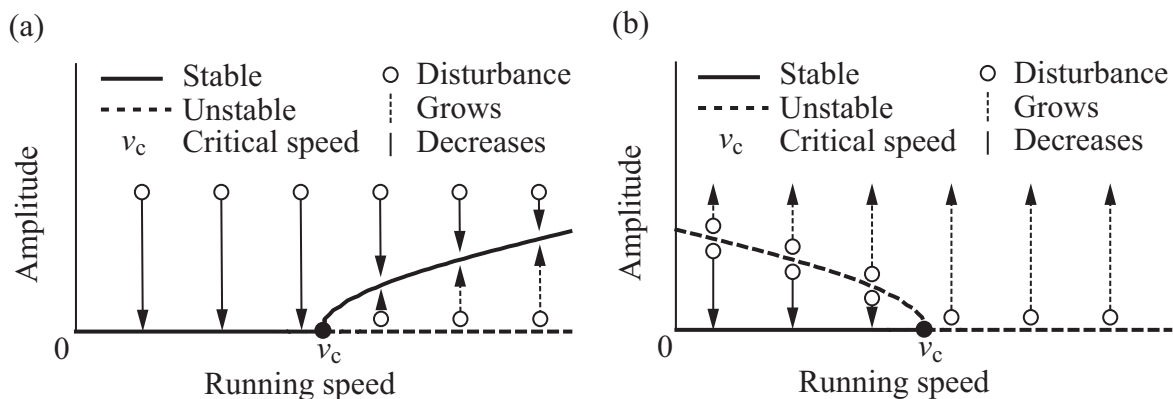


図 1.4: Hopf bifurcation in wheel systems considering the effects of cubic nonlinearity. (a) Subcritical Hopf bifurcation, (b) supercritical Hopf bifurcation.

乱の大きさによらず、車両の振動振幅は最終的にその安定な定常振幅となる。また、蛇行動が発生したときに減速すると、蛇行動の定常振幅は小さくなり、消えることになる。したがって、超臨界ホップ分岐の場合、蛇行動現象は走行速度によってコントロールでき、亜臨界の場合に比べて危険性が低い。

一方、図 1.4(b) の亜臨界ホップ分岐の場合では、線形臨界速度を超えた途端に定常振幅が急激に大きくなる。これは、線形臨界速度以上の領域に安定な定常振幅が存在しないため、線形解析と同じ結果になる。しかし、線形解析による結果及び超臨界ホップ分岐の場合と異なり、蛇行動が起きた時に、減速しても、蛇行動はすぐに収まらないことが指摘されている。図 1.4(b) に示したとおり、線形臨界速度以下の場合、外乱の大きさにより 2 つのパターンがある。1 つは不安定な定常振幅より小さな外乱が入るとき、振動は収まっていき、ゼロの定常振幅になる。2 つ目のパターンは不安定な定常振幅より大きな外乱が入るとき、振幅は成長し、無限大になる（車輪フランジとレールにぶつかって一定になるか、脱線するかになる）。蛇行動が起きているときに、車両は蛇行動の定常振幅で振動し、走行速度の変化に伴い、定常振幅が連続的に変化する。線形臨界速度以下の速度の時では、不安定な定常振幅を超えてゼロの定常振幅に戻させる外乱が存在しない限り、蛇行動は収まることなく、振動し続ける。また、線形臨界速度以下の速度であっても、車両に与える外乱が不安定な定常振幅を超える場合は車両振幅は大きくなり、蛇行動が発生する [38–40]。よって、鉄道安全性において、亜臨界ホップ分岐は極めて危険な特性である。したがって、鉄道の蛇行動安全性を評価する際に、線形解析で求めた線形臨界速度だけではなく、車両の非線形特性まで考慮して解析する必要がある。

亜臨界と超臨界ホップ分岐の種類は設計段階の車両パラメータによって決まることが明らかになってきた。2種類のホップ分岐が変化する境界において、車輪踏面勾配の摩損や乗客人数による荷重変化などによって非常に変化しやすくなることが指摘された [35]。運行している鉄道車両が走る途中で車輪踏面勾配の摩損と乗客の乗り降り人数などのことは車両特性の変化を招き、事故に至ることがあり得る。よって、鉄道車両の設計段階はホップ分岐の境界領域を避けるようなパラメータ選定が行われるべきである。2種類のホップ分岐の変化について様々な研究が行われ [42, 43, 53]、線形パラメータ（横・長手方向の支持ばねの線形ばね定数の増大）によって、蛇行動線形臨界速度が増大し、その増大とともにホップ分岐は超臨界ホップ分岐から亜臨界ホップ分岐に変化していく傾向があると指摘された。図 1.5 はその変化を示している。(a) から (b) に変化したときに、線形臨界速度は大幅に上がったことに対して、超臨界ホップ分岐は亜臨界ホップ分岐に変化した。したがって、線形パラメータによる非線形特性への影響が見られた。また、高速鉄道において、亜臨界ホップ分岐特性を持つ傾向が予測される。亜臨界ホップ分岐が鉄道車両の安定性を非常に妨害することは以上の背景から分かる。したがって、本研究は亜臨界ホップ分岐に注目し、その近傍の挙動を明らかにする。

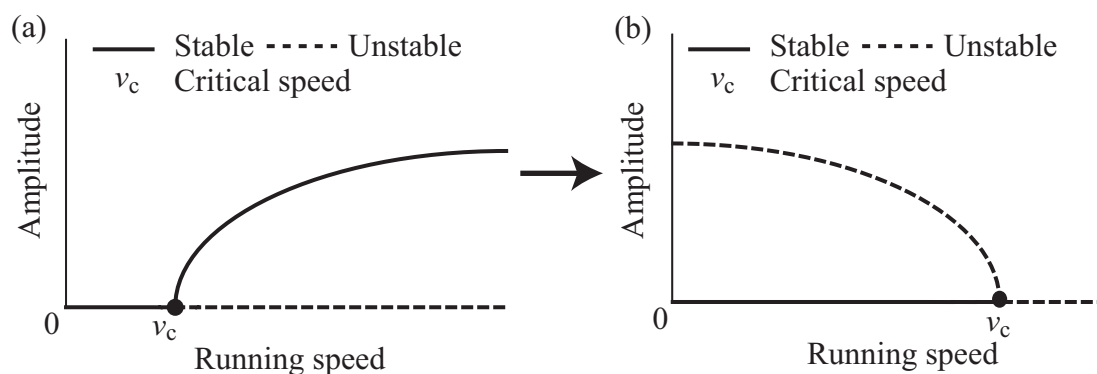


図 1.5: Variation of linear critical speed and types of Hopf bifurcation due to vehicle parameters. (a) Subcritical Hopf bifurcation, (b) supercritical Hopf bifurcation.

### 1.2.3 5次非線形成分によるヒステリシス現象

亜臨界ホップ分岐において、蛇行動の線形臨界速度の近傍で挙動を解析するには、蛇行動が発生するときの安定状態の定常振幅を明らかにする必要がある。しかし、3次非線形だけを考慮に入れた際に、図 1.4(a) に示したように、不安定な定常振幅よ

り大きく安定な定常振幅がないため、蛇行動が発生すると台車振幅は無限大に発散することになる。ここで、不安定な定常振幅より大きく安定な定常振幅の解が存在するか否かを明らかにするためには3次非線形成分より高次の非線形成分の考慮が必要である。現実的なシステムに5次非線形特性が存在することは実験計測によって証明されている [46] ため、鉄道システムにも5次非線形成分が大きな効果を果たしていると考えられる。

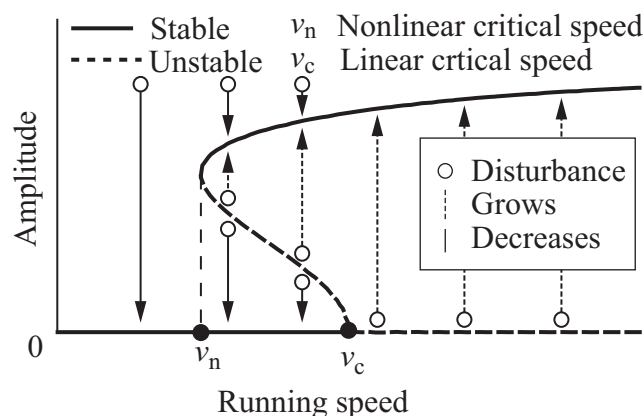


図 1.6: Subcritical Hopf bifurcation diagram considering the effects of cubic and quintic nonlinearities [39].

最近の研究ではその安定な定常振幅を研究するために、3次非線形より高いべきの5次非線形成分を考慮に入れた [39]。そのシミュレーションの結果を図 1.6 に示し、横軸は走行速度、縦軸は台車横変位を表す。図に不安定な定常振幅より大きな安定な定常振幅の存在が確認できたことから、その安定な定常振幅は5次非線形成分によって生じることが分かった。図に示した通り、3次非線形による生じた不安定な定常振幅のブランチは5次非線形性による生じた安定な定常振幅のブランチとある走行速度で一致し、線形臨界速度以下のこの走行速度で2つのブランチは消滅する。この現象はサドルノード分岐である。この分岐によって、線形臨界速度以下の速度範囲にはもう1つの臨界速度、いわゆる非線形臨界速度が存在する。この速度以下では外乱の大きさによらず蛇行動が発生しない。また、非線形臨界速度から線形臨界速度の速度範囲において、自明解による安定なゼロ振幅と非自明解による安定な定常振幅（安定なりミットサイクルとも呼ばれる）、そして非自明解による不安定な定常振幅（不安定なりミットサイクルとも呼ばれる）が同時に存在することが示された。これによって、鉄道車両は2つの臨界速度範囲内のある速度で走行するときに、ゼロ振幅で走行する状態と大振幅（蛇行動定常振幅）で走行する状態

の2つの状態を持つ。どの状態で走行するには初期条件で決められる。このような特性により、加速して非線形臨界速度から線形臨界速度の速度範囲を通過したときと、減速して通過したときの定常振幅の変化するルートが異なる。この現象は一種のヒステリシス現象である [44,45]。ただし、ほかのシステムと違い、鉄道システムにおける蛇行動ヒステリシス現象は3次と5次非線形特性によって生じたものである。本研究は非線形臨界速度から線形臨界速度までの範囲をヒステリシス範囲と呼ぶ。

5次非線形まで考慮に入れた場合は3次非線形による分岐図と同じように、非線形臨界速度以上の速度で走行する時、外乱による運転中の突発的な蛇行動の発生が危険である。したがって、それぞれの走行速度の時に耐えられる外乱最大値（以後は外乱に対するロバスト性と呼ぶ）を決める不安定な定常振幅と外乱が最大値を超えて蛇行動が起きた時の定常振幅、そして外乱に対して絶対に安定な速度境界である非線形臨界速度の特定は鉄道車両の更なる高速化に必要不可欠である。

#### 1.2.4 先行研究と問題点

蛇行動の線形臨界速度近傍の挙動を明らかにするため、数多くの研究 [34,47-55] ではシミュレーションの手法を用いて、線形臨界速度から生じる分岐曲線を求めている。これらのシミュレーションはそれぞれのモデルに対して行い、異なる非線形成分を考慮してある。しかし、これらの非線形成分は現実現象に如何なる効果を果たしているかを明らかにするため、シミュレーションだけではなく、そのモデルを現実化して実験検証することが重要である。

Chi [35] は実車実験で3次非線形によるホップ分岐を観測し、パラメータスタディを行い、車両パラメータがホップ分岐に与える影響について検討した。ほかにもホップ分岐に注目した実験解析 [56,57] が見られるが、これらの研究は実験結果に対して理論解析が行われていない。Yabuno ら [38] は小型軌条輪実験で3次非線形による亜臨界と超臨界ホップ分岐について測定し、提案した3次非線形モデル運動方程式に対して、中心多様体理論を用いて解析を行った。実験結果との一致を明らかにした。しかし、この実験はホップ分岐の種類に注目し、一番危険である亜臨界ホップ分岐に注目して5次非線形までの解析は行われていなかった。また、提案された一輪軸台車モデルにある非線形成分は仮定であり、これらの非線形成分に対する物理的な考察は行われていない。

最近の研究では、Yamanaga ら [58,59] は実車実験で亜臨界ホップ分岐のホップ分岐点近傍のすべての定常振幅を測定した。振幅の非自明な解による安定な定常振幅

と不安定な定常振幅がつながっていることは観測でき、サドルノード分岐は鉄道システムに存在することが実験的に証明された。また、彼らはヒステリシス範囲内の蛇行動現象に注目して、台車に外乱を与えることによって台車をゼロ振幅に安定させる手法を提案した。台車の振動と異なる位相差を持つ外乱がそれぞれ試され、それぞれの位相差に対して、蛇行動が安定するかどうかについて、比較実験を行い、効果を評価した。しかし、実験モデルに対する理論解析は行われていない。また、実車実験においては、高いコストと車両パラメータ変更が困難であるといった問題点がある。

これまでの研究では蛇行動の非線形特性に関する研究はシミュレーションと実車実験による解析が主体である。さらに5次非線形まで考慮した研究は極めて少なく、シミュレーション結果や観測実験データの比較検討を伴った理論解析は目下のところ行われていない。5次非線形現象の根本的な特性を捕らえるためには、蛇行動ヒステリシス特性が特徴づけられる標準形を求める理論手法の提案が必要である。また、実験手法において、実車実験と比較して、パラメータの設定自由度が大きいかつ簡便な実験手法が望まれる。

### 1.3 本論文の目的と構成

本研究は鉄道車両5次非線形特性によるヒステリシス現象に注目して、低コストかつ簡単な実験的な測定手法を提案する。提案した実験手法で蛇行動ヒステリシス現象を測定する。一輪軸台車モデルに対する先行研究 [38] で提案された非線形モデルの非線形成分の物理的な意味を明らかにし、妥当性を理論的に証明する。次に、鉄道システムにおけるヒステリシス現象を解析できる理論手法を提案する。その提案手法を用いて、一輪軸台車モデルシステムに対して解析し、非線形成分を実験的に同定してヒステリシス曲線を理論的に求める。また、提案した理論手法を用いて、蛇行動線形特性と非線形特性に対して台車パラメータスタディを行い、線形パラメータによる蛇行動ヒステリシス特性への影響について理論的に解析し、その結果を提案した実験手法で検証する。さらに、解析結果を用いて線形特性と非線形特性に良い影響を与える車両の設計手法を示す。線形パラメータの適切な設定により、線形臨界速度があがるとともに、ヒステリシス範囲内の外乱に対するロバスト性が向上できることを明らかにする。

第2章では、本研究で提案した軌条輪装置と小型化（実車より1/10スケール）一輪軸台車で蛇行動ヒステリシス現象を測定する手法を紹介する。ACモータによって回転する軌条輪の上に一輪軸台車を乗せることによって、台車の直線走行を再現し



た。走行中の横方向とヨー方向の定常振幅は非接触位置変位計と角度変位計によって計測し、アナログ信号としてPCに出力される。台車を加速するときと減速するときの安定な定常振幅を測定することにより、5次非線形特性による安定なリミットサイクルを測定した。また、電磁ブレーキ装置を用いて台車の振動を止め、いくつかの走行速度の時に異なる横外乱を与える。本研究はこの実験装置で外乱を与え、台車の安定性を観測することによって、3次非線形特性による不安定なリミットサイクルを測定した。これらの実験手法を用いて、分岐点の近傍にあるすべての定常振幅を測定し、重臨界ホップ分岐とサドルノードホ分岐による台車蛇行動のヒステリシス現象を測定した。

第3章では、鉄道車両を2自由度を持つ一輪軸台車モデルに考え、鉄道システムにおける非線形成分を物理的に示し、弾性接触論とクリープ力理論で横方向とヨー方向に関連した各べきの非線形項の存在を明らかにした。よって、一輪軸台車の5次非線形を考慮に入れた運動方程式が導出された。また、台車運動方程式を線形化して、蛇行動振動に関する根跡図を求め、台車システムの固有値を解析し、線形特性による蛇行動の発生原因を示した。理論的に線形臨界速度を求めることによって線形クリープ力の係数と線形臨界速度の関係が求められ、線形クリープ力の係数を実験で同定できた。

第4章では、蛇行動ヒステリシス現象に対して、2つの理論解析手法を提案した。1つ目は中心多様体理論を用いたアプローチで、2つ目は非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開アプローチである。中心多様体理論を用いたアプローチでは横方向とヨー方向に関する3次と5次非線形項を考慮した一輪軸台車モデルの運動方程式を低次元化し、蛇行動のヒステリシス特性を特徴標づける標準系を求めた。また、本研究は実験で測定した4つの速度の時の定常振幅を使って標準形の非線形係数を同定する方法を提案した。この同定手法によって、理論的に得られた標準形の非線形係数が明らかになった。これにより、理論的な重臨界ホップ分岐の分岐図が求められた。実験結果と比較すると蛇行動の安定な定常振幅曲線はよく一致していることが分かった。2つ目の提案手法の非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開アプローチでは、2つの非線形項ですべての非線形項を代表する手法を提案した。摂動法と多時間尺度法により、線形、3次非線形、5次非線形に関するそれぞれの振幅の変化を表す方程式が求まった。鉄道システムが持つ非自己随伴特性に注目し、振幅の変化を表す非線形方程式に対してモード展開を行い、可解条件を求め、蛇行動ヒステリシス特性を特徴づけた標準形を導出した。この提案手法により、最初の方程式にシステムの非線形特性を完全に記述できる2つの非線形項の係数が実験的に同定できたため、線形パラメータによるヒステリシス特徴への影響を明らかにした。

第5章では、長手方向の支持ばね定数、台車質量、車輪勾配、車輪半径、レール



幅、長手方向のばねの支持距離といった線形パラメータによる蛇行動線形臨界速度への影響及びヒステリシス特徴への影響を第4章で提案した理論手法で解析し、パラメータスタディを行った。解析結果を用いて、新幹線と在来線のパラメータによる線形臨界速度への影響について評価を行った。また、蛇行動線形臨界速度があがり、外乱に対するロバスト性が向上するようなより良い線形特性と非線形特性を持つ鉄道車両の設計手法について考察した。

第6章では、長手方向の支持ばね定数が台車線形及び非線形特性に与える影響について、実験検証を行い、第5章で提案したパラメータスタディ手法を検証した。

第7章では、本研究の結論について記述した。

## 第2章 軌条輪実験装置と蛇行動ヒステリシス現象の測定

### 2.1 緒言

軌条輪装置は新幹線の走行特性を測定するために開発されて以来、鉄道車両の線形特性の測定しか応用されてこなかった装置である [26, 60–62]。図 2.1 は軌条輪を用いた実車実験である。最近、軌条輪は蛇行動の 3 次非線形特性の測定に応用され、小型化による省スペースかつ低コストの実験ができるようになった [38]。また Wagner らの研究により簡単な一輪軸台車モデルでも 5 次非線形特徴を捉えることができることが指摘された [56, 63, 65]。そこで、本研究は横方向とヨー方向の 2 つ自由度を持つ 1/10 スケール一輪軸台車と小型軌条輪装置を用いた蛇行動のヒステリシス現象を測定する手法を提案した。



図 2.1: Vehicle test on a roller rig [62].

## 2.2 実験装置

本研究で用いた実験装置の写真およびモデルは図 2.2 および図 2.3 に示す。モータによって回転する軌条輪上に横方向とヨーイング方向の二自由度を持つ一輪軸台車を乗せることによって、鉄道車両の直線走行を模擬した。台車は走行方向に長手方向の支持ばねがつけられている。これは台車に剛性を与えるため、鉄道車両の空気ばねを模擬している。軌条輪にはモータ (三木プーリ、SEM-400B) とエンコーダ (富士計測器製作所、PG-10800、分解能: 10800 パルス) が取り付けられている。エンコーダから出力されたパルスを送り込み、速度メータ (オムロン、K3M R-NB1A-B2) に取り込み、車輪の走行速度に変換し表示させることにより、一輪軸台車の現時点での走行速度を確認しながら任意の速度を与えることができる。

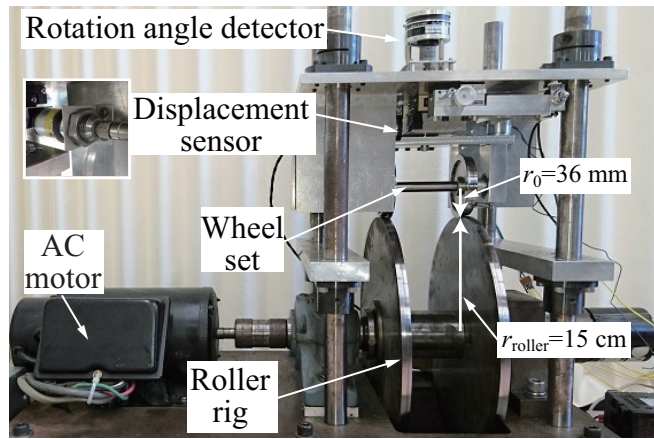


図 2.2: Roller rig and wheel set devices [66].

一輪軸台車はスライドベアリングとラジアルベアリングで支持することによって横方向とヨーイング方向に自由度をもっている。その変位量はそれぞれ電流非接触変位計 (EMIC、503-F 型、測定分解能:  $5 \mu\text{m}$ )、角度変位計 (ミネベア、DM-40A、測定分解能: 無限小) により計測することができる。測定したデータはアナログ信号として計測され FFT し、もしくは PC へ取り込まれる。これによって、台車の定常振幅と周波数成分を計測できる。

本研究で用いた電磁ブレーキは図 2.4 に示したように、変位を与えるダイヤルゲージ、振動を止める電磁クラッチブレーキによって構成される。電磁クラッチブレーキに電流を流すことで台車を固定する。この時にダイヤルゲージを用いて、台車を横に移動させる。電磁クラッチブレーキの電流を止めることによって、台車に一定な

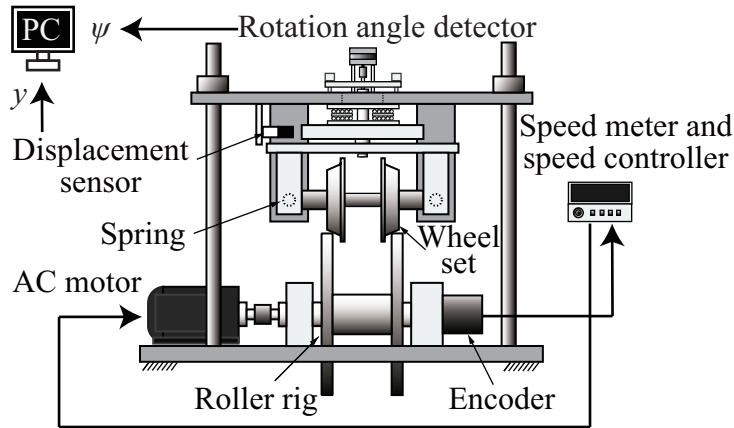


図 2.3: Model of devices [66].

横変位を与える。これは台車に与える変位を外乱に相当し、それぞれの大きさの外乱を与えた後の台車の安定性を観測することにより、不安定な定常振幅を予測する。

表 2.1 は実験装置の標準としたパラメータを示している。 $m$ 、 $I$ 、 $\gamma_0$ 、 $r_0$ 、 $d_0$ 、 $d_1$ 、 $k_x$ 、 $l$ 、 $l_0$ 、 $r_{roller}$  はそれぞれ台車質量、台車ヨー方向の重心周りの慣性モーメント、円錐面を持つ車輪踏面の勾配、車輪半径、レール幅の半分、ばね支持距離の半分、長手方向の支持ばね定数、台車が中心位置にいるときの長手支持ばねの長さ、長手方向の支持ばねの元の長さ、軌条輪の半径を示す。また、 $\omega_y$  と  $\omega_\psi$  は台車とレールが非接触状態の横方向とヨー方向の固有周波数である。本実験で用いた一輪軸台車はスライドベアリングとラジアルベアリングによって横とヨー方向に拘束されているため、台車質量  $m$  は直接にレール（軌条輪）にかけていないため、質量は慣性モーメント  $I$ 、固有周波数  $\omega_y$  と  $\omega_\psi$  にしか影響を与えていない。車輪とレールの接触力は台車が固定された時の上からの押し付け力であり、台車の変位によって変化する（実車の場合、輪軸のローリング角度によって、左右車輪とレールの接触力も変化している）。また、蛇行動速度は車両荷重によって変化することは先行研究から知られている [35]。荷重によってクリープ力は大きくなるため [16]、蛇行動線形臨界速度は小さくなり、蛇行動が起きやすくなる。本研究は車輪とレールの接触力について計測しない理由は、線形臨界速度の近傍で非線形特性によって蛇行動挙動はどうなることに注目したいためである。よって、荷重による線形臨界速度の変化については解析しない。また、長手方向（一輪軸台車の走行方向）には線形ばねが伸ばしてつけている。これより、横方向に線形のばね効果が生じる。よって、一輪軸台車の横、ヨー方向の固有周波数が決められる。

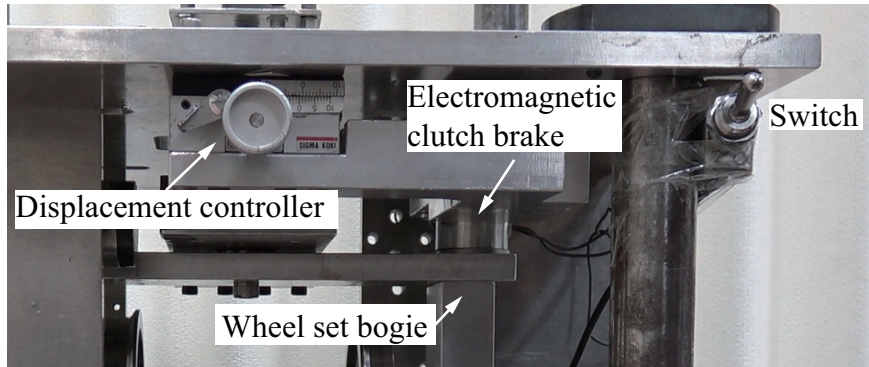


図 2.4: Electromagnetic brake device.

表 2.1: Parameters of the experimental setup

Description	Symbol	Value	Unit
Mass of the wheel set	$m$	2.175	kg
Moment of inertia of wheel set	$I$	0.0043	kg·m <sup>2</sup>
Natural frequency of lateral direction	$\omega_y$	8.754	rad/s
Natural frequency of yaw angle	$\omega_\psi$	25.91	rad/s
Wheel tread angle	$\gamma_0$	1/25	—
Centered wheel rolling radius	$r_0$	0.036	m
Half-track gauge	$d_0$	0.0485	m
Half-gap of stiffness	$d_1$	0.085	m
$x$ direction stiffness	$k_x$	200	N/m
Spring length of equilibrium state	$l$	0.06	m
Natural spring length	$l_0$	0.035	m
Centered roller rig rolling radius	$r_{roller}$	0.15	m

## 2.3 測定対象と測定手法

台車の走行速度を変えながらそれぞれ速度時の横方向およびヨー方向の振動の時刻歴波形を 20 秒間とる。その 20 秒間の波形を FFT でパワースペクトルに変換し、各周波数成分による振動の振幅を観測ながら測定していく。安定な定常振幅は安定状態の波形振幅である。本研究では大幅振動が発生するため、長い実験時間では実験装置特性が変化する可能性があるため、20 秒だけの時刻歴波形をとることにした。また、蛇行動発生時に台車振動の波形が軌条輪より強制振動周波数と蛇行動周波数 2 つの周波数が含まり、各速度の定常状態時のパワースペクトルから見る蛇行動周波数成分の大きさが一定にならない。その一方、台車振幅が安定している時の

応答振幅の最大値が比較的に安定になっているため（2パーセント以内の変動）、この最大振幅値を3回測定して、その平均値を台車の定常状態の定常振幅として記録した。

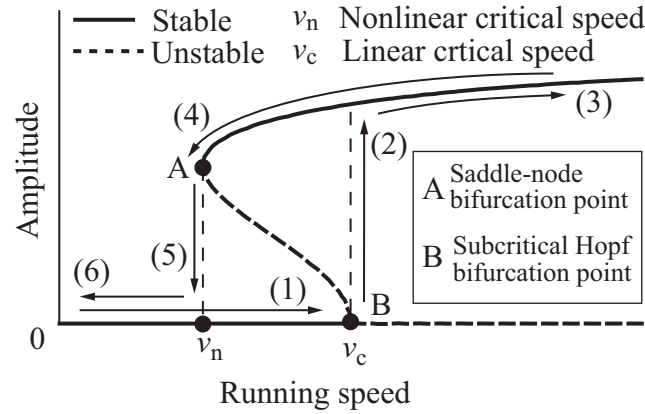


図 2.5: Bifurcation diagram obtained by numerical simulation for the model considering the effects of cubic and quintic nonlinearities [56]. The numbered arrows correspond to those in Fig. 2.7.

測定対象と測定手法は図 2.5 を用いて説明する。蛇行動線形臨界速度、すなわち亜臨界ホップ分岐点 B を測定するため、人為的に外乱を与えずに（外乱は軌条輪や車輪表面の不整などが微小外乱として与えられる）、図中矢印 (1) のように 1m/s の台車走行速度から蛇行動（本研究では一輪軸台車の振幅および回転角度が微小な外乱以上に激しく成長する現象をさす、図中の矢印 (2) はこの現象を示す）が生じる時まで速度を上げる。続いて、線形臨界速度近傍の挙動を測定するために、図中矢印 (3) のように走行速度を蛇行動臨界速度以上にあげ、台車の定常定常振幅を記録する。次に、図中矢印 (4) のように台車速度をゆっくり下げ、ここでは安定な定常振幅が変化するかどうかによって、5 次非線形成分による安定なリミットサイクルの存在を観測する。また、線形臨界速度以下に下げて、蛇行動が続ければ、蛇行動ヒステリシス現象があると判断できる。続いて減速していくときに、蛇行動がある速度で消えたら（図中矢印 (5) のように）、サドルノード分岐の存在が証明できる。この時の走行速度を非線形臨界速度として記録する。最後は矢印 (6) のように台車走行速度を 1m/s まで落とす。以上の実験ステップが終わったら、実験中実験装置の特性が大きく変わっていないかどうかを確認するため、台車走行速度をも一回蛇行動が発生する時までゆっくりあげ、1 回目の蛇行動線形臨界速度と比較し、変化が 5 パーセント以内の場合のみ測定したデータを採用する。



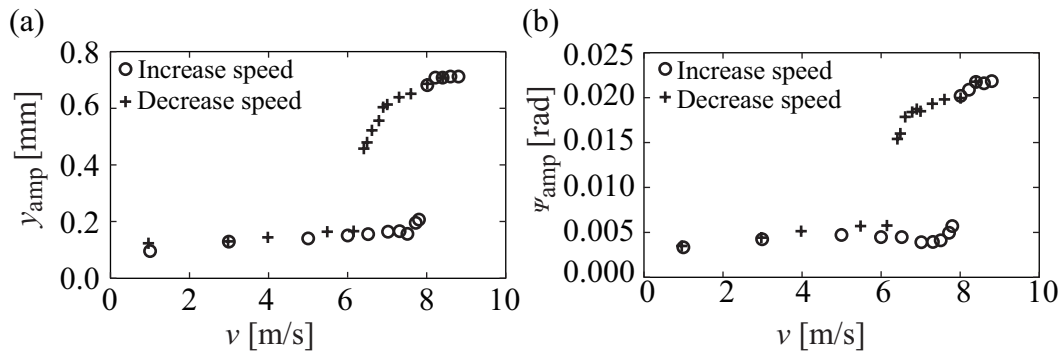


図 2.6: Running and response amplitudes of single wheel set. (a) Lateral displacement, (b) yaw angular.

## 2.4 実験結果と解析

### 2.4.1 安定な定常振幅

台車速度を上げる時と下げる時に各速度に対して記録した横方向およびヨーイング方向の安定な定常振幅は図 2.18(a) 及び図 2.18(b) に示す。横軸は一輪軸台車の走行速度  $v$ [m/s] を表し、縦軸はそれぞれ横方向の変位  $y$ [mm] およびヨー方向の角度  $\psi$ [rad]、すなわち一輪軸台車の 2つの自由度の応答振幅（本研究では最大応答振幅）を示す。丸のマークは台車の速度を上げるステップで記録した安定な定常振幅を示し、十字架のマークは台車の速度を下げるステップで記録したデータを示す。横方向とヨー方向の安定な振幅の図は同じような形であるため、本研究は横方向だけに注目する。

図 2.7 は実験で観測した一輪軸台車の横方向の定常振幅を示す。数値でマークした矢印は図 2.5 に示した観測順番である。矢印 (1) は蛇行動線形臨界速度を観測するため、台車走行速度をゆっくりあげる過程である。走行速度が 8 m/s になったときに、矢印 (2) のように台車振幅は一気に成長し、一定な定常振幅となった。この時の振幅変化は図 2.8(a) に示した通り、横軸の時間とともに波形の振幅が一気に成長し、最終的に一定になる。したがって、8 m/s (29 km/h) は本実験における線形臨界速度である。定常振幅の急激な大幅増大は亜臨界ホップ分岐による振幅ジャンプを示し、本実験現象は亜臨界ホップ分岐を示していることが分かる。

次に図 2.7 中の矢印 (3) から矢印 (4) の順番で速度を調整したとき、プロットのように、定常振幅は台車走行速度の増大・減少とともに大きく・小さくなる。よっ

て、5次非線形特性が本実験の一輪軸台車システムに安定なリミットサイクルを作り出す効果を果たしていることがわかる。また線形臨界速度の8 m/sより小さな速度になっても蛇行動が続いていくことから、蛇行動ヒステリシス現象は本実験より観測できたことが分かる。走行速度を続いて下げて、6.4 m/sより小さくなった時に、蛇行動が収まり、定常振幅は矢印(5)のように一気に下がった。この時の時刻歴波形は図2.8(b)に示している。この現象はサドルノード分岐現象を示し、非線形臨界速度が存在することを示した。本実験は蛇行動が収まる直前の速度6.4 m/s(23 km/h)を非線形臨界速度と定義する。また、図2.8(b)の時刻歴波形は2つの振動成分を有していることは分かる。その中、高次の成分は軌条輪の不整による外乱の振動成分を示し、低次の成分は蛇行動の振動成分を示している。これは蛇行動が収束していく中、振動は蛇行動の振幅の軌道に乗ろうとしているが、減衰力は蛇行動が成長する力より上回るため、蛇行動モードが現れながら台車の全体的振動がゆっくり減少していく現象である。

次は図2.7の中の(a)から(c)まで1.0 m/s、7.3 m/s、8.8 m/sの3つの加速段階で記録したプロットと、(d)7.4 m/sの1つの減速段階で記録したプロットの時刻歴波形について検討し、そのパワースペクトル、位相図、ポアンカレ写像、そしてリアプノフ指数を用いて蛇行動の挙動を解析していく。

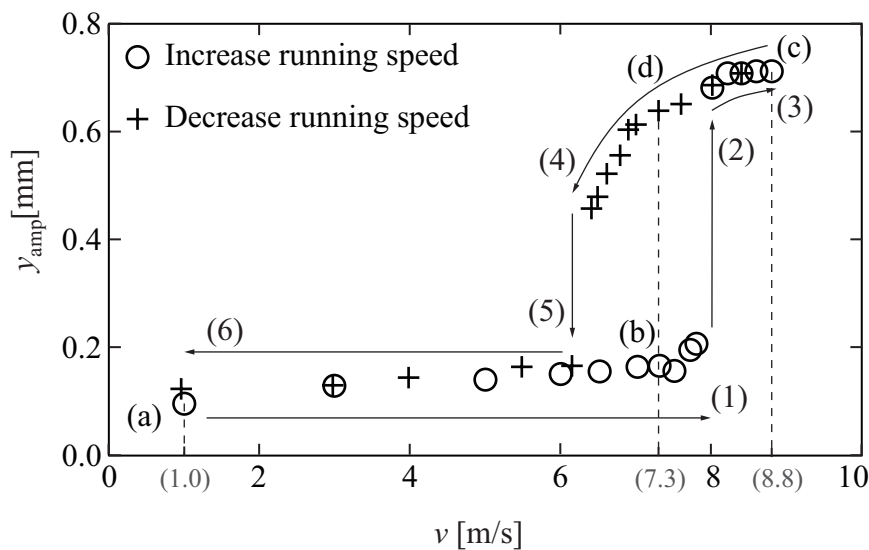


図 2.7: Experimentally observed steady-state amplitude of lateral displacement [66]. The numbered arrows correspond to those in Fig. 2.5. The points labeled (a), (b), (c), and (d) correspond to the panels of Figs. 2.9-2.12, 2.14.



4つの速度の時に記録した20 sの時刻歴波形は図2.9に示してある。横軸は時間  $t$  [s] を示し、縦軸は台車の横の応答振幅  $y$  [mm] を示す。速度 1.00 m/s の時の20秒間の時刻歴波形は図2.9(a)に示す。ここで、定常振幅はゼロでない原因は軌条輪の表面に不整があるため、それが車輪に強制振動をあたえているためである。図2.9(b)は7.3 m/sの時の時刻歴波形で、軌条輪の回転速度が大きくなるため、強制振動による波形の周波数は大きくなっていることがわかる。しかし、時刻歴波形の振幅はほぼ変わっていないため、この強制振動による外乱の大きさは変わっていないことが分かる。図2.9(a)と(c)は蛇行動が起きている時の時刻歴波形で、定常振幅は図2.9(a)と(b)より非常に大きくなっていることが分かる。また、速度が高い図2.9(c)は速度が低い図2.9(d)より振幅が大きいこともわかる。さらに、同じ速度7.3 m/sで2つな定常振幅が存在することは図2.9(b)と(d)から分かる。これは5次非線形によるヒステリシス範囲で同じ速度に2つの定常振幅があることを証明した。

次はこの4つの定常状態のパワースペクトル図2.10について説明する。横軸は周波数  $f$  [Hz] を示し、縦軸は各周波数成分の応答振幅を示す。この4つのパワースペクトル図を見ると、小さな応答振幅を持つ周波数が存在することが分かる。これはさき説明した軌条輪表面の不整による強制振動の周波数である。この成分の周波数は軌条輪の回転周波数と一致して、以下の式で決められる。

$$\omega_r = \frac{v}{2r_{roller}\pi} \approx 1.06v, \quad (2.1)$$

ただし、 $r_{roller}$  は軌条輪の直径である。周波数成分の応答振幅がほぼ同じ値であることもわかる。この軌条輪の表面不整による外乱の大きさは実験で測定した蛇行動線形臨界速度と非線形臨界速度を変化することはある（詳細はAppendix Aに記述する）が、本研究はこの外乱に影響された線形臨界速度と非線形臨界速度を基準とし、線形クリープ力係数を同定することにより、理論的に求められる線形臨界速度と非線形臨界速度と一致させる。

図2.10(c)と(d)には大きな応答振幅を持つ周波数が存在し、これは蛇行動の周波数である。時刻歴波形と同じように、図2.10(c)の振幅は図2.10(d)の振幅より大きい。これは蛇行動発生時に振幅は速度と共に変化することを示している。図2.10から求められる各周波数成分の応答振幅の和は時刻歴波形図2.9の波形の応答振幅となり、図2.7に示した本実験で記録した各速度の定常振幅の値である。

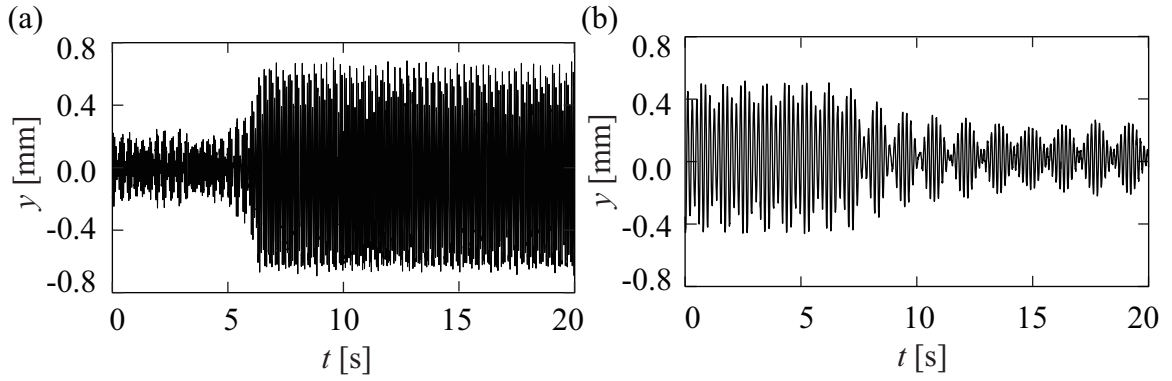


Figure 2.8: Time histories of unsteady-state amplitude of lateral displacement. (a) Increasing running speed to speed 8 m/s. (b) Decreasing running speed from speed 6.4 m/s.

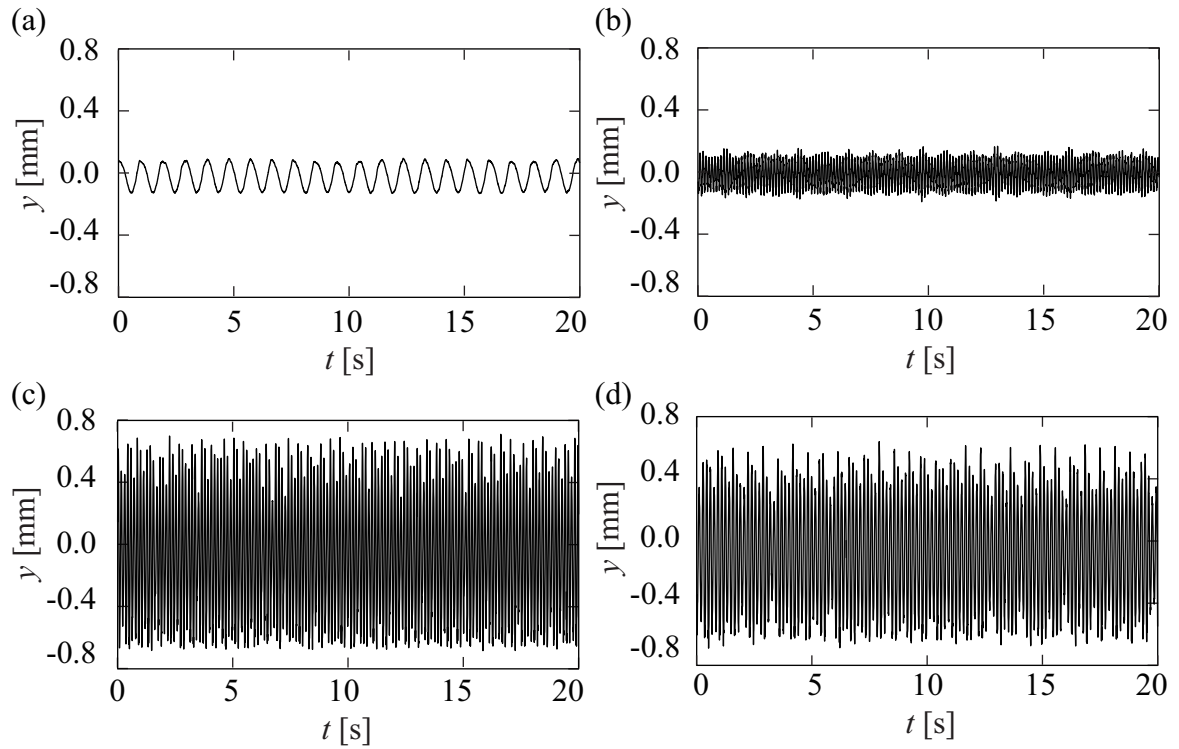


Figure 2.9: Time histories of steady-state amplitude of lateral displacement [66]. Increasing running speed: (a)  $v = 1.0$  m/s, (b)  $v = 7.3$  m/s, (c)  $v = 8.8$  m/s. Decreasing running speed: (d)  $v = 7.3$  m/s.

4つの定常振幅の位相図は2.11に示す。横軸は一輪軸台車の横変位で、縦軸は横速度である。蛇行動が起きる時の2.11(c)と(d)を見ると、振動はある軌道（蛇行動の定常振幅）に沿って軌条輪から受けた小さな外乱による振動を持ちながら回転していることが分かる。

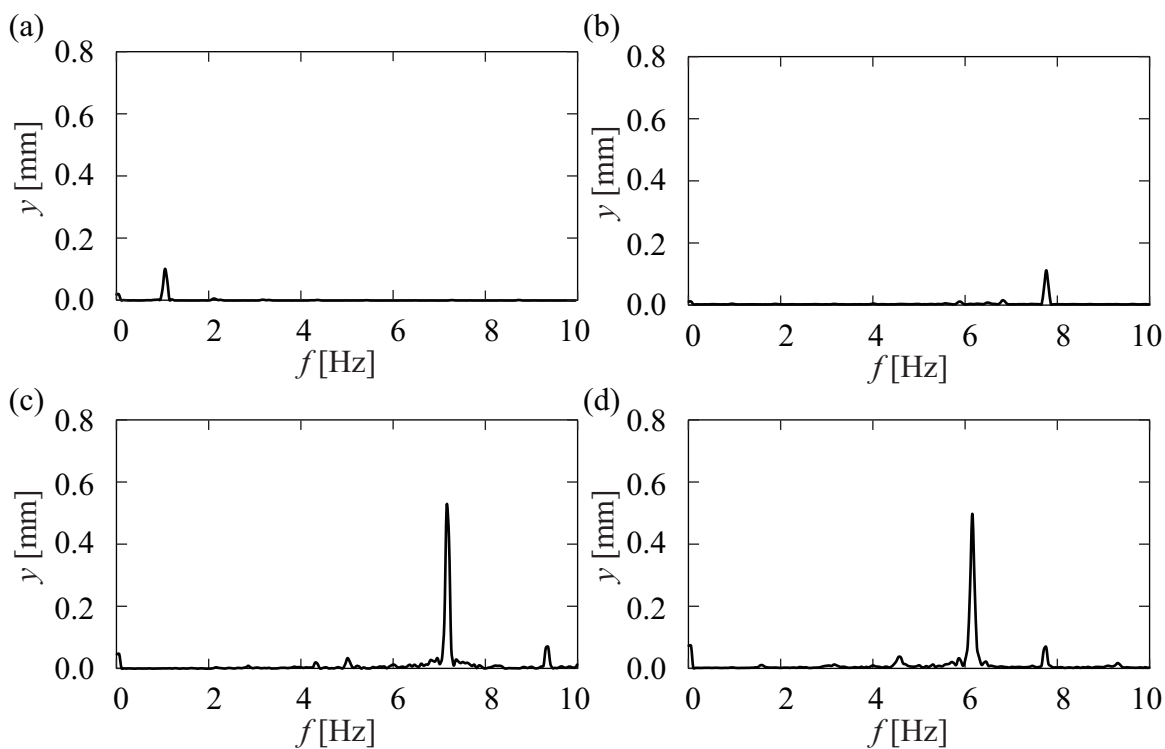


図 2.10: Power spectra of steady-state amplitude of lateral displacement [66]. Increasing running speed: (a)  $v = 1.0$  m/s, (b)  $v = 7.3$  m/s, (c)  $v = 8.8$  m/s. Decreasing running speed: (d)  $v = 7.3$  m/s.

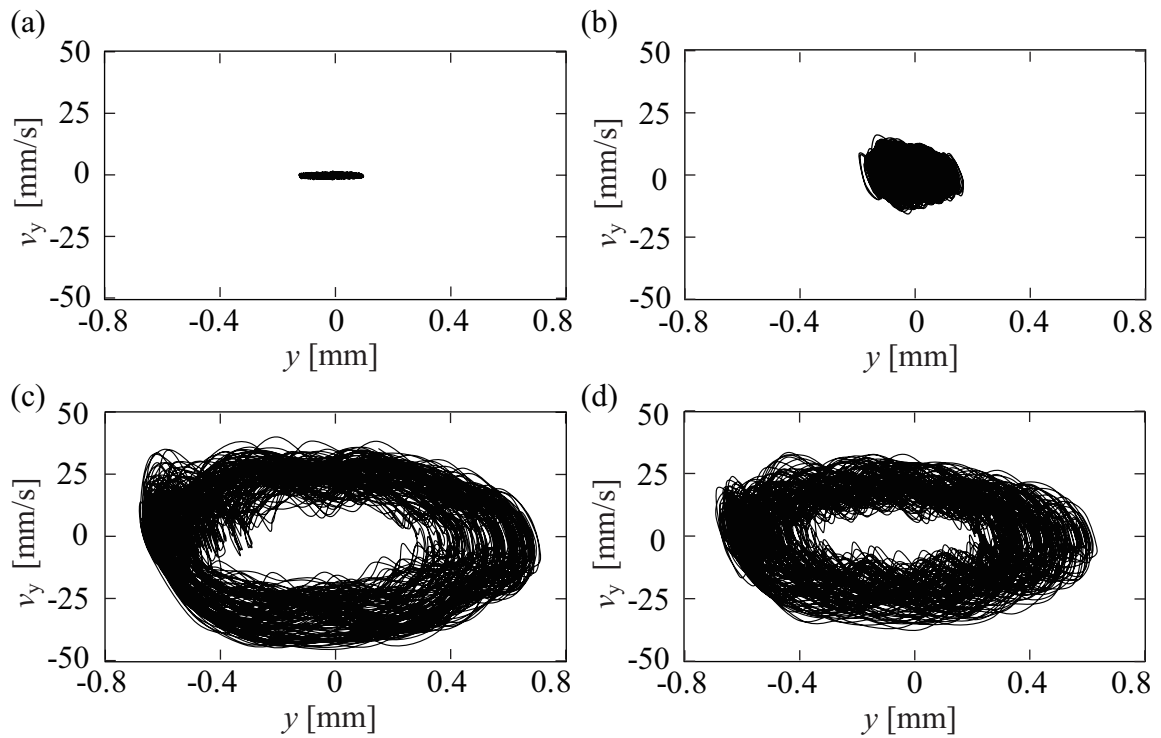


図 2.11: Phase portraits of steady-state amplitude of lateral displacement [66]. Increasing running speed: (a)  $v = 1.0$  m/s, (b)  $v = 7.3$  m/s, (c)  $v = 8.8$  m/s. Decreasing running speed: (d)  $v = 7.3$  m/s.

本実験の波形において、カオス性が存在するかどうかを明らかにするために、次はポアンカレ写像とリアプノフ指数について検討する。図 2.12(a) と (b) のポアンカレ断面は周期軌道を示し、図 2.12(c) と (d) のポアンカレ断面は準周期軌道を示している。また、図 2.13(a) と (b) では、蛇行動線形臨界速度の直前と直後の走行速度の時の定常振幅のポアンカレ断面を示している。この 2 つの断面は周期軌道から準周期軌道になることを示しており、カオスを引き起こす周期倍増分岐現象は本実験から検出されていないことを示している。さらに、図 2.14 は定常振幅の時の 20 s の時刻歴波形において  $1/3$  s ごとの 64 個の測定値の変化率によって求めたリアプノフ指数を示している。4 つの走行速度のすべてのリアプノフ指数が負であることから、本実験の振動において、カオスが存在しないことが証明された。

これで亜臨界ホップ分岐であることが示され、5 次非線形による安定な定常振幅の測定ができた。次は 3 次非線形による不安定な定常振幅の実験結果を示して、検討する。

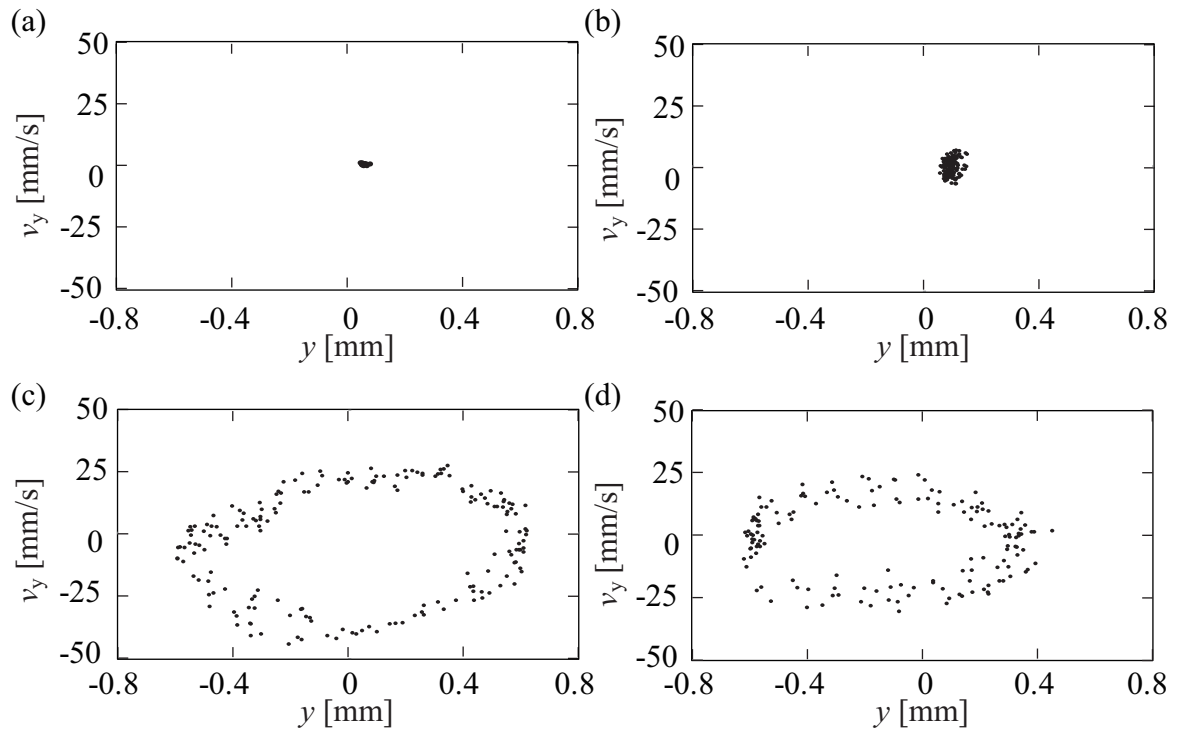


Figure 2.12: Poincaré sections of steady-state amplitude of lateral displacement [66]. Increasing running speed: (a)  $v = 1.0$  m/s, (b)  $v = 7.3$  m/s, (c)  $v = 8.8$  m/s. Decreasing running speed: (d)  $v = 7.3$  m/s.

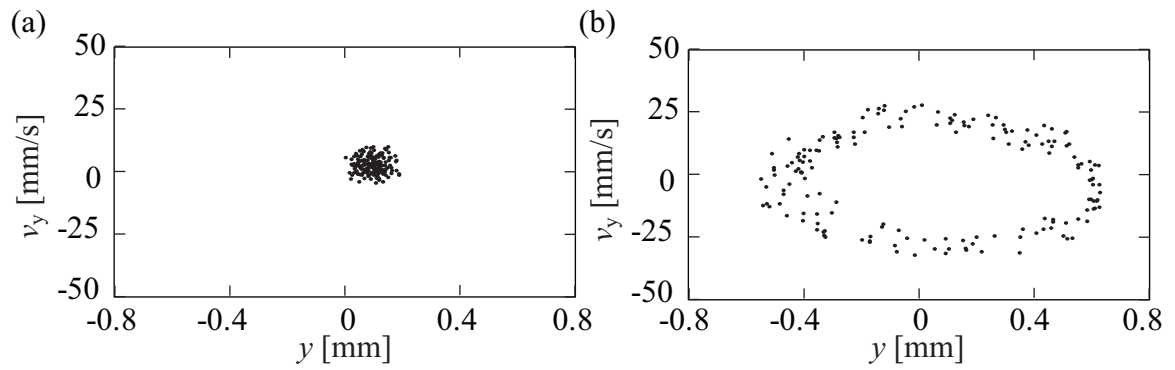


Figure 2.13: Variation of Poincaré section around the linear critical speed [66]. (a)  $v = 7.8$  m/s, (b)  $v = 8.0$  m/s.

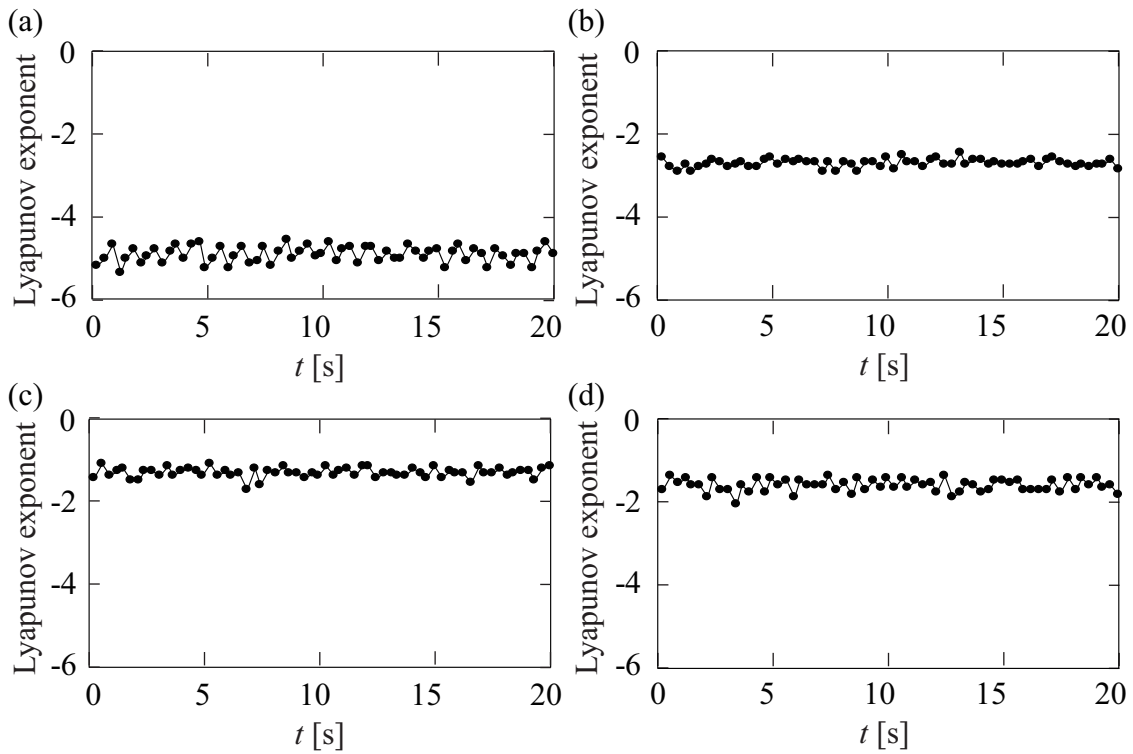


図 2.14: Lyapunov values of steady-state amplitude of lateral displacement [66]. Increasing running speed: (a)  $v = 1.0$  m/s, (b)  $v = 7.3$  m/s, (c)  $v = 8.8$  m/s. Decreasing running speed: (d)  $v = 7.3$  m/s.

## 2.4.2 不安定な定常振幅

不安定な定常振幅を測定するために、非線形臨界速度  $6.4$  m/s から線形臨界速度  $8$  m/s のヒステリシス範囲内でのそれぞれの速度に対して、いろいろな外乱を与えて、振幅が大きくなる場合と振幅が  $0$  に収束する場合の与えた変位が一番近い2つのデータをプロットする。このプロットした図のそれぞれの速度の2つのデータの変化によって、不安定な定常振幅の大きさを実験的に求める。また、その結果を用いて安定な定常振幅の測定図と比較し、サドルノード分岐の存在を検証する。

実験結果は図 2.15 に示す。横軸は台車走行速度、縦軸は横方向の定常振幅（与えた外乱は横変位であるが、不安定な定常振幅を測定するため、この外乱の与えた変位をその振幅と見なす）を示す。三角矢印とバツ矢印は与えた外乱を示し、実線は外乱を受けた後に台車振幅が収束していく場合、破線は外乱を受けた後に台車振幅

が大きくなっていく場合を示す。図 2.16 と図 2.17 はそれぞれの速度の時に記録した三角矢印とバツ矢印の場合の時刻歴波形を示す。時刻歴波形をみると、電磁ブレーキで台車を止めた時に、微小な振動は存在するが、ある横変位に止めさせることは十分果たしたことが分かる。電流を止めると、台車は電磁ブレーキによって与えられた初期条件のもとから振動し始める。これにより、横方向の不安定な定常振幅を計測する。時刻歴波形の中ではすぐに収束する・大きくなるような場合とゆっくり変化する場合が見られる。それは、不安定な定常振幅より近い外乱が与えた時に変化速度が速い、遠い時に変化速度が遅いと考えられる。また、時刻歴波形の中に 2 つの振動成分が見られることは図 2.8(b) と同じように考えられる。次は提案した実験手法で測定した安定な定常振幅と不安定な定常振幅を比較し、サドルノード分岐の存在を確認する。図 2.18 はその結果を示している。安定な定常振幅と不安定な定常振幅がつながっていることは予測できる。よって、サドルノード分岐現象は実験的に観測できた。

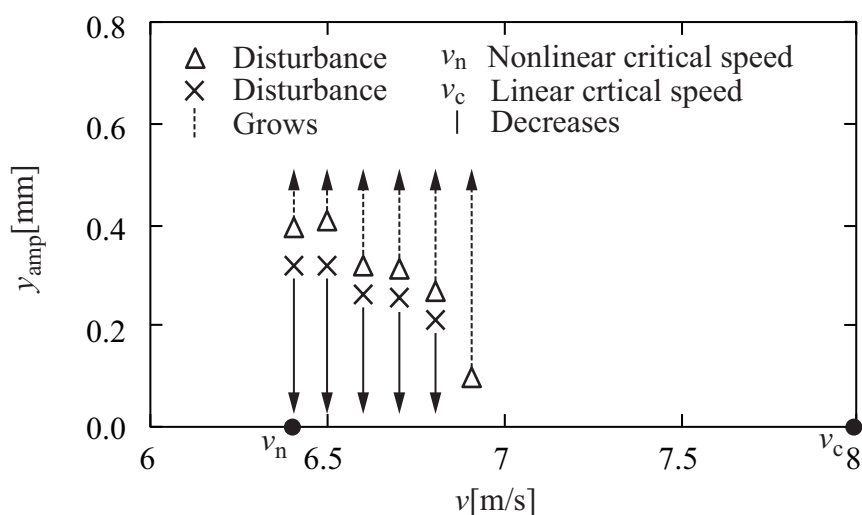


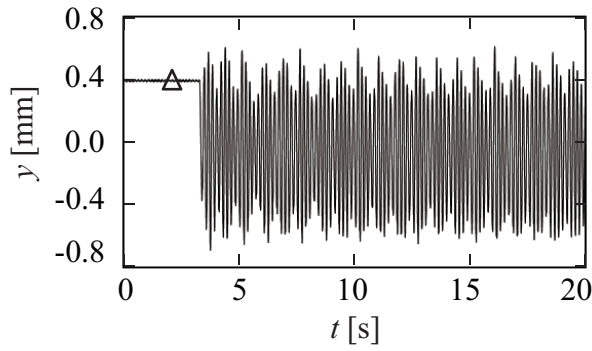
図 2.15: Experimental observation of unstable limit cycle of hunting motion.

## 2.5 結言

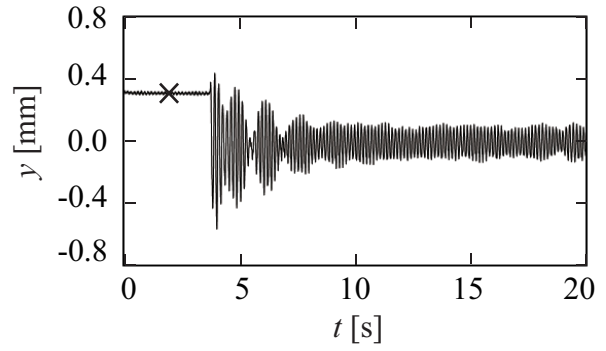
提案した軌条輪装置と一輪軸台車を用いた実験手法により、安定な定常振幅と不安定な定常振幅の観測ができた。これによって、3次非線形と5次非線形特性によっ

て生じる、亜臨界ホップ分岐とサドルノード分岐の存在が実験により明らかになり、鉄道車輪軸に発生する蛇行動のヒステリシス現象を全体的に把握することができた。鉄道の線形蛇行動特性の測定によく用いられて来た軌条輪装置は蛇行動の3次及び5次非線形特性を測定できることを明らかにした。また、小型化一輪軸台車を用いることにより、低コストかつ実験パラメータの変更が簡易な実験手法が実現できた。

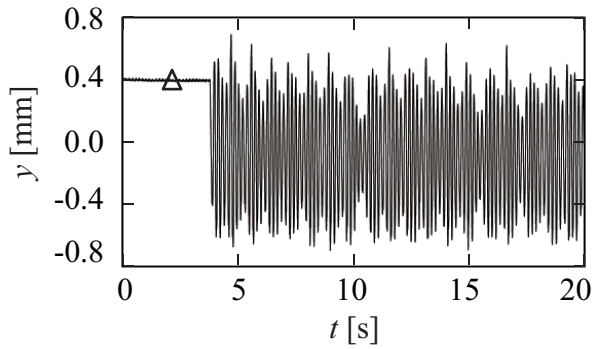




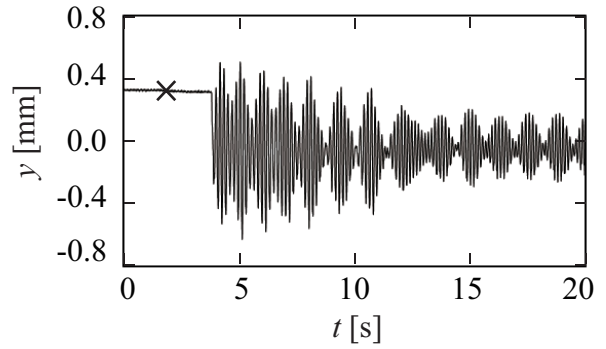
(a) Speed 6.4 m/s under a large disturbance of 0.39 mm



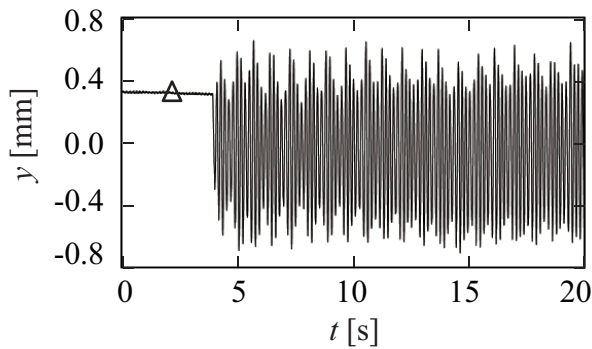
(b) Speed 6.4 m/s under a small disturbance of 0.32 mm



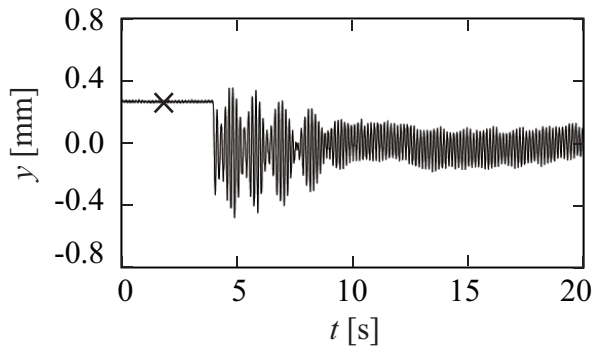
(c) Speed 6.5 m/s under a large disturbance of 0.40 mm



(d) Speed 6.5 m/s under a small disturbance of 0.32 mm

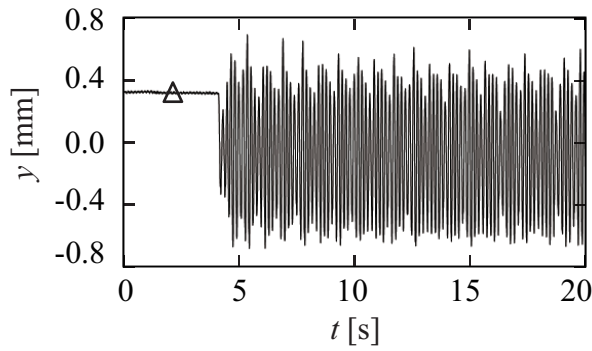


(e) Speed 6.6 m/s under a large disturbance of 0.32 mm

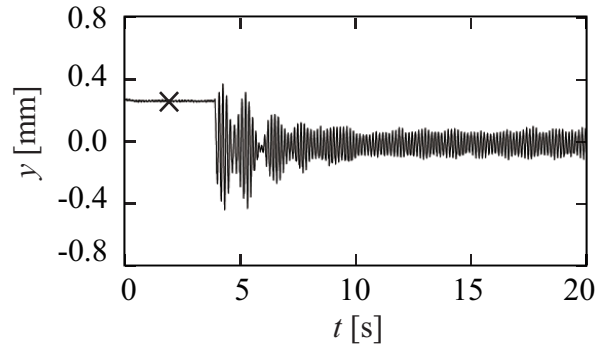


(f) Speed 6.6 m/s under a small disturbance of 0.26 mm

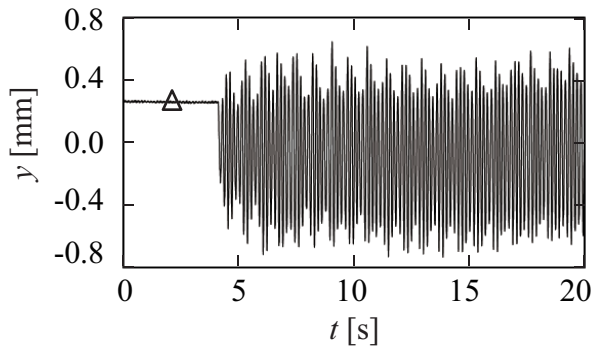
图 2.16: Time histories of different running speeds from 6.4 m/s to 6.6 m/s under a large and a small disturbance.



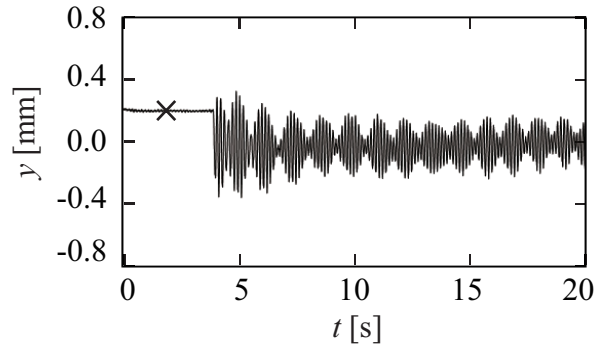
(a) Speed 6.7 m/s under a large disturbance of 0.31 mm



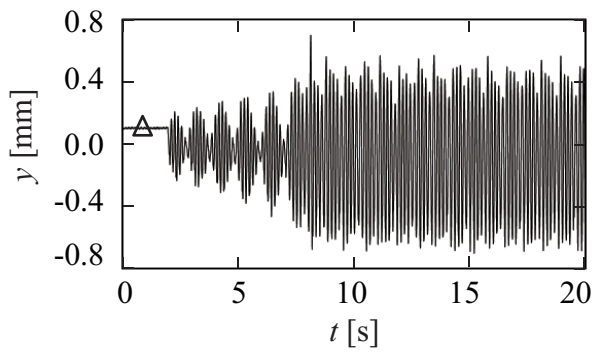
(b) Speed 6.7 m/s under a small disturbance of 0.26 mm



(c) Speed 6.8 m/s under a large disturbance of 0.26 mm



(d) Speed 6.8 m/s under a small disturbance of 0.21 mm



(e) Speed 6.9 m/s under a large disturbance of 0.10 mm

Figure 2.17: Time histories of different running speeds from 6.7 m/s to 6.9 m/s under a large and a small disturbance.

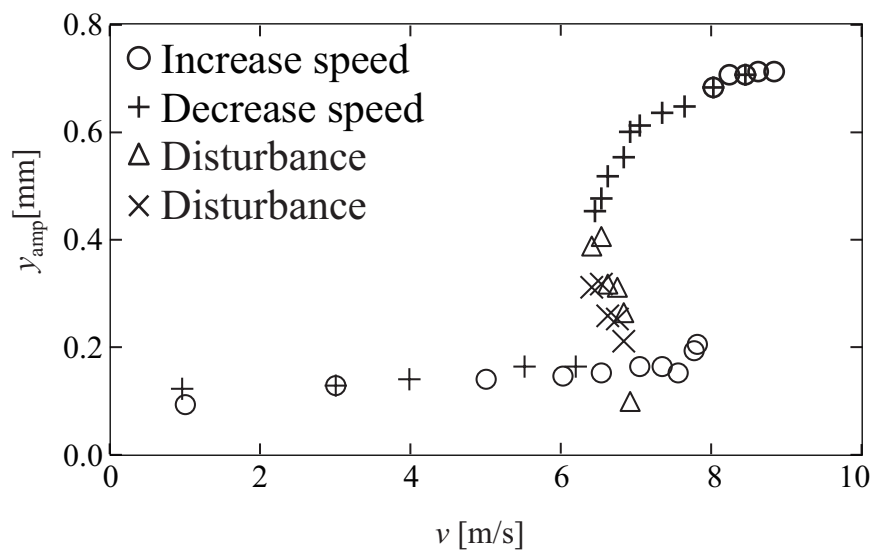


Figure 2.18: Experimentally observed subcritical Hopf bifurcation under cubic and quintic nonlinearities.

# 第3章 一輪軸台車モデルとその運動方程式の導出

## 3.1 緒言

前章の実験計測より、鉄道システムに3次非線形特性のみならず、5次非線形特性も大きな影響を与えていることが分かった。したがって、3次と5次非線形特性に対する非線形理論解析が不可欠である。この章は鉄道蛇行動の特性解析によく用いられる一輪軸台車モデルに対して、非線形特性の要因を物理的に明らかにし、非線形運動方程式を導いていく。

## 3.2 一輪軸台車モデル構造とその非線形運動方程式

本研究で用いた一輪軸台車モデルの平衡状態の時の構造図は図3.1のように示す。図3.1(a)は上から見た一輪軸台車の構造で、台車の走行方向は $x$ 座標とし、車輪軸に沿った向きの左方向を $y$ 座標とする。また、 $x$ 座標と $y$ 座標両方と垂直な向きである軌条輪から台車に向く方向を $z$ 座標とし、回転角度を $\psi$ とする。長手方向の支持ばねは左右に伸ばして付けられている。図3.1(b)は正面から見た構造図で、車輪は円錐面を持ち、踏面勾配は $\gamma_0$ で、軌条輪と接触した2つの点（実際は面接触であるが、その中心点を接触点とする）の距離は $2d_0$ である。その接触点の車輪半径は $r_0$ である。また、長手方向の支持ばねの取り付け位置の距離は $2d_1$ で示す。

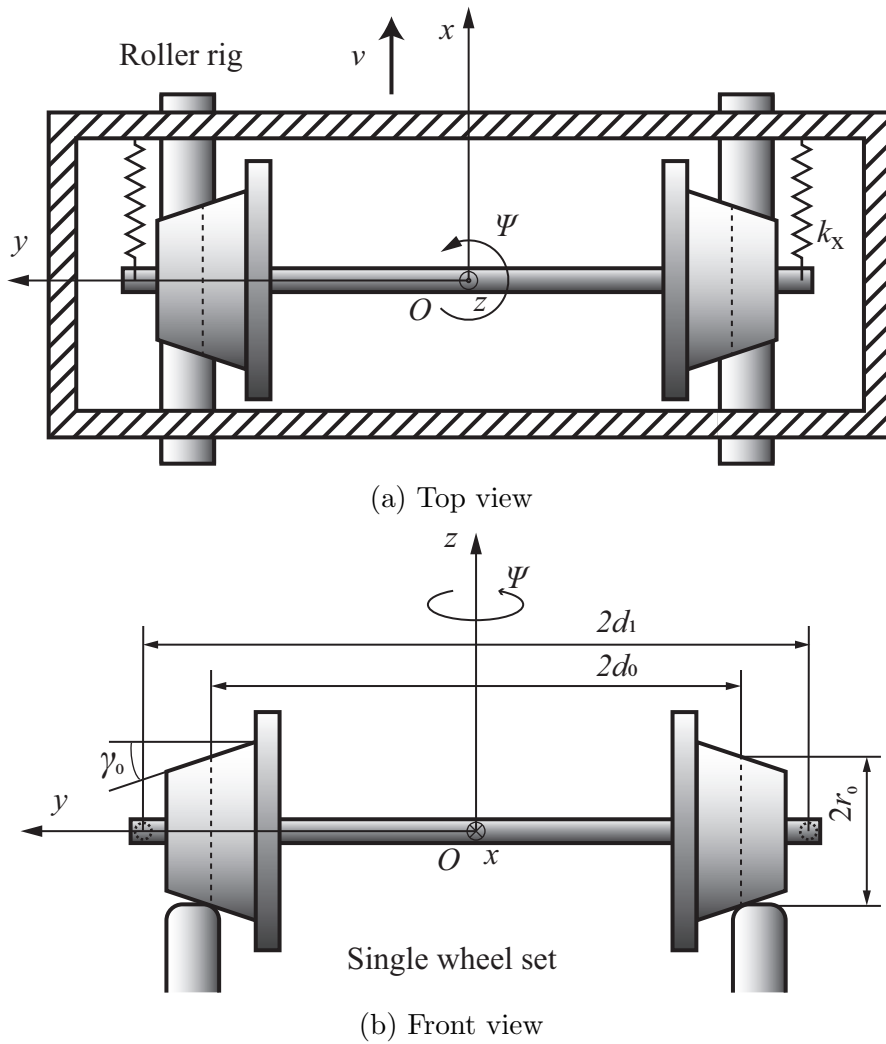


図 3.1: Configuration of the single wheel set and roller rig [66].

車輪が軌条輪の上に転がる時に横方向  $y$  とヨー方向  $\psi$  に振動し、そのメカニズムを明らかにするために、単純化した台車の動きを表す接触図を図 3.2 に示す。ここで接触面は接触点として考えている。レール幅が  $2d_0$  の上に、重心が  $G$  点である輪軸が転がる。図 3.2(a) の輪軸は中心位置にある場合、この時の左右の車輪の接触半径は  $r_0$  である。図 3.2(b) の輪軸は重心が左方向に  $y$  の変位と輪軸がヨー方向に  $\psi$  の角度を移動した場合、 $A$  と  $B$  点は左右車輪とレールの接触点である。この時の左右

の車輪の接触半径はそれぞれ  $r_L$  と  $r_R$  とし、以下の式で表す。

$$r_R = r_0 - \left( \frac{d_0 + y}{\cos \psi} - d_0 \right) \gamma_0 \approx r_0 - \gamma_0 y - \frac{1}{2} d_0 \gamma_0 \psi^2 - \frac{1}{2} \gamma_0 y \psi^2 - \frac{5}{24} d_0 \gamma_0 \psi^4 - \frac{5}{24} \gamma_0 y \psi^4 \quad (3.1)$$

$$r_L = r_0 + \left( d_0 - \frac{d_0 - y}{\cos \psi} \right) \gamma_0 \approx r_0 + \gamma_0 y - \frac{1}{2} d_0 \gamma_0 \psi^2 + \frac{1}{2} \gamma_0 y \psi^2 - \frac{5}{24} d_0 \gamma_0 \psi^4 + \frac{5}{24} \gamma_0 y \psi^4, \quad (3.2)$$

ただし、 $y$  と  $\psi$  の絶対値は1より十分に小さいと仮定する。本研究は5次非線形特性まで解析ため、5次以上の非線形項は無視される。車輪とレールの間を生じるクリープ力を計算するために、クリープ率すなわち滑り率を求める必要がある。滑り率は以下の式で定義される。

$$(\text{クリープ率}) = \frac{(\text{レールから見た接触点の移動速度} - \text{車輪から見た接触点の移動速度})}{(\text{車両走行速度})}$$

車両の走行速度  $v$  は  $x$  方向の速度であり、左右車輪接触点の線速度によって以下の式で表せる。

$$v = \frac{1}{2} (r_R \omega_w + r_L \omega_w) \cos \psi \approx r_0 \omega_w + (d_0 \gamma_0 + r_0) \left( -\frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{24} \psi^4 \right) \omega_w, \quad (3.3)$$

ただし、 $\omega_w$  は車輪軸の回転速度である。

一輪軸台車モデルの  $x$  方向と  $y$  方向のクリープ率に対して、 $x$  方向と  $y$  方向のそれぞれの相対速度を求める。図 3.3(a) はレールから見た接触点の移動速度を示し、図 3.3(b) は車輪から見た接触点の移動速度を示す。レールから見た接触点の移動速度は横速度  $\dot{y}$ 、走行速度  $v$ 、輪軸の中心による左右の回転線速度  $(d_0 + y)\dot{\psi} / \cos \psi$  によって以下の式で表せる。

$$V_{Ry} = \dot{y} + (d_0 + y)\dot{\psi} \sin \psi / \cos \psi \approx \dot{y} + (d_0 + y)\dot{\psi} \left( \psi + \frac{1}{3} \psi^3 + \frac{2}{15} \psi^5 \right) \approx \dot{y} \quad (3.4)$$

$$V_{Ly} = \dot{y} - (d_0 - y)\dot{\psi} \sin \psi / \cos \psi \approx \dot{y} - (d_0 - y)\dot{\psi} \left( \psi + \frac{1}{3} \psi^3 + \frac{2}{15} \psi^5 \right) \approx \dot{y} \quad (3.5)$$

$$V_{Rx} = v + (d_0 + y)\dot{\psi} \approx v + d_0 \dot{\psi} \quad (3.6)$$

$$V_{Lx} = v - (d_0 - y)\dot{\psi} \approx v - d_0 \dot{\psi}, \quad (3.7)$$

ただし、 $V_{Ry}$ 、 $V_{Ly}$ 、 $V_{Rx}$ 、 $V_{Lx}$ 、はそれぞれレールから見た右車輪接触点の  $y$  方向、左車輪接触点の  $y$  方向、右車輪接触点の  $x$  方向、右車輪接触点の  $x$  方向の移動速度

を示す。また、非線形特性による線形臨界速度の近傍の定常振幅を求めるときに、 $\dot{y}$  と  $\dot{\psi}$  をゼロにして定常振幅に関する方程式が得られる。この時に、非線形項の中の  $\dot{y}$  及び  $\dot{\psi}$  に関する項は他の項と比べて十分に小さなオーダーを持ち、落とされることのできるため、この  $y\dot{\psi}$ 、 $\psi\dot{\psi}$ 、 $y\psi\dot{\psi}$  の項は無視される。

車輪から見た接触点の移動速度は左右車輪の接触半径と回転速度  $\omega_W$  によって以下の式で表せる。

$$U_{Ry} = r_R \omega_W \sin \psi \approx \omega_W \left[ r_0 \psi - \gamma_0 y \psi - \left( \frac{1}{2} d_0 \gamma_0 + \frac{1}{6} r_0 \right) \psi^3 \right] + \omega_W \left[ -\frac{1}{3} \gamma_0 y \psi^3 + \left( -\frac{1}{8} \gamma_0 + \frac{1}{120} r_0 \right) \psi^5 \right] \quad (3.8)$$

$$U_{Ly} = r_L \omega_W \sin \psi \approx \omega_W \left[ r_0 \psi + \gamma_0 y \psi - \left( \frac{1}{2} d_0 \gamma_0 + \frac{1}{6} r_0 \right) \psi^3 \right] + \omega_W \left[ +\frac{1}{3} \gamma_0 y \psi^3 + \left( -\frac{1}{8} \gamma_0 + \frac{1}{120} r_0 \right) \psi^5 \right] \quad (3.9)$$

$$U_{Rx} = r_R \omega_W \cos \psi \approx \omega_W \left[ r_0 - \gamma_0 y - \frac{1}{2} (r_0 + d_0 \gamma_0) \psi^2 + \frac{1}{24} (d_0 \gamma_0 + r_0) \psi^4 \right] \quad (3.10)$$

$$U_{Lx} = r_L \omega_W \cos \psi \approx \omega_W \left[ r_0 + \gamma_0 y - \frac{1}{2} (r_0 + d_0 \gamma_0) \psi^2 + \frac{1}{24} (d_0 \gamma_0 + r_0) \psi^4 \right], \quad (3.11)$$

ただし、 $V_{Ry}$ 、 $V_{Ly}$ 、 $V_{Rx}$ 、 $V_{Lx}$  はそれぞれ車輪から見た右車輪接触点の  $y$  方向、左車輪接触点の  $y$  方向、右車輪接触点の  $x$  方向、右車輪接触点の  $x$  方向の移動速度を示す。したがって、右車輪接触点の  $y$  方向、左車輪接触点の  $y$  方向、右車輪接触点の  $x$  方向、右車輪接触点の  $x$  方向の滑り率は以下のそれぞれの式で表せる。

$$N_{Ry} = \frac{V_{Ry} - U_{Ry}}{v} \approx \frac{\dot{y}}{v} - \psi + \alpha_{Ry\psi} y \psi + \alpha_{R\psi\psi\psi} \psi^3 + \alpha_{Ry\psi\psi\psi} y \psi^3 + \alpha_{R\psi\psi\psi\psi\psi} \psi^5 \quad (3.12)$$

$$N_{Ly} = \frac{V_{Ly} - U_{Ly}}{v} \approx \frac{\dot{y}}{v} - \psi + \alpha_{Ly\psi} y \psi + \alpha_{L\psi\psi\psi} \psi^3 + \alpha_{Ly\psi\psi\psi} y \psi^3 + \alpha_{L\psi\psi\psi\psi\psi} \psi^5 \quad (3.13)$$

$$N_{Rx} = \frac{V_{Rx} - U_{Rx}}{v} \approx \frac{d_0 \dot{\psi}}{v} + \frac{\gamma_0}{r_0} y + \beta_{Ry\psi\psi} y \psi^2 + \beta_{Ry\psi\psi\psi\psi} y \psi^4 \quad (3.14)$$

$$N_{Lx} = \frac{V_{Lx} - U_{Lx}}{v} \approx -\frac{d_0 \dot{\psi}}{v} - \frac{\gamma_0}{r_0} y + \beta_{Ly\psi\psi} y \psi^2 + \beta_{Ly\psi\psi\psi\psi} y \psi^4, \quad (3.15)$$

ただし、 $\alpha_{Ry\psi}$  から  $\beta_{Ly\psi\psi}$  の係数はそれぞれの非線形項の係数であり、 $r_0$ 、 $d_0$ 、 $\gamma_0$  などの台車線形パラメータ踏面勾配、車輪半径、レール幅によって以下のように決ま

る係数である。

$$\begin{aligned}
\alpha_{Ry\psi} &= \frac{\gamma_0}{r_0}, \quad \alpha_{R\psi\psi\psi} = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_{Ry\psi\psi\psi} = \frac{\gamma_0^2 d_0}{2r_0^2} + \frac{5\gamma_0}{6r_0}, \quad \alpha_{R\psi\psi\psi\psi\psi} = -\frac{\gamma_0 d_0}{8r_0} + \frac{\gamma_0}{8r_0} - \frac{2}{15}, \\
\alpha_{Ly\psi} &= -\frac{\gamma_0}{r_0}, \quad \alpha_{L\psi\psi\psi} = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_{Ly\psi\psi\psi} = -\frac{\gamma_0^2 d_0}{2r_0^2} - \frac{5\gamma_0}{6r_0}, \quad \alpha_{L\psi\psi\psi\psi\psi} = -\frac{\gamma_0 d_0}{8r_0} + \frac{\gamma_0}{8r_0} - \frac{2}{15}, \\
\beta_{Ry\psi\psi} &= \frac{\gamma_0^2 d_0}{2r_0^2} + \frac{\gamma_0}{2r_0}, \quad \beta_{Ry\psi\psi\psi\psi} = \frac{\gamma_0^3 d_0^2}{4r_0^3} + \frac{11\gamma_0^2 d_0}{24r_0^2} + \frac{5\gamma_0}{24r_0}, \\
\beta_{Ly\psi\psi} &= -\frac{\gamma_0^2 d_0}{2r_0^2} - \frac{\gamma_0}{2r_0}, \quad \beta_{Ly\psi\psi\psi\psi} = -\frac{\gamma_0^3 d_0^2}{4r_0^3} - \frac{11\gamma_0^2 d_0}{24r_0^2} - \frac{5\gamma_0}{24r_0}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

また、クリープ力は以下のように定義される。

$$(\text{クリープ力}) = -(\text{クリープ係数})(\text{クリープ率})$$

クリープ係数は接触面の楕円形状によって変化することが指摘されている [16]。また、その接触面の楕円形状は台車の横変位  $y$  とヨー方向の回転角度  $\psi$  によって変化し、その変化による  $x$  方向及び  $y$  方向のクリープ係数は Appendix B により、式 B.21 及び式 B.22 で表せる。よって、クリープ力が台車に働く横向き力は以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned}
F_{\kappa y} &= -\kappa_{Ry} N_{Ry} - \kappa_{Ly} N_{Ly} \\
&= -\kappa_{yy} \left( \frac{2}{v} \dot{y} - 2\psi \right) + \alpha'_{21} y^2 \psi + \alpha'_{03} \psi^3 + \alpha'_{41} y^4 \psi + \alpha'_{23} y^2 \psi^3 + \alpha'_{05} \psi^5, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

ただし、 $\alpha'_{21}$  から  $\alpha'_{05}$  はそれぞれクリープ力が台車に働く横向き力の非線形項  $y^2\psi$  から  $\psi^5$  の係数であり、接触面の曲率半径、ヤング率、ポアソン比、踏面勾配、接触力、車輪半径、レール幅によって決められる係数である。次に、クリープ力による台車ヨー方向に生じる回転モーメントは以下ようになる。

$$\begin{aligned}
N_{\kappa} &= -\kappa_{Rx} N_{Rx} (d_0 + y) - \kappa_{Lx} N_{Lx} (d_0 - y) \\
&= -\kappa_{xx} \left( \frac{2d_0^2}{v} \dot{\psi} + \frac{2\gamma_0 d_0}{r_0} y \right) + \beta'_{30} y^3 + \beta'_{12} y \psi^2 \\
&\quad + \beta'_{50} y^5 + \beta'_{32} y^3 \psi^2 + \beta'_{14} y \psi^4, \tag{3.18}
\end{aligned}$$



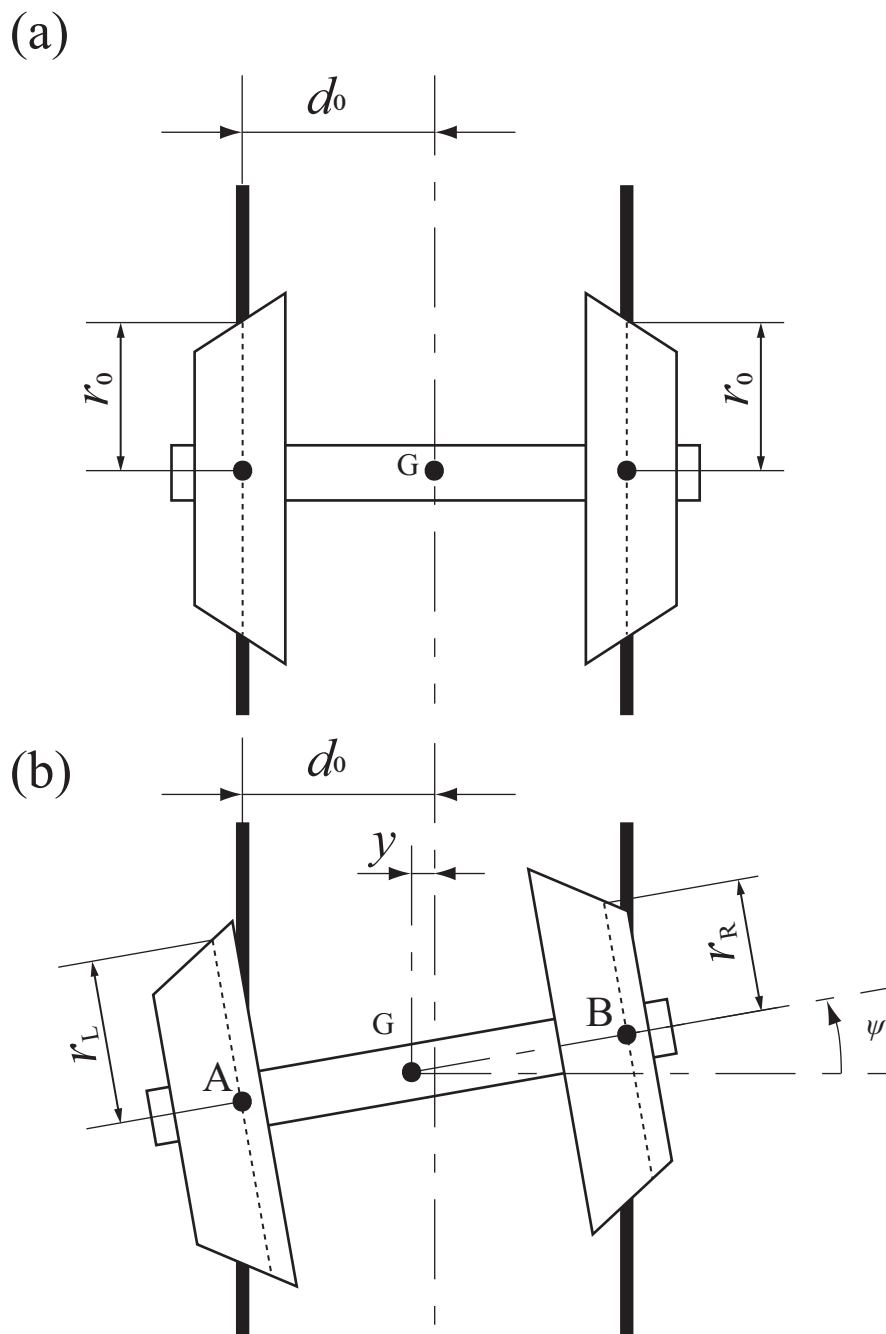
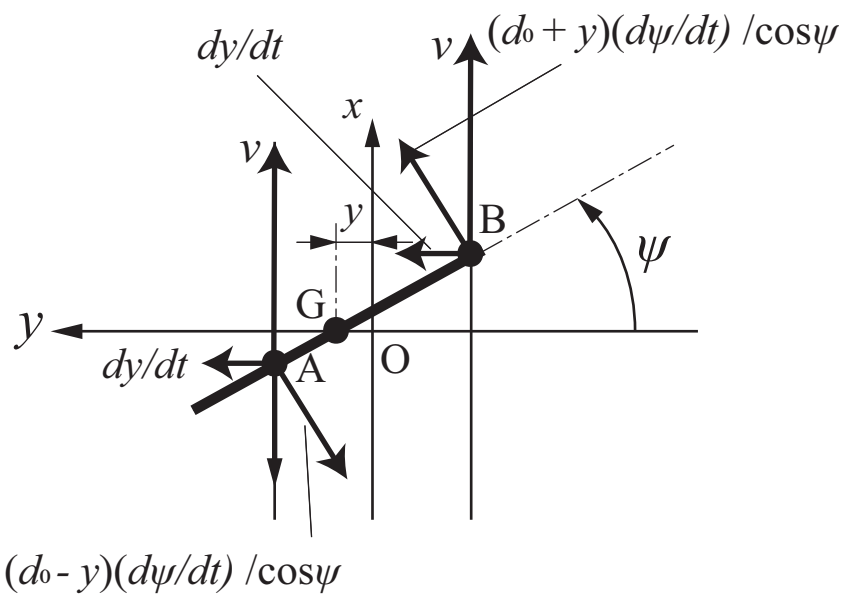


图 3.2: Configuration of single wheel set model. (a) Wheel set in equilibrium state, (b) wheel set under lateral and yaw motions.

(a)



(b)

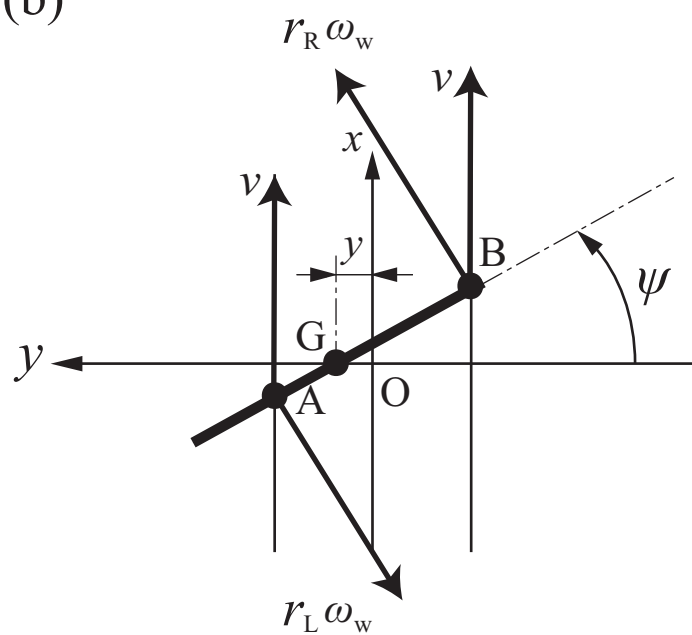


图 3.3: Speed of wheel contact point. (a) Moving speed in rail coordinate, (b) moving speed in wheel coordinate.

ただし、 $\beta'_{30}$  から  $\beta'_{14}$  は  $x$  方向に働くクリープ力による台車にかかるヨー方向の回転モーメントの非線形項  $y^3$  から  $y\psi^4$  のそれぞれの係数であり、 $y^2\psi$  から  $\psi^5$  の係数と同じように接触面の曲率半径、ヤング率、ポアソン比、踏面勾配、接触力、車輪半径、レール幅によって決められる係数である。

図 3.4 は長手方向の支持ばねが台車の変位によって変化した図を示す。破線は台車とばね位置を示し、ばね定数が  $k_x$  の長手方向ばねの支持位置の間隔は  $2d_1$  であり、ばね自然長  $l_0$  より伸ばして台車に  $l$  の長さで取り付けられている。実線は横変位  $y$  とヨー方向回転角度  $\psi$  を移動したときの車台とばね位置を示す。車体の変位により、左右のばねがばね方向に生じる復元力はそれぞれ以下の式で表せる。

$$F_{Lk} = k_x \left( \sqrt{[y - d_1(1 - \cos \psi)]^2 + (l + d_1 \sin \psi)^2} - l_0 \right) \quad (3.19)$$

$$F_{Rk} = k_x \left( \sqrt{[y + d_1(1 - \cos \psi)]^2 + (l - d_1 \sin \psi)^2} - l_0 \right). \quad (3.20)$$

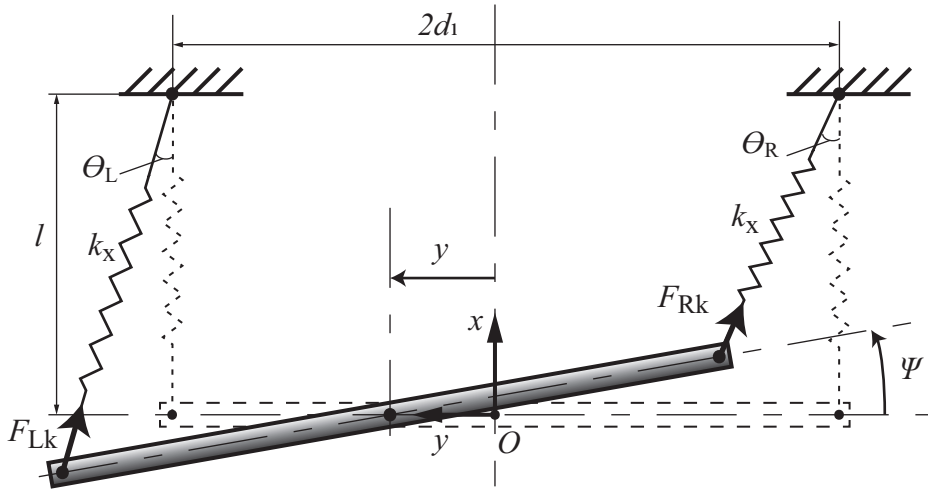


図 3.4: Wheelset suspended with longitudinal springs.

左右のばね伸ばす方向と  $x$  軸のなす角度  $\theta_L$ 、 $\theta_R$  はそれぞれ以下のような関係を持つ。

$$\tan \theta_L = \frac{y - d_1(1 - \cos \psi)}{l + d_1 \sin \psi} \quad (3.21)$$

$$\tan \theta_R = \frac{y + d_1(1 - \cos \psi)}{l - d_1 \sin \psi}. \quad (3.22)$$

ばねの復元力が  $y$  と  $x$  方向に働く力によって、横方向に生じる復元力と回転方向に生じる復元回転モーメントは以下の式で求める。

$$F_{ky} = -\frac{2k_x(l-l_0)}{l}y + \alpha''_{30}y^3 + \alpha''_{12}y\psi^2 + \alpha''_{03}\psi^3 + \alpha''_{50}y^5 \\ + \alpha''_{23}y^2\psi^3 + \alpha''_{32}y^3\psi^2 + \alpha''_{14}y\psi^4 + \alpha''_{05}\psi^5 \quad (3.23)$$

$$N_k = -2k_x d_1^2 \psi + \beta''_{21}y^2\psi + \beta''_{12}y\psi^2 + \beta''_{03}\psi^3 + \beta''_{41}y^4\psi \\ + \beta''_{32}y^3\psi^2 + \beta''_{23}y^2\psi^3 + \beta''_{14}y\psi^4 + \beta''_{05}\psi^5, \quad (3.24)$$

ただし、 $\alpha''_{30}$  から  $\beta''_{05}$  はそれぞればね力が台車に働く横向き力と回転モーメントの非線形項  $y^3$  から  $\psi^5$  の係数であり、長手方向の支持ばねのばね定数、ばね自然長、静止状態のばね長さ、ばねの支持距離によって決められる係数である。台車の横方向とヨー方向の回転モーメントに関する運動方程式は以下のように表せる。

$$m\ddot{y} = F_{\kappa y} + F_{ky} \quad (3.25)$$

$$I\ddot{\psi} = N_{\kappa} + N_k. \quad (3.26)$$

クリープ力とばね力の式 3.17、式 (3.18)、式 (3.23)、式 (3.24) を代入して、非線形項を  $\alpha'''_{30}$  から  $\beta'''_{05}$  の係数でまとめると、以下のようになる。

$$m\ddot{y} + \frac{2\kappa_{yy}}{v}\dot{y} + \frac{2k_x(l-l_0)}{l}y - 2\kappa_{yy}\psi + \alpha'''_{30}y^3 + \alpha'''_{21}y^2\psi + \alpha'''_{12}y\psi^2 + \alpha'''_{03}\psi^3 \\ + \alpha'''_{50}y^5 + \alpha'''_{41}y^4\psi + \alpha'''_{32}y^3\psi^2 + \alpha'''_{23}y^2\psi^3 + \alpha'''_{14}y\psi^4 + \alpha'''_{05}\psi^5 = 0 \quad (3.27)$$

$$I\ddot{\psi} + \frac{2\kappa_{xx}d_0^2}{v}\dot{\psi} + \frac{2\kappa_{xx}\gamma_0 d_0}{r_0}y + 2k_x d_1^2 \psi + \beta'''_{30}y^3 + \beta'''_{21}y^2\psi + \beta'''_{12}y\psi^2 + \beta'''_{03}\psi^3 \\ + \beta'''_{50}y^5 + \beta'''_{41}y^4\psi + \beta'''_{32}y^3\psi^2 + \beta'''_{23}y^2\psi^3 + \beta'''_{14}y\psi^4 + \beta'''_{05}\psi^5 = 0. \quad (3.28)$$

これが本研究で用いた一輪軸台車モデルの非線形運動方程式である。次に代表長さを  $d_0$ 、代表時間を  $1/\omega_\psi$  として無次元化すると、運動方程式は以下のようになる。

$$\ddot{y}^* + \frac{d'_{11}}{v^*}\dot{y}^* + k_{11}y^* + k_{12}\psi + \alpha_{30}y^{*3} + \alpha_{21}y^{*2}\psi + \alpha_{12}y^*\psi^2 + \alpha_{03}\psi^3 \\ + \alpha_{50}y^{*5} + \alpha_{41}y^{*4}\psi + \alpha_{32}y^{*3}\psi^2 + \alpha_{23}y^{*2}\psi^3 + \alpha_{14}y^*\psi^4 + \alpha_{05}\psi^5 = 0 \quad (3.29)$$

$$\ddot{\psi} + \frac{d'_{22}}{v^*}\dot{\psi} + k_{21}y^* + \psi + \beta_{30}y^{*3} + \beta_{21}y^{*2}\psi + \beta_{12}y^*\psi^2 + \beta_{03}\psi^3 \\ + \beta_{50}y^{*5} + \beta_{41}y^{*4}\psi + \beta_{32}y^{*3}\psi^2 + \beta_{23}y^{*2}\psi^3 + \beta_{14}y^*\psi^4 + \beta_{05}\psi^5 = 0. \quad (3.30)$$

ただし、 $\alpha_{30}$  から  $\beta_{05}$  の非線形係数は  $\alpha'_{21}$  から  $\beta'_{14}$  のクリープ力による非線形項係数と  $\alpha''_{30}$  から  $\beta''_{05}$  の長手方向の支持ばねによる復元力の非線形項係数によって決め

られる係数である。\$d'\_{11}\$ から \$k\_{21}\$ の線形係数は以下のように表せる。

$$d'_{11} = \frac{2\kappa_{yy}}{md_0\omega_\psi^2}, d'_{22} = \frac{\kappa_{xx}d_0}{k_x d_1^2}, k_{11} = \frac{\omega_y^2}{\omega_\psi^2}, k_{12} = \frac{-2\kappa_{yy}}{md_0\omega_\psi^2}, k_{21} = \frac{d_0^2\kappa_{xx}\gamma_0}{k_x d_1^2 r_0},$$

$$y^* = \frac{y}{d_0}, t^* = \omega_\psi t, \omega_y = \sqrt{\frac{2k_x(l-l_0)}{lm}}, \omega_\psi = \sqrt{\frac{2k_x d_1^2}{I}}, \quad (3.31)$$

ここで、\$k\_{12}\$ と \$k\_{21}\$ が異なるため、一輪軸台車システムは非対称な剛性マトリックスを持つことが分かる。よって、台車システムは非保存系になり、自励する可能性がある。この剛性マトリックスを対称にするためには、クリープ力の線形係数をゼロにする必要がある。しかし、鉄道が走るために、車輪とレールの間の摩擦力は絶対に必要不可欠であるため、クリープ力の線形係数はゼロにすることはできない。よって、鉄道システムでは、蛇行動の線形臨界速度が必ず存在する。

以上で一輪軸台車モデルの無次元方程式が求まった。非線形項の係数はここで未知であるが、これからの提案手法により同定する。理論解析する前、まず台車モデルの蛇行動線形特性について確認する。

### 3.3 線形解析

#### 3.3.1 線形臨界速度

一輪軸台車の蛇行動線形特性を明らかにするため、運動方程式の線形部分を取り出し、行列に書き換えると以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}^* \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d'_{11}}{v^*} & 0 \\ 0 & \frac{d'_{22}}{v^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}^* \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^* \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

振動の解を以下のようにおく。

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}e^{\lambda t}, \quad (3.33)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} y^* \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

この振幅の解を式 4.52 にこの方程式に代入すると、特性方程式は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \lambda^4 + (d_{11} + d_{22})\lambda^3 + (d_{11}d_{22} + k_{11} + 1)\lambda^2 + (d_{11} + d_{22}k_{11})\lambda \\ + k_{11} - k_{12}k_{21} = 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

ただし、 $d_{11}$  と  $d_{22}$  は無次元蛇行動線形臨界速度  $v_c^*$  で以下のように書ける。

$$d_{11} = \frac{d'_{11}}{v_c^*}, d_{22} = \frac{d'_{22}}{v_c^*}. \quad (3.36)$$

特性方程式により、一輪軸台車システムは 2 組の固有値を持つことが分かる。また、蛇行動線形臨界速度は蛇行動が発生する直前であり、1 組の共役な純虚数の固有値  $\lambda_0 = \pm i\omega$  を持つことが知られている [38, 67]。も 1 組の固有値は共役な複素数であり、 $\lambda_r \pm i\lambda_i$  と仮定する。純虚数の固有値を特性方程式に代入し、実部と虚部分けると、以下の式が得られる。

$$Re : \omega^4 - (d_{11}d_{22} + k_{11} + 1)\omega^2 + k_{11} - k_{12}k_{21} = 0, \quad (3.37)$$

$$Im : -(d_{11} + d_{22})\omega^3 + (d_{11} + d_{22}k_{11})\omega = 0. \quad (3.38)$$

虚数の式から、蛇行動線形臨界速度時の固有値のうち 2 つは共役な純虚数であり、その固有値は以下のように求められる。

$$\omega = \sqrt{\frac{d_{11} + d_{22}k_{11}}{d_{11} + d_{22}}}. \quad (3.39)$$

また、この周波数  $\omega$  を特性方程式の実部に代入すると、無次元蛇行動線形臨界速度は以下のように求まる。

$$v_c^* = \sqrt{\frac{d'_{11}d'_{22}\omega^2}{\omega^4 + k_{11} - k_{12}k_{21} - (k_{11} + 1)\omega^2}}. \quad (3.40)$$

特性方程式は 1 組の純虚数と 1 組の複素数の固有値を持つため、以下のように書き換えられる。

$$(\lambda^2 + \omega^2)(\lambda - \lambda_r - i\lambda_i)(\lambda - \lambda_r + i\lambda_i) = 0. \quad (3.41)$$

実部と虚部分けて、式 4.71 と比べると、複素数の固有値は以下のように求まる。

$$\lambda_R \pm i\lambda_I = -\frac{1}{2}C' \pm \frac{1}{2}i\sqrt{4D' - C'^2}. \quad (3.42)$$

ただし、

$$\begin{aligned} C' &= d_{11} + d_{22}, \\ D' &= d_{11}d_{22} + \frac{k_{11}d_{11} + d_{22}}{d_{11} + d_{22}}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

$d_{11}$  と  $d_{22}$  が正であるため、複素数の固有値の実部はゼロより小さいことが分かり、この時の台車の振動は発散せず、安定する。

### 3.3.2 クリープ係数同定

物理的に線形クリープ力の係数を計算するのは難しい上、実験環境などに影響されて実際の値と異なることが多い。本研究は実験データに注目して解析するため、クリープ係数を実験的に同定する手法を採用する。

Kalker のクリープ力理論 [16] を参考し、 $y$  方向クリープ係数を  $x$  方向のクリープ係数の 0.8 倍とする。また、線形方程式式の無次元係数からクリープ係数を分離すると、以下の関係式が得られる。

$$d'_{11} = \hat{d}_{11}\kappa_{xx}, d'_{22} = \hat{d}_{22}\kappa_{xx}, k_{12} = \hat{k}_{12}\kappa_{xx}, k_{21} = \hat{k}_{21}\kappa_{xx}, \quad (3.44)$$

ただし、

$$\hat{d}_{11} = \frac{1.6}{md_0\omega_\psi^2}, \hat{d}_{22} = \frac{d_0}{k_x d_1^2}, \hat{k}_{12} = \frac{-1.6}{md_0\omega_\psi^2}, \hat{k}_{21} = \frac{d_0^2\gamma_0}{k_x d_1^2 r_0}. \quad (3.45)$$

式 3.39 に代入すると

$$\omega^2 = \frac{\hat{d}_{11} + \hat{d}_{22}k_{11}}{\hat{d}_{11} + \hat{d}_{22}}. \quad (3.46)$$

が得られる。以上の関係式を全部式 3.37 に代入すると、線形クリープ力の係数は以下のように求まる。

$$\kappa_{xx} = \sqrt{\frac{\omega^4 - (k_{11} + 1)\omega^2 + k_{11}k_{22}}{\left(\hat{d}_{11}\hat{d}_{22}\right)\omega^2/v_c^* - \hat{k}_{12}\hat{k}_{21}}}. \quad (3.47)$$

実験より求めた蛇行動線形臨界速度と実験装置のパラメータ（台車質量、台車ヨー方向の慣性モーメント、車輪踏面の勾配、車輪半径、レール幅、ばね支持距離、長手方向の支持ばねばね定数、ばねの支持長さ、ばねの元の長さ）により、同定することができる。

### 3.3.3 根跡図

前節で同定した線形クリーブ力係数と実験装置のパラメータを用いて、一輪軸台車システムの根跡図を求めることができる。図 3.5 は求めた根跡図を示す。横軸は固有値の実部、縦軸は固有値の虚部を示す。曲線は台車の走行速度によって特性方程式から求める 4 つの固有値の変化を示している。四角形は無次元速度が 0.6 の時の固有値、丸は無次元速度が 1.0 の時の固有値、三角は無次元速度が 6.4 の時であり、丁度蛇行動無次元線形臨界速度の時の固有値を示す。左の曲線は 1 組の固有値で、速度の増大によって、負の実部を持つ異なる実数から負の実部を持つ複素数に変化していく。右の曲線はも 1 組の固有値で、負の実部を持つ複素数から正の実部を持つ複素数に変化していく。蛇行動線形臨界速度の時に、この 1 組の固有値は純虚数となり、この時、台車の走行速度を増大すると、正の実部を持つ複素数になるため、振幅が大きくなり、蛇行動が発生する。

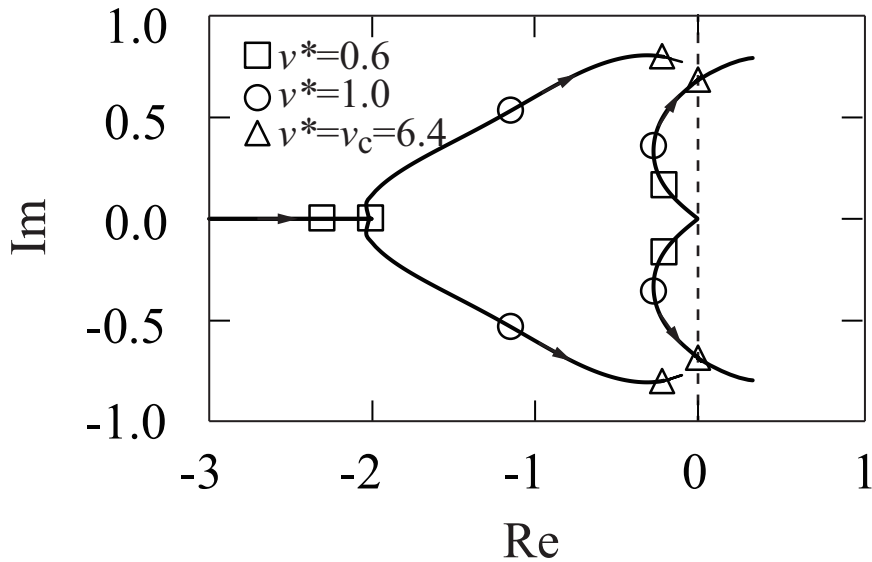


図 3.5: Root locus of the linear wheel system.

### 3.4 結言

本研究で用いた一輪軸台車モデルの非線形運動方程式を求めた。物理的な視点から鉄道システムに存在する非線形成分の要因をまとめた。3次非線形項 8 個と 5次



非線形項 12 個が 20 個存在することを明らかにした。蛇行動線形臨界速度と車両パラメータの線形クリープ力係数を含めた関係式を求めると実験的に線形臨界速度を観測することにより、線形クリープ力の係数を同定できることを示した。臨界速度以上で蛇行動が発生することを根跡図で、根の移動様子を明らかにした。

# 第4章 蛇行動ヒステリシス現象の理論解析法

## 4.1 緒言

鉄道システムのヒステリシス現象に対する非線形の理論解析は必要不可欠であることは第1章で説明した先行研究と第2章の実験で観測した現象からわかる。ここまで、亜臨界と超臨界ホップ分岐の種類を判別する研究には中心多様体理論がよく用いられるが、蛇行動5次非線形特性までの解析、実験計測に対応して非線形パラメータの同定法はこれまで明らかにされていない。この章は中心多様体理論を用いたアプローチと非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開のアプローチの2つの理論解析手法を提案し、蛇行動の非線形特性（とくにヒステリシス現象）を解析に必要な非線形成分の同定法を提案し、亜臨界ホップ分岐曲線を理論的に求める。

## 4.2 中心多様体理論を用いたアプローチ

### 4.2.1 中心部分空間への低次元化

一輪軸台車システムの蛇行動線形臨界速度近傍の非線形特性を理論的に明らかにするために、1より十分に小さな無次元パラメータ  $\epsilon$  ( $|\epsilon| \ll 1$ ) を使って台車の無次元走行速度を以下のようにおく

$$v^* = v_c^*(1 + \epsilon), \quad (4.1)$$

ただし、 $v_c^*$  は無次元線形臨界速度であり、以下のようになる。

$$v_c^* = \frac{v_c}{d_0 \omega_\psi}. \quad (4.2)$$

台車の横方向  $y$  とヨー方向  $\psi$  の無次元運動方程式 3.29 と式 3.30 を 4 列行列に書き換えると、以下ようになる。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}), \quad (4.3)$$

ただし、ベクトル  $\boldsymbol{x}$  は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y^* \\ \dot{y}^* \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

である。行列  $A$  は線形成分の係数を含める行列であり、

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{11} & -\frac{d'_{11}}{v_c^*} & -k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{21} & 0 & -1 & -\frac{d'_{22}}{v_c^*} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

と表す。また、速度  $y^*$ 、 $\dot{\psi}$  に関する線形項と 5 次非線形項を含めた  $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$  は

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ N_2(\boldsymbol{x}) \\ 0 \\ N_4(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

である。ただし、

$$\begin{aligned} N_2(\boldsymbol{x}) = & \epsilon \frac{d'_{11}}{v_c^*} y^* - \epsilon^2 \frac{d'_{11}}{v_c^*} y^* - \alpha_{30} y^{*3} - \alpha_{21} y^{*2} \psi - \alpha_{12} y^* \psi^2 - \alpha_{03} \psi^3 \\ & - \alpha_{50} y^{*5} - \alpha_{41} y^{*4} \psi - \alpha_{32} y^{*3} \psi^2 - \alpha_{23} y^{*2} \psi^3 - \alpha_{14} y^* \psi^4 - \alpha_{05} \psi^5 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$N_4(\boldsymbol{x}) = \epsilon \frac{d'_{22}}{v_c^*} \dot{\psi} - \epsilon^2 \frac{d'_{11}}{v_c^*} \dot{\psi} - \beta_{30} y^{*3} - \dots - \beta_{\psi\psi\psi} \psi^3 - \beta_{50} y^{*5} - \dots - \beta_{05} \psi^5. \quad (4.8)$$

$\epsilon = 0$  の時に、すなわち、線形臨界速度の時に、第 3 章に示した通り、行列  $A$  による運動方程式部分は 4 つの固有値を持つ：一組の純虚数固有値  $\pm i\omega$  と負の実部を持つ共役の一組の固有値  $\lambda_R \pm i\lambda_I$  である。この 4 つの固有値の固有ベクトル  $\boldsymbol{P}_1 \pm i\boldsymbol{P}_2$  と  $\boldsymbol{P}_3 \pm i\boldsymbol{P}_4$  を用いた新たな行列  $P$  で行列  $A$  を対角化することができる。

$$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{P}_3 & \boldsymbol{P}_4 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\omega^2 - k_{11}}{k_{12}} \\ \frac{d'_{11}}{k_{12}v_c^*}\omega^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ -\frac{d'_{11}\omega}{k_{12}v_c^*} \\ \frac{\omega^3 - k_{11}\omega}{k_{12}} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_R \\ \frac{\lambda_I^2 - \lambda_R^2 - \frac{d'_{11}}{v_c^*}\lambda_R - k_{11}}{k_{12}} \\ \frac{\lambda_I^2 \left( 3\lambda_R + \frac{d'_{11}}{v_c^*} \right) - \lambda_R^3 - (-\lambda_R^2 + \lambda_I^2) \frac{d'_{11}}{v_c^*} - k_{11}\lambda_R}{k_{12}} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{P}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_I \\ \frac{2\lambda_R\lambda_I + \frac{d'_{11}}{v_c^*}\lambda_I}{k_{12}} \\ -\frac{\lambda_I^3 - \lambda_I \left[ 3\lambda_R^2 + (\lambda_R^2 + \lambda_I^2) \frac{d'_{11}}{v_c^*} + k_{11}\lambda_I \right]}{k_{12}} \end{bmatrix}. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

この行列  $P$  を用いて、以下のように行列  $A$  をブロック対角化すると。行列  $A'$  が求められる。

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_R & \lambda_I \\ 0 & 0 & -\lambda_I & \lambda_R \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

また、ベクトル  $\mathbf{x}$  はベクトル  $\mathbf{z}$  に変換され、

$$\mathbf{x} = P\mathbf{z} \tag{4.12}$$

と書ける。ただし、

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

したがって、運動方程式 (4.52) はブロック対角化され、

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_R & \lambda_I \\ 0 & 0 & -\lambda_I & \lambda_R \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} N'_1(\mathbf{z}) \\ N'_2(\mathbf{z}) \\ N'_3(\mathbf{z}) \\ N'_4(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} N'_1(\mathbf{z}) &= C_{111}\epsilon z_1 + C_{112}\epsilon z_2 + C_{113}\epsilon z_3 + C_{114}\epsilon z_4 + C_{13000}z_1^3 + \dots + C_{10003}z_4^3 \\ &\quad + C_{121}\epsilon^2 z_1 + C_{122}\epsilon^2 z_2 + C_{131}\epsilon z_1^3 + \dots + C_{15000}z_1^5 + \dots + C_{10005}z_4^5 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$N'_2(\mathbf{z}) = C_{21000}\epsilon z_1 + C_{20100}\epsilon z_2 + \dots + C_{20005}z_4^5, \quad (4.16)$$

$$N'_3(\mathbf{z}) = C_{31000}\epsilon z_1 + C_{30100}\epsilon z_2 + \dots + C_{30005}z_4^5 \quad (4.17)$$

$$N'_4(\mathbf{z}) = C_{41000}\epsilon z_1 + C_{40100}\epsilon z_2 + \dots + C_{40005}z_4^5, \quad (4.18)$$

ここで、 $C_{111}$  から  $C_{40005}$  は  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  のそれぞれの係数が座標変化した後の  $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$ 、 $z_4$  の各べきの係数である。 $\epsilon z_1$ 、 $\epsilon z_2$ 、 $\epsilon z_3$ 、 $\epsilon z_4$  は 3 次非線形項  $z_1^3$  から  $z_4^3$  と同じべきであり、 $\epsilon^2 z_1$  から  $\epsilon z_4^3$  は 5 次非線形項  $z_1^5$  から  $z_4^5$  と同じべきであるため、 $z_1$ 、 $z_2$ 、 $z_3$ 、 $z_4$  は  $O(\epsilon^{1/2})$  のオーダーをとる。よって、3 次非線形と 5 次非線形成分はそれぞれ  $O(\epsilon^{3/2})$  と  $O(\epsilon^{5/2})$  のオーダーで表す。

次は中心多様体理論を通して低次元化する。純虚数固有値の固有ベクトル  $\mathbf{P}_1 \pm i\mathbf{P}_2$  は中心部分空間を張り、負の実部を持つ共役の固有値の固有ベクトル  $\mathbf{P}_3 \pm i\mathbf{P}_4$  は安定な部分空間を張る。この時、中心多様体理論 [68] により  $z_3$ 、 $z_4$  は  $z_1$ 、 $z_2$  と比べて、変化速度が極めて遅いため、中心部分空間だけに注目することができる。したがって、 $z_3$ 、 $z_4$  は  $z_1$ 、 $z_2$  及び  $\epsilon$  に関する 5 次非線形までの非線形項を使って、 $z_3 = h_3(\epsilon, z_1, z_2) = O(\epsilon^{5/2})$  と  $z_4 = h_4(\epsilon, z_1, z_2) = O(\epsilon^{5/2})$  により、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} z_3 &= D_{3101}\epsilon z_1 + D_{3011}\epsilon z_2 + D_{3300}z_1^3 + D_{3210}z_1^2 z_2 + D_{3120}z_1 z_2^2 + D_{3030}z_2^3 \\ &\quad + D_{3301}\epsilon z_1^3 + D_{3211}\epsilon z_1^2 z_2 + D_{3121}\epsilon z_1 z_2^2 + D_{3031}\epsilon z_2^3 + D_{3102}\epsilon^2 z_1 \\ &\quad + D_{3012}\epsilon^2 z_2 + D_{3500}z_1^5 + D_{3410}z_1^4 z_2 + \dots + D_{3050}z_2^5 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$z_4 = D_{4101}\epsilon z_1 + D_{4011}\epsilon z_2 + \dots + D_{4050}z_2^5, \quad (4.20)$$

ただし、 $D_{3101}$  から  $D_{4050}$  は 36 個の未知数である。これらの未知数を求める。この時に、 $z_3$  の全微分は式 (4.19) の  $z_1$ 、 $z_2$  に関する偏微分と運動方程式 (4.14) の  $z_1$ 、 $z_2$  の時間微分を用いて

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= \frac{\partial z_3}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial z_3}{\partial z_2} \dot{z}_2 \\ &= -\omega D_{3011} \epsilon z_1 + \omega D_{3101} \epsilon z_2 - \omega D_{3210} z_1^3 + (3\omega D_{3300} - 2\omega D_{3120}) z_1^2 z_2 \\ &\quad + \dots + (\omega D_{3140} + D_{3120} C_{10300} + 3D_{3030} C_{20300}) z_2^5\end{aligned}\quad (4.21)$$

と書ける。また、運動方程式 (4.14) から、 $\dot{z}_3$  は

$$\begin{aligned}\dot{z}_3 &= \lambda_R z_3 + \lambda_I z_4 + N_3'(\mathbf{z}) \\ &= \lambda_R (D_{3101} \epsilon z_1 + D_{3011} \epsilon z_2 + \dots) + \lambda_I (D_{4101} \epsilon z_1 + D_{4011} \epsilon z_2 + \dots) \\ &\quad + (C_{31000} \epsilon z_1 + C_{30100} \epsilon z_2 + \dots) \\ &= (\lambda_R D_{3101} + \lambda_I D_{4101} + C_{31000}) \epsilon z_1 + \dots \\ &\quad + (\lambda_R D_{3050} + \lambda_I D_{4050} + C_{30500} + C_{30210} D_{3030} + C_{30201} D_{4030}) z_2^5\end{aligned}\quad (4.22)$$

とも書ける。

$z_4$  についても同じように 2 つの式が得られる。それぞれの  $\dot{z}_3$  と  $\dot{z}_4$  に関する式の各べきの係数でまとめると、 $D_{3101}$  から  $D_{4050}$  までの 36 個の未知係数に関する 36 個の関係式が得られる。よって、これらの未知係数を求めることができる。すなわち、 $z_1$ 、 $z_2$  を用いて  $z_3$ 、 $z_4$  を書き換えることができ、低次元できる。低次元化された運動方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1''(z_1, z_2) \\ N_2''(z_1, z_2) \end{bmatrix}\quad (4.23)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned}N_1''(z_1, z_2) &= D_{1101} \epsilon z_1 + D_{1011} \epsilon z_2 + D_{1300} z_1^3 \\ &\quad + D_{1210} z_1^2 z_2 + \dots + D_{1050} z_2^5\end{aligned}\quad (4.24)$$

$$N_2''(z_1, z_2) = D_{2101} \epsilon z_1 + \dots + D_{2050} z_2^5,\quad (4.25)$$

ここで、 $D_{1101}$  から  $D_{2050}$  の非線形係数は  $C_{111}$  から  $C_{40005}$  までの係数で表せる。次は非線形座標変化を用いてさらに運動方程式を簡単化し、ノーマルフォーム [69] を求める。

## 4.2.2 非線形座標変化による標準化

続いて、運動方程式 (4.23) のノーマルフォームを求める。計算上の便利のため、運動方程式 (4.23) を複素平面上で対角化してさらに低次元化する。式 (4.23) の線形成分の固有ベクトルを用いて以下のように座標変換を行う。

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

したがって、 $z$  は  $\zeta$  に変換され、運動方程式は

$$\begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\bar{\zeta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1'''(\zeta, \bar{\zeta}) \\ N_2'''(\zeta, \bar{\zeta}) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

となる。ただし、非線形成分は  $D_{1101}$  から  $D_{2050}$  の非線形係数と以下の関係を持つ。

$$\begin{aligned} N_1'''(\zeta, \bar{\zeta}) &= (D_{1101R} + iD_{1101I})\epsilon\zeta + (D_{1011R} + iD_{1011I})\epsilon\bar{\zeta} \\ &\quad + \dots + (D_{1050R} + iD_{1050I})\bar{\zeta}^5 \\ N_2'''(\zeta, \bar{\zeta}) &= (D_{2101R} + iD_{2101I})\epsilon\zeta + \dots + (D_{2050R} + iD_{2050I})\zeta^5. \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここで、運動方程式 (4.27) の 1 行目と 2 行目は共役関係であるから、以下のよう書き換える。

$$\dot{\zeta} = i\omega\zeta + N_1'''(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (4.29)$$

非線形部分  $N_1'''(\zeta; \bar{\zeta})$  の係数は複素数であり、以下のようにおく。

$$\begin{aligned} N_1'''(\zeta; \bar{\zeta}) &= D_1\epsilon\zeta + D_2\epsilon\bar{\zeta} + D_3\zeta^3 + D_4\zeta^2\bar{\zeta} + D_5\zeta\bar{\zeta}^2 + D_6\bar{\zeta}^3 \\ &\quad + D_7\epsilon^2\zeta + D_8\epsilon^2\bar{\zeta} + D_9\epsilon\zeta^3 + D_{10}\epsilon\zeta^2\bar{\zeta} + D_{11}\epsilon\zeta\bar{\zeta}^2 + D_{12}\epsilon\bar{\zeta}^3 \\ &\quad + D_{13}\zeta^5 + D_{14}\zeta^4\bar{\zeta} + D_{15}\zeta^3\bar{\zeta}^2 + D_{16}\zeta^2\bar{\zeta}^3 + D_{17}\zeta\bar{\zeta}^4 + D_{18}\bar{\zeta}^5. \end{aligned} \quad (4.30)$$

ここまでの変換によって、台車支配方程式の非線形項は 20 個から 18 個にまとまった。次は蛇行動ヒステリシス特性に影響を与える本質的な非線形項を取り出し、ほかの非線形項を消す。そうするために、次のような非線形変換を考える

$$\zeta = \eta + q(\eta, \bar{\eta}), \quad (4.31)$$

$\zeta$  と  $\eta$  は線形関係であり、 $q$  はその精度を修正する非線形関数である。よって、 $\zeta$  と  $\eta$  の物理的な意味は同じである。ただし、

$$\begin{aligned} q(\eta, \bar{\eta}) = & \Gamma_1 \epsilon \eta + \Gamma_2 \epsilon \bar{\eta} + \Gamma_3 \eta^3 + \Gamma_4 \eta^2 \bar{\eta} + \Gamma_5 \eta \bar{\eta}^2 + \Gamma_6 \bar{\eta}^3 \\ & + \Gamma_7 \epsilon^2 \eta + \Gamma_8 \epsilon^2 \bar{\eta} + \Gamma_9 \epsilon \eta^3 + \Gamma_{10} \epsilon \eta^2 \bar{\eta} + \Gamma_{11} \epsilon \eta \bar{\eta}^2 + \Gamma_{12} \epsilon \bar{\eta}^3 \\ & + \Gamma_{13} \eta^5 + \Gamma_{14} \eta^4 \bar{\eta} + \Gamma_{15} \eta^3 \bar{\eta}^2 + \Gamma_{16} \eta^2 \bar{\eta}^3 + \Gamma_{17} \eta \bar{\eta}^4 + \Gamma_{18} \bar{\eta}^5. \end{aligned} \quad (4.32)$$

非線形変換式 (4.31) を運動方程式 (4.29) に代入した時に、最後に変形して得られた式

$$\dot{\eta} = i\omega\eta + n(\eta, \bar{\eta}) \quad (4.33)$$

の非線形部分  $n(\eta, \bar{\eta})$  にやるべく非線形項が含まれないように  $\Gamma_1$  から  $\Gamma_{18}$  までの非線形座標変換の非線形係数項を適切に選ぶ。

式 (4.31) を運動方程式 (4.27) に代入すると

$$\dot{\eta} + \frac{\partial q}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial q}{\partial \bar{\eta}} \dot{\bar{\eta}} = i\omega\eta + i\omega q + \hat{N}_1(\eta, \bar{\eta}) \quad (4.34)$$

が得られる。ただし、非線形部分  $\hat{N}_1(\eta, \bar{\eta})$  は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(\eta, \bar{\eta}) = & D_1 \epsilon (\eta + q) + D_2 \epsilon (\bar{\eta} + \bar{q}) + D_3 (3\eta^2 q + \eta^3) \\ & + D_4 (\eta^2 \bar{q} + \eta^2 \bar{\eta} + 2\eta \bar{\eta} q) + \dots + D_{18} \bar{\eta}^5 \\ = & D_1 \epsilon \eta + D_2 \epsilon \bar{\eta} \dots + D_6 \bar{\eta}^3 + (D_7 + \bar{\Gamma}_2 D_2) \epsilon^2 \eta + (D_8 + \Gamma_2 D_1) \epsilon^2 \bar{\eta} \\ & + \dots + (D_{18} + \bar{\Gamma}_3 D_5 + 3\bar{\Gamma}_3 D_6) \bar{\eta}^5, \end{aligned} \quad (4.35)$$

また、 $\partial q / \partial \eta$ 、 $\partial q / \partial \bar{\eta}$  は式 (4.32) からそれぞれ

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = \Gamma_1 \epsilon + 3\Gamma_3 \eta^2 + \dots + \Gamma_{17} \bar{\eta}^4 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{\eta}} = \Gamma_2 \epsilon + \Gamma_4 \eta^2 + \dots + 5\Gamma_{18} \bar{\eta}^4 \quad (4.37)$$

となる。次に、Appendix C のように  $\Gamma_1$  から  $\Gamma_{18}$  の非線形係数を選ぶと、式 4.33 は以下のように、非線形項が 5 つに減った。

$$\dot{\eta} = i\omega\eta + D_1 \epsilon \eta + D_4 \eta^2 \bar{\eta} + D'_7 \epsilon^2 \eta + D'_{10} \epsilon \eta^2 \bar{\eta} + D'_{15} \eta^3 \bar{\eta}^2 \quad (4.38)$$

が得られる。ここで  $\eta$  は複素数であり、台車システムの振動を明らかにするために、次は極座標変換を用いて、振幅の標準形を導出する。



### 4.2.3 標準形の導出

複素数  $\eta$  を極座標の形に書き換える。

$$\eta = r e^{i\theta}, \quad (4.39)$$

これを式 (4.38) に代入して、実部と虚部を以下のように分ける。

実部:

$$\dot{r} = D_{1R}\epsilon r + D_{4R}r^3 + D'_{7R}\epsilon^2 r + D'_{10R}\epsilon r^3 + D'_{15R}r^5, \quad (4.40)$$

虚部:

$$\dot{\theta} = \omega + D_{1I}\epsilon + D_{4I}r^2 + D'_{7I}\epsilon^2 + D'_{10I}\epsilon r^2 + D'_{15I}r^4, \quad (4.41)$$

式 4.40 は台車システムの振動変化を表す標準形であり、 $r$  の各べきでまとめると

$$\dot{r} = (D_{1R}\epsilon + D'_{7R}\epsilon^2)r + (D_{4R} + D'_{10R}\epsilon)r^3 + D'_{15R}r^5 \quad (4.42)$$

となる。右辺の1個目は線形成分、2個目は3次非線形成分、3個目は5次非線形成分を示している。 $D_{1R}$  は台車線形パラメータ（質量、車輪踏面勾配、長手方向支持ばね定数など）によって決められた係数であり、0.12 と求められた。 $D'_{7R}$  は同じように線形係数であるが、中心多様体理論を用いて変換したときに、 $\alpha_{30}$  から  $\beta_{05}$  の未知な非線形係数が含まれたため、計算することができない。よって、これから  $D'_{7R}$  を非線形係数と呼ぶ。 $D_{4R}$ 、 $D'_{10R}$ 、 $D'_{15R}$  の非線形係数は台車線形パラメータと  $\alpha_{30}$  から  $\beta_{05}$  の非線形係数によって決められる係数である。式 4.42 の4つの未知な係数を求める方法はこれから提案する。

式 4.42 の線形部分だけ考慮する場合、 $\epsilon$  が正の時、すなわち走行速度は線形臨界速度より高い時、 $\dot{r}$  は正の値を持つ（ $\epsilon$  は微小であるため、 $D'_{7R}\epsilon^2$  の項は  $D_{1R}\epsilon$  の項と比べて効果が小さいため、無視できる）、これ蛇行動の線形解析結果と同じように振幅が成長して蛇行動が生じる結果になる。逆に、 $\epsilon$  が負の時、すなわち走行速度は線形臨界速度より小さい時に、 $\dot{r}$  は負の値を持つため、台車振幅はゼロに収束して安定する。

式 4.41 は蛇行動固有周波数の変化を表す式である。本研究は蛇行動の定常振幅の解析に注目するため、これに関する解析は行わない。次は実験データを用いて、 $D_{1R}$ 、 $D_{4R}$ 、 $D'_{10R}$ 、 $D'_{15R}$  の非線形係数を同定する手法を提案する。

#### 4.2.4 標準形の非線形係数の同定

振幅標準形式 4.42 の  $\dot{r}$  をゼロにすることで、定常振幅の方程式は以下のように求まる。

$$r_{st} [D_{1R}\epsilon + D'_{7R}\epsilon^2 + (D_{4R} + D'_{10R}\epsilon)r_{st}^2 + D'_{15R}r_{st}^4] = 0. \quad (4.43)$$

よって、一輪軸台車の定常振幅はゼロ定常振幅

$$r_{st} = 0 \quad (4.44)$$

とリミットサイクル

$$D_{1R}\epsilon + D'_{7R}\epsilon^2 + (D_{4R} + D'_{10R}\epsilon)r_{st}^2 + D'_{15R}r_{st}^4 = 0 \quad (4.45)$$

を持つことが分かる。次は無次元振幅  $r$  と台車の横振幅の関係を求める。非線形座標変換式 (4.31) と極座標変換 (4.39) によって、 $\zeta$  と  $r$  は以下の関係がある。

$$\zeta \approx \eta = re^{i\theta}. \quad (4.46)$$

複素変換式 (4.26) を考慮すると

$$z_1 = \zeta + \bar{\zeta} \approx 2r \quad (4.47)$$

の関係が分かる。このように、標準形の座標  $r$  と座標  $z_1$  は線形関係を持ち、同じ物理的な意味を持つことが分かる。また、中心多様体理論と変換式 (4.12) によって、

$$y^* = x_1 = z_1 + z_3 \approx z_1. \quad (4.48)$$

の関係がある。ここで、 $z_1$  と  $z_3$  は座標変換行列  $\mathbf{P}$  によって、横変位  $y$ 、横速度  $\dot{y}$ 、回転角度  $\psi$ 、回転角速度  $\dot{\psi}$  4 つの物量的な量が含まれる。 $z_3$  の振動は時間とともに減衰するため、蛇行動定常振幅を求める際して、省略できる。無次元量  $r$  と有次元変位  $y$  の関係は以下のようにもとまる。

$$y \approx 2d_0r = 0.097r. \quad (4.49)$$

以上より、蛇行動定常振幅を求める際に、無次元量  $r$  と有次元量である横変位  $y$  は式 (4.49) のような線形関係を持つが、物理的な意味は異なる。無次元量  $r$  は横変位  $y$ 、横速度  $\dot{y}$ 、回転角度  $\psi$ 、回転角速度  $\dot{\psi}$  4 つの物量的な量が含まれる量である。

標準形 (4.42) の 4 つの非線形係数  $D_{1R}$ 、 $D_{4R}$ 、 $D'_{10R}$ 、 $D'_{15R}$  を実験で測定したデータで同定する。図 4.1 にマークした (1) から (4) の非線形臨界速度に近い速度 6.4 m/s、

非線形と線形臨界速度の時の真ん中の速度 7.2 m/s、線形臨界速度 8.0 m/s、測定した最大速度 8.8 m/s の 4 つの速度の時に測定した蛇行動定常振幅  $y_{amp1}$ 、 $y_{amp2}$ 、 $y_{amp3}$ 、 $y_{amp4}$  をリミットサイクルの方程式式 (4.45) に代入する。それぞれの無次元パラメータ  $\epsilon$  はそれぞれ  $\epsilon_1 = -0.2$ 、 $\epsilon_2 = -0.1$ 、 $\epsilon_3 = 0$ 、 $\epsilon_4 = 0.1$  である。同定された非線形係数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} D_{4R} &= 2030, D'_{7R} = -0.06, \\ D'_{10R} &= -360, D'_{15R} = -4.2 \times 10^7. \end{aligned} \quad (4.50)$$

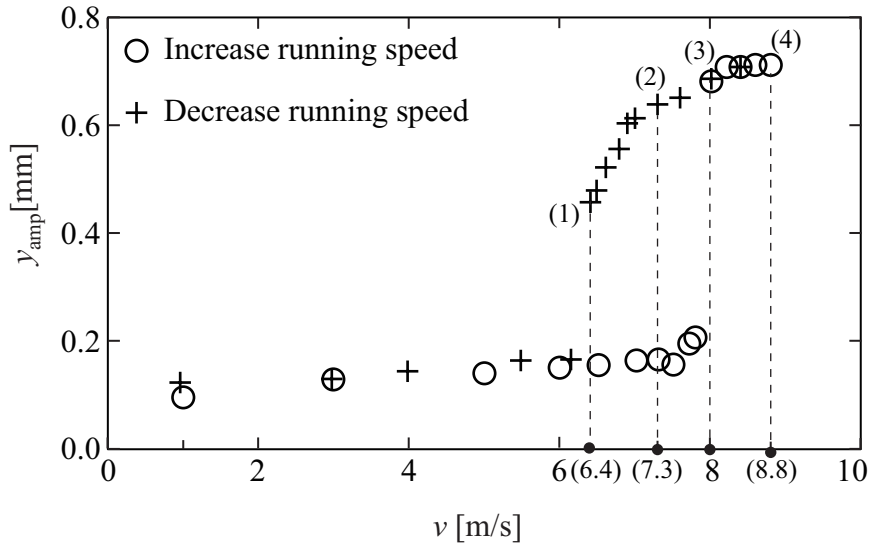


図 4.1: Identification of nonlinear coefficients in the normal form with experimentally observed bifurcation diagram.

非線形係数の同定により、一輪軸台車モデルの標準形を求めることができた。標準形からヒステリシス曲線は求まり、実験計測の結果との比較は図 4.2 に示している。理論解析と実験観測の蛇行動の安定な定常振幅がよく一致することにより、提案した理論解析手法の正確性が証明された。理論解析で求めた不安定なリミットサイクルより、台車の外乱に対するロバスト性は正確に把握できることを示した。

しかし、中心多様体理論を用いたアプローチでは、非線形座標変換が行われるため、実験観測データによる非線形係数の同定に誤差が生じている。また、以上の理論解析により、任意な 1 つの 3 次非線形項と 1 つの 5 次非線形項の 2 つの非線形成分は蛇行動ヒステリシス特性を特徴づけられることが分かったため、最初の運動方

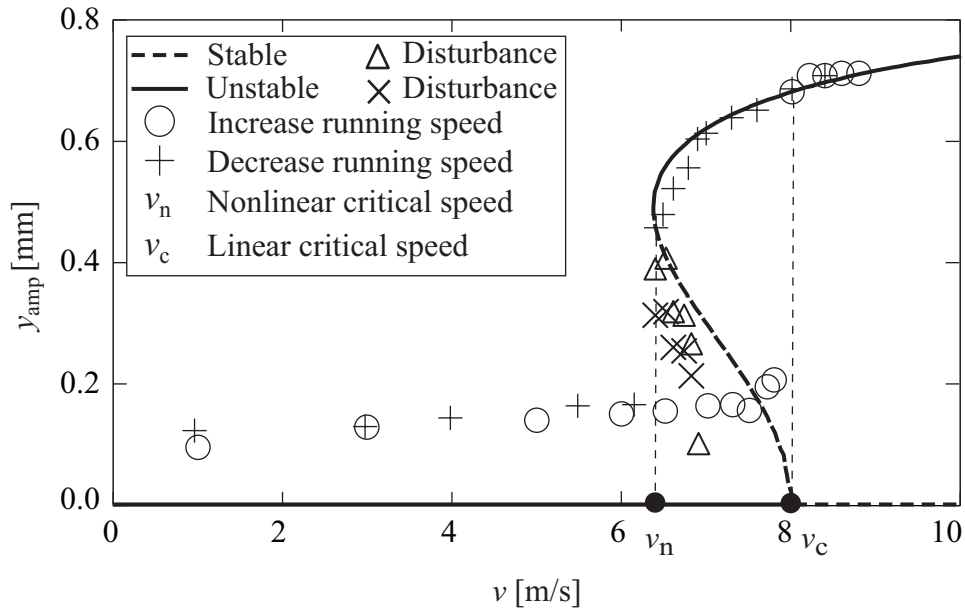


図 4.2: Comparison of theoretical and experimental results.

程式に 20 個の非線形項を全部考える必要がなく、3 次と 5 次非線形項を一個ずつで 20 個の非線形項を代表できる。

### 4.3 非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開アプローチ

#### 4.3.1 非線形成分の代表項

この節は蛇行動ヒステリシス特性を解析できる手法を新たに提案し、 $y^{*3}$  と  $y^{*5}$  の 2 つの非線形項で 20 項の非線形成分を代表することを証明する。非線形成分を  $y^{*3}$  と  $y^{*5}$  の非線形項 2 つで代表した時の簡略化方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}^* + \frac{d'_{11}}{v^*} \dot{y}^* + k_{11} y^* + k_{12} \psi + \beta_3 y^{*3} + \beta_5 y^{*5} &= 0 \\
 \ddot{\psi} + \frac{d'_{22}}{v^*} \dot{\psi} + k_{21} y^* + \psi &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

ただし、 $\beta_3$  と  $\beta_5$  は非線形成分を代表する 3 次と 5 次非線形項の係数である。

### 4.3.2 多重尺度法による多時間尺度の設定

式 4.51 を以下のように行列化する。

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{N}(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.52)$$

ただし、

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y^* \\ \psi \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{d'_{11}}{v^*} & 0 \\ 0 & \frac{d'_{22}}{v^*} \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

摂動法を行うために、臨界速度からずれる量を  $\Delta v = \epsilon \Delta v$  とし、 $\Delta v$  はオーダー  $O(1)$  を持ち、 $\epsilon$  は 1 より十分小さい無次元パラメータ ( $|\epsilon| \ll 1$ ) とする。

$$v^* = v_c^*(1 + \Delta v) = v_c^*(1 + \epsilon \Delta \hat{v}), \quad (4.54)$$

ただし、 $v_c^*$  は無次元線形臨界速度である。よって、以下のような関係式がある。

$$\frac{d'_{11}}{v^*} = \frac{d'_{11}}{v_c^*(1 + \Delta v)} \approx d_{11}(1 - \Delta v + 2\Delta v^2) \quad (4.55)$$

$$\frac{d'_{22}}{v^*} = \frac{d'_{22}}{v_c^*(1 + \Delta v)} \approx d_{22}(1 - \Delta v + 2\Delta v^2), \quad (4.56)$$

ただし、

$$d_{11} = \frac{d'_{11}}{v_c^*}, \quad d_{22} = \frac{d'_{22}}{v_c^*}. \quad (4.57)$$

行列  $\mathbf{C}$  は以下のようになる。

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_c(1 - \Delta v + \Delta v^2) \approx \mathbf{C}_c(1 - \epsilon \Delta \hat{v} + \epsilon^2 \Delta \hat{v}^2), \quad (4.58)$$

ただし、

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

振動解  $\mathbf{x}$  の振幅は線形臨界速度の近傍で非線形成分によって変化する。この変化は振動の位相変化に比べて非常に遅いため、同じ時間でこの 2 つの変化速度を表現

することができない。ここで、多重尺度を用いて、3次非線形成分と5次非線形成分による振幅の時間変化を以下のような異なる時間尺度で表す。

$$t_0 = t, \quad t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t, \quad (4.60)$$

ここで、 $t_0$  は位相変化の表す時間尺度、 $t_1$  は3次非線形成分による振幅変化を表す尺度、 $t_2$  は5次非線形成分による振幅変化を表す時間尺度である。 $t_2$  は $t_1$  より十分に遅い、 $t_1$  は $t_0$  より十分に遅い。よって、時間微分は以下のように表せる。

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 \quad (4.61)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_1 D_0 + 2\epsilon^2 D_2 D_0 + \epsilon^2 D_1^2, \quad (4.62)$$

ただし、 $D_0$ 、 $D_1$ 、 $D_2$  はそれぞれ時間尺度  $t_0$ 、 $t_1$ 、 $t_2$  に関する偏微分である。

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t_2}. \quad (4.63)$$

小さいな無次元量  $\epsilon$  を用いて、振動解  $\mathbf{x}$  を以下のような展開式で仮定する。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{x}_1 + \epsilon^2 \mathbf{x}_2, \quad (4.64)$$

ただし、線形部分の  $\mathbf{x}_0$  は以下のようにおく。 $\epsilon \mathbf{x}_1$  は  $\mathbf{x}_0$  の  $\mathbf{x}$  からのずれを修正する項であり、 $\epsilon^2 \mathbf{x}_2$  は  $\epsilon \mathbf{x}_1$  の  $\mathbf{x}$  からのずれを修正する項である。よって、 $\epsilon^2 \mathbf{x}_2$  は  $\epsilon \mathbf{x}_1$  より十分小さい項であり、 $\epsilon \mathbf{x}_1$  は  $\mathbf{x}_0$  より十分小さい項である。

$$\mathbf{x}_0 = a(t_1, t_2) e^{\lambda_0 t_0} \begin{bmatrix} y_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = a e^{\lambda_0 t_0} \Phi_0, \quad (4.65)$$

ここで、 $\lambda_0$  は式 (4.52) の線形部分の固有値、 $\Phi_0$  固有値  $\lambda_0$  の固有ベクトル、 $a(t_1, t_2)$  はモード  $\Phi_0$  の振幅変化を表す遅い時間尺度  $t_1$ 、 $t_2$  に関する式である。展開式 (4.64) を方程式 (4.52) に代入して  $\epsilon$  の各べきで式を  $O(\epsilon^0)$  に関する線形部分、 $O(\epsilon^1)$  に関する3次非線形部分、 $O(\epsilon^2)$  に関する5次非線形部分に分ける。

$$O(\epsilon^0) : D_0^2 \mathbf{x}_0 + C_c D_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{K} \mathbf{x}_0 = 0 \quad (4.66)$$

$$O(\epsilon^1) : D_0^2 \mathbf{x}_1 + C_c D_0 \mathbf{x}_1 + \mathbf{K} \mathbf{x}_1 = -2D_1 D_0 \mathbf{x}_0 - C_c D_1 \mathbf{x}_0 + C_c \Delta \hat{v} D_0 \mathbf{x}_0 - \hat{\beta}_3 (a e^{\lambda_0 t_0} + \bar{a} e^{\bar{\lambda}_0 t_0})^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$O(\epsilon^2) : D_0^2 \mathbf{x}_2 + C_c D_0 \mathbf{x}_2 + \mathbf{K} \mathbf{x}_2 = -2D_2 D_0 \mathbf{x}_0 - C_c D_2 \mathbf{x}_0 + C_c \Delta \hat{v} D_1 \mathbf{x}_0 - D_1^2 \mathbf{x}_0 - C_c \Delta \hat{v}^2 D_0 \mathbf{x}_0 - 10 \hat{\beta}_5 |a|^4 a |y_0|^4 y_0 e^{i\omega t_0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots, \quad (4.68)$$

また、線形部分を以下のように書き換える。

$$O(\epsilon^0) : \mathbf{L}\Phi_0 a = 0, \quad (4.69)$$

ただし、 $\mathbf{L}$  は一輪軸台車の  $d_{11}$  から  $k_{21}$  の無次元線形パラメータと固有値  $\lambda_0$  による特性行列、この行列は非対称行列であり、非自己随伴である。

$$\mathbf{L} = \lambda_0^2 \mathbf{I} + \lambda_0 \mathbf{C}_c + \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + d_{11}\lambda_0 + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & \lambda_0^2 + d_{22}\lambda_0 + 1 \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

この線形行列によって、鉄道車両は非自己随伴特性を有する。ここでは、この非自己随伴特性を考慮して、3次非線形、5次非線形のそれぞれの式(4.67)、式(4.68)に対してモード展開を行う。線形特性行列に対して  $|\mathbf{L}| = 0$  を考慮し、固有値  $\lambda_0$  に関する特性方程式は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \lambda_0^4 + (d_{11} + d_{22})\lambda_0^3 + (d_{11}d_{22} + k_{11} + 1)\lambda_0^2 + (d_{11} + d_{22}k_{11})\lambda_0 \\ + k_{11} - k_{12}k_{21} = 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

これは第3章の線形解析したときの結果と同じようになり、蛇行動線形臨界速度の時に1組の共役な純虚数の固有値と1組の実部を持つ共役な複素数をもつことが分かる。

### 4.3.3 非自己随伴行列による可解条件

本章の中心多様体理論を用いたアプローチの時分かるように、実部を持つ共役な複素数のモードは線形特性によって快速的に収束するため、蛇行動線形臨界速度近傍の非線形特性に対して、非線形特性によってゆっくり変化する共役な純虚数の固有値のモードに注目すればよい。固有値  $i\omega$  の固有ベクトルは以下のように求まる。

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} k_{12} \\ \omega^2 - k_{11} - id_{11}\omega \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

純虚数の固有値  $\lambda_0 = i\omega$  を3次非線形の方程式(4.67)に代入して、 $O(\epsilon^1)$ に関する式は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} D_0^2 \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_c D_0 \mathbf{x}_1 + \mathbf{K} \mathbf{x}_1 = [(-2i\omega \mathbf{I} - \mathbf{C}_c) D_1 a + i\omega \Delta \hat{v} a \mathbf{C}_c] \begin{bmatrix} y_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} e^{i\omega t_0} \\ - 3\hat{\beta}_3 |a|^2 a |y_0|^2 y_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t_0} - \hat{\beta}_3 a^3 y_0^3 e^{3i\omega t_0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c.c., \end{aligned} \quad (4.73)$$

ただし、*c.c.* は式の右辺の項の共役な項を表す。振幅  $a(t_1, t_2)$  の  $t_1$  に関する変化式は  $\mathbf{x}_1$  のモード  $\Phi_1$  の可解条件から求められる。モード  $\Phi_1$  の可解条件を式 (4.73) から取り出すために、以下の式を満足する非自己随伴行列  $\mathbf{L}$  の随伴行列  $\bar{\mathbf{L}}^T$  とその随伴行列の固有ベクトル  $\tilde{\Phi}_0$  を考える。

$$\bar{\mathbf{L}}^T \tilde{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}_0^T \mathbf{L} = 0. \quad (4.74)$$

以上の式を満足する  $\tilde{\Phi}_0$  は

$$\tilde{\Phi}_0 = \begin{bmatrix} \omega^2 - k_{22} + id_{22}\omega \\ k_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

である。非自己随伴行列  $\mathbf{L}$  の像は核空間と補空間を持つ。 $\mathbf{L}$  の核空間は固有ベクトル  $\Phi_0$  で張られる空間であり、補空間は  $\Phi_1$  と  $\Phi_2$  などのベクトルが張られる空間である。 $\mathbf{L}$  は非自己随伴特性を持つため、 $\mathbf{L}$  の核空間と補空間が直交せず、随伴行列  $\bar{\mathbf{L}}^T$  の補空間、核空間とそれぞれで直交することが知られている [70]。 $\Phi_1$  の解が存在するために、式 (4.73) の右辺の  $e^{i\omega t_0}$  成分は随伴行列  $\bar{\mathbf{L}}^T$  の核空間と直交する必要がある。すなわち、 $\tilde{\Phi}_0$  と式 (4.73) の右辺の内積が 0 であることは  $\Phi_1$  の可解条件が存在する必要条件である。

式 (4.73) の両辺に  $\tilde{\Phi}_0$  をとると、振幅  $a(t_1, t_2)$  の  $t_1$  に関する変化式は以下のように求まる。

$$\tilde{\Phi}_0^T \{ [(-2i\omega \mathbf{I} - \mathbf{C}_c) D_1 a + i\omega \Delta \hat{v} a \mathbf{C}_c] \begin{bmatrix} y_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} - 3\hat{\beta}_3 |a|^2 a |y_0|^2 y_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \} e^{i\omega t_0} = 0, \quad (4.76)$$

または以下のように書き換えられる。

$$D_1 a = -\frac{Q}{P} \Delta \hat{v} a - \frac{R}{P} \hat{\beta}_3 |a|^2 a, \quad (4.77)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P &= a_r + a_i i, \quad a_r = -2k_{12}(d_{11}k_{22} + d_{22}k_{11}), \quad a_i = -2\omega k_{12}(2\omega^2 - k_{11} - k_{22} - d_{11}d_{22}), \\ Q &= b_r + b_i i, \quad b_r = 2k_{12}\omega^2 d_{11}d_{22}, \quad b_i = 0, \\ R &= c_r + c_i i, \quad c_r = |y_0|^2 y_0 (k_{22} - \omega^2), \quad c_i = |y_0|^2 y_0 d_{22}\omega. \end{aligned} \quad (4.78)$$

この式は 3 次非線形成分による蛇行動定常振幅の変化式である。式 (4.77) で、 $-Q/P$  の値によって、ホップ分岐は重臨界であるか超臨界であるかを判別できる。これは



第5章で説明する。次は  $\mathbf{x}_1$  の  $e^{3i\omega t_0}$  成分に関する特解を求めるために、 $\mathbf{x}_1$  を以下のようにおく。

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} e^{3i\omega t_0}. \quad (4.79)$$

この式を式(4.73)に代入して、 $e^{3i\omega t_0}$  に関する成分を取り出すと以下のようになる。

$$D_0^2 \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_c D_0 \mathbf{x}_1 + \mathbf{K} \mathbf{x}_1 = -\hat{\beta}_3 a^3 y_0^3 e^{3i\omega t_0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c.c. \quad (4.80)$$

よって、 $\mathbf{x}_1$  の特解は以下のように求まる。

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\hat{\alpha}_3 a^3 y_0^3 k_{12}}{64\omega^4 k_{12} - 4\omega a_i + 12i\omega a_r} \begin{bmatrix} 9\omega^2 - k_{22} - 3i\omega d_{22} \\ k_{21} \end{bmatrix} e^{3i\omega t_0}. \quad (4.81)$$

$\mathbf{x}_1$  の特解を式(4.68)に代入すると、以下の5次非線形成分  $O(\epsilon^2)$  に関する式が得られる。

$$\begin{aligned} D_0^2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{C}_c D_0 \mathbf{x}_2 + \mathbf{K} \mathbf{x}_2 = & -2D_2 D_0 \mathbf{x}_0 - \mathbf{C}_c D_2 \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_c \Delta \hat{v} D_1 \mathbf{x}_0 - D_1^2 \mathbf{x}_0 - \mathbf{C}_c \Delta \hat{v}^2 D_0 \mathbf{x}_0 \\ & + (-10\hat{\beta}_5 |a|^4 a |y_0|^4 y_0 - 3\hat{\beta}_3 \bar{a}^2 \bar{y}_0^2 y_1) e^{i\omega t_0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & - 2D_1 D_0 \mathbf{x}_1 - \mathbf{C}_c D_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_c \Delta \hat{v} D_0 \mathbf{x}_1 + \{\dots\} e^{3i\omega t_0} \\ & + \{\dots\} e^{5i\omega t_0} + c.c., \end{aligned} \quad (4.82)$$

ただし、 $\{\dots\} e^{3i\omega t_0}$  と  $\{\dots\} e^{5i\omega t_0}$  はそれぞれ  $e^{3i\omega t_0}$ 、 $e^{5i\omega t_0}$  の成分を含めた項であり、これらの成分は利用しないため、それらの係数を求めずに  $\{\dots\}$  とおく。振幅  $a(t_1, t_2)$  の  $t_2$  に関する変化式を求めるために、式(4.82)に対して式(4.73)と同じように両辺に  $\bar{\Phi}_0$  をとると、以下のように可解条件が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0^T \left\{ [(-2i\omega \mathbf{I} - \mathbf{C}_c) D_2 a + \Delta \hat{v} D_1 a \mathbf{C}_c - D_1^2 a - i\omega \Delta \hat{v}^2 \mathbf{C}_c] \begin{bmatrix} y_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \right\} e^{i\omega t_0} \\ - \bar{\Phi}_0^T \left\{ (10\hat{\beta}_5 |a|^4 a |y_0|^4 y_0 + 3\hat{\beta}_3 \bar{a}^2 \bar{y}_0^2 y_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} e^{i\omega t_0} = 0, \end{aligned} \quad (4.83)$$

ここで、 $D_1^2 a$  は式(4.77)から以下のように求まる。

$$\begin{aligned} D_1^2 a = & -\frac{Q}{P} \Delta \hat{v} D_1 a - \frac{R}{P} \hat{\beta}_3 (2|a|^2 D_1 a + a^2 D_1 \bar{a}) \\ = & \frac{Q^2}{P^2} \Delta \hat{v}^2 a + \left( \frac{3QR}{P^2} + \frac{R\bar{Q}}{|P|^2} \right) \hat{\beta}_3 \Delta \hat{v} |a|^2 a + \left( \frac{2R^2}{P^2} + \frac{|R|^2}{|P|^2} \right) \hat{\beta}_3^2 |a|^4 a. \end{aligned} \quad (4.84)$$

$D_1^2 a$  と  $\boldsymbol{x}_0$  を式 (4.83) に代入すると、 $D_2 a$  に関する式が以下のように求まる。

$$D_2 a = -\frac{H}{P} \Delta \hat{v}^2 a - \frac{G}{P} \hat{\beta}_3 \Delta \hat{v} |a|^2 a - \left( \frac{M}{P} \hat{\beta}_3^2 + \frac{N}{P} \hat{\beta}_5 \right) |a|^4 a, \quad (4.85)$$

ただし、

$$\begin{aligned} H &= -\frac{ib_r Q}{\omega P} + \frac{(\omega a_i - b_r) Q^2}{2\omega^2 P^2} - \frac{ia_r Q^2}{2\omega P^2} + b_r \\ G &= -\frac{ib_r R}{\omega P} + \left( \frac{\omega a_i - b_r}{2\omega^2} - \frac{ia_r}{2\omega} \right) \left( \frac{3QR}{P^2} + \frac{R\bar{Q}}{|P|^2} \right) \\ M &= \left( \frac{\omega a_i - b_r}{2\omega^2} - \frac{ia_r}{2\omega} \right) \left( \frac{2R^2}{P^2} + \frac{|R|^2}{|P|^2} \right) + \frac{3(-8\omega^2 y_0^3 + c_r + 3ic_i)R}{64\omega^4 k_{12} - 4\omega a_i + 12i\omega a_r} \\ N &= 10y_0^2 R. \end{aligned} \quad (4.86)$$

以上より、振幅  $a(t_1, t_2)$  の  $t_1$  と  $t_2$  に関する変化式を求めることができた。

#### 4.3.4 標準形の導出

振幅  $a(t_1, t_2)$  は複素数であり、実数の振幅を求めるため、 $a(t_1, t_2)$  を極座標で以下のようにおく。

$$a = \frac{1}{2} \alpha(t_1, t_2) e^{i\phi(t_1, t_2)}. \quad (4.87)$$

よって、 $Da$  は以下のように実部と虚部に分けられる。

$$Da = \frac{1}{2} (D\alpha + i\alpha D\phi) e^{i\phi}. \quad (4.88)$$

また、 $Da$  は振幅  $a(t_1, t_2)$  の  $t_1$  に関する式 (4.61) と  $t_2$  に関する式 (4.87) を用いて、以下のように書ける。

$$\begin{aligned} Da &= \epsilon D_1 a + \epsilon^2 D_2 a \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\left( \frac{H}{P} \Delta v + \frac{Q}{P} \right) \Delta v - \frac{1}{4} \left( \frac{G}{P} \Delta v + \frac{R}{P} \right) \beta_3 \alpha^2 - \frac{1}{16} \left( \frac{M}{P} \beta_3^2 + \frac{N}{P} \beta_5 \right) \alpha^4 \right] \alpha e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

式 (4.88) と式 (4.89) に実部の係数により、以下の関係式、すなわち  $\boldsymbol{x}$  の実数の振幅  $\alpha$  に関する標準形は以下のように求まる。

$$\dot{\alpha} = -(L_1 \Delta v + L_2 \Delta v^2 + N_1 \alpha^2 + N_2 \Delta v \alpha^2 + N_3 \alpha^4) \alpha, \quad (4.90)$$

ただし、

$$\begin{aligned} L_1 &= \operatorname{Re} \left[ \frac{Q}{P} \right], \quad L_2 = \operatorname{Re} \left[ \frac{H}{P} \right], \quad N_1 = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left[ \frac{R}{P} \right] \beta_3, \\ N_2 &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left[ \frac{G}{P} \right] \beta_3, \quad N_3 = \frac{1}{16} \operatorname{Re} \left[ \frac{M}{P} \beta_3^2 + \frac{N}{P} \beta_5 \right]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

$D\alpha$  を 0 おくことで、蛇行動の定常振幅は自明な解であるゼロの振幅

$$\alpha_{st} = 0, \quad (4.92)$$

と非自明な解によるリミットサイクル

$$L_1 \Delta v + L_2 \Delta v^2 + N_1 \alpha_{st}^2 + N_2 \Delta v \alpha_{st}^2 + N_3 \alpha_{st}^4 = 0. \quad (4.93)$$

をもつことが分かる。また、3次非線形項  $y^{*3}$  を1つと5次非線形項  $y^{*5}$  を1つで全部の非線形成分を代表して非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開アプローチで得られた式(4.90)と中心多様体理論を用いたアプローチで得られた式(4.42)が一致することから、2つの非線形項でヒステリシス特性を特徴づけられることと新たに提案した非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開アプローチが妥当であることが示された。

### 4.3.5 非線形成分を代表した非線形項係数の同定

台車線形パラメータ台車質量  $m$ 、車輪半径  $r_0$ 、車輪踏面勾配  $\gamma_0$  などを用いて、無次元パラメータ  $v_c^*$ 、 $d_{11}$  などは以下のように求めた。

$$\begin{aligned} v_c^* &= 6.4, \quad d_{11} = 0.27, \quad d_{22} = 0.40, \quad k_{11} = 0.11, \quad k_{12} = -1.74, \quad k_{21} = 0.14, \\ P &= 1.11 - 0.68i, \quad Q = -0.18, \quad R = -2.78 - 1.46i, \quad H = -0.15 - 0.04i, \\ G &= 1.40 - 0.91i, \quad M = 13.77 + 0.51i, \quad N = -84.16 - 44.19i. \end{aligned} \quad (4.94)$$

式(4.90)の線形係数  $L_1$ 、 $L_2$  は  $m$ 、 $d_0$ 、 $\gamma_0$  などの台車線形パラメータによって0.12、0.08と求めた。 $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$  は非線形係数で、台車線形パラメータと非線形成分を代表した非線形項の係数  $\beta_3$  と  $\beta_5$  によって、 $0.31\beta_3$ 、 $-0.32\beta_3$ 、 $-0.55\beta_3^2 + 2.35\beta_5$  と求めた。よって、式(4.90)は以下のように書き換えられる。

$$\dot{\alpha} = (0.12 + 0.08\Delta v)\Delta v\alpha + (0.31 - 0.32\Delta v)\beta_3\alpha^3 + (-0.55\beta_3^2 + 2.35\beta_5)\alpha^5. \quad (4.95)$$

この標準形から、蛇行動定常振幅に影響を与える3次非線形係数は台車システムの3次非線形成分を代表した非線形項の係数  $\beta_3$  と線形関係を持つことと、5次非線形係数は3次非線形成分を代表した非線形項の係数  $\beta_3$  の2乗、 $\beta_5$  と線形関係をもつことが明らかにされた。無次元振幅  $\alpha$  と有次元横振幅  $y$  の関係は以下のようにまとまる。

$$y_{st} = d_0 y_{st}^* = -d_0 k_{12} \alpha_{st}. \quad (4.96)$$

無次元振幅  $\alpha$  と有次元横振幅  $y$  の関係は線形関係であることが分かる。よって、非線形座標変換を用いた中心多様体理論を用いたアプローチが得られる非線形係数より正確になる。図4.1に示した線形臨界速度の隣の(2)と(4)の2つの速度  $\epsilon_2 = -0.1$ 、 $\epsilon_4 = 0.1$  の時の定常振幅  $y_{st2} = 0.64$  mm、 $y_{st4} = 0.71$  mm を式(4.95)に代入して、非線形成分を代表した非線形項の係数は同定され以下のように求まる。

$$\beta_3 = 3900, \beta_5 = -7.4 \times 10^6. \quad (4.97)$$

また、蛇行動ヒステリシス曲線は図4.3のように求まった。安定な定常振幅が実験結果とよく一致することが示された。

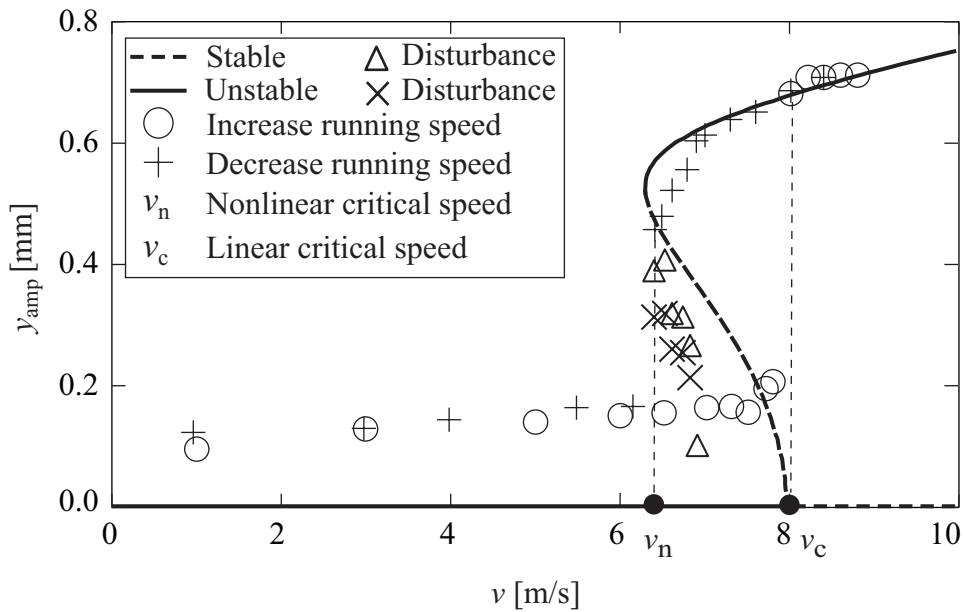


図 4.3: Theoretical obtained bifurcation diagram.

## 4.4 結言

この章は蛇行動ヒステリシス現象に対して、2つの理論的な解析手法を提案した。これらの手法を用いて、蛇行動振幅の変化を表す標準形を導出できることが証明された。標準形に蛇行動ヒステリシス現象を特徴づける非線形項は3つであることを明らかにした。蛇行動定常振幅を明らかにするための鉄道車両の運動方程式には20項の非線形項が存在するが、提案手法により、3次非線形項1つと5次非線形項1つですべての3次と5次非線形成分を代表できることが明らかにされた。また、実験データを用いて、標準形の非線形係数を同定する手法を提案し、理論的に求めたヒステリシス曲線は実験で計測した曲線と一致することから、提案した理論手法の正確性を確認した。また、非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開アプローチを用いて、標準形の非線形係数と台車線形パラメータ及び非線形成分を代表した非線形項の係数の関係式が求められ、これによって台車質量  $m$ 、車輪半径  $r_0$ 、車輪踏面勾配  $\gamma_0$  などの台車線形パラメータによるヒステリシス特性への影響を解析できることが示された。

# 第5章 台車の線形パラメータによる ヒステリシス特徴への影響

## 5.1 緒言

第4章により、台車線形パラメータは蛇行動線形臨界速度を変えられることのみならず、非線形係数に影響を与えていることが分かった。よって、線形パラメータの変化により、蛇行動時の定常振幅が変化し、外乱に対するロバスト性が変化する。したがって、線形パラメータを変えて車両蛇行動速度を上げた時に、蛇行動非線形特性の変化も考慮するべきである。本章は第4章で提案した非自己随伴特性を考慮に入れたモード展開アプローチを用いて、台車線形パラメータによるヒステリシス特徴への影響を解析する。

## 5.2 線形臨界速度の変化

非線形特性の変化を解析する前に、台車線形パラメータによる蛇行動線形臨界速度の変化について本研究で用いた一輪軸台車モデルのパラメータを用いて解析例を求める。表2.1の台車の線形パラメータを基準にして長手方向の支持ばね定数  $k_x$ 、質量  $m$  (慣性力と荷重の変化を同時に考え、荷重によってクリープ係数の変化は付録Bによって  $\kappa = \kappa_0 p^{2/3}$  のように求められる)、踏面勾配  $\gamma_0$ 、車輪半径  $r_0$ 、レール幅  $d_0$ 、長手方向の支持ばね支持距離  $d_1$  の6つの線形パラメータをそれぞれ  $p$  倍を変化させた時の蛇行動線形臨界速度の変化を求め、それぞれ図5.1(a) から図5.1(f) に示す。横軸はそれぞれのパラメータの変化率  $p$  を示し、縦軸は無次元蛇行動線形臨界速度を示す。実線はその無次元線形臨界速度の変化を表す曲線であり、本研究で用いた一輪軸台車モデルの基準としたパラメータによって得られる範囲までのデータを示している。 $v_{c-max}^*$  は本解析で用いたパラメータより求められる最大蛇行動線形臨界速度を示す。それ以上パラメータを変えた時、走行速度をいくら上げても運動方程式の固有値はすべて負の実部を持つようになるため、蛇行動が発生しなくな

る。図から分かるように、長手方向の支持ばね定数、車輪半径、長手方向の支持ばね支持距離の増大とともに、蛇行動線形臨界速度が大きくなることが分かった。台車質量、車輪踏面勾配、レール幅の増大とともに、蛇行動線形臨界速度が小さくなることも分かった。また、台車質量の変化によって蛇行動線形臨界速度に与える影響が他のパラメータに比べて小さいことが分かった。

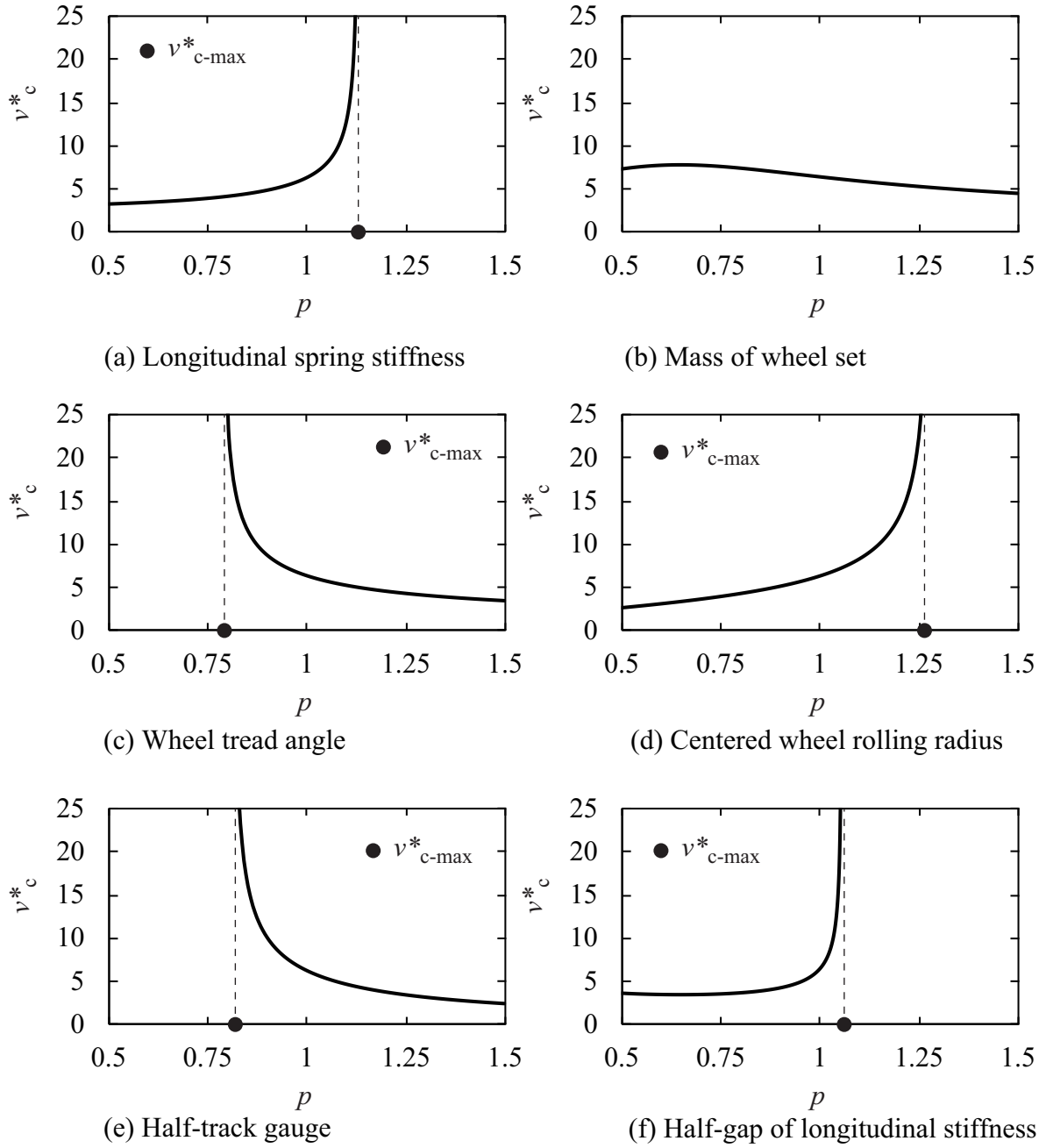


图 5.1: Variation of linear critical speed due to linear parameters. (a)  $k_x=200p$  N/m, (b)  $m=2.175p$  kg, (c)  $\gamma_0=p/25$ , (d)  $r_0=0.036p$  m, (e)  $d_0=0.0485p$  m, (f)  $d_1=0.085p$  m.



### 5.3 ホップ分岐種類の変化

鉄道蛇行動のホップ分岐は鉄道システムの線形成分と3次非線形成分によって決められることが知られている [43]。第4章は3次非線形成分による蛇行動振動の変化式 (4.77) を以下のように求めた。

$$D_1 a = -\frac{Q}{P} \Delta v a - \frac{R}{P} \hat{\beta}_3 |a|^2 a. \quad (5.1)$$

極座標変化した後の実数の振幅は式 (4.89) の3次非線形成分だけを考慮した式は

$$Da(t_1) = \epsilon D_1 a \quad (5.2)$$

となる。第4章と同じように  $D_1 a$  を代入して、実部を分離すると、定常振幅  $\alpha$  が3次非線形成分による変化式は以下のように求まる。

$$\dot{\alpha} = -L \Delta v \alpha - N \beta_3 \alpha^3, \quad (5.3)$$

ただし、

$$L = \operatorname{Re} \left[ \frac{Q}{P} \right], \quad N = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left[ \frac{R}{P} \right]. \quad (5.4)$$

よって、リミットサイクルは以下ようになる。

$$\alpha = \sqrt{\sigma \Delta v}, \quad (5.5)$$

ただし、

$$\sigma = -\frac{L}{N \beta_3}. \quad (5.6)$$

ここで、 $L$  と  $N$  は台車線形パラメータによって決められる定数であり、 $\beta_3$  は3次非線形成分を代表した非線形項の係数である。 $\sigma$  は線形と3次非線形係数を含めた無次元量である。リミットサイクルが存在するためには、式 (5.5) のルートの中が正である必要がある。図 5.2 に示した通り、 $\sigma$  が正の時に、 $\Delta v$  が正、すなわち蛇行動臨界速度より高い時に、リミットサイクルが存在し、リミットサイクルの近傍の安定性判別 [71] により安定なリミットサイクルであることが分かる。また、 $\sigma$  が負の時に、 $\Delta v$  が負、すなわち蛇行動臨界速度より低い時に、不安定なリミットサイクルが存在する。 $\sigma$  の正負はホップ分岐の種類を決めることを明らかにした。 $\sigma$  は線形パラメータと3次非線形成分の係数決められるため、蛇行動のホップ分岐の種類は線形パラメータと3次非線形によって決められることが分かる。

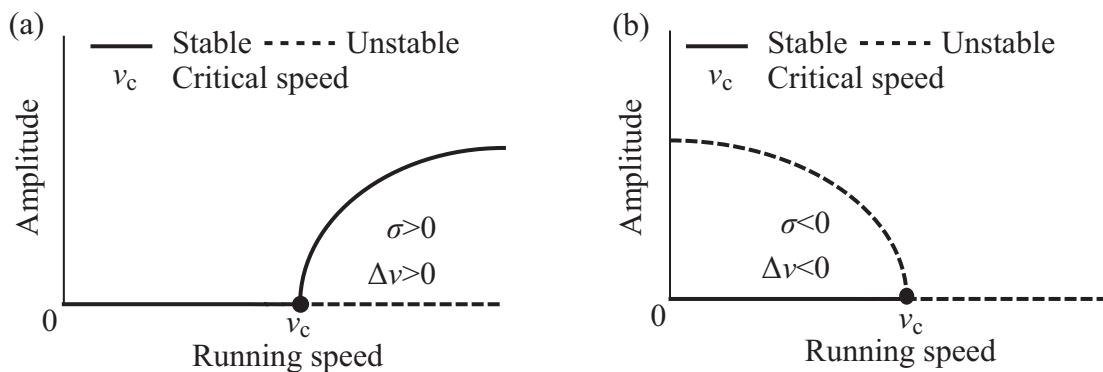
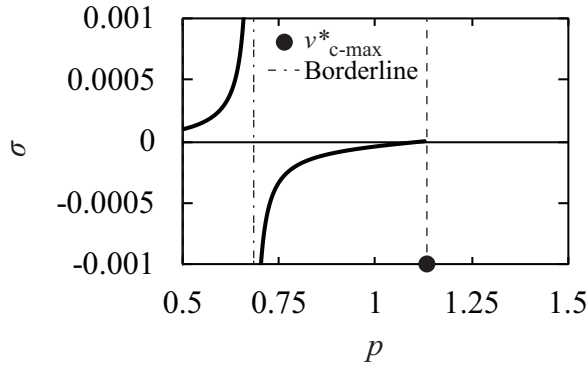


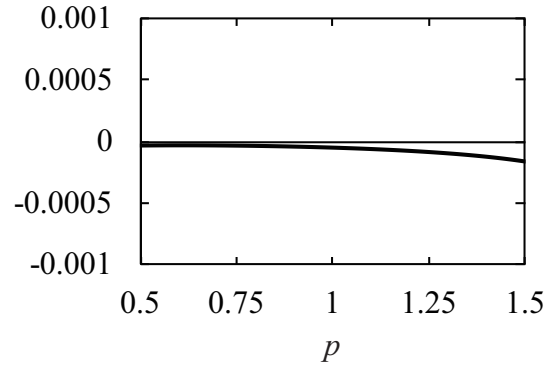
図 5.2: Types of Hopf bifurcation due to  $\sigma$ .

台車の線形パラメータ長手方向の支持ばね定数  $k_x$ 、質量  $m$ 、踏面勾配  $\gamma_0$ 、車輪半径  $r_0$ 、レール幅  $d_0$ 、長手方向の支持ばね支持距離  $d_1$  による  $\sigma$  の正負変化図はそれぞれ図 5.3(a) から図 5.3(f) に示す。横軸は元の一輪軸台車パラメータを基準にしたときに、1つのパラメータがその基準値から変化した倍数である  $p$  を示し、縦軸は無次元量  $\sigma$  を示す。図 5.3(a) のばね定数による  $\sigma$  の変化を用いて説明する。ばね定数が基準値の 0.5 倍から 0.7 倍くらいに変化させたときに、 $\sigma$  は正の値を持つため、この時台車システムは超臨界ホップ分岐特性を表す。ばね定数が基準値の 0.7 倍くらいから 1.1 倍くらいに変化させた時に、 $\sigma$  は負の値を持つため、この時台車システムは亜臨界ホップ分岐特性を表す。また、 $\sigma$  の絶対値の大きさによって、蛇行動線形臨界速度から  $\Delta v$  ずれたところのリミットサイクルの振幅が決められる。例えば、ばね定数が基準値の 0.7 倍くらいから 1.1 倍くらいに変化させた時に、 $\sigma$  の絶対値は小さくなるため、蛇行動線形臨界速度から  $\Delta v$  ずれた走行速度での不安定なりミットサイクルが小さくなる。これによって、台車の外乱に対するロバスト性が弱くなり、非線形特性がよくない方向になる。

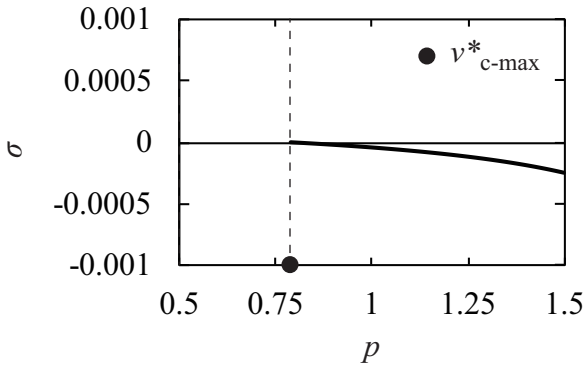
図 5.3 から長手方向の支持ばね定数、車輪半径、長手方向の支持ばね支持距離の増大とともに、鉄道車両のホップ分岐タイプは超臨界ホップ分岐から亜臨界ホップ分岐に変化していく。逆に、台車質量、車輪踏面勾配、レール幅の増大とともに、鉄道車両のホップ分岐タイプは亜臨界ホップ分岐から超臨界ホップ分岐に変化していく。一点鎖線はその 2つのホップ分岐の境界を示す。また、台車質量、車輪勾配の変化による鉄道車両のホップ分岐タイプへの影響は他のパラメータと比べて、弱いことが分かった。次は図 5.3 に求まったそれぞれの線形パラメータによる亜臨界ホップ分岐の領域について蛇行動非線形臨界速度、ヒステリシス範囲、線形臨界速度より低い速度の時の不安定なりミットサイクルと安定なりミットサイクルの大きさを解明する。



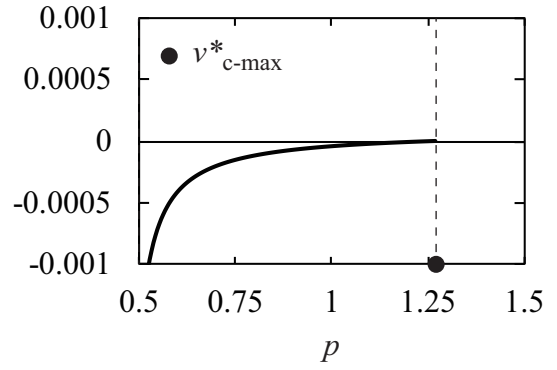
(a) Longitudinal spring stiffness



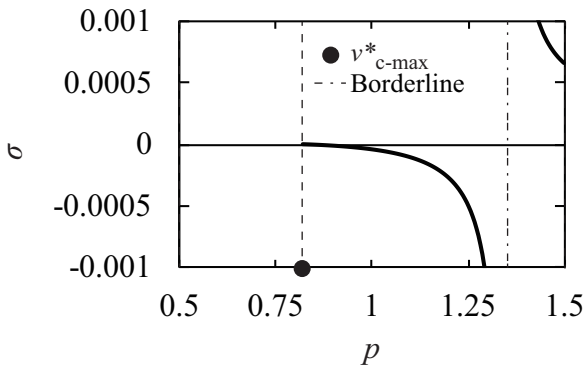
(b) Mass of wheel set



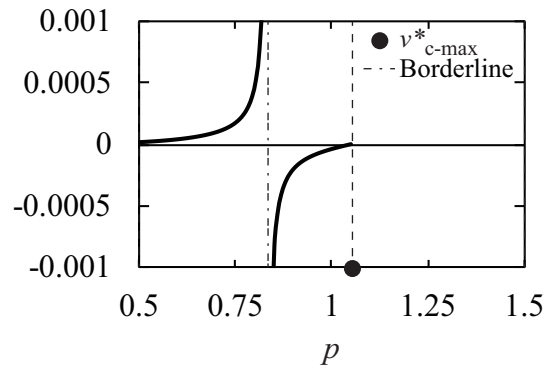
(c) Wheel tread angle



(d) Centered wheel rolling radius



(e) Half-track gauge



(f) Half-gap of longitudinal stiffness

图 5.3: Variation of  $\sigma$  due to linear parameters. (a)  $k_x=200p$  N/m, (b)  $m=2.175p$  kg, (c)  $\gamma_0=p/25$ , (d)  $r_0=0.036p$  m, (e)  $d_0=0.0485p$  m, (f)  $d_1=0.085p$  m.

## 5.4 ヒステリシス特性の変化

まず、ヒステリシス現象の特徴である非線形臨界速度と線形パラメータ、非線形成分を代表した非線形項の係数の関係式を導く。

非自明な解によるリミットサイクルは第4章の式(4.93)により以下のように求まった。

$$L_1\Delta v + L_2\Delta v^2 + N_1\alpha_{st}^2 + N_2\Delta v\alpha_{st}^2 + N_3\alpha_{st}^4 = 0. \quad (5.7)$$

第1章に紹介したとおり、サドルノード分岐点は安定なりミットサイクルと不安定なりミットサイクルがぶつかって消滅された点であり、この点の走行速度は非線形臨界速度と定義されている。リミットサイクルの式から、 $r_{st}$ は以下のように求められる。

$$r_{st} = \sqrt{\frac{-(N_1 + N_2\Delta v)}{2N_3} \pm \frac{\sqrt{(N_1 + N_2\Delta v)^2 - 4N_3(L_1\Delta v + L_2\Delta v^2)}}{2N_3}} \quad (5.8)$$

前章の計算から  $N_3$  は正であることが分かる。よって、式(5.8)のルートの中の符号  $\pm$  が  $+$  をとったとき、安定なりミットサイクルの振幅が求まり、 $-$  をとったとき、不安定なりミットサイクルの振幅が求まる。不安定なりミットサイクルと安定なりミットサイクルがぶつかる時は、式(5.8)が1つの値の時、すなわち、符号  $\pm$  の後ろの項の値が0の時である。非線形臨界速度が線形臨界速度からずれた量  $\Delta v_n$  は以下の式のように求められる。

$$\frac{\sqrt{(N_1 + N_2\Delta v_n)^2 - 4N_3(L_1\Delta v_n + L_2\Delta v_n^2)}}{2N_3} = 0, \quad (5.9)$$

また、

$$\Delta v_n = \frac{-(N_1N_2 - 2L_1N_3) + \sqrt{(N_1N_2 - 2L_1N_3)^2 - N_1^2(N_2^2 - 4L_2N_3)}}{M_2^2 - 4L_2N_3}. \quad (5.10)$$

$\Delta v_n$  は非線形臨界速度が線形臨界速度からずれた量であるため、無次元非線形臨界速度は以下のように求まる。

$$v_n^* = \left(1 + \frac{-(N_1N_2 - 2L_1N_3) + \sqrt{(N_1N_2 - 2L_1N_3)^2 - N_1^2(N_2^2 - 4L_2N_3)}}{M_2^2 - 4L_2N_3}\right)v_c^*. \quad (5.11)$$

台車の線形パラメータの変化による非線形臨界速度の変化は図5.4に示している。長手方向の支持ばね定数、車輪半径、長手方向の支持ばね支持距離の増大とともに、

非線形臨界速度は大きくなることが分かった。台車質量、車輪勾配、レール幅の増大とともに、非線形臨界速度は小さくなることが分かった。これは線形パラメータによる線形臨界速度への影響と同じである。よって、蛇行動線形臨界速度が増大したときに、非線形臨界速度も大きくなることが考えられる。また、最大線形臨界速度になる直前に、非線形臨界速度は小さくなっていくことが見られた。さらに、最大線形臨界速度に接近したところの非線形臨界速度がなくなった。これは非線形臨界速度が線形臨界速度から離れすぎ、理論解析で仮定した十分に小さな量である  $\Delta v$  が大きくなり、理論解析で得られた結果が本来の非線形臨界速度にずれたと考えられる。

非線形臨界速度から線形臨界速度の速度範囲、すなわちヒステリシス範囲は以下のように表せる。

$$v_r^* = v_c^* - v_n^* = \frac{-(N_1 N_2 - 2L_1 N_3) + \sqrt{(N_1 N_2 - 2L_1 N_3)^2 - N_1^2 (N_2^2 - 4L_2 N_3)}}{M_2^2 - 4L_2 N_3} v_c^*. \quad (5.12)$$

台車の線形パラメータの変化によるヒステリシス範囲の変化は図 5.5 に示している。長手方向の支持ばね定数、車輪半径、長手方向の支持ばね支持距離の増大とともに、ヒステリシス範囲は大きくなることが分かった。台車質量、車輪勾配、レール幅の増大とともに、ヒステリシス範囲は小さくなることが分かった。よって、線形臨界速度と非線形臨界速度は線形パラメータによって同時に減少・増大するが、非線形臨界速度の変化と比べて線形臨界速度の変化のほうが大きいことが分かる。以上より、蛇行動線形臨界速度が大きくなるとともに、不安定なヒステリシス領域の範囲が広がることが考えられる。

リミットサイクルの式 (5.8) により、安定なりミットサイクルと不安定なりミットサイクルはそれぞれ以下のようにもとまる。

$$r_{st-sta} = \sqrt{\frac{-(N_1 + N_2 \Delta v)}{2N_3} + \frac{\sqrt{(N_1 + N_2 \Delta v)^2 - 4N_3(L_1 \Delta v + L_2 \Delta v^2)}}{2N_3}} \quad (5.13)$$

$$r_{st-un} = \sqrt{\frac{-(N_1 + N_2 \Delta v)}{2N_3} - \frac{\sqrt{(N_1 + N_2 \Delta v)^2 - 4N_3(L_1 \Delta v + L_2 \Delta v^2)}}{2N_3}}. \quad (5.14)$$

これらの式により、線形パラメータによる安定なりミットサイクルと不安定なりミットサイクルの定常振幅への影響は図 5.6 と図 5.7 のように求められた (ただし、ここで求めた定常振幅は蛇行動線形臨界速度から  $\Delta v_{amp} = -0.01$  ずれたところの速度である)。線形パラメータによる安定なりミットサイクルへの影響は先の結果と全く一貫性を持たず、長手方向の支持ばね定数、台車質量、車輪踏面勾配、レール

幅、長手方向の支持ばね支持距離の増大とともに、安定なりミットサイクルは大きくなることが見られた。よって、これらの線形パラメータの増大によって、蛇行動が発生するときの定常振幅は大きくなる傾向が見られる。ただし、車輪半径の増大によって、蛇行動の安定な定常振幅は小さくなる。これについて今後考察の必要がある。不安定なりミットサイクル、すなわち外乱に対するロバスト性は先の結果と同じように、長手方向の支持ばね定数、車輪半径、長手方向の支持ばね支持距離は同じような影響（外乱に対するロバスト性を下げる）であり、台車質量、車輪踏面勾配、レール幅は同じような影響（外乱に対するロバスト性を上げる）である。

## 5.5 在来線と新幹線の線形特性の考察

在来線 201 系通勤電車は 7880 kg の台車質量、1/20 の車輪踏面勾配、430 mm の車輪半径、1067 mm のレール幅、1640 mm の長手支持ばね距離を有することに対して、0 系新幹線は 10100 kg の台車質量、1/40 の車輪踏面勾配、455 mm の車輪半径、1435 mm のレール幅、2840 mm の長手支持ばね距離を有する。0 系新幹線は在来線 201 系通勤電車より  $m$  が 1.28 倍、 $\gamma_0$  が 0.5 倍、 $r_0$  が 1.06 倍、 $d_0$  が 1.34 倍、 $d_1$  が 1.73 倍になる。図 5.1 から分かるように、新幹線は在来線より車輪踏面勾配が減少、車輪半径が増大、ばね支持距離が増大し蛇行動線形臨界速度が向上する。図 5.1(b) により、台車質量が小さくなると蛇行動臨界速度が上がる事が分かる。よって、新幹線の台車質量を軽量化すれば蛇行動線形臨界速度があがると考えられる。また、レール幅は長手方向の支持ばね支持距離の増大とともに増大する必要があるが、この 2 つパラメータを適切に選べることにより、蛇行動線形臨界速度を最大限に上げることが期待できる。

## 5.6 線形特性と非線形特性を同時に上げる手法

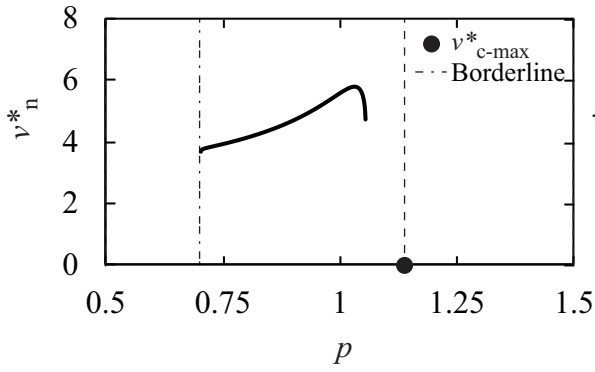
5.5 節で解析した結果図から、1 つの線形パラメータを変えて蛇行動線形臨界速度を上げた時に、外乱に対するロバスト性が下がることが分かる。しかし、これらの線形パラメータが線形特性（蛇行動線形臨界速度）、非線形特性（外乱に対するロバスト性）に与える影響の大きさが違うことが見られた。例えば、図 5.1(c) と (e)、図 5.1(c) と (e) から分かるように車輪勾配とレール幅が基準値の 0.8 倍の付近で、外乱に対するロバスト性を下げる効果の変化率は他のパラメータにより弱い、蛇行動線形臨界速度を上げる効果の変化率は強い。これに対して、図 5.1(f) と図 5.1(f) から分かるように、長手方向の支持ばね支持距離は 0.8 倍の付近で、外乱に対する

ロバスト性を上げる効果の変化率は他のパラメータと比べて強いが、蛇行動線形臨界速度を下げる効果の変化率は弱い。このような視点で車輪勾配を  $p$  倍、レール幅とばね支持距離を  $p$  倍で求めた  $\sigma$ 、蛇行動臨界速度、蛇行動安定なりミットサイクル、蛇行動不安定なりミットサイクル ( $\Delta v_{amp} = -0.01$  の状況) は図 5.8 に示している。図から分かるように、 $p$  が 1.1 から 0.9 に減少した時に、ホップ分岐の種類が変化せず、蛇行動線形臨界速度が上がり、安定なりミットサイクルが下がり、不安定なりミットサイクル (外乱に対するロバスト性) が上がることが分かった。このような視点から、それぞれの線形パラメータを組み合わせると、蛇行動線形特性、非線形特性を同時に上げる線形パラメータの設計方針が分かる。また、図 5.8(a) と (b) から分かるように、亜臨界ホップ分岐から超臨界ホップ分岐に変化した時に、蛇行動線形臨界速度が大きくなっていき、これは前節の単一のパラメータだけ変化した時の結果と異なる。鉄道車両の特性を超臨界ホップ分岐にして、かつ蛇行動線形臨界速度を向上させる手法として考えられるが、結果から分かるように、踏面勾配、レール幅、ばね支持距離を同時に基準値から 0.8 倍かける 0.7 倍以上さける必要があるため、レールの幅が半分くらいに小さくすることになる。これによって、鉄道車両の曲線通過性能が大幅に低下されることが考えられる。よって、曲線通過性能を同時に考慮して解析する必要がある。

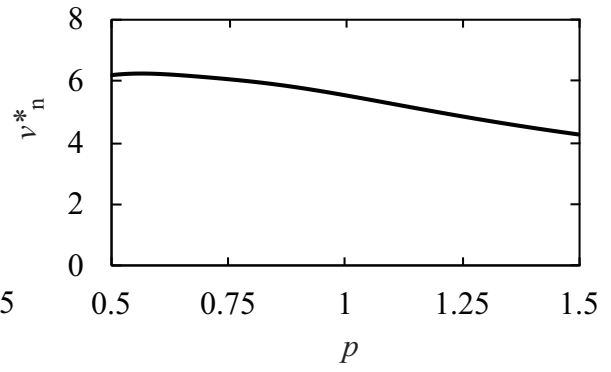
この節の提案手法により、現実的に大きく変えられているパラメータの踏面勾配、レール幅、ばね支持距離をそれぞれが非線形特性に影響しやすい値の付近から同時に下げれば、蛇行動の線形と非線形特性を同時に上げることが可能であることを明らかにした。

## 5.7 結言

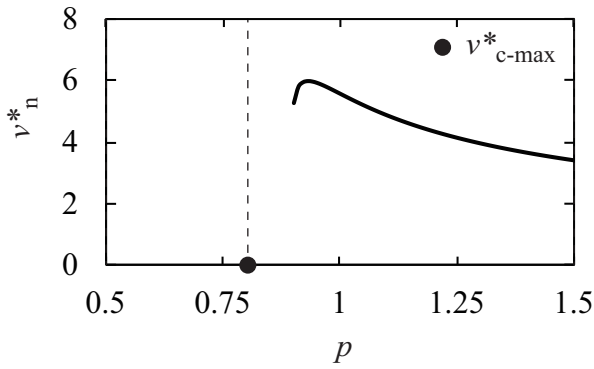
本章は線形パラメータの変化が蛇行動線形臨界速度、蛇行動ヒステリシス特性に与える影響について解析した。長手方向の支持ばね定数、車輪半径、長手方向の支持ばね支持距離の増大と車両質量、車輪勾配、レール幅の減少は蛇行動線形臨界速度を上げられることを明らかにした。線形パラメータの変化によって蛇行動線形臨界速度を上げた時に、鉄道車両システムのホップ分岐種類は超臨界ホップ分岐から亜臨界に変化していく傾向があることを明らかにした。1つの線形パラメータによって蛇行動線形臨界速度を上げた時に、非線形特性 (外乱に対するロバスト性) が悪くなるが、何種類の線形パラメータの組み合わせによって、蛇行動線形特性と非線形特性を同時に上げられることを証明した。



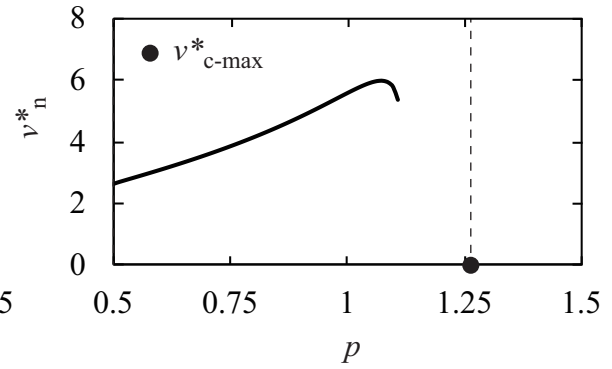
(a) Longitudinal spring stiffness



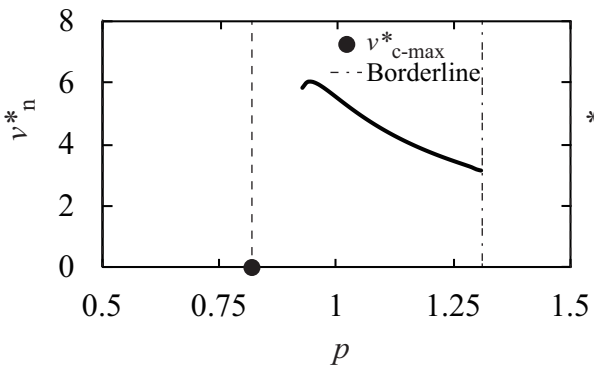
(b) Mass of wheel set



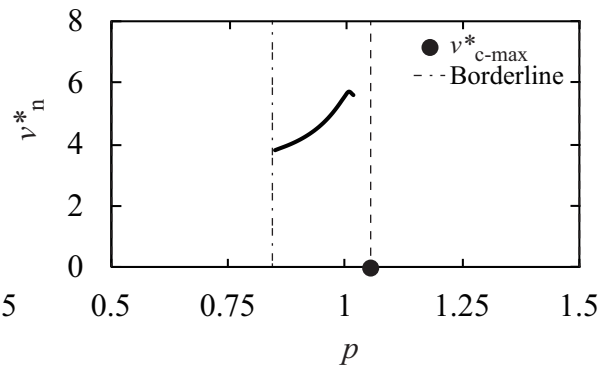
(c) Wheel tread angle



(d) Centered wheel rolling radius



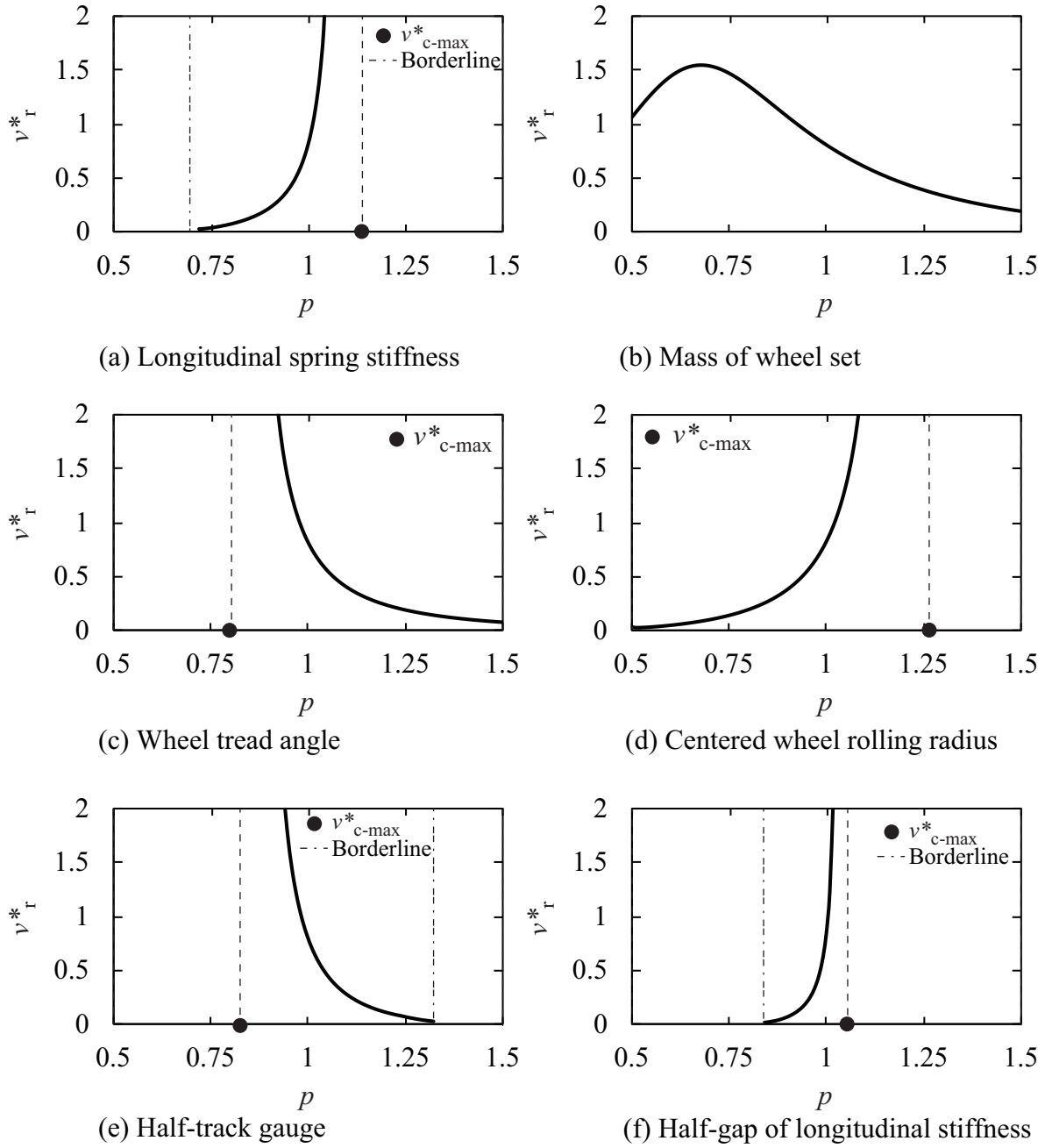
(e) Half-track gauge



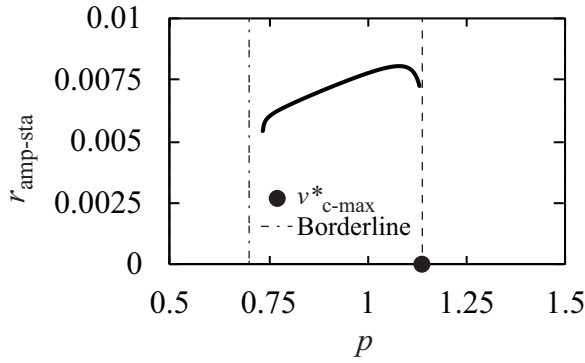
(f) Half-gap of longitudinal stiffness

Fig 5.4: Variation of nonlinear critical speed due to linear parameters. (a)  $k_x=200p$  N/m, (b)  $m=2.175p$  kg, (c)  $\gamma_0=p/25$ , (d)  $r_0=0.036p$  m, (e)  $d_0=0.0485p$  m, (f)  $d_1=0.085p$  m.

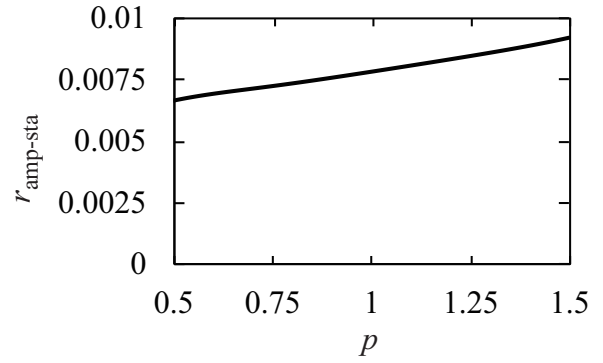




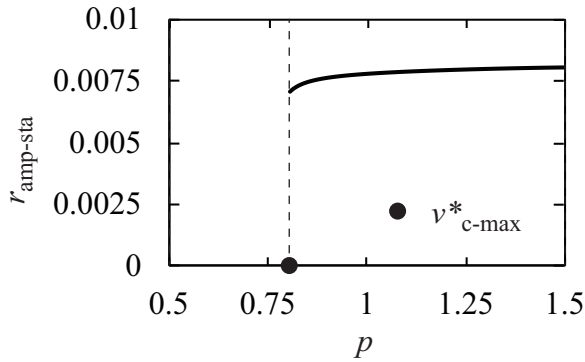
⊠ 5.5: Variation of speed range of hysteresis due to linear parameters. (a)  $k_x=200p$  N/m, (b)  $m=2.175p$  kg, (c)  $\gamma_0=p/25$ , (d)  $r_0=0.036p$  m, (e)  $d_0=0.0485p$  m, (f)  $d_1=0.085p$  m.



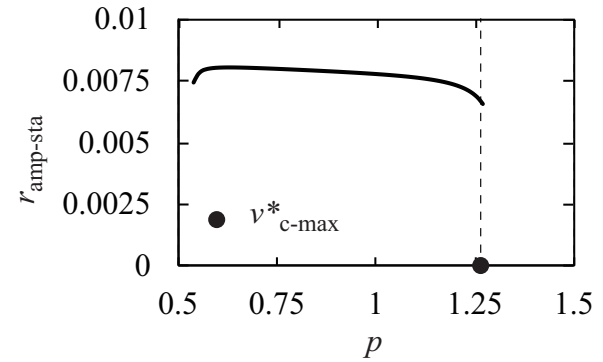
(a) Longitudinal spring stiffness



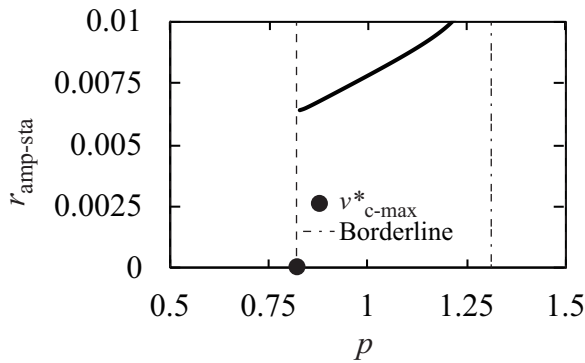
(b) Mass of wheel set



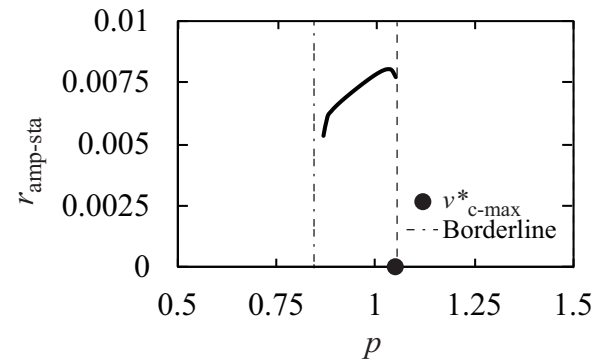
(c) Wheel tread angle



(d) Centered wheel rolling radius

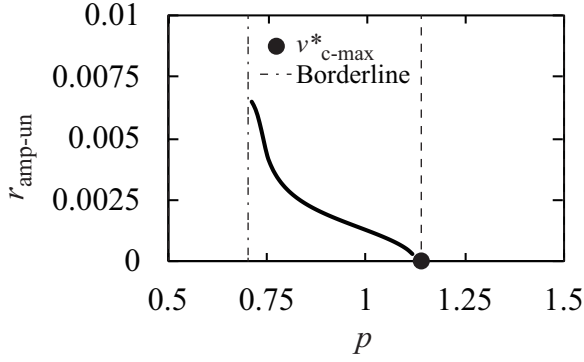


(e) Half-track gauge

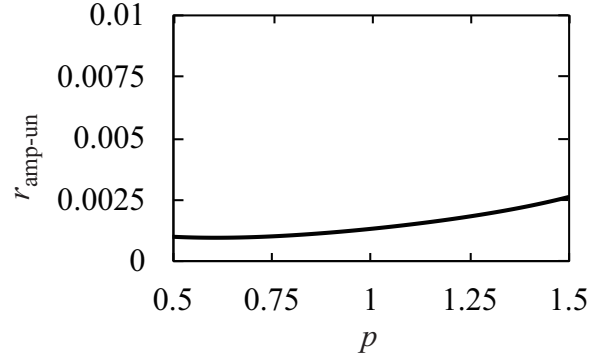


(f) Half-gap of longitudinal stiffness

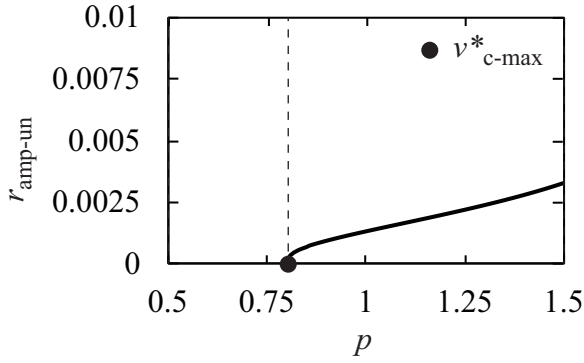
⊠ 5.6: Variation of stable steady-state amplitude due to linear parameters. (a)  $k_x=200p$  N/m, (b)  $m=2.175p$  kg, (c)  $\gamma_0=p/25$ , (d)  $r_0=0.036p$  m, (e)  $d_0=0.0485p$  m, (f)  $d_1=0.085p$  m.



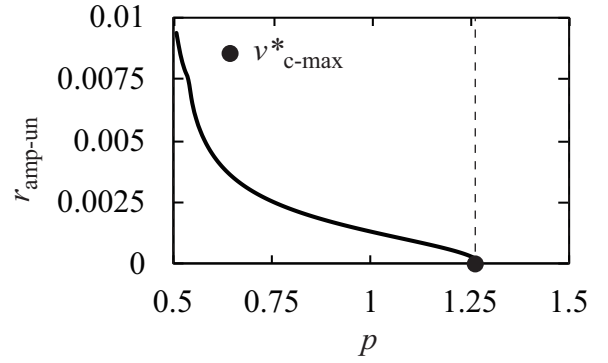
(a) Longitudinal spring stiffness



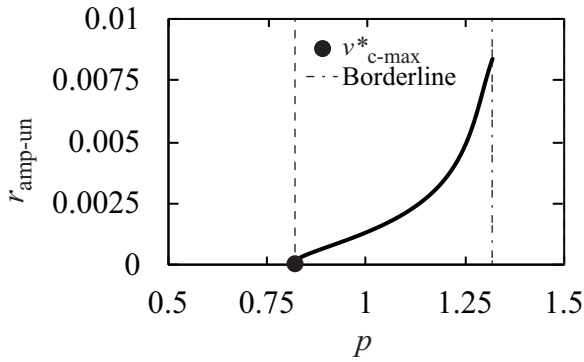
(b) Mass of wheel set



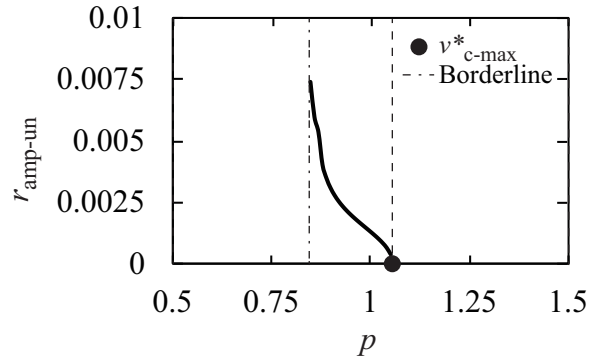
(c) Wheel tread angle



(d) Centered wheel rolling radius

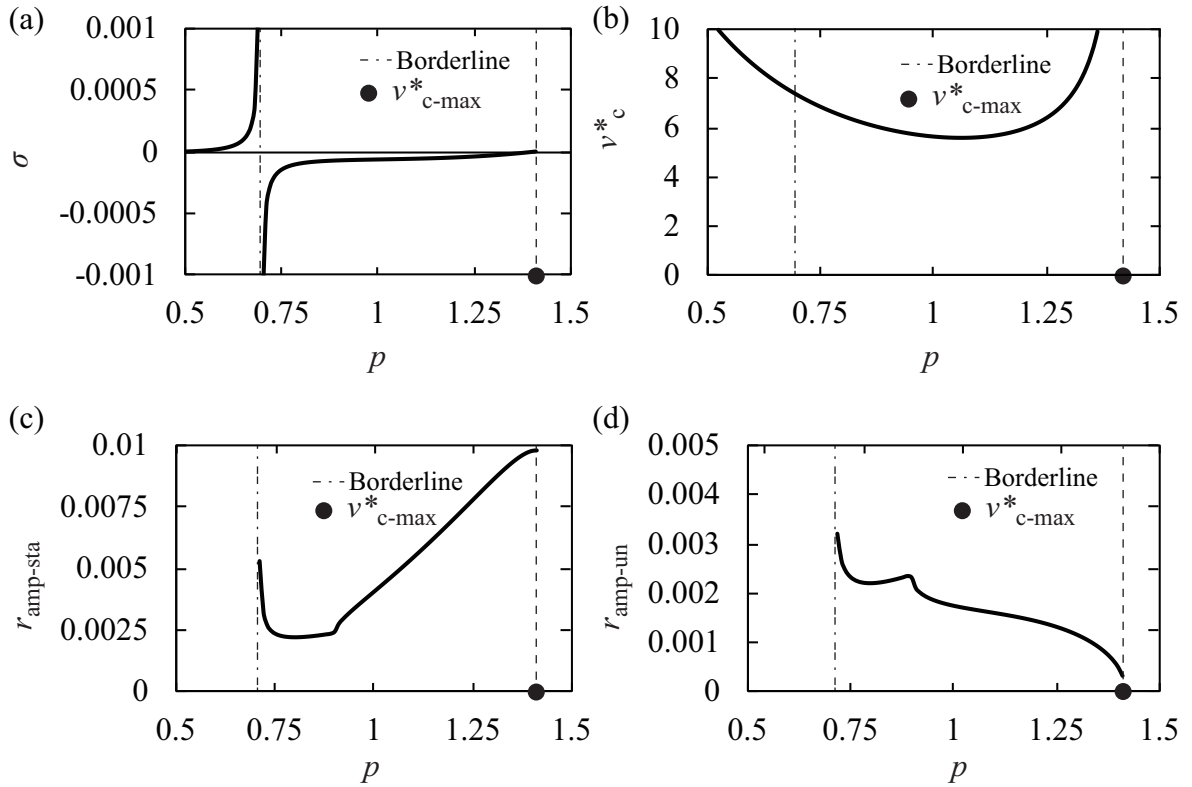


(e) Half-track gauge



(f) Half-gap of longitudinal stiffness

⊠ 5.7: Variation of unstable steady-state amplitude due to linear parameters. (a)  $k_x=200p$  N/m, (b)  $m=2.175p$  kg, (c)  $\gamma_0=p/25$ , (d)  $r_0=0.036p$  m, (e)  $d_0=0.0485p$  m, (f)  $d_1=0.085p$  m.



⊠ 5.8: Variation of linear and nonlinear characteristics of hunting motion due to parameters:  $\gamma_0=0.8p/25$ ,  $d_0=0.0485 \times 0.8p$  m,  $d_1=0.085 \times 0.8p$  m. (a)  $\sigma$ , (b) linear critical speed, (c) stable steady-state amplitude, (d) unstable steady-state amplitude.

# 第6章 台車ばね定数によるヒステリシス特徴変化の実験検証

## 6.1 緒言

前章は長手方向の支持ばね定数、車輪半径、長手方向の支持ばね支持距離などの線形パラメータが蛇行動特性に与える影響について解析した。本章はその線形パラメータの長手方向の支持ばね定数に注目して、長手方向の支持ばね定数を変えたあとの蛇行動ヒステリシス曲線を測定し、前章で解析した結果を検証する。

## 6.2 実験と数値例の比較

第2章と同じように、蛇行動非線形特性の測定実験を行う。今回は長手方向の支持ばね定数を基準値の0.85倍(170 N/m)に変化して実験を行う。その実験結果は図6.1(a)に示している。破線は不安定なリミットサイクルの計測値である。この時の蛇行線形臨界速度が7.6 m/sであり、非線形臨界速度が6.4 m/sである。 $v_r$ はヒステリシス範囲を示す。図6.1(b)は長手方向の支持ばね定数が基準値200 N/sの時に測定した実験結果である。ばね定数によるホップ分岐、線形臨界速度、非線形臨界速度、ヒステリシス範囲、蛇行動臨界速度より低い速度( $\Delta v = -0.01$ の安定定常振幅、不安定な定常振幅の変化は図6.2に示す。図6.1と比較すると、長手方向の支持ばね定数の増大とともに、蛇行動線形臨界速度の増大、ヒステリシス範囲の増大、安定な定常振幅の増大、そして不安定な定常振幅の減少が2つの図から確認できた。ただし、非線形臨界速度の増大は実験から見られてない。これは図6.2(c)より、長手方向の支持ばね定数による非線形臨界速度の変化は少ないため、実験中に走行速度を減速した時の加速度が異なることより生じた誤差と考えられる。

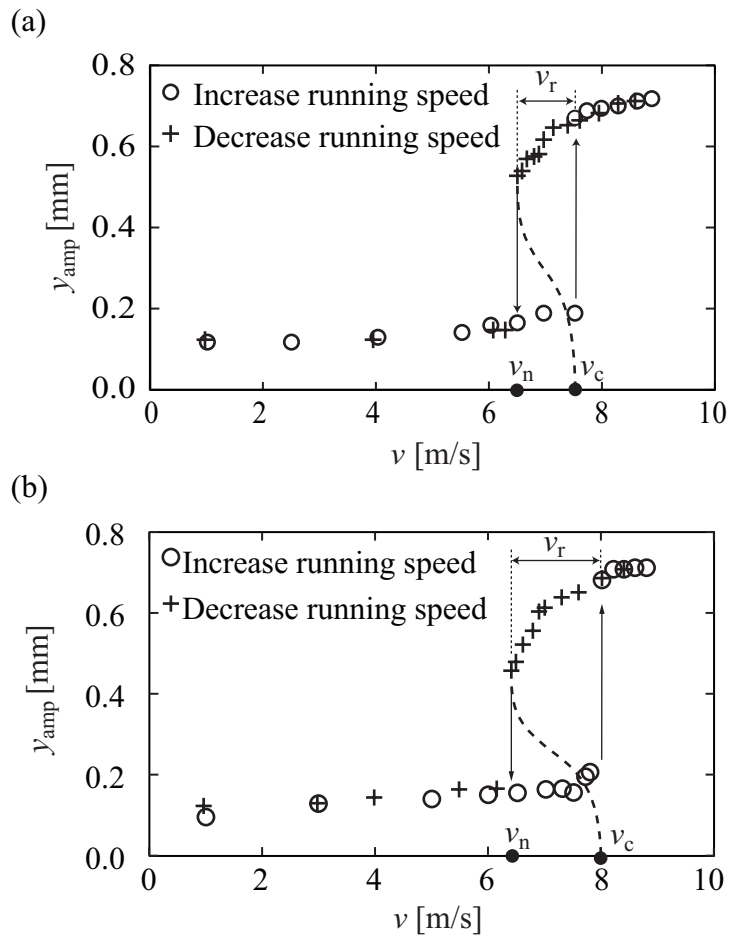
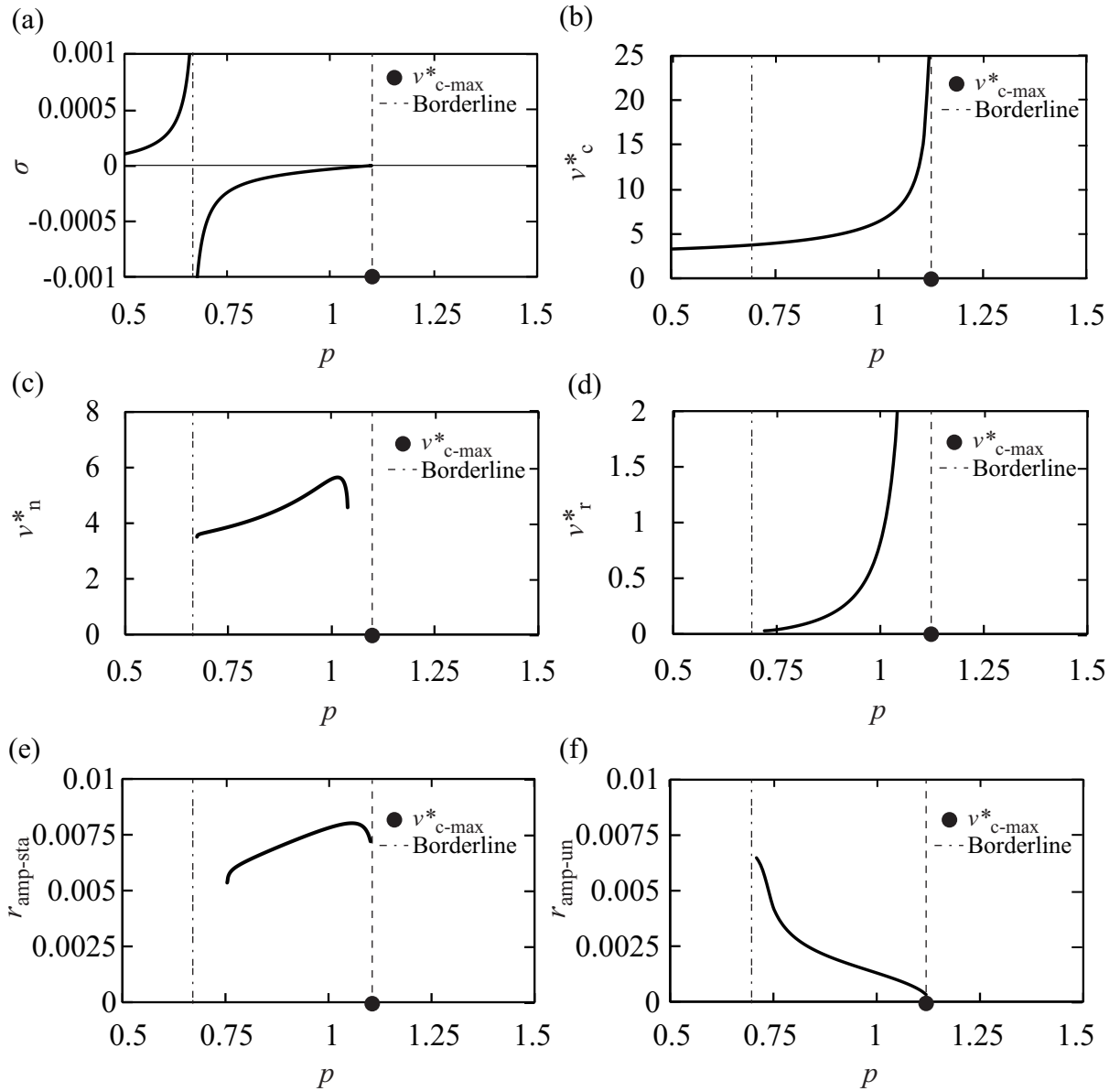


図 6.1: Experimentally observed subcritical Hopf bifurcation. (a)  $k_x = 170$  N/m,  $p=0.85$ , (b)  $k_x = 200$  N/m,  $p=1$ .

### 6.3 結言

以上の実験検証により、第5章の線形パラメータによるヒステリシス特性への影響の解析結果が証明された。長手方向の支持ばね定数の変化により、ヒステリシス特性の変化は大きいことを明らかにした。



⊠ 6.2: Variations of linear and nonlinear characteristics of hunting motion due to longitudinal spring stiffness. (a) Types of Hopf bifurcation, (b) Linear critical speed, (c) Nonlinear critical speed, (d) Hysteresis width, (e) Stable steady-state amplitude below linear critical speed ( $\Delta v = -0.01$ ), (f) Unstable steady-state amplitude below linear critical speed ( $\Delta v = -0.01$ ).

## 第7章 結論

本研究は軌条輪による蛇行動のヒステリシス特性の測定手法を提案した。軌条輪装置と一輪軸台車を用いて、蛇行動ヒステリシス現象における亜臨界ホップ分岐とサドルノード分岐を観測できることを明らかにした。これより、蛇行動時の安定な定常振幅が測定でき、ヒステリシス範囲内で2つの安定な定常振幅が存在することを確認した。また、電磁ブレーキ装置を用いて、ヒステリシス範囲内で初期条件を与えて、台車振幅の変化によって、不安定な定常振幅存在を確認でき、安定な定常振幅と不安定な定常振幅がつながることを観察できた。よって、蛇行動ヒステリシス範囲内のすべての定常振幅を軌条輪で測定できることを明らかにした。

第3章は鉄道システムに存在する非線形成分を弾性力学の視点から物理的に計算し、非線形クリープ力と台車変位との関係式をもとめ、蛇行動定常振幅に影響する非線項を明らかにした。、その非線形項を用いて、一輪軸台車モデルの非線形運動方程式を導出した。

第4章は蛇行動ヒステリシス現象の定常振幅に対して詳細な理論解析手法を2つ提案した。2つの提案手法により、蛇行動定常振幅の変化を表す標準形を理論的に導出した。蛇行動ヒステリシス現象の本質的な非線形項が3つであることを明らかにした。実験で標準形の非線形係数を同定する手法を提案した。また、1つの3次非線形項と1つの5次非線形項で3次と5次非線形性を代表できることを明らかにした。代表非線形係数を実験的に同定することによって標準形の非線形係数と実験装置の線形パラメータの関係式を明らかにした。同定した標準形により、蛇行動ヒステリシス曲線が生まれ、実験で計測した結果と一致することから、提案した理論手法の正確性を明らかにした。

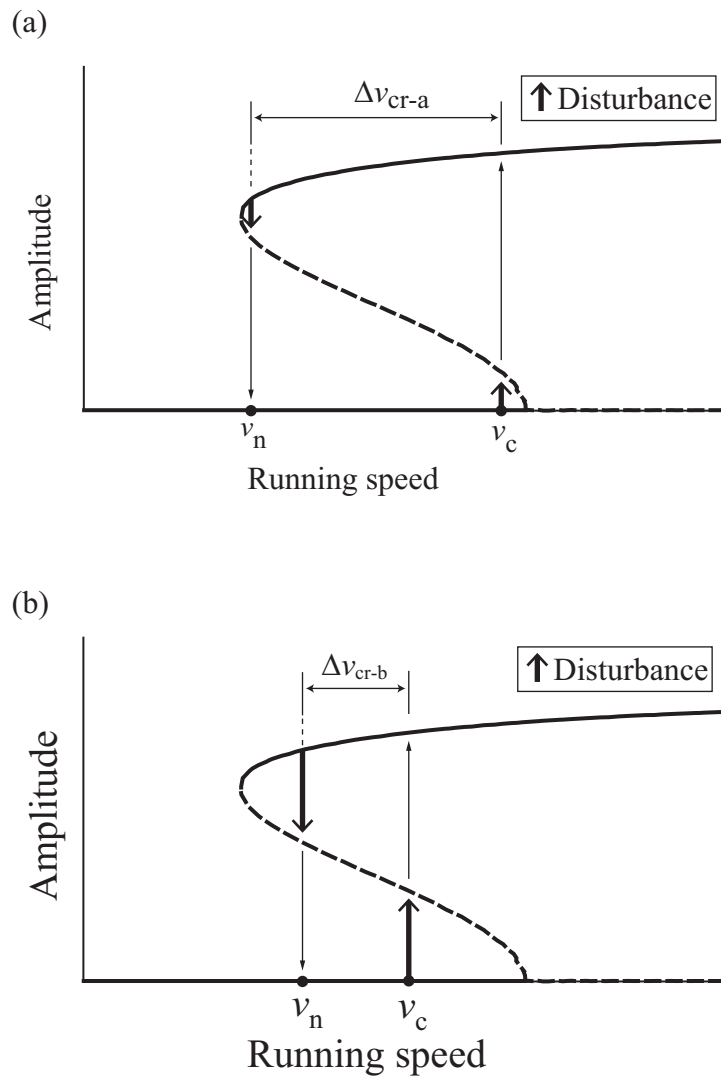
第5章は実験装置の線形パラメータによるヒステリシス現象への影響を解明し、一輪軸台車モデルを用いて、それぞれの線形パラメータが非線形特性に与える影響の解析例を求め、蛇行動線形特性と非線形特性を同時に上げる方法について考察し、その可能性を明らかにした。第6章は実験で長手方向の支持ばね定数によるヒステリシス現象への影響を検証した。



本研究は高速鉄道に生じる蛇行動のヒステリシス現象を解析するために、軌条輪と一輪軸台車を用いた実験手法及び中心多様体理論を用いたアプローチ・非自己随伴特性を考慮に入れたアプローチの理論手法を提案し、実験と解析を行い、その正確性を明らかにした。鉄道車両の線形及び非線形安定性を上げるためのパラメータ設計に応用できることを示した。

## 付録 A 外乱の大きさによる蛇行動ヒステリシス速度範囲の変化

車輪とレール表面の不整による外乱の大きさは蛇行動線形臨界速度と非線形臨界速度、すなわちヒステリシス範囲の幅を変化することができる。図 A.1 は外乱によるヒステリシス範囲の実験的な測定値の変化を示す図である。ヒステリシス範囲内の不安定なリミットサイクルは振動が安定なリミットサイクルに成長するかゼロ振幅に収束するかを決める境界である。実線と破線はそれぞれ理論的に求めた安定な定常振幅と不安定な定常振幅を示す。 $\delta v_{cr}$  はヒステリシス範囲の大きさを示す。太い矢印は外乱を示し、その長さは外乱の大きさを表す。図 A.1(a) は外乱が小さい時、この時は図に示した通り、線形臨界速度と非線形臨界速度の実験的な測定値は理論値と近い値である。一方、図 A.1(b) は外乱が大きい時を示し、この時に外乱によって、線形臨界速度と非線形臨界速度のある距離内の振動が不安定なリミットサイクルを超え、線形臨界速度と非線形臨界速度の測定値を理論値から大きく変化させた。したがって、大きい外乱はヒステリシス範囲を狭く変化させることができる ( $\delta v_{cr-b}$  は  $\delta v_{cr-a}$  より小さい)。この現象を用いて、ある既知な外乱の元でのヒステリシス範囲の幅を基準にして、別の未知な外乱によるヒステリシス範囲の幅を測って基準と比べることによって、未知な外乱の大きさを評価する手法が考えられる [72]。



⊠ A.1: Hysteresis width depending on the amount of surface roughness. (a) Small disturbance, (b) large disturbance.

## 付録B 車輪とレールの相対位置による非線形クリープ係数

弾性接触論により、車輪とレールの接触した時の接触面は弾性変形し、接触面は楕円形状に単純化できることが知られている。ここは本研究で提案した実験手法の車輪と軌条輪が接触する場合の横変位  $y$  と回転角度  $\psi$  による接触楕円半径の変化関係式について解析し、その関係式は線形と非線形関係を持つかを明らかにする（実車の車輪とレール表面の勾配は円弧であるため、 $y$  と  $\psi$  による楕円半径変化式の非線形項は増えるが、本付録の近似した円錐での計算より求められた非線形項が含まれていることになる。すなわち、本付録で得られた関係式の非線形項は実車システムにも影響を与えている）。接触楕円の楕円半径比は2つの接触物体の接触点（変形する前の接触点を指す）における2組の直交する曲率とその曲率を有する平面のなす角度で決まる。

図 B.1(a) は横方向に  $y$  とヨー方向に  $\psi$  を移動した右車輪の円錐部分と軌条輪の右円盤が接触している時の構造図である。接触点における圧力は  $Q$  である。図 B.1(b) と (c) はそれぞれ、右車輪と軌条輪の右円盤の正面から、横から見た図を示している。軌条輪装置の右円盤の左側面の中心を原点  $O_r$  とした時に、軌条輪軸の左方向は  $y$  座標方向であり、上方向は  $z$  座標方向であり、車両の走行方向は  $x$  座標方向である。車輪の左側面の中心を原点  $O_w$  とし、車輪軸の左方向を  $y'$  座標方向、上方向を  $z$  座標方向、台車が向く方向は  $x'$  座標方向である。台車がヨー方向  $\psi$  の角度を回転した時の軌条輪における  $x - y - z$  座標と車輪における  $x' - y' - z$  座標の位置関係は図 B.1(a) の右上に示した通り、 $x$  座標と  $x'$  座標、 $y$  座標と  $y'$  座標は  $\psi$  の角度を持つ。

この時の接触点（接触して弾性変形する前の点）における接触面は図 B.1(a) の右下のようになり、楕円の形状であることが一般的に使われているモデルである [11]。この際、楕円の接触半径は  $x$  方向に  $n$ 、 $y$  方向に  $m$  とする。これらの楕円半径の比は図 B.1(b) と (c) の2つの接触物体の接触点における主平面、副平面の曲率半径、そして2つの主平面がなす角度によって決められる。また、その楕円半径の大きさ

は接触圧力、材料のヤング率、ポアソン比と先決められた楕円半径比の係数によって求められる。詳細な計算手法は以下に記載される。接触楕円の方程式は以下のよう表せる。

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{m}\right)^2 = 1, \quad (\text{B.1})$$

ただし、 $n$  と  $m$  はそれぞれ  $x$  軸と  $y$  軸方向の楕円半径であり、 $n < m$  と仮定する。

図 B.1(b) と (c) は、車輪と軌条輪の主平面と副平面の位置を示す図である。車輪という物体  $I$  (下付き添え字の 1 番目の数値を 1 とする) と軌条輪という物体  $II$  (下付き添え字の 1 番目の数値を 2 とする) の接触点におけ、圧力を中心軸に通る無数の面の中のそれぞれの物体の極大な曲率半径を有する平面を主平面 (下付き添え字の 2 番目の数値を 1 とする)、それと垂直する極小な曲率半径を有する平面を副平面 (下付き添え字の 2 番目の数値を 2 とする) をと定義する。この時に、車輪は円錐であるため、無限大な曲率半径  $r_{11}$  を持つ平面は主平面であり、曲率半径  $r_{12}$  を持つ平面は副平面である。右車輪接触半径と当面勾配により曲率半径  $r_{12}$  は  $r_R / \cos \gamma_0$  である。軌条輪の主平面の曲率半径  $r_{21}$  は  $y$  によって変化するが、軌条輪主平面曲率半径より  $y$  はずっと小さいため、 $r_{21}$  を定数 (軌条輪円盤の中心から車輪との接触点までの距離 150 mm) とみなす。また、軌条輪の表面半径は一定であるため、副平面の曲率半径  $r_{22}$  は定数 (軌条輪円盤の踏面半径 37.5 mm) である。この時、車輪の主平面と軌条輪の副平面がなす角度は  $\psi$  である。主平面と副平面は垂直であるため、車輪の主平面と軌条輪の主平面がなす角度は  $\pi/2 + \psi$  で表せる。楕円半径を求めるために、接触楕円の半径比を決める補助変数  $\tau$  が以下のように求められる [73, 74]。

$$\cos \tau = \frac{\sqrt{(1/r_{11} - 1/r_{12})^2 - 2(1/r_{11} - 1/r_{12})(1/r_{21} - 1/r_{22}) \cos 2\theta + (1/r_{21} - 1/r_{22})^2}}{1/r_{11} + 1/r_{12} + 1/r_{21} + 1/r_{22}}, \quad (\text{B.2})$$

ただし、 $\theta$  は 2 つの主平面がなす角度である。 $r_{12} = r_R / \cos \gamma_0$ 、 $r_{11} = \infty$ 、 $\theta = \pi/2 + \psi$  を代入すると、補助変数は以下ようになる。

$$\cos \tau = \frac{\sqrt{(\cos \gamma_0 / r_R)^2 + 2\rho_1 \cos \gamma_0 \cos 2\psi / r_R + \rho_1^2}}{\cos \gamma_0 / r_R + \rho_2}, \quad (\text{B.3})$$

ただし、

$$\rho_1 = \frac{1}{r_{22}} - \frac{1}{r_{21}}, \quad \rho_2 = \frac{1}{r_{22}} + \frac{1}{r_{21}}.$$

また、補助変数  $\tau$  と楕円半径比  $g$  ( $= n/m$ ) の関係式は弾性力学により変数  $k$  ( $= \sqrt{1 - g^2}$ ) 用いて以下のように表せる [11, 16, 73]。

$$\cos \tau = \frac{(2 - k^2)L - 2(1 - k^2)K}{k^2L}, \quad (\text{B.4})$$

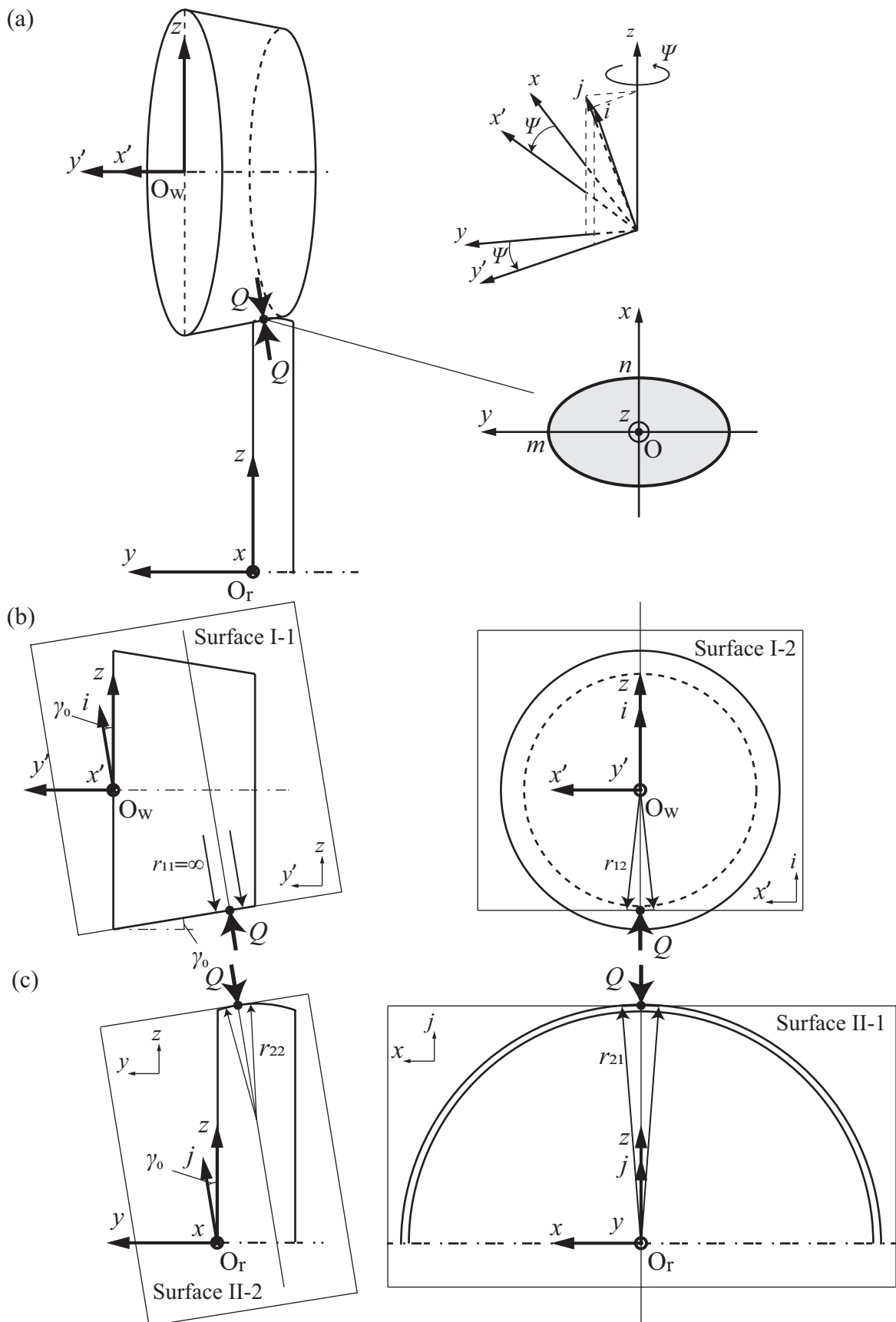


图 B.1: Curvature radius surface of the wheel and roller rig in the contact point. (a) Configuration of contact model, (b) right wheel, (c) right part of roller rig.

ただし、 $K$  と  $L$  は第一種完全楕円積分と第二種完全楕円積分であり、 $k$  との関係式は以下のように書ける。

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}} d\phi \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 \right) \quad (\text{B.5})$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 \right), \quad (\text{B.6})$$

ただし、ここでは  $k$  が 1 より小さいと考え、 $K$  と  $L$  の式の中の積分対象を展開したあと積分結果をまとめた。 $K$  の展開した式と展開する前の式で求めた  $K$  の値は図 B.2 に示している。横軸は  $k$  の値、縦軸は  $K$  の値を示す。実線は第一完全楕円積分の値を示し、破線はその 4 次までの展開式で得られた値を示す。図から分かるように  $k$  が 1 から 0.8 までの範囲内で、 $K$  の展開式で得られた値は元の式で得られた値と非常に近いことが分かる。よって、 $k$  の 4 次まで考えた展開式は  $k$  が 1 から 0.8 までの範囲内、すなわち楕円半径比  $g$  が 0.6 から 1 までの状況において非常に正確な精度を持つ。ここでは鉄道車両の接触楕円半径比が 0.6 から 1 に近いことを仮定して、 $k$  をこの展開式で求めてクリープ力の非線形項のべきに注目して解析を行う。式 (B.3) と式 (B.4) を等しくおくと、 $k$  の値が求められ、楕円半径は以下のように求められる [16]。

$$n = \left( \frac{3LQg}{\pi E' \rho_+} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{B.7})$$

$$m = \left( \frac{3LQ}{\pi g^2 E' \rho_+} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{B.8})$$

ただし、 $Q$ 、 $E'$ 、 $\rho_+$  はそれぞれ接触点にかかる圧力、車輪・レールの等価縦弾性係数、2つの接触物体の接触点における曲率の和である。等価縦弾性係数は車輪・レールのヤング率  $E$  とポアソン比  $\nu$  によって、 $E/(2-2\nu)$  のように表せる。2つの接触物体の曲率の和は  $\rho_2 + 1/r_0$  で表す。

一輪軸台車モデルに対して、 $\cos \tau$  を展開して、 $k$  と横変位  $y$ 、ヨー角度  $\psi$  の関係式を求める。まずは右車輪半径の式 3.1 を式 (B.3) に代入して、 $y$  と  $\psi$  に対してテーラー展開し、それぞれのべきでまとめると、以下ようになる

$$\begin{aligned} \cos \tau \approx \frac{\rho_-}{\rho_+} & (1 + \alpha_{10}y + \alpha_{20}y^2 + \alpha_{02}\psi^2 + \alpha_{30}y^3 + \alpha_{12}y\psi^2 + \alpha_{40}y^4 + \alpha_{22}y^2\psi^2 \\ & + \alpha_{04}\psi^4 + \alpha_{50}y^5 + \alpha_{32}y^3\psi^2 + \alpha_{14}y\psi^4) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

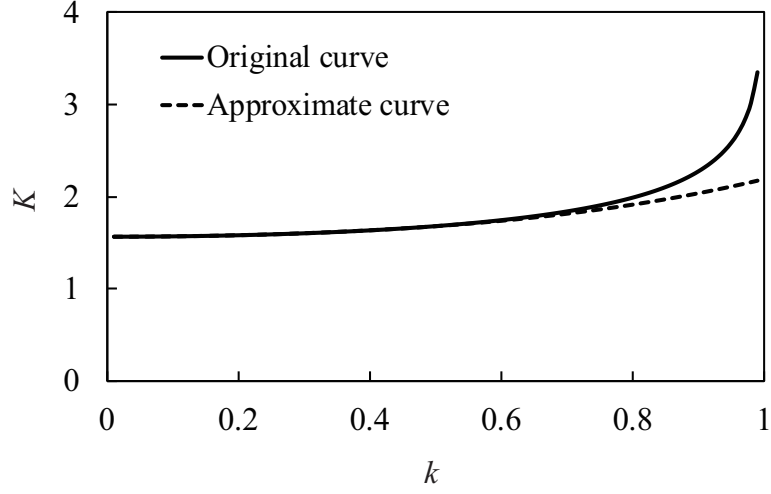


図 B.2: Curves of incomplete elliptic integral of the first kind  $K$  due to  $k$ .

ただし、 $\rho_-$  と  $\rho_+$  は曲率半径と踏面勾配によって以下のように表せる。

$$\rho_- = \cos \gamma_0 + r_0 \rho_1, \quad \rho_+ = \cos \gamma_0 + r_0 \rho_2, \quad (\text{B.10})$$

また、 $\alpha_{10}$  から  $\alpha_{14}$  の非線形係数はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= -\frac{\gamma_0 \rho_{12} \cos \gamma_0}{\rho_+^2}, \quad \alpha_{20} = -\frac{\gamma_0^2 \rho_{12} \rho_2 \cos \gamma_0}{\rho_+^3}, \\ \alpha_{02} &= -\frac{\cos \gamma_0 (\gamma_0 d_0 \rho_{12} \cos \gamma_0 + \rho_1 r_0 (4 \cos \gamma_0 + \gamma_0 d_0 \rho_{12}) + 4 \rho_1 \rho_2 r_0^2)}{2 \rho_- \rho_+^2}, \\ \alpha_{30} &= -\frac{\gamma_0^3 \rho_{12} \rho_2^2 \cos \gamma_0}{\rho_+^4}, \\ \alpha_{12} &= \frac{1}{2 \rho_-^2 \rho_+^3} \gamma_0 \cos \gamma_0 \left( \rho_1 \cos \gamma_0 (3 \cos^2 \gamma_0 + 2 \rho_2^2 r_0 (2 \gamma_0 d_0 + r_0) + \rho_2 \cos \gamma_0 (5 r_0 - 2 \gamma_0 d_0)) \right. \\ &\quad + \rho_2 \cos^2 \gamma_0 (\cos(\gamma_0) + \rho_2 (2 \gamma_0 d_0 + r_0)) + \rho_1^3 (-r_0^2) (\cos \gamma_0 + \rho_2 (2 \gamma_0 d_0 + r_0)) \\ &\quad \left. - \rho_1^2 r_0 (\cos 2 \gamma_0 + \rho_2^2 r_0 (3 r_0 - 2 \gamma_0 d_0) + \rho_2 \cos \gamma_0 (4 \gamma_0 d_0 + 5 r_0) + 1) \right), \\ \alpha_{40} &= -\frac{\gamma_0^4 \rho_{12} \rho_2^3 \cos \gamma_0}{\rho_+^5}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\alpha_{22} &= \frac{1}{2\rho_-^3\rho_+^4}\gamma_0^2 \cos \gamma_0 \left( \rho_2^2 \cos^3 \gamma_0 (2 \cos \gamma_0 + \rho_2 (3\gamma_0 d_0 + 2r_0)) \right. \\
&\quad - \rho_2 \rho_1^3 r_0^2 (6 \cos^2 \gamma_0 + \rho_2^2 r_0 (2r_0 - 3\gamma_0 d_0) + \rho_2 \cos \gamma_0 (9\gamma_0 d_0 + 8r_0)) \\
&\quad + \rho_2 \rho_1 \cos^2 \gamma_0 (\cos 2\gamma_0 + 3\rho_2^2 r_0 (3\gamma_0 d_0 + 2r_0) + \rho_2 \cos \gamma_0 (8r_0 - 3\gamma_0 d_0) + 1) \\
&\quad + \rho_1^2 \cos \gamma_0 (4 \cos^3 \gamma_0 + \rho_2 r_0 (10 \cos^2 \gamma_0 + 3\rho_2 (\rho_2 r_0 (3\gamma_0 d_0 + 2r_0) + \cos \gamma_0 (4r_0 - 3\gamma_0 d_0)))) \\
&\quad \left. + \rho_2 \rho_1^4 (-r_0^3) (2 \cos \gamma_0 + \rho_2 (3\gamma_0 d_0 + 2r_0)) \right), \\
\alpha_{04} &= \frac{\cos \gamma_0}{24\rho_-^3\rho_+^3} \left( \gamma_0 d_0 (\cos \gamma_0 + \rho_2 r_0) (\cos \gamma_0 + \rho_1 r_0) \right. \\
&\quad \left( \rho_1 (19 \cos^2 \gamma_0 - 5\rho_1 r_0 (2 \cos \gamma_0 + \rho_1 r_0)) + \rho_2 (5 \cos^2 \gamma_0 + \rho_1 r_0 (10 \cos \gamma_0 - 19\rho_1 r_0)) \right) \\
&\quad \left. + 6\gamma_0^2 d_0^2 \rho_2 (\rho_2 - \rho_1) (\cos \gamma_0 + \rho_1 r_0)^3 + 16\rho_1 r_0 (\cos^2 \gamma_0 + \rho_1 r_0 (\rho_1 r_0 - \cos \gamma_0)) (\cos \gamma_0 + \rho_2 r_0)^2 \right), \\
\alpha_{50} &= -\frac{\gamma_0^5 \rho_{12} \rho_2^4 \cos \gamma_0}{\rho_+^6}, \\
\alpha_{32} &= \frac{1}{2\rho_-^4\rho_+^5}\gamma_0^3 \cos \gamma_0 \left( \rho_2^3 \cos^4 \gamma_0 (3 \cos \gamma_0 + \rho_2 (4\gamma_0 d_0 + 3r_0)) \right. \\
&\quad - \rho_2^2 \rho_1^4 r_0^3 (12 \cos^2 \gamma_0 + \rho_2^2 r_0 (r_0 - 4\gamma_0 d_0) + \rho_2 \cos (\gamma_0) (16\gamma_0 d_0 + 13r_0)) \\
&\quad + 2\rho_2 \rho_1^2 \cos^2 \gamma_0 (2 \cos^3 \gamma_0 + \rho_2 r_0 (4 \cos^2 \gamma_0 + 3\rho_2^2 r_0 (4\gamma_0 d_0 + 3r_0) + \rho_2 \cos \gamma_0 (11r_0 - 8\gamma_0 d_0))) \\
&\quad + \rho_2^2 \rho_1 \cos^3 \gamma_0 (\cos^2 \gamma_0 + 4\rho_2^2 r_0 (4\gamma_0 d_0 + 3r_0) + \rho_2 \cos \gamma_0 (13r_0 - 4\gamma_0 d_0)) \\
&\quad + 2\rho_1^3 \cos \gamma_0 (2 \cos^4 \gamma_0 + \rho_2 r_0 (10 \cos^3 \gamma_0 + \rho_2 r_0 (11 \cos^2 \gamma_0 + 2\rho_2^2 r_0 (4\gamma_0 d_0 + 3r_0) \\
&\quad \left. + 3\rho_2 \cos \gamma_0 (3r_0 - 4\gamma_0 d_0)))) + \rho_2^2 \rho_1^5 (-r_0^4) (3 \cos \gamma_0 + \rho_2 (4\gamma_0 d_0 + 3r_0)) \right), \\
\alpha_{14} &= \frac{1}{24\rho_-^4\rho_+^4}\gamma_0 \cos \gamma_0 \left( \rho_1^5 (-r_0^4) (5 \cos^2 \gamma_0 + \rho_2^2 (18\gamma_0^2 d_0^2 + 22\gamma_0 d_0 r_0 + 5r_0^2)) \right. \\
&\quad + 2\rho_2 \cos \gamma_0 (11\gamma_0 d_0 + 5r_0) + \rho_2 \cos^4 \gamma_0 (5 \cos^2 \gamma_0 + \rho_2^2 (18\gamma_0^2 d_0^2 + 22\gamma_0 d_0 r_0 + 5r_0^2)) \\
&\quad + 2\rho_2 \cos \gamma_0 (11\gamma_0 d_0 + 5r_0) - \rho_1^4 r_0^3 (20 \cos^3 \gamma_0 + \rho_2^3 r_0 (-18\gamma_0^2 d_0^2 + 26\gamma_0 d_0 r_0 + 3r_0^2)) \\
&\quad + \rho_2 \cos^2 \gamma_0 (88\gamma_0 d_0 + 43r_0) + 2\rho_2^2 \cos \gamma_0 (36\gamma_0^2 d_0^2 + 57\gamma_0 d_0 r_0 + 13r_0^2) \\
&\quad + 2\rho_1^3 r_0 \cos \gamma_0 (2\rho_2^3 r_0^2 (18\gamma_0^2 d_0^2 + 10\gamma_0 d_0 r_0 - 23r_0^2) + 2\rho_2 r_0 \cos^2 \gamma_0 (15\gamma_0 d_0 - 58r_0) \\
&\quad + \rho_2^2 r_0 \cos \gamma_0 (-54\gamma_0^2 d_0^2 + 26\gamma_0 d_0 r_0 - 127r_0^2) + \cos^3 \gamma_0 (24\gamma_0 d_0 - 35r_0)) \\
&\quad + 2\rho_1^2 \cos^2 \gamma_0 (\rho_2^3 r_0^2 (54\gamma_0^2 d_0^2 + 66\gamma_0 d_0 r_0 + 35r_0^2) + \rho_2 r_0 \cos^2 \gamma_0 (76\gamma_0 d_0 + 127r_0) \\
&\quad + 2\rho_2^2 r_0 \cos \gamma_0 (-18\gamma_0^2 d_0^2 + 59\gamma_0 d_0 r_0 + 58r_0^2) + 2 \cos^3 \gamma_0 (12\gamma_0 d_0 + 23r_0)) \\
&\quad + \rho_1 \cos^3 \gamma_0 (3 \cos^3 \gamma_0 + 4\rho_2^3 r_0 (18\gamma_0^2 d_0^2 + 22\gamma_0 d_0 r_0 + 5r_0^2) + 26\rho_2 \cos^2 \gamma_0 (\gamma_0 d_0 + r_0) \\
&\quad \left. + \rho_2^2 \cos \gamma_0 (-18\gamma_0^2 d_0^2 + 114\gamma_0 d_0 r_0 + 43r_0^2)) \right), \tag{B.11}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\rho_{12} = \rho_1 - \rho_2. \quad (\text{B.12})$$

また、式 (B.4) に式 (B.5) と式 (B.6) の  $k$  の展開式を代入すると、補助変数は以下のように簡単化される (5 次非線形まで考慮するため、 $k^4$  以上のべきを無視する)。

$$\cos \tau \approx \frac{\frac{3k^2}{8} + \frac{21k^4}{64}}{1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^2}{64}} \approx \frac{3}{8}k^2 + \frac{27}{64}k^4 = \frac{27}{64}\left(k^2 + \frac{4}{9}\right)^2 - \frac{1}{12}. \quad (\text{B.13})$$

式 (B.9) と式 (B.13) によって、 $k^2$  は以下のような式で表せる

$$k^2 \approx \rho' + \alpha'_{10}y + \alpha'_{20}y^2 + \alpha'_{02}\psi^2 + \alpha'_{30}y^3 + \alpha'_{12}y\psi^2 + \alpha'_{40}y^4 \\ + \alpha'_{22}y^2\psi^2 + \alpha'_{04}\psi^4 + \alpha'_{50}y^5 + \alpha'_{32}y^3\psi^2 + \alpha'_{14}y\psi^4, \quad (\text{B.14})$$

ただし、 $\rho'$  は以下のような関係がある。

$$\rho' = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{\rho_+ + 12\rho_-}{\rho_+}} - \frac{4}{9}, \quad (\text{B.15})$$

$\alpha'_{10}$  から  $\alpha'_{14}$  の非線形係数はそれぞれの曲率半径と踏面勾配で決められる係数である。

$$\alpha'_{10} = \frac{32\gamma_0\rho_{21} \cos \gamma_0}{27\rho_+^{3/2}\rho_3^{1/2}}, \quad \alpha'_{20} = \frac{32\gamma_0^2\rho_{21} \cos \gamma_0 ((3\rho_1 + 10\rho_2) \cos \gamma_0 + \rho_2 (12\rho_1 + \rho_2) r_0)}{27\rho_+^{5/2}\rho_3^{3/2}}, \\ \alpha'_{02} = -\frac{4 \cos \gamma_0 (\gamma_0 d_0 \rho_{12} \cos \gamma_0 + \rho_1 r_0 (4 \cos \gamma_0 + \gamma_0 d_0 \rho_{12})) + 4\rho_1 \rho_2 r_0^2}{3\rho_- \rho_+^{3/2} \rho_3^{1/2}}, \\ \alpha'_{30} = \frac{8\gamma_0^3 \rho_{21} \cos \gamma_0}{3\rho_+^{7/2} \rho_3^{5/2}} \left( 18\rho_1^2 (\cos^2 \gamma_0 + 4\rho_2 r_0 (\cos \gamma_0 + 2\rho_2 r_0)) \right. \\ \left. + 6\rho_2 \rho_1 (7 \cos^2 \gamma_0 + \rho_2 r_0 (41 \cos \gamma_0 + 4\rho_2 r_0)) + \rho_2^2 (109 \cos^2 \gamma_0 + \rho_2 r_0 (20 \cos \gamma_0 + \rho_2 r_0)) \right), \\ \alpha'_{12} = \frac{4\gamma_0 \cos \gamma_0}{3\rho_-^2 \rho_+^{5/2} \rho_3^{3/2}} \left( \rho_1^3 r_0 (\rho_2^2 r_0^2 (22\gamma_0 d_0 - 37r_0) - 2\rho_2 r_0 \cos \gamma_0 (31\gamma_0 d_0 + 49r_0) + \cos^2 \gamma_0 \right. \\ \left. (- (12\gamma_0 d_0 + 61r_0))) + \rho_2 \cos^2 \gamma_0 (13 \cos^2 \gamma_0 + \rho_2^2 r_0 (2\gamma_0 d_0 + r_0) + 2\rho_2 \cos \gamma_0 (10\gamma_0 d_0 + 7r_0)) \right. \\ \left. + \rho_1^2 (\rho_2^3 r_0^3 (2\gamma_0 d_0 - 3r_0) - \rho_2 r_0 \cos^2 \gamma_0 (52\gamma_0 d_0 + 7r_0) + 4\rho_2^2 r_0^2 \cos \gamma_0 (16\gamma_0 d_0 + r_0)) \right. \\ \left. + \rho_1^2 (-2 \cos^3 \gamma_0 (3\gamma_0 d_0 + 7r_0)) + \rho_1 \cos \gamma_0 (39 \cos^3 \gamma_0 + 2\rho_2^3 r_0^2 (2\gamma_0 d_0 + r_0)) \right. \\ \left. + \rho_1 \cos \gamma_0 (2\rho_2 \cos^2 \gamma_0 (52r_0 - 7\gamma_0 d_0) + \rho_2^2 r_0 \cos \gamma_0 (62\gamma_0 d_0 + 67r_0)) \right. \\ \left. - 6\rho_1^4 r_0^2 (2\rho_2 r_0 (2\gamma_0 d_0 + r_0) + \cos \gamma_0 (\gamma_0 d_0 + 2r_0)) \right),$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{40} = & \frac{8\gamma_0^4(\rho_2 - \rho_1)\cos\gamma_0}{3\rho_+^{9/2}\rho_3^{7/2}} \left( 27\rho_1^3 (5\cos^3\gamma_0 + 4\rho_2r_0 (6\cos^2\gamma_0 + 4\rho_2r_0 (3\cos\gamma_0 + 4\rho_2r_0))) \right. \\ & + 27\rho_2\rho_1^2 (11\cos^3\gamma_0 + 2\rho_2r_0 (29\cos^2\gamma_0 + 4\rho_2r_0 (21\cos\gamma_0 + 2\rho_2r_0))) \\ & + 9\rho_2^2\rho_1 (58\cos^3\gamma_0 + \rho_2r_0 (450\cos^2\gamma_0 + \rho_2r_0 (81\cos\gamma_0 + 4\rho_2r_0))) \\ & \left. + \rho_2^3 (1243\cos^3\gamma_0 + \rho_2r_0 (327\cos^2\gamma_0 + \rho_2r_0 (30\cos\gamma_0 + \rho_2r_0))) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{22} = & \frac{4\gamma_0^2\cos\gamma_0}{3\rho_-^3\rho_+^{7/2}\rho_3^{5/2}} \left( 18r_0^3(- (4r_0 + 3d_0\gamma_0)\cos^2\gamma_0 - 4r_0(5r_0 + 3d_0\gamma_0)\rho_2\cos\gamma_0 \right. \\ & - 8r_0^2(2r_0 + 3d_0\gamma_0)\rho_2^2\rho_1^6 + 6r_0^2(- (85r_0 + 27d_0\gamma_0)\cos^3\gamma_0 - 2r_0(203r_0 + 60d_0\gamma_0)\rho_2\cos^2\gamma_0 \\ & - r_0^2(377r_0 + 303d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos\gamma_0 + 4r_0^3(15d_0\gamma_0 - 14r_0)\rho_2^3\rho_1^5 + r_0(-18(r_0 + 9d_0\gamma_0)\cos^4\gamma_0 \\ & - 2r_0(925r_0 + 432d_0\gamma_0)\rho_2\cos^3\gamma_0 - 3r_0^2(440r_0 + 1021d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos^2\gamma_0 \\ & + 6r_0^3(77r_0 + 293d_0\gamma_0)\rho_2^3\cos\gamma_0 + r_0^4(69d_0\gamma_0 - 50r_0)\rho_2^4\rho_1^4 + (6(221r_0 - 9d_0\gamma_0)\cos^5\gamma_0 \\ & + 18r_0(157r_0 - 24d_0\gamma_0)\rho_2\cos^4\gamma_0 + 17r_0^2(284r_0 - 153d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos^3\gamma_0 \\ & + 3r_0^3(1152r_0 + 1147d_0\gamma_0)\rho_2^3\cos^2\gamma_0 + 3r_0^4(42r_0 + 89d_0\gamma_0)\rho_2^4\cos\gamma_0 + r_0^5(3d_0\gamma_0 - 2r_0)\rho_2^5\rho_1^3 \\ & + \cos\gamma_0(910\cos^5\gamma_0 + 6(467r_0 - 12d_0\gamma_0)\rho_2\cos^4\gamma_0 + 3r_0(1868r_0 - 375d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos^3\gamma_0 \\ & + r_0^2(4072r_0 + 3375d_0\gamma_0)\rho_2^3\cos^2\gamma_0 + 3r_0^3(122r_0 + 129d_0\gamma_0)\rho_2^4\cos\gamma_0 + 3r_0^4(2r_0 + 3d_0\gamma_0)\rho_2^5\rho_1^2 \\ & + \cos^2\gamma_0\rho_2(182\cos^4\gamma_0 + 3(550r_0 - 67d_0\gamma_0)\rho_2\cos^3\gamma_0 + 21r_0(80r_0 + 79d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos^2\gamma_0 \\ & + r_0^2(218r_0 + 249d_0\gamma_0)\rho_2^3\cos\gamma_0 + 3r_0^3(2r_0 + 3d_0\gamma_0)\rho_2^4\rho_1 + \cos^3\gamma_0\rho_2^2(260\cos^3\gamma_0 \\ & + 3(102r_0 + 109d_0\gamma_0)\rho_2\cos^2\gamma_0 + 12r_0(4r_0 + 5d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos\gamma_0 + r_0^2(2r_0 + 3d_0\gamma_0)\rho_2^3) \left. \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{04} = & \frac{\cos\gamma_0}{9\rho_-^3\rho_+^{5/2}\rho_3^{3/2}} \left( \rho_3(\gamma_0d_0\rho_+ + (\rho_1(19\cos^2\gamma_0 - 5\rho_1r_0(2\cos\gamma_0 + \rho_1r_0))) \right. \\ & + \rho_2(5\cos^2\gamma_0 + \rho_1r_0(10\cos\gamma_0 - 19\rho_1r_0)))\rho_- + 6\gamma_0^2d_0^2\rho_2\rho_{21}\rho_-^3 + 16\rho_1r_0(\cos^2\gamma_0 \\ & + \rho_1r_0(\rho_1r_0 - \cos\gamma_0))\rho_+^2 - 18\cos\gamma_0\rho_-(\rho_1r_0(\gamma_0d_0\rho_{12} + 4\rho_2r_0) + \cos(\gamma_0)(\gamma_0d_0\rho_{12} + 4\rho_1r_0))^2 \left. \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{50} = & \frac{8\gamma_0^4\rho_{21}\cos\gamma_0}{3\rho_+^{9/2}\rho_3^{7/2}} \left( 27\rho_1^3 (5\cos^3\gamma_0 + 4\rho_2r_0 (6\cos^2\gamma_0 + 4\rho_2r_0 (3\cos\gamma_0 + 4\rho_2r_0))) \right. \\ & + 27\rho_2\rho_1^2 (11\cos^3\gamma_0 + 2\rho_2r_0 (29\cos^2\gamma_0 + 4\rho_2r_0 (21\cos\gamma_0 + 2\rho_2r_0))) \\ & + 9\rho_2^2\rho_1 (58\cos^3\gamma_0 + \rho_2r_0 (450\cos^2\gamma_0 + \rho_2r_0 (81\cos\gamma_0 + 4\rho_2r_0))) \\ & \left. + \rho_2^3 (1243\cos^3\gamma_0 + \rho_2r_0 (327\cos^2\gamma_0 + \rho_2r_0 (30\cos\gamma_0 + \rho_2r_0))) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_{32} = & \frac{4\gamma_0^3\cos\gamma_0}{3\rho_-^4\rho_+^{9/2}\rho_3^{7/2}} \left( 108r_0^4(- (6r_0 + 5d_0\gamma_0)\cos^3\gamma_0 - 6r_0(5r_0 + 4d_0\gamma_0)\rho_2\cos^2\gamma_0 \right. \\ & - 24r_0^2(3r_0 + 2d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos\gamma_0 - 16r_0^3(3r_0 + 4d_0\gamma_0)\rho_2^3\rho_1^8 + 54r_0^3(- (101r_0 + 40d_0\gamma_0)\cos^4\gamma_0 \\ & - 2r_0(253r_0 + 102d_0\gamma_0)\rho_2\cos^3\gamma_0 - r_0^2(1205r_0 + 452d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos^2\gamma_0 - 8r_0^3(107r_0 + 94d_0\gamma_0)\rho_2^3\cos\gamma_0 \\ & + 8r_0^4(12d_0\gamma_0 - 7r_0)\rho_2^4\rho_1^7 + 18r_0^2(-12(r_0 + 15d_0\gamma_0)\cos^5\gamma_0 - 8r_0(89r_0 + 126d_0\gamma_0)\rho_2\cos^4\gamma_0 \\ & - r_0^2(4899r_0 + 2594d_0\gamma_0)\rho_2^2\cos^3\gamma_0 - 12r_0^3(285r_0 + 478d_0\gamma_0)\rho_2^3\cos^2\gamma_0\cos\gamma_0 \\ & \left. + r_0^4(749r_0 + 1998d_0\gamma_0)\rho_2^4 + 2r_0^5(44d_0\gamma_0 - 15r_0)\rho_2^5\rho_1^6 + r_0(36(781r_0 - 60d_0\gamma_0)\cos^6\gamma_0 \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 72r_0 (1553r_0 - 198d_0\gamma_0) \rho_2 \cos^5 \gamma_0 + 3r_0^2 (29237r_0 - 15456d_0\gamma_0) \rho_2^2 \cos^4 \gamma_0 \\
& + 4r_0^3 (26619r_0 - 37009d_0\gamma_0) \rho_2^3 \cos^3 \gamma_0 + 12r_0^4 (8952r_0 + 8909d_0\gamma_0) \rho_2^4 \cos^2 \gamma_0 \\
& + 12r_0^5 (410r_0 + 761d_0\gamma_0) \rho_2^5 \cos \gamma_0 + r_0^6 (140d_0\gamma_0 - 39r_0) \rho_2^6 \rho_1^5 \\
& + (12 (3206r_0 - 45d_0\gamma_0) \cos^7 \gamma_0 + 24r_0 (7345r_0 - 216d_0\gamma_0) \rho_2 \cos^6 \gamma_0 \\
& + 24r_0^2 (9883r_0 - 1053d_0\gamma_0) \rho_2^2 \cos^5 \gamma_0 + r_0^3 (303383r_0 - 129904d_0\gamma_0) \rho_2^3 \cos^4 \gamma_0 \\
& + 2r_0^4 (112393r_0 + 88322d_0\gamma_0) \rho_2^4 \cos^3 \gamma_0 + 18r_0^5 (1179r_0 + 1222d_0\gamma_0) \rho_2^5 \cos^2 \gamma_0 \\
& + 2r_0^6 (217r_0 + 340d_0\gamma_0) \rho_2^6 \cos \gamma_0 - r_0^7 (r_0 - 4d_0\gamma_0) \rho_2^7) \rho_1^4 \\
& + 2 \cos \gamma_0 (7475 \cos^7 \gamma_0 + 2 (20513r_0 - 162d_0\gamma_0) \rho_2 \cos^6 \gamma_0 \\
& + 2r_0 (33919r_0 - 1818d_0\gamma_0) \rho_2^2 \cos^5 \gamma_0 + 2r_0^2 (65365r_0 - 17502d_0\gamma_0) \rho_2^3 \cos^4 \gamma_0 \\
& + 2r_0^3 (55373r_0 + 43834d_0\gamma_0) \rho_2^4 \cos^3 \gamma_0 + 4r_0^4 (3725r_0 + 3543d_0\gamma_0) \rho_2^5 \cos^2 \gamma_0 \\
& + 3r_0^5 (201r_0 + 220d_0\gamma_0) \rho_2^6 \cos \gamma_0 + 2r_0^6 (3r_0 + 4d_0\gamma_0) \rho_2^7) \rho_1^3 \\
& + 2 \cos^2 \gamma_0 \rho_2 (3146 \cos^6 \gamma_0 + 5 (1787r_0 - 90d_0\gamma_0) \rho_2 \cos^5 \gamma_0 \\
& + r_0 (56345r_0 - 10736d_0\gamma_0) \rho_2^2 \cos^4 \gamma_0 + r_0^2 (60143r_0 + 52314d_0\gamma_0) \rho_2^3 \cos^3 \gamma_0 \\
& + 2r_0^3 (5075r_0 + 5154d_0\gamma_0) \rho_2^4 \cos^2 \gamma_0 + 4r_0^4 (143r_0 + 160d_0\gamma_0) \rho_2^5 \cos \gamma_0 \\
& + 3r_0^5 (3r_0 + 4d_0\gamma_0) \rho_2^6) \rho_1^2 + \cos^3 \gamma_0 \rho_2^2 (871 \cos^5 \gamma_0 + 4 (8002r_0 - 721d_0\gamma_0) \rho_2 \cos^4 \gamma_0 \\
& + 20r_0 (1908r_0 + 1739d_0\gamma_0) \rho_2^2 \cos^3 \gamma_0 + 4r_0^2 (1888r_0 + 2007d_0\gamma_0) \rho_2^3 \cos^2 \gamma_0 \\
& + r_0^3 (541r_0 + 620d_0\gamma_0) \rho_2^4 \cos \gamma_0 + 4r_0^4 (3r_0 + 4d_0\gamma_0) \rho_2^5) \rho_1 \\
& + \cos^4 \gamma_0 \rho_2^3 (4251 \cos^4 \gamma_0 + 2 (2679r_0 + 2486d_0\gamma_0) \rho_2 \cos^3 \gamma_0 + 6r_0 (201r_0 + 218d_0\gamma_0) \rho_2^2 \cos^2 \gamma_0 \\
& + 6r_0^2 (17r_0 + 20d_0\gamma_0) \rho_2^3 \cos \gamma_0 + r_0^3 (3r_0 + 4d_0\gamma_0) \rho_2^4) \rho_1^2) \\
\alpha'_{14} = & \frac{\gamma_0 \cos \gamma_0}{9\rho_-^4 \rho_+^{7/2} \rho_3^{5/2}} \left( 36r_0^4 (- (20r_0^2 + 22d_0\gamma_0 r_0 + 9d_0^2\gamma_0^2) \cos^2 \gamma_0 \right. \\
& - 2r_0 (20r_0^2 + 55d_0\gamma_0 r_0 + 18d_0^2\gamma_0^2) \rho_2 \cos \gamma_0 - 4r_0^2 (5r_0^2 + 22d_0\gamma_0 r_0 + 18d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^2) \rho_1^7 \\
& + 6r_0^3 (- (836r_0^2 + 1103d_0\gamma_0 r_0 + 216d_0^2\gamma_0^2) \cos^3 \gamma_0 - 2r_0 (882r_0^2 + 2629d_0\gamma_0 r_0 + 468d_0^2\gamma_0^2) \rho_2 \cos^2 \gamma_0 \\
& - r_0^2 (1020r_0^2 + 4867d_0\gamma_0 r_0 + 2250d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^2 \cos \gamma_0 - 4r_0^3 (23r_0^2 + 178d_0\gamma_0 r_0 - 90d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^3) \rho_1^6 \\
& + r_0^2 (- (28157r_0^2 + 5592d_0\gamma_0 r_0 + 1944d_0^2\gamma_0^2) \cos^4 \gamma_0 - 2r_0 (38746r_0^2 + 23417d_0\gamma_0 r_0 + 4752d_0^2\gamma_0^2) \\
& \rho_2 \cos^3 \gamma_0 - 6r_0^2 (11765r_0^2 + 6767d_0\gamma_0 r_0 + 4881d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^2 \cos^2 \gamma_0 - 2r_0^3 (10666r_0^2 + 3d_0\gamma_0 r_0 - 6354d_0^2\gamma_0^2) \\
& \rho_2^3 \cos \gamma_0 + r_0^4 (-77r_0^2 - 646d_0\gamma_0 r_0 + 414d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^4) \rho_1^5 + r_0 (-4 (6557r_0^2 - 4113d_0\gamma_0 r_0 + 324d_0^2\gamma_0^2) \cos^5 \gamma_0 \\
& + r_0 (-77627r_0^2 + 17264d_0\gamma_0 r_0 - 7776d_0^2\gamma_0^2) \rho_2 \cos^4 \gamma_0 - 4r_0^2 (19851r_0^2 - 10786d_0\gamma_0 r_0 + 8496d_0^2\gamma_0^2) \\
& \rho_2^2 \cos^3 \gamma_0 + 2r_0^3 (-15421r_0^2 + 21519d_0\gamma_0 r_0 + 15597d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^3 \cos^2 \gamma_0 \\
& + 8r_0^4 (-355r_0^2 + 85d_0\gamma_0 r_0 + 252d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^4 \cos \gamma_0 + r_0^5 (-3r_0^2 - 26d_0\gamma_0 r_0 + 18d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^5) \rho_1^4 \\
& \left. + 2 \cos \gamma_0 ((10165r_0^2 + 13608d_0\gamma_0 r_0 - 162d_0^2\gamma_0^2) \cos^5 \gamma_0 + 18r_0 (1779r_0^2 + 1979d_0\gamma_0 r_0 - 84d_0^2\gamma_0^2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_2 \cos^4 \gamma_0 + 2r_0^2 (16543r_0^2 + 30859d_0\gamma_0r_0 - 5589d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^2 \cos^3 \gamma_0 + 2r_0^3 (5360r_0^2 + 21201d_0\gamma_0r_0 \\
& + 10224d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^3 \cos^2 \gamma_0 + 3r_0^4 (-185r_0^2 + 906d_0\gamma_0r_0 + 654d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^4 \cos \gamma_0 \\
& + 2r_0^5 (-23r_0^2 + 10d_0\gamma_0r_0 + 18d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^5 \rho_1^3 + 2 \cos^2 \gamma_0 (13 (898r_0 + 423d_0\gamma_0) \cos^5 \gamma_0 \gamma_0 \\
& + (39927r_0^2 + 18550d_0\gamma_0r_0 - 216d_0^2\gamma_0^2) \rho_2 \cos^4 \gamma_0 + r_0 (46244r_0^2 + 42207d_0\gamma_0r_0 - 3978d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^2 \cos^3 \gamma_0 \\
& + 2r_0^2 (9719r_0^2 + 16179d_0\gamma_0r_0 + 7551d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^3 \cos^2 \gamma_0 + 2r_0^3 (741r_0^2 + 1634d_0\gamma_0r_0 + 954d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^4 \cos \gamma_0 \\
& + r_0^4 (35r_0^2 + 66d_0\gamma_0r_0 + 54d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^5 \rho_1^2 + \cos^3 \gamma_0 (507 \cos^5 \gamma_0 + 26 (256r_0 + 91d_0\gamma_0) \rho_2 \cos^4 \gamma_0 \\
& + 2 (6241r_0^2 + 10775d_0\gamma_0r_0 - 603d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^2 \cos^3 \gamma_0 + 6r_0 (1174r_0^2 + 3675d_0\gamma_0r_0 + 1986d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^3 \cos^2 \gamma_0 \\
& + r_0^2 (731r_0^2 + 2954d_0\gamma_0r_0 + 1854d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^4 \cos \gamma_0 + 4r_0^3 (5r_0^2 + 22d_0\gamma_0r_0 + 18d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^5 \rho_1 \\
& + \cos^4 \gamma_0 \rho_2 (845 \cos^4 \gamma_0 + 260 (7r_0 + 11d_0\gamma_0) \rho_2 \cos^3 \gamma_0 + 6 (185r_0^2 + 561d_0\gamma_0r_0 + 327d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^2 \cos^2 \gamma_0 \\
& + 4r_0 (35r_0^2 + 132d_0\gamma_0r_0 + 90d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^3 \cos \gamma_0 + r_0^2 (5r_0^2 + 22d_0\gamma_0r_0 + 18d_0^2\gamma_0^2) \rho_2^4) \rho_1^2) \\
& \hspace{15em} (B.16)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\rho_{21} = \rho_2 - \rho_1, \quad \rho_3 = 13 \cos \gamma_0 + (12\rho_1 + \rho_2) r_0. \quad (B.17)$$

また、変形楕円内滑り領域と粘着領域の分部と比率による摩擦力変化を考慮した近似式である Kalker のクリープ係数関数 [16] により、接触楕円半径を用いて、 $x$  方向と  $y$  方向のクリープ係数はそれぞれ以下の式で表すことができる

$$\kappa_x = \frac{Enm\pi}{\hat{B} - \nu (\hat{D} - \hat{C})} \quad (B.18)$$

$$\kappa_y = \frac{Enm\pi}{\hat{B} - \nu g^2 \hat{C}}, \quad (B.19)$$

ただし、 $\hat{B}$ 、 $\hat{C}$ 、 $\hat{D}$  は  $K$  と  $k$  を用いて以下のようになる

$$\hat{B} = \frac{(2k^2 - 1)K}{3k^2}, \quad \hat{C} = \frac{(2 - k^2)K}{3k^2}, \quad \hat{D} = \frac{(1 + k^2)K}{3k^2}. \quad (B.20)$$

$k$  の式 (B.14) と  $\hat{B}$ 、 $\hat{C}$ 、 $\hat{D}$  の式 (B.20) を式 (B.18)、(B.19) に代入してテーラー展開すると、右車輪の接触点における  $x$  方向と  $y$  方向のクリープ係数は  $y$  と  $\psi$  の各べきで以下の式で表せる。

$$\begin{aligned}
\kappa_{Rx} = & \kappa_{xx} + \kappa_{x10}y + \kappa_{x20}y^2 + \kappa_{x02}\psi^2 + \kappa_{x30}y^3 + \kappa_{x12}y\psi^2 + \kappa_{x40}y^4 \\
& + \kappa_{x22}y^2\psi^2 + \kappa_{x04}\psi^4 + \kappa_{x50}y^5 + \kappa_{x32}y^3\psi^2 + \kappa_{x14}y\psi^4 \quad (B.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{Ry} = & \kappa_{yy} + \kappa_{y10}y + \kappa_{y20}y^2 + \kappa_{y02}\psi^2 + \kappa_{y30}y^3 + \kappa_{y12}y\psi^2 + \kappa_{y40}y^4 \\
& + \kappa_{y22}y^2\psi^2 + \kappa_{y04}\psi^4 + \kappa_{y50}y^5 + \kappa_{y32}y^3\psi^2 + \kappa_{y14}y\psi^4, \quad (B.22)
\end{aligned}$$

ただし、 $\kappa_{xx}$  と  $\kappa_{yy}$  は  $x$  方向と  $y$  方向の線形クリープ力の係数であり、以下のように表せる。

$$\kappa_{xx} = \frac{27\rho'Q^2(1-\nu)^2}{[(2-5\nu)\rho' + 2\nu - 1]\rho_+^2 E\sqrt{1-\rho'}} \quad (\text{B.23})$$

$$\kappa_{yy} = \frac{27\rho'Q^2(1-\nu)^2}{[-\nu\rho'^2 + (2+3\nu)\rho' - 2\nu - 1]\rho_+^2 E\sqrt{1-\rho'}}, \quad (\text{B.24})$$

$\kappa_{x10}$  から  $\kappa_{y14}$  は  $x$  方向と  $y$  方向のクリープ力の各べきの非線形係数であり、接触曲率半径、ポアソン比、ヤング率、踏面勾配、接触力より求められる係数である。左車輪の接触点における  $x$  方向と  $y$  方向のクリープ係数も同様に以上の式と同じ形を持つ考えられる。よって、台車の横変位  $y$  と回転角度  $\psi$  による車輪とレール接触点のクリープ係数の変化式は1つの定数と  $y$ 、 $y^2$ 、 $\psi^2$ 、 $y^3$ 、 $y\psi^2$ 、 $y^4$ 、 $y^2\psi^2$ 、 $\psi^4$ 、 $y^5$ 、 $y^3\psi^2$ 、 $y\psi^4$  の線形と非線形項で表すことができる。

## 付録C 非線形座標変換の非線形係数選定

式(4.34)に対して線形 ( $O(\epsilon^{1/2})$ )、3次非線形 ( $O(\epsilon^{3/2})$ )、5次非線形 ( $O(\epsilon^{5/2})$ ) のそれぞれのオーダーで式を立てて解析する。線形 ( $O(\epsilon^{1/2})$ ) の成分を取り出すと以下のようにになる

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= i\omega\eta \\ \dot{\bar{\eta}} &= -i\omega\bar{\eta}.\end{aligned}\tag{C.1}$$

線形結果を考慮して式(4.34)に代入すると3次非線形 ( $O(\epsilon^{3/2})$ ) の成分は以下のようにになる

$$\begin{aligned}\eta &= i\omega q + \hat{N}_1(O(\eta^3)) + \frac{\partial q}{\partial \eta}(-i\omega\eta) + \frac{\partial q}{\partial \bar{\eta}}(i\omega\bar{\eta}) \\ &= D_1\epsilon\eta + (D_2 + 2i\omega\Gamma_2)\epsilon\bar{\eta} + (D_3 - 2i\omega\Gamma_3)\eta^3 \\ &\quad + D_4\eta^2\bar{\eta} + (D_5 + 2i\omega\Gamma_5)\eta\bar{\eta}^2 + (D_6 + 4i\omega\Gamma_6)\bar{\eta}^3.\end{aligned}\tag{C.2}$$

ここで、非線形項をなるべく消すために、非線形係数がゼロになるような式を考える

$$\begin{aligned}(D_2 + 2i\omega\Gamma_2)\epsilon\bar{\eta} &= 0, \quad (D_3 - 2i\omega\Gamma_3)\eta^3 = 0, \\ (D_5 + 2i\omega\Gamma_5)\eta\bar{\eta}^2 &= 0, \quad (D_6 + 4i\omega\Gamma_6)\bar{\eta}^3 = 0.\end{aligned}\tag{C.3}$$

これによって  $\Gamma_2$ 、 $\Gamma_3$ 、 $\Gamma_5$ 、 $\Gamma_6$  の4つの係数が以下のように求められる

$$\Gamma_2 = -\frac{D_2}{2i\omega}, \quad \Gamma_3 = \frac{D_3}{2i\omega}, \quad \Gamma_5 = -\frac{D_5}{2i\omega}, \quad \Gamma_6 = -\frac{D_6}{4i\omega},\tag{C.4}$$

また、 $\Gamma_1$  と  $\Gamma_4$  を以下のように選ぶ

$$\Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_4 = 0.\tag{C.5}$$

以上の6つの非線形係数の選定によって、式(C.2)の非線形項の数を最小化でき、

$$\dot{\eta} = D_1\epsilon\eta + D_4\eta^2\bar{\eta} \quad (\text{C.6})$$

とよくなる。また、その共役方程式は

$$\dot{\bar{\eta}} = \bar{D}_1\epsilon\bar{\eta} + \bar{D}_4\eta\bar{\eta}^2 \quad (\text{C.7})$$

である。次は式(C.6)と式(C.7)を考慮して式(4.34)に代入すると5次非線形( $O(\epsilon^{5/2})$ )に関する式

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= i\omega q - (i\omega\eta + D_1\epsilon\eta + D_4\eta^2\bar{\eta})\frac{\partial q}{\partial \eta} \\ &\quad + (i\omega\bar{\eta} + \bar{D}_1\epsilon\bar{\eta} + \bar{D}_4\eta\bar{\eta}^2)\frac{\partial q}{\partial \bar{\eta}} + \hat{N}_1(O(\eta^5)) \\ &= (D_7 + D_2\bar{\Gamma}_2)\epsilon^2\eta + (2i\omega\Gamma_8 + D_8 + D_1\Gamma_2 - \bar{D}_1\Gamma_2)\epsilon^2\bar{\eta} \\ &\quad + (-2i\omega\Gamma_9 + D_9 - 2D_1\Gamma_3 + D_2\bar{\Gamma}_6 + D_4\bar{\Gamma}_2)\epsilon\eta^3 \\ &\quad + (D_{10} + D_2\bar{\Gamma}_5 + 3D_3\Gamma_2 + 2D_5\bar{\Gamma}_2)\epsilon\eta^2\bar{\eta} \\ &\quad + (2i\omega\Gamma_{11} + D_{11} - 2\bar{D}_1\Gamma_5 - \bar{D}_4\Gamma_2 + 2D_4\Gamma_2 + 3D_6\bar{\Gamma}_2)\epsilon\eta\bar{\eta}^2 \\ &\quad + (4i\omega\Gamma_{12} + D_{12} - 3\bar{D}_1\Gamma_6 + D_1\Gamma_6 + D_2\bar{\Gamma}_3)\epsilon\bar{\eta}^3 \\ &\quad + (-4i\omega\Gamma_{13} + D_{13} + 3D_3\Gamma_3 + D_4\bar{\Gamma}_6)\eta^5 \\ &\quad + (-2i\omega\Gamma_{14} + D_{14} - D_4\Gamma_3 + D_4\bar{\Gamma}_5 + 2D_5\bar{\Gamma}_6)\eta^4\bar{\eta} \\ &\quad + (D_{15} + 3D_3\Gamma_5 - D_5\bar{\Gamma}_6 + 2D_5\bar{\Gamma}_5 + 3D_6\bar{\Gamma}_6)\eta^3\bar{\eta}^2 \\ &\quad + (2i\omega\Gamma_{16} + D_{16} + D_4\Gamma_5 - 2\bar{D}_4\Gamma_4 + 3D_3\Gamma_6 + D_4\bar{\Gamma}_3 \\ &\quad \quad + D_5\bar{\Gamma}_5 + 2D_5\Gamma_5 + 3D_6\bar{\Gamma}_5)\eta^2\bar{\eta}^3 \\ &\quad + (4i\omega\Gamma_{17} + D_{17} - 3\bar{D}_4\Gamma_6 + 2D_4\Gamma_6 + 2D_5\bar{\Gamma}_3)\eta\bar{\eta}^4 \\ &\quad + (6i\omega\Gamma_{18} + D_{18} + D_5\bar{\Gamma}_3 + 3D_6\bar{\Gamma}_3)\bar{\eta}^5. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$



が得られる。ここで、以下のように非線形変換の非線形係数をゼロに考える

$$\begin{aligned}
(2i\omega\Gamma_8 + D_8 + D_1\Gamma_2 - \bar{D}_1\Gamma_2)\epsilon^2\bar{\eta} &= 0, \\
(-2i\omega\Gamma_9 + D_9 - 2D_1\Gamma_3 + D_2\bar{\Gamma}_6 + D_4\bar{\Gamma}_2)\epsilon\eta^3 &= 0, \\
(2i\omega\Gamma_{11} + D_{11} - 2\bar{D}_1\Gamma_5 - \bar{D}_4\Gamma_2 + 2D_4\Gamma_2 + 3D_6\bar{\Gamma}_2)\epsilon\eta\bar{\eta}^2 &= 0, \\
(4i\omega\Gamma_{12} + D_{12} - 3\bar{D}_1\Gamma_6 + D_1\Gamma_6 + D_2\bar{\Gamma}_3)\epsilon\bar{\eta}^3 &= 0, \\
(-4i\omega\Gamma_{13} + D_{13} + 3D_3\Gamma_3 + D_4\bar{\Gamma}_6)\eta^5 &= 0, \\
(-2i\omega\Gamma_{14} + D_{14} - D_4\Gamma_3 + D_4\bar{\Gamma}_5 + 2D_5\bar{\Gamma}_6)\eta^4\bar{\eta} &= 0, \\
(2i\omega\Gamma_{16} + D_{16} + D_4\Gamma_5 - 2\bar{D}_4\Gamma + 3D_3\Gamma_6 + D_4\bar{\Gamma}_3 \\
+ D_5\bar{\Gamma}_5 + 2D_5\Gamma_5 + 3D_6\bar{\Gamma}_5)\eta^2\bar{\eta}^3 &= 0, \\
(4i\omega\Gamma_{17} + D_{17} - 3\bar{D}_4\Gamma_6 + 2D_4\Gamma_6 + 2D_5\bar{\Gamma}_3)\eta\bar{\eta}^4 &= 0, \\
(6i\omega\Gamma_{18} + D_{18} + D_5\bar{\Gamma}_3 + 3D_6\bar{\Gamma}_3)\bar{\eta}^5 &= 0.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

以上の等式によって、以下のように、非線形座標変化関数の非線形係数を選ぶ

$$\begin{aligned}
\Gamma_8 &= -(D_8 + D_1\Gamma_2 - \bar{D}_1\Gamma_2)/(2i\omega), \\
\Gamma_9 &= (D_9 - 2D_1\Gamma_3 + D_2\bar{\Gamma}_6 + D_4\bar{\Gamma}_2)/(2i\omega), \\
\Gamma_{11} &= -(D_{11} - 2\bar{D}_1\Gamma_5 - \bar{D}_4\Gamma_2 + 2D_4\Gamma_2 + 3D_6\bar{\Gamma}_2)/(2i\omega), \\
\Gamma_{12} &= -(D_{12} - 3\bar{D}_1\Gamma_6 + D_1\Gamma_6 + D_2\bar{\Gamma}_3)/(4i\omega), \\
\Gamma_{13} &= (D_{13} + 3D_3\Gamma_3 + D_4\bar{\Gamma}_6)/(4i\omega), \\
\Gamma_{14} &= (D_{14} - D_4\Gamma_3 + D_4\bar{\Gamma}_5 + 2D_5\bar{\Gamma}_6)/(2i\omega), \\
\Gamma_{16} &= -(D_{16} + D_4\Gamma_5 - 2\bar{D}_4\Gamma + 3D_3\Gamma_6 + D_4\bar{\Gamma}_3 \\
&\quad + D_5\bar{\Gamma}_5 + 2D_5\Gamma_5 + 3D_6\bar{\Gamma}_5)/(2i\omega), \\
\Gamma_{17} &= -(D_{17} - 3\bar{D}_4\Gamma_6 + 2D_4\Gamma_6 + 2D_5\bar{\Gamma}_3)/(4i\omega), \\
\Gamma_{18} &= -(D_{18} + D_5\bar{\Gamma}_3 + 3D_6\bar{\Gamma}_3)/(6i\omega),
\end{aligned} \tag{C.10}$$

また、 $\Gamma_7$ 、 $\Gamma_{10}$ 、 $\Gamma_{15}$  を以下のように選ぶ

$$\Gamma_7 = 0, \quad \Gamma_{10} = 0, \quad \Gamma_{15} = 0. \tag{C.11}$$

以上の係数選定により、5次非線形 ( $O(\epsilon^{5/2})$ ) に関する式の非線形項の数を最小化でき、

$$\dot{\eta} = D'_7\epsilon^2\eta + D'_{10}\epsilon\eta^2\bar{\eta} + D'_{15}\eta^3\bar{\eta}^2 \tag{C.12}$$

どのように簡単化される、ただし、

$$\begin{aligned}
 D'_7 &= D_7 + D_2 \bar{\Gamma}_2, \\
 D'_{10} &= D_{10} + D_2 \bar{\Gamma}_5 + 3D_3 \Gamma_2 + 2D_5 \bar{\Gamma}_2, \\
 D'_{15} &= D_{15} + 3D_3 \Gamma_5 + D_5 \bar{\Gamma}_6 + 2D_5 \bar{\Gamma}_5 + 3D_6 \bar{\Gamma}_6.
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

最後に線形、3次非線形、5次非線形を全部考慮して組み合わせると  $\eta$  の線形、3次と5次非線形まで考慮した式

$$\begin{aligned}
 \dot{\eta} &= i\omega\eta + D_1 \varepsilon \eta + D_4 \eta^2 \bar{\eta} \\
 &\quad + D'_7 \varepsilon^2 \eta + D'_{10} \varepsilon \eta^2 \bar{\eta} + D'_{15} \eta^3 \bar{\eta}^2.
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

が得られる。よって、非線形座標変化を用いて、非線形項が5つに減った。

# 本論文に関連した公表論文と研究発表

## 公表論文

### 査読付き論文

- Wei, W., Yabuno, H.: Subcritical Hopf and Saddle-Node Bifurcations in Hunting Motion Caused by Cubic and Quintic Nonlinearities: Experimental Identification of Nonlinearities in a Roller Rig. *Nonlinear Dyn.* **98**, 657-670 (2019)
- Wei, W., Yabuno, H.: Nonlinear Analysis of Hunting Motion by Focusing on Non-Selfadjointness. *IUTAM Symposium on Exploiting Nonlinear Dynamics for Engineering Systems, IUTAM Bookseries* **37**, 303-316 (2019)

## 研究発表

### 国際学会発表

- Wei, W., Yabuno, H.: Nonlinear analysis of hunting motion of a railway wheel set by using a roller rig. *ENOLIDES 2017: IUTAM Symposium on Exploiting Nonlinear Dynamics for Engineering Systems, Novi Sad (Serbia)*, July, 2018.
- Wei, W., Yabuno, H.: Nonlinear characteristics of hunting motion of a railway wheel set by using a roller rig. *ENOC 2017: 9th European Nonlinear Dynamics Conference, Budapest (Hungary)*, June, 2017.

### 国内学会発表

- Wei Weiyan, 藪野 浩司: 鉄道車両に生じる蛇行動の非線形解析. *JSIAM 2017: 日本応用数理学会 2017 年度年会, 武蔵野大学, 2017 年 9 月.*

# 謝辞

本研究を進めるあたり、日々より丁寧かつ熱心なご指導をいただいた筑波大学システム情報工学、藪野 浩司教授に深謝いたします。

講義やセミナー発表を通じて多くの知識や示唆をいただいた副指導の坪内 孝司教授と堀 憲之教授に感謝いたします。

本論文に通して有意義な指摘やコメントをいただいた副査の水谷 孝一教授、望山 洋教授、杉浦 壽彦教授に感謝いたします。

ゼミなどを通して多くの助言をいただいた藪野研の皆さんに感謝いたします。

最後に、これまで学生生活を支えてくれた両親と彼女の駱さんに感謝します。

## 参考文献

- [1] Knothe, K., Bohm, F.: History of stability of railway and road vehicles. *Veh. Syst. Dyn.* **31**, 283-323 (1999)
- [2] Jin, X. S.: Key problems faced in high-speed train operation. *Appl Phys and Eng.* **15**, 936-945 (2014)
- [3] Dai, J., Ang, K. K. and Jiang, D.: Moving element analysis of high-speed rail system accounting for hanging sleepers. *MATEC web of Conferences* (2018). <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814805007>
- [4] Han, L., Jing, L. and Zhao, L.: Finite element analysis of the wheel-rail impact behavior induced by a wheel flat for high-speed trains: The influence of strain rate. Part F: *Journal of Rail and Rapid Transit.* 232, 990-1004 (2018)
- [5] Wickens, A. H.: *Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics*. Swets and Zeitlinger Publishers (2003)
- [6] Wickens, A. H.: The dynamic stability of railway vehicle wheelsets and bogies having profiled wheels. *Int. J. Solids Struct.* **1**, 319-341 (1965)
- [7] Fujii, S., Yoshimoto, K., Kobayashi, F.: An analysis of the lateral hunting motion of a two-axle railway wagon by digital simulation: 1st report, outlines of the mathematical model. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers* **40** (340), 3329-3334 (1974)
- [8] Fujii, S., Yoshimoto, K., Kobayashi, F.: An analysis of the lateral hunting motion of a two-axle railway wagon by digital simulation: 2st report, the results of the simulation experiments. *Bulletin of the JSME* **18** (125), 1246-1251 (1975)
- [9] Iwnicki, S. D.: *Handbook of railway vehicle dynamics*. Taylor and Francis (2006)

- [10] 日本機械学会、車両システムのダイナミックスと制御、養賢堂、1999年
- [11] Timoshenko, S. P., Goodier, J. N.: Theory of elasticity. Indian Edition (2010)
- [12] Kalker, J. J.: Survey of wheel-rail rolling contact theory. *Int. J. Solids Struct. Veh. Syst. Dyn.* **8**, 317-358 (1979)
- [13] Khaled, E. Z., Schwab, A. L.: Review of Joost Kalker's wheel-rail contact theories and their implementation in multibody codes. International design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference (2009). <https://doi.org/10.1115/DETC2009-87655>
- [14] Yokose, K., Igarashi, M.: Fundamental study on truck hunting considering non-linearity of creep force. *Bulletin of JSME.* **29**, 541-547 (1986)
- [15] Johnson, K. L.: Contact mechanics. Cambridge University Press (1985)
- [16] Kalker, J. J.: Three-dimensional elastic bodies in rolling contact. Kluwer Academic Publishers (1990)
- [17] Doyle, G. R., Prause, R. H.: Hunting stability of rail vehicles with torsionally flexible wheelsets. *Journal of Engineering for Industry* **99**, 10-17 (1977)
- [18] Casanueva, C., Alonso, A., Eziolaza, I. and Ortiz, J. G. G.: Simple flexible wheelset model for low frequency instability simulations. (2012) <https://doi.org/10.1177/0954409712468253>
- [19] Lee, S., Cheng, Y.: Hunting stability analysis of high-speed railway vehicle trucks on tangent tracks. *Journal of Sound and Vibration* **282**, 881-898 (2005)
- [20] Chi, M., Zhang, W., Zeng, J., Jin, X. and Zhu, M.: Influence of hunting motion on ride quality of railway vehicle. *Journal of Vibration Engineering* **21**, 639-643 (2008)
- [21] Ahmadian, M., Yang, S.: Effect of system nonlinearities on locomotive bogie hunting stability. *Veh. Syst. Dyn.* **29**, 365-384 (1998)
- [22] Wickens, A. H.: Steering and dynamic stability of railway vehicles. *Veh. Syst. Dyn.* **5**, 15-46 (1976)
- [23] Wickens, A. H.: The dynamics of railway vehicles on straight track: Fundamental considerations of lateral stability. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings* **180**, 29-44 (1965)

- [24] Baldovin, D., Sireteanu, T., Simona, N. and Mitu, A. M.: Dissipation effect in the hunting motion stability of wheel set with elastic joints. Universitatea “ Eftimie Murgu ” Resita **17**, 167-176 (2010)
- [25] Yoshino, H., Yabuno, H., Lin, S. and Suda, Y.: Theoretical and experimental analyses on stabilization of hunting motion by utilizing the traction motor as a passive gyroscopic damper. Journal of Rail and Rapid Transit **229**, 395-401 (2015)
- [26] Ejiri, K., Michitsuji, Y., Suda, Y., Lin, S. and Sugiyama, H.: Running stability analysis of independently rotating wheelset with negative tread conicity using scaled-model roller rig. JSME. **79**, 4950-4962 (2013)
- [27] 日本機械学会、鉄道車両のダイナミクス、電気車研究会、1994年
- [28] Ahmadian, M., Yang, S.: Hopf bifurcation and hunting behavior in a rail wheelset with flange contact. Nonlinear Dyn. **15**, 15-30 (1998)
- [29] Hamid, M. S., Kouros, H. S.: A survey of Hopf bifurcation analysis in nonlinear railway wheelset dynamics. Journal of Vibroengineering **14**, 334-351 (2012)
- [30] Polach, O.: Characteristic parameters of nonlinear wheel/rail contact geometry. Veh. Syst. Dyn. **48**, 19-36 (2009)
- [31] Sakamoto, H., Yamamoto, M.: Effect of nonlinear creep force on railway truck dynamics. Bulletin of JSME. **29**, 3102-3108 (1986)
- [32] Banerjee, N., Karmakar, R.: Modelling of a free rail wheelset using non-linear creep force. Heavy Veh. Syst. **21**, 310-327 (2014)
- [33] Knudsen, C., Feldberg, R. and True, H.: Bifurcations and chaos in a model of a rolling railway wheelset. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **338**, 455-469 (1992)
- [34] Zboinski, K., Dusza, M.: Self-exciting vibrations and hopf's bifurcation in nonlinear stability analysis of rail vehicles in a curved track. European Journal of Mechanics A/Solids **29**, 190-203 (2010)
- [35] Chi, M., Wu, X.: Parameters study of Hopf bifurcation in railway vehicle system. Comput. Nonlinear Dyn. (2015). <https://doi.org/10.1115/1.4027683>

- [36] Dong, H., Zeng, J., Xie, J. and Jia, L.: Bifurcation/instability forms of high speed railway vehicles. *Science China Technological Sciences* **56**, 1685-1696 (2013)
- [37] True, H.: A bifurcation analysis of nonlinear oscillations in railway vehicles. *Veh. Syst. Dyn.* **12**, 5-6 (1983)
- [38] Yabuno, H., Okamoto, T. and Aoshima, N.: Effect of lateral linear stiffness on nonlinear characteristics of hunting motion of a railway wheelset. *Meccanica* **37**, 555-568 (2002)
- [39] Kaiser, I., Polach, O.: Comparison of methods analyzing bifurcation and hunting of complex rail vehicle models. *Comput. Nonlinear Dyn.* (2012). <https://doi.org/10.1115/1.4006825>
- [40] He, X.: Hopf bifurcation at infinity with discontinuous nonlinearities. *The ANZIAM journal* **33**, 133-148 (1991)
- [41] Zhang, B., Zeng, J. and Liu, W.: Research on stochastic stability and stochastic bifurcation of suspended wheelset. *Journal of Mechanical Science and Technology* **29**, 3097-3107 (2015)
- [42] Chung, W. J., Shim, J. K.: Influence factors on critical speed hysteresis in railway vehicles. *JSME International Journal Series C* **46**, 278-288 (2003)
- [43] Yan, Y., Zeng, J., Huang, C. and Zhang, T.: Bifurcation analysis of railway bogie with yaw damper. *Arch. Appl. Mech.* **89**, 1185-1199 (2019)
- [44] Nana, B., Yamgoue, S. B., Tchitnga, R. and Wofo, P.: Nonlinear dynamics of a sinusoidally driven lever in repulsive magnetic fields. *Nonlinear Dyn.* **91**, 55-66 (2018)
- [45] Kwuimy, C. K., Wofo, P.: Experimental realization and simulations a self-sustained macro electromechanical system. *Mechanics Research Communications* **37**, 106-110 (2010)
- [46] Pirbodaghi, T., Hoseini, S. H., Ahmadian, M. T. and Farrahi, G. H.: Duffing equations with cubic and quintic nonlinearities. *Computers and Mathematics with Applications* **57**, 500-506 (2009)



- [47] Cheng, L., Wei, X. and Cao, H.: Two-parameter bifurcation analysis of limit cycles of a simplified railway wheelset model. *Nonlinear Dyn.* **93**, 2415-2431 (2018)
- [48] Kim, P., Jung, J. and Seok, J.: A parametric dynamic study on hunting stability of full dual-bogie railway vehicle. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing* **12**, 505-519 (2011)
- [49] Hamid, M. S., Kourosh, H. S.: Bifurcation analysis in hunting dynamical behavior in a railway bogie: Using novel exact equivalent functions for discontinuous nonlinearities. *Scientia Iranica* **19**, 1493-1501 (2012)
- [50] Polach, O.: Application of nonlinear stability analysis in railway vehicle industry. *Non-smooth Problems in Veh. Syst. Dyn.* 15-27 (2009)
- [51] Zhang, T., Dai, H.: Loss of stability of a railway wheel-set, subcritical or supercritical. *Veh. Syst. Dyn.* **55**, 1731-1747 (2017)
- [52] Kim, P., Seok, J.: Bifurcation analysis on the hunting behavior of a dual-bogie railway vehicle using the method of multiple scales. *Journal of Sound and Vibration* **329**, 4017-4039 (2010)
- [53] Zhang, B., Zeng, J. and Liu, W.: Research on stochastic stability and stochastic bifurcation of suspended wheelset. *Journal of Mechanical Science and Technology* **29**, 3097-3107 (2015)
- [54] Gao, X., True, H. and Li, Y.: Lateral dynamic features of a railway vehicle. *Proc. IMechE Part F: J Rail and Rapid Transit* **230**, 909-923 (2016)
- [55] Uyulan, G., Gokasan, M. and Bogosyan, S.: Dynamic investigation of the hunting motion of a railway bogie in a curved track via bifurcation analysis. *Mathematical Problems in Engineering* **1**, 1-15 (2017)
- [56] Wagner, U. V.: Nonlinear dynamic behavior of a railway wheelset. *Veh. Syst. Dyn.* **47**, 627-640 (2009)
- [57] Yamanaga, Y., Kido, K.: Hunting stability test of railway bogies on roller rigs and bifurcation. *Dynamics and Design Conference* (2017) <https://doi.org/10.1299/jsmedmc.2017.304>

- [58] Yamanaga, Y., Watanabe, N.: Experimental investigation of global stability against hunting oscillation using a real bogie. Transactions of the JSME (The Japanese Journal of Educational Research) **84**, 18-00109 (2018)
- [59] Yamanaga, Y., Kido, K.: Influence of excitation condition on evaluating critical hunting speed. QR of RTRI. **60** (2), 97-102 (2019)
- [60] Myamlin, S., Kalivoda, J. and Neduzha, L.: Testing of railway vehicles using roller rigs. Procedia Engineering **187**, 688-695 (2017)
- [61] Iwnicki, S. D., Wickens, A. H.: Validation of a Matlab railway vehicle simulation using a scale roller rig. Veh. Syst. Dyn. **30**, 257-270 (1998)
- [62] Jaschinski, A., Chollet, H., Iwnicki, S. D., Wickens, A. H and Von Wurzen, J.: The application of the roller rigs to railway vehicle dynamics. Vehicle System Dynamics **31**, 345-392 (1999)
- [63] De Pater, A. D.: The exact theory of the motion of a single wheelset on a perfectly straight track. Vehicle System Dynamics. **8**, 182-184 (1979)
- [64] True, H.: Dynamics of a rolling wheelset. Applied Mechanics Reviews. 46, 438-444 (1993)
- [65] Knudsen, C., Feldberg, R. and True, H.: Bifurcations and chaos in a model of a rolling railway wheelset. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. **338**, 455-469 (1992)
- [66] Wei, W., Yabuno, H.: Subcritical Hopf and Saddle-Node Bifurcations in Hunting Motion Caused by Cubic and Quintic Nonlinearities: Experimental Identification of Nonlinearities in a Roller Rig. Nonlinear Dyn. **98**, 657-670 (2019)
- [67] Zhang, T., Dai, H.: Bifurcation analysis of high-speed railway wheel-set. Nonlinear Dyn. **83**, 1511-1528 (2016)
- [68] Steiner, W., Steindl, A. and Troger, H.: Center manifold approach to the control of a tethered satellite system. Appl. Math. Comput. **70**, 315-327 (1995)
- [69] Nayfeh, A. H.: The method of normal forms. Wiley, Hoboken (2011)
- [70] Rudin, W.: Functional analysis second edition. Mc. Graw Hill, 311-312 (1991)
- [71] 藪野浩司、工学のための非線形解析入門、サイエンス社、2004年

- [72] Jaksic, V., O'Connor, A., Pakrashi, V.: Damage detection and calibration from beam-moving oscillator interaction employing surface roughness. *Journal of sound and vibration*. **333**, 3917-3930 (2014)
- [73] Mototeru, O.: Rapid-convergence iterative method for Hertzian point contact theory. *Bulletin of the JSME*. **80**, 812 (2014)
- [74] Tanaka, N.: Calculation of elliptical Hertz contact pressure. *Bulletin of the JSME*. **65**, 638 (1999)