1次元2階微分作用素による固有関数展開と拡散過程

WEYL–STONE–TITCHMARSH–KODAIRA の一般展開定理の解説
（2015年度筑波大学修士課程向け「確率解析 I」講義録の増補版）
令和5年4月修正・補足

笠原勇二　(yuji.kasahara@nifty.com)

[**前書き**]　本稿では1次元の2階微分作用素のスペクトル理論を扱う．Fourier 級数／Fourier 変換は三角関数を用いた展開公式であるが，三角関数の代わりに各種の特殊関数を用いた同様な展開公式も知られている．これらの展開公式を一元的に統合した理論がいわゆる Weyl–Stone–Titchmarsh–Kodaira の一般展開定理であり，本稿はその解説である．

確率論の立場からみると，この2階微分作用素は拡散過程の生成作用素であり，上記の一般展開定理は拡散過程の推移確率を計算（あるいは表現）する方法を与えており，1次元拡散過程の基礎的知識である.（もっとも，本稿では拡散過程そのものには背景説明として触れるにとどめる.）

なお，以下で必要な予備知識は「ヒルベルト空間論」と「常微分方程式の解の存在と一意性」で，いずれも学部レベルの内容である．

1. 序

区間 $I(\subset\mathbb{R})$ における2階の微分作用素

$$\mathcal{L}=a(x)\frac{d^2}{dx^2}+b(x)\frac{d}{dx}\quad (a(x)>0) \tag{1.1}$$

を考える．確率論では $a(x)$ を**拡散係数**，$b(x)$ を**ドリフト係数**という．この作用素は $c(x)$ を $c'(x)=b(x)/a(x)$ となるように定めると**対称形**

$$\mathcal{L}=a(x)\frac{d}{dx}\left(c(x)\frac{d}{dx}\right)$$

に直すことができ，さらに $dm(x)=(1/a(x))dx$, $ds(x)=(1/c(x))dx$ とおくと

$$\mathcal{L}=\frac{d}{dm(x)}\frac{d}{ds(x)} \tag{1.2}$$

の形となる[1]．よって以下では (1.1) の代わりに，その一般形である (1.2) を対象とする．(1.2) は Kolmogorov の古典的拡散過程を含む一般の1次元拡散過程（連続な軌跡をもつ強 Markov 過程）の局所生成作用素に対応し，(1.2) の形を **Feller の標準形**という．ここに $s(x)$ は単調増大な連続関数であり**スケール関数**といい，$m(x)$ は単調増大な右連続関数であり，Lebesgue-Stieljes 測度 $dm(x)$ を**スピード測度**または**標準測度**という．これら $s(x)$ と $dm(x)$ の確率論的意味につ

[1] $(ds(x),dm(x))$ は $\mathcal{L}$ から一意には決まらず，定数倍の自由度がある．

いては直接使わないのでここでは説明しない（しかし，ほぼ名前通りの意味である）．なお，余談として補足すると，拡散過程の場合は上記のとおり $m(x), s(x)$ は狭義単調増大かつ連続であるが，じつは以下では $m(x)$ は単調非減少右連続で，したがって Lebesgue-Stieltjes 測度 $dm(x)$ が意味をもてばそのまま議論は成立するので以下ではその様に仮定を拡げておく．$m(x)$ が階段関数のときは $\mathcal{L}$ は差分作用素である．

[註] 上記のように条件の緩められた $m(x)$ と狭義増大かつ連続な $s(x)$ に対応するマルコフ過程は**一般化された拡散過程**とよばれ，連続時間をもつ出生死滅過程などはこのクラスに含まれる．

スケール関数 $s(x)$ については拡散過程論では狭義単調増大かつ連続としておく．$\frac{d}{ds(x)}$ は右微分 $\frac{d^+}{ds(x)}$ すなわち

$$\frac{d^+}{ds(x)}f(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{s(x+\epsilon) - s(x)}.$$

の意味であり，$s(x)$ が連続な導関数をもつなら

$$\frac{d^+}{ds(x)} = \frac{d^+}{s'(x)dx}$$

となる．右微分にするのは右連続 version をとるという趣旨である．もっとも，拡散過程の話しから離れて $s(x)$ がより一般に単調非減少右連続というだけのときは $ds(x)$ を Lebesgue-Stieljes 測度として

$$\frac{d^+ f}{ds(x)} = g(x)$$

とは

$$f(x) = f(a) + \int_{(a,x]} g(y)ds(y)$$

のことだと理解すれば以下の議論ではそのまま適用できる．

なお以下では

$$D_m = \frac{d}{dm(x)}, \quad D_s^+ = \frac{d^+}{ds(x)}$$

の記号も使う．よって $\mathcal{L} = D_m D_s^+$ である．

もうひとつ補足する．じつは $k(x) \geq 0$ を 0 階微分項として付加した

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dm(x)}\frac{d^+}{ds(x)} - k(x) \tag{1.3}$$

がより一般の拡散過程の局所生成作用素である．$k(x)$ は **killing 項** とよばれ，その場所における粒子の消滅レートに対応する．しかしこの $k(x)$ は Feynman-Kac の公式で処理することが多いので，ここでは $k(x) = 0$ の場合だけを扱う．もっとも，$k(x) \geq 0$ が付いていても以下の議論は殆どそのまま適用できる．

例 1.1. $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}$ の対称形は $\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right)$ であり，したがって Feller の標準形は $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{d\log x}\right)$ となる．このとき $s(x) = \log x$, $m(x) = x$.

[**補足**] 解析学の本（例えば吉田耕作著「積分方程式」）では

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \{\lambda r(x) - q(x)\}y = 0 \tag{1.4}$$

の形の方程式で扱うことが多いかもしれないが，実はこれも上に述べたものに含まれる．実際，(1.4) の両辺を $r(x)$ で割り $k(x) = q(x)/r(x)$ とおけば

$$\left\{\frac{d}{r(x)dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + (\lambda - k(x))\right\} y = 0$$

と変形されるので，$dm(x) = r(x)dx$, $ds(x) = (1/p(x))dx$ とおけば (1.4) は (1.3) の記号を用いて $(\mathcal{L} + \lambda)y = 0$ の形にかけ，本稿で議論する方程式に帰着される．個人的な感想としては，後に出てくる境界条件の与え方など各所において (1.4) の形よりも (1.3) の方がより自然に理解できるように思う．

結論を先にかけば，この拡散過程はつぎの意味で標準測度 $dm(x)$ に関する**推移確率密度** $p(t, x, y)$ をもつ：x から出発した粒子の t 秒後の位置を X_t とするとき．それが集合 A の中にいる確率を $P_x(X_t \in A)$ で表すと

$$P_x(X_t \in A) = \int_A p(t, x, y)dm(y)$$

すなわち

$$P_x(X_t \in dy) = p(t, x, y)dm(y).$$

あるいは同じことであるが，有界連続関数 $f(x)$ について

$$E_x[f(X_t)] = \int_I p(t, x, y)f(y)dm(y) \tag{1.5}$$

となる．なお，$p(t, x, y)$ は dx ではなく $dm(x)$ に関する密度というところが大事で，その結果として x, y について対称（$p(t, x, y) = p(t, y, x)$）となる．

本稿で問題としたいのは，この $p(t, x, y)$ の存在証明と計算方法・表現方法である.（それを用いて $p(t, x, y)$ の色々な性質を調べるのが次のステップであるが，本稿ではそこまで手が回らない.）マルコフ過程の理論の基本事項によればこの問題は次のように偏微分方程式の初期値問題に言い換えることができる．(1.5) の左辺を $v(t, x)$ とおくと，この $v(t, x)$ は次の方程式の有界解である．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}v(t, x) = \mathcal{L}v(t, x) & \qquad (t > 0) \\ v(+0, x) = f(x) \end{cases} \tag{1.6}$$

一般に，方程式 (1.6) の解が

$$v(t,x) = \int_I p(t,x,y)f(y)dm(y) \tag{1.7}$$

で与えられるような $p(t,x,y)$ があれば，それを**基本解**と呼ぶ．よって拡散過程の推移確率密度を求めることは (1.6) の基本解を求めることと同じである．ではどうやって (1.6) の基本解をもとめるか?という問題であるが，ひとつの方法として，時間パラメータ t についてLaplace 変換をとってみると次のように常微分方程式に帰着される（偏微分方程式より常微分方程式の方が扱いやすい！）．

(1.7) の両辺の Laplace 変換をとってみると

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mathcal{L}v(t,x)dt = \mathcal{L}\int_0^\infty e^{-\alpha t}v(t,x)dt$$

と変換される．左辺は部分積分と $v(+0,x)=f(x)$ により

$$-f(x) + \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}v(t,x)dt$$

に等しいので，よって $\alpha > 0$ を固定して

$$u(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t}v(t,x)dt$$

とおくと (1.7) は

$$-f(x) + \alpha u(x) = \mathcal{L}u(x)$$

すなわち

$$(\alpha - \mathcal{L})u(x) = f(x) \tag{1.8}$$

という常微分方程式に変換される．この方程式と $p(t,x,y)$ との関係をみていこう．

$$v(t,x) := \int_I p(t,x,y)f(y)dm(y)$$

であったから両辺のラプラス変換をとれば

$$u(x) = \int_I G_\alpha(x,y)f(y)dm(y) \tag{1.9}$$

となる．ただし，

$$G_\alpha(x,y) := \int_0^\infty e^{-\alpha t}p(t,x,y)\,dt. \tag{1.10}$$

よって逆にいうと，有界連続な f に対して (1.8) の 有界解 を (1.9) の形で与えるような $G_\alpha(x,y)$ が見つかればそれが推移確率密度 $p(t,x,y)$ の Laplace 変換 (1.10) であり，逆変換により $p(t,x,y)$ が求まることになる．

その様なわけで，次節からは (1.8) を解く（あるいは $G_\alpha(x,y)$ をみつける）ことを考え，さらに $G_\alpha(x,y)$ の積分表現を与える．そのLaplace逆変換により $p(t,x,y)$ の積分表現も得られるというのが大筋である．

2. 序への補足（1/2）

前節での問題説明と表題の「固有関数展開」(eigen-differential expansion) との関係について補足しておく．

まず前節の方程式 (1.6) を再掲する：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) = \mathcal{L} v(t,x) \\ v(+0,x) = f(x) \end{cases} \qquad (t>0) \tag{2.1}$$

この偏微分方程式の別の解き方を考えてみよう．まず思いつくのは t と x について 変数分離 できないかというアイデアである．すなわち，$v(t,x) = a(t)u(x)$ の形にならないかというわけである．このとき (2.1) は

$$a'(t)u(x) = a(t)\mathcal{L}u(x), \quad a(0)u(x) = f(x) \tag{2.2}$$

と書き換えられ，つぎのように簡単に解ける．(2.2) の第 1 の式から

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{\mathcal{L}u(x)}{u(x)} \tag{2.3}$$

となるが，左辺は t，右辺は x だけの関数であるからじつは両辺は定数でなくてはならない．この定数を $-\lambda$ とおくと[2](2.3) は

$$a(t) = a(0)e^{-\lambda t}, \quad \mathcal{L}u(x) = -\lambda u(x)$$

と同じである．一方，(2.2) の第 2 の式（初期条件）から $u(x) = cf(x)$ $(c = 1/a(0))$ であるから $\mathcal{L}f(x) = -\lambda f(x)$ でなくてはならない．よってまとめると，与えられた初期値である関数 $f(x)$ が方程式 $\mathcal{L}u(x) = -\lambda u(x)$ の解であるとき，またそのときに限り，(2.1) の解は

$$v(t,x) = e^{-\lambda t} f(x)$$

となる．では初期条件 $f(x)$ が $\mathcal{L}u(x) = -\lambda u(x)$ を 満たさない ときはどうなるか？そのときでも，$f(x)$ が $\mathcal{L}u_j(x) = -\lambda_j u_j(x)$ を満たす $\{u_j\}_j$ の線形結合

$$f(x) = \sum_j c_j u_j(x) \tag{2.4}$$

の形で表せるならば，上記の結果と線形性により (2.1) の解は

$$v(t,x) = \sum_j c_j e^{-\lambda_j t} u_j(x) \tag{2.5}$$

となることがわかる．

よってつぎに考えることは，先に f が与えられたとき (2.4) の形に展開できるか？という問題である．これは例えば $L^2(I, dm(x))$ で考えたとき「$\{u_j\}_j$ が

[2] マイナスを付けたのは後述の記号と整合性をとるため．

C.O.N.S.（完全正規直交系）になるようとれるか？」という問題である．もし可能であれば，そのとき (f,g) で $L^2(I,dm)$ の内積を表すことにすると

$$f(x)=\sum_j (f,u_j)u_j(x)$$

であるから (2.1) の解は

$$p(t,x,y)=\sum_j e^{-\lambda_j t}u_j(y)u_j(x) \tag{2.6}$$

とおくと

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \sum_j e^{-\lambda_j t}(f,u_j)u_j(x)=\sum_j e^{-\lambda_j t}\int_I f(y)u_j(y)dm(y)u_j(x) \\ &= \int_I \sum_j e^{-\lambda_j t}f(y)u_j(y)u_j(x)dm(y)=\int_I p(t,x,y)f(y)dm(y) \end{aligned}$$

となる．よって (2.6) が基本解（推移確率密度）を与えることになる．まとめると，$\mathcal{L}u(x)=-\lambda u(x)$ の解から C.O.N.S. となる $\{u_j\}_j$ を選ぶことができれば (2.6) が熱方程式の基本解になるわけである．

そのようなわけで，以下の節では「$\mathcal{L}u(x)=-\lambda u(x)$ の解から C.O.N.S. を作ることが出来るか？」という問題を扱っていることになる．これが本稿の表題の「固有関数展開」の意味である．

3. 予備知識：斉次方程式 $\mathcal{L}u(x)=-\lambda u(x)$ の解の基本系

$\mathbb{R}$ 内の有限または無限区間で 2 階の微分作用素

$$\mathcal{L}=\frac{d}{dm(x)}\frac{d^+}{ds(x)},\quad -\ell_-<x<\ell_+ \tag{3.1}$$

を考える．ただし $-\infty\le-\ell_-<\ell_+\le\infty$ とし，$m(x)$ はこの区間またはその閉包での単調非減少，右連続関数とする．簡単のため $-\ell_-\le 0<\ell_+$ とし m は $m(-0)=0$ と正規化しておく．

$\lambda\in\mathbb{C}$ について，斉次方程式

$$\mathcal{L}u(x)=-\lambda u(x)$$

の一般解は 1 次独立な 2 つの解の線形結合で得られることは初等知識であるから既知とする．そこで各 $\lambda\in\mathbb{C}$ について 1 組の解 $\varphi_\lambda(x),\psi_\lambda(x)$ として

$$\varphi_\lambda(0)=1, D_s^+\varphi_\lambda(-0)=0,\quad \psi_\lambda(0)=0, D_s^+\psi_\lambda(0)=1$$

なる解をとる．たとえば $\lambda=0$ のとき，$\varphi_0(x)=1,\psi_0(x)=s(x)-s(0)$ である．

> $D_s^+\varphi_\lambda(0)=0$ ではなく $D_s^+\varphi_\lambda(-0)=0$ とかくのは，$dm(x)$ が mass をもつ x においては $D_s^+\varphi_\lambda(x)$ が不連続になり，右連続のバージョンを採用しているからであり，$D_s^+\varphi_\lambda(0)$ と $D_s^+\varphi_\lambda(-0)$ の差は
>
> $$D_s^+\varphi_\lambda(+0)-D_s^+\varphi_\lambda(-0)=-\lambda m(+0)\varphi_\lambda(0)$$

となる.(一方 ψ_λ については $\psi_\lambda(0)=0$ なので同様の心配がなく，つねに $D_s^+\psi_\lambda(+0)=D_s^+\psi_\lambda(-0)$ である.)

一般に $\mathcal{L}u=-\lambda u$ の 2 つの解 u_1,u_2 の**ロンスキアン**

$$W[u_1,u_2](x):=u_1(x)(D_s^+u_2)(x)-(D_s^+u_1(x))u_2(x)$$

はよく知られているように定数である（微分 $dW[u_1,u_2](x)$ を計算してみればよい[3]）．u_1,u_2 が一次独立であるための必要十分条件は $W[u_1,u_2](x)\neq 0$ である．上記の $\varphi_\lambda,\psi_\lambda$ の場合 $W[\varphi_\lambda,\psi_\lambda](x)=1$ であり，1 次独立である．よって任意の解は $\varphi_\lambda,\psi_\lambda$ の 1 次結合となる．より具体的には $u(0)=a, D_s^+u(-0)=b$ のとき

$$u(x)=a\varphi_\lambda(x)+b\psi_\lambda(x)$$

である．このペア $\{\varphi_\lambda(x),\psi_\lambda(x)\}$ を解の**基本系**という.

例えば，$\mathcal{L}=\frac{d^2}{dx^2}$ であれば，λ が実数のとき，$\lambda>0$ ならば

$$\varphi_\lambda(x)=\cos(\sqrt{\lambda}x),\quad \psi_\lambda(x)=(1/\sqrt{\lambda})\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

であり，$\lambda<0$ のとき

$$\varphi_\lambda(x)=\cosh(\sqrt{-\lambda}x),\quad \psi_\lambda(x)=(1/\sqrt{-\lambda})\sinh(\sqrt{-\lambda}x)$$

である.

なお，厳密には $\{\varphi_\lambda,\psi_\lambda\}$ は次の積分方程式に帰着して，その解として定義される（常微分方程式の常套手段である）.

$$\varphi_\lambda(x)=1-\lambda\int_{-0}^x ds(y)\int_0^y \varphi_\lambda(u)\,dm(u);$$

$$\psi_\lambda(x)=s(x)-\lambda\int_{-0}^x ds(y)\int_0^y \psi_\lambda(u)\,dm(u).$$

解の存在と一意性も常微分方程式の一般論による．すなわち，存在についていうには次のようにすればよい.

$$\begin{aligned} m_0(x) &= 1, \\ m_n(x) &= \int_0^x ds(y)\int_0^y m_{n-1}(u)\,dm(u), \quad (n\geq 1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

とおく．$D_mD_s^+m_n=m_{n-1}$ である．なお，後に使うので

$$dm_1(x)=m(x)\,ds(x) \tag{3.3}$$

に注意しておく．上記で定義した $m_n(x)$ をもちいると，求める $\varphi_\lambda(x)$ は次で与えられる.

$$\varphi_\lambda(x)=\sum_{n=0}^\infty(-\lambda)^n m_n(x)\quad(\lambda\in\mathbb{C}) \tag{3.4}$$

[3]積の微分公式は (3.7) 参照.

形式的に与積分方程式に代入してみるとこれが解であることは$D_m D_s^+ m_n = m_{n-1}$から明らかであり，厳密な証明もルーチンなので省略する．

この級数が収束することをみるには，次の不等式に注意すればよい．簡単のため $x>0$ の場合をかくが，負の側でも同様である．

$$m_n(x) \le \frac{m_1(x)^n}{n!}, \quad (n=0,1,2,\dots) \tag{3.5}$$

これは，$n=0,1$ のときは明らかであり，n のとき成り立つとすると

$$\begin{aligned} m_{n+1}(x) &= \int_0^x ds(v)\int_0^v m_n(u)\,dm(u) \\ &\le \frac{1}{n!}\int_0^x ds(v)\int_0^v m_1(u)^n\,dm(u) \\ &\le \frac{1}{n!}\int_0^x ds(v)\int_0^v m_1(v)^n\,dm(u) \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x m_1(v)^n m(v)ds(v) = \frac{1}{n!}\int_0^x m_1(v)^n dm_1(v) \end{aligned}$$

よって

$$m_{n+1}(x) \le \frac{1}{(n+1)!} m_1(x)^{n+1}$$

以上から，級数の収束がわかり，次の不等式もわかる．

$$|\varphi_\lambda(x)| \le \exp\{|\lambda| m_1(x)\} \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{3.6}$$

なお，ψ_λ についても同様である．$m_0(x)=1$ の代わりに $m_0^*(x):=x$ から始めればよい．$m_n(x)$ に対応する $m_n^*(x)$ については $m_n^*(x) \le x m_n(x)$ が示せるので，

$$|\psi_\lambda(x)| \le \exp\{|\lambda| x m_1(x)\} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

となる．

(3.4) の級数展開の収束半径は無限大であるから[4]，つぎのこともわかる．

$\varphi_\lambda(x), \psi_\lambda(x)$ は x を固定すると，$\lambda \in \mathbb{C}$ について（複素関数論でいう）**整関数**である．

話しは変わるが，次節以降で使うので，準備として次のことをここで注意しておく．f,g が有界変動で右連続のとき，積 fg も有界変動であり，符号付き Lebesgue-Stieltjes 測度の意味で積の微分公式

$$d(fg) = fdg + gdf$$

が成り立つことに注意する．ただし，f,g は右連続ではあるが連続とは限らないので，厳密に言うと

$$d(f(x)g(x)) = f(x-)dg(x) + g(x)df(x) = f(x)dg(x) + g(x-)df(x) \tag{3.7}$$

[4](3.5) 参照.

とかくべきである[5]が混乱は無さそうなので略記で済ますことにする．なお，公式 (3.7) は解析学の本にはあまり書いてないが，証明には Stieltjes 積分の定義に戻れば容易である．

4. 序への補足 (2/2)

以下ではしばらく準備が続くので，トンネル状態かもしれない．よってその先にある目標をここで紹介しておこう．第 1 節と第 2 節で説明したとおり，目的としては熱方程式 (1.6) の基本解（推移確率密度）$p(t,x,y)$ を (2.6) の形にかきたいのであるが，u_n は φ_{λ_n} と ψ_{λ_n} の線形結合であるから，$u_n(x)u_n(y)$ は

$$\varphi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y),\ \varphi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y),\ \psi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y),\ \psi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)$$

の線形結合

$$\varphi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)\sigma_n^{1,1}+\varphi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)\sigma_n^{1,2}+\psi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)\sigma_n^{2,1}+\psi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)\sigma_n^{2,2}$$

の形である．よってこれらを使って次の形に展開したいのである．

$$\begin{aligned}p(t,x,y) &= \sum_n e^{-\lambda_n t}\Big(\varphi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)\sigma_n^{1,1}+\varphi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)\sigma_n^{1,2}\\ &\qquad +\psi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)\sigma_n^{2,1}+\psi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)\sigma_n^{2,2}\Big)\quad (t>0)\end{aligned}$$

あるいは，より一般に積分形で

$$\begin{aligned}p(t,x,y) &= \int_0^{\infty-} e^{-\lambda t}\Big(\varphi_{\lambda}(x)\varphi_{\lambda}(y)d\sigma^{1,1}(\lambda)+\varphi_{\lambda}(x)\psi_{\lambda}(y)d\sigma^{1,2}(\lambda)\\ &\qquad +\psi_{\lambda}(x)\varphi_{\lambda}(y)d\sigma^{2,1}(\lambda)+\psi_{\lambda}(x)\psi_{\lambda}(y)d\sigma^{2,2}(\lambda)\Big)\quad (t>0).\end{aligned}$$

ここに現れる $\{\sigma^{j,k}(\lambda)\}_{j,k=1,2}$ がいわゆる**スペクトル関数**で，このような展開が可能であることと，そのスペクトル関数の計算方法をみていこうというのが本稿の目的である．

また別の見方として，第 2 節で説明した立場でいえば次のようになる．(f,g) を $L^2(I,dm)$ での内積として

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(f,\varphi_{\lambda_n})\varphi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{1,1}+(f,\varphi_{\lambda_n})\psi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{1,2}\\ &\qquad +(f,\psi_{\lambda_n})\varphi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{2,1}+(f,\psi_{\lambda_n})\psi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{2,2}\Big\}\end{aligned}$$

のタイプの Fourier 級数（あるいはその連続形である Fourier 変換）による展開が可能であることを見ていくのが本稿の目的である．

---

[5] $f(x-):=\lim_{\epsilon\to+0}f(x-\epsilon)$ の意味である．

5. **グリーン関数**

前節では斉次方程式 $(\mathcal{L}+\lambda)u=0$ を扱ってきたが，この節では非斉次方程式 $(\mathcal{L}+\lambda)u=-f$ を考える．すなわち,（前節までの記号との整合性の都合により）$-\lambda$ を α とかくと，(1.8) で与えた

$$(\alpha-\mathcal{L})u=f \tag{5.1}$$

を解く問題に戻る．のちに使うのは α が実数（とくに正数）の場合が殆どであるが，断りの無い限り複素数でよい．

u_1,u_2 を斉次方程式 $\mathcal{L}u=\alpha u$ の 1 次独立解（すなわち $W[u_1,u_2](0)\neq 0$）とする．（α は固定して考えるので u_1,u_2 に α は明示しないことにする．）$C=1/W[u_1,u_2](0)$ とおき

$$G_\alpha(x,y)=\begin{cases}Cu_1(x)u_2(y) & (x\geq y)\\ Cu_1(y)u_2(x) & (x<y)\end{cases}$$

と定義する．この $G_\alpha(x,y)$ を**グリーン関数**とよぶ．$G_\alpha(x,y)$ は x,y について対称な連続関数であるが，微分については対角線上で特異性を持つ．実際，対角線上では左偏微分と右偏微分が異なる：

$$\left.\frac{\partial G_\alpha(x,y)}{\partial s(x)}\right|_{x=y-0}-\left.\frac{\partial G_\alpha(x,y)}{\partial s(x)}\right|_{x=y+0}=1 \tag{5.2}$$

（実際に計算してみれば容易に確かめられる．）

この $G_\alpha(x,y)$ を積分核に用いて

$$G_\alpha f(x)=\int_I G_\alpha(x,y)f(y)\,dm(y)$$

と定義することにする．f はこの右辺の積分が有限確定で意味をもつ範囲で考えるので，たとえば I 内でコンパクト台をもつ連続関数ならよい．

非斉次方程式 (5.1) を解くことを考えよう．与えられた f について未知関数 u を求めようという訳である．この方程式の解が，上記の $G_\alpha(x,y)$ を積分核に用いて

$$u(x)=G_\alpha f(x)$$

で与えられることを以下でみていく．

補題 5.1. *$\alpha\in\mathbb{C}$ とし，$G_\alpha(x,y)$ を $\mathcal{L}u=\alpha u$ の 1 次独立解 u_1,u_2 からつくられたグリーン関数とし，$f(x)$ を $G_\alpha f(x)$ が意味を持つような有界連続関数とする．このとき $g(x):=G_\alpha f(x)$ は非斉次方程式 (5.1) をみたす．*
逆に，(5.1) をみたす $g(x)$ は次の形（特殊解プラス斉次一般解）をしている．

$$g(x)=G_\alpha f(x)+c_1u_1(x)+c_2u_2(x)\quad(c_1,c_2\in\mathbb{R})$$

証明. 前半は素直に $g(x)=G_\alpha f(x)$ について $\mathcal{L}g$ を計算してみるだけでよい．一応，以下に計算をかいておく．

$C=1$ して一般性を失わない（Cu_1 をあらためて u_1 とかくことにすればよい）．$G_\alpha(x,y)$ の定義から

$$\begin{aligned} g(x) &:= G_\alpha f(x) \\ &= u_1(x)\int_{-\ell_-}^{x} u_2(y)f(y)dm(y)+u_2(x)\int_{x}^{\ell_+} u_1(y)f(y)dm(y) \end{aligned}$$

であるから，積の微分公式 (3.7) を用いると

$$\begin{aligned} dg(x) &= \Big(\int_{-\ell_-}^{x} u_2(y)f(y)dm(y)\Big)du_1(x)+u_1(x)u_2(x)f(x)dm(x) \\ &\quad+\Big(\int_{x}^{\ell_+} u_1(y)f(y)dm(y)\Big)du_2(x)-u_2(x)u_1(x)f(x)dm(x) \\ &= \Big(\int_{-\ell_-}^{x} u_2(y)f(y)dm(y)\Big)du_1(x)+\Big(\int_{x}^{\ell_+} u_1(y)f(y)dm(y)\Big)du_2(x) \end{aligned}$$

よって $D_s^+g=d^+g/ds(x)$ については

$$\begin{aligned} D_s^+g(x) &= \Big(\int_{-\ell_-}^{x} u_2(y)f(y)dm(y)\Big)D_s^+u_1(x) \\ &\quad+\Big(\int_{x}^{\ell_+} u_1(y)f(y)dm(y)\Big)D_s^+u_2(x). \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} &d(D_s^+g(x)) \\ &\quad=\left(\int_{-\ell_-}^{x} u_2(y)f(y)dm(y)\right)dD_s^+u_1(x)+D_s^+u_1(x)u_2(x)f(x)dm(x) \\ &\qquad+\left(\int_{x}^{\ell_+} u_1(y)f(y)dm(y)\right)dD_s^+u_2(x)-u_1(x)D_s^+u_2(x)f(x)dm(x) \\ &\quad=\left(\int_{-\ell_-}^{x} u_2(y)f(y)dm(y)\right)dD_s^+u_1(x) \\ &\qquad+\left(\int_{x}^{\ell_+} u_1(y)f(y)dm(y)\right)dD_s^+u_2(x)-f(x)dm(x). \end{aligned}$$

最後の等号は $W[u_1,u_2]=1$ による．ここで $\mathcal{L}u_k=\alpha u_k(k=1,2)$ を用いると

$$\begin{aligned} d(D_s^+g)(x) &= \left(\int_{-\ell_-}^{x} u_2(y)f(y)dm(y)\right)\alpha D_s^+u_1(x)dm(x) \\ &\quad + \left(\int_{x}^{\ell_+} u_1(y)f(y)dm(y)\right)\alpha D_s^+u_2(x)dm(x) - f(x)dm(x) \\ &= \alpha g(x)dm(x) - f(x)dm(x) \end{aligned}$$

これは

$$D_mD_s^+g(x)=\alpha g(x)-f(x)$$

意味する．よって $\mathcal{L}g=\alpha g-f$ すなわち

$$(\alpha-\mathcal{L})g=f.$$

逆の主張を示そう．ルーチン議論である[6]．$u(x):=g(x)-G_\alpha f(x)$ を考えると，これは斉次方程式 $\mathcal{L}u=\alpha u$ をみたすが，u_1,u_2 が一次独立という仮定から u は $c_1u_1+c_2u_2$ の形である． □

例 5.1 (Brown 運動)**.** $c>0$ として $\mathcal{L}=(1/c)d^2/dx^2$ を $I=\mathbb{R}$ で考える（$c=2$ のとき「標準 Brown 運動」という）．このときは $s(x)=x, dm(x)=c\,dx$ である．

$$\mathcal{L}u=\alpha u \quad (\alpha>0)$$

の一次独立な解として $e^{-\sqrt{c\alpha}x}$ と $e^{\sqrt{c\alpha}x}$ を選ぶとロンスキアンは $2\sqrt{c\alpha}$ であるので

$$G_\alpha(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{c\alpha}}e^{-\sqrt{c\alpha}|x-y|}$$

となる．よって有界連続な f について

$$g(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\sqrt{c\alpha}}e^{-\sqrt{c\alpha}|x-y|}f(y)dm(x)+C_1e^{-\sqrt{c\alpha}x}+C_2e^{\sqrt{c\alpha}x}$$

は $(\alpha-\mathcal{L})u=f$ の一般解を与える．そのうち有界な解は $C_1=C_2=0$ のとき．なお，$G_\alpha(x,y)$ の Laplace 逆変換をとると

$$p(t,x,y)=\frac{1}{2\sqrt{c\pi t}}e^{-c|x-y|^2/(4t)}$$

となり[7]，Brown 運動の（$dm(x)=c\,dx$ に関する）確率推移密度が得られる．

なお，補題 5.1 の証明中に出てきた $g(x), D_s^+g(x)$ の形から次を得る：

---

[6]線形常微分方程式の一般論として，非斉次方程式の一般解は，1 つの特殊解に斉次方程式の一般解を加えて得られる．

[7]公式集を参照．ちょっとしたテクニックが必要な有名な計算．

$g(x) := G_\alpha f(x)$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ について

$$\begin{aligned} c_1 g(x) + c_2 D_s^+ g(x) &= \left\{ c_1 u_1(x) + c_2 D_s^+ u_1(x) \right\} \int_{-\ell_-}^{x} u_2(y) f(y) dm(y) \\ &\quad + \left\{ c_1 u_2(x) + c_2 D_s^+ u_2(x) \right\} \int_{x}^{\ell_+} u_1(y) f(y) dm(y) \end{aligned}$$

よって，ここで $x \uparrow \ell_+$ または $x \downarrow -\ell_-$ としてみると

補題 5.2. u_1 が右端で境界条件

$$c_1 u_1(\ell_+) + c_2 D_s^+ u_1(\ell_+) = 0$$

を満たせば $g = G_\alpha f$ も同じ境界条件

$$c_1 g(\ell_+) + c_2 D_s^+ g(\ell_+) = 0$$

をみたす．同様に，u_2 が左端で境界条件

$$c_1 u_2(-\ell_-) + c_2 D_s^+ u_2(-\ell_-) = 0$$

を満たせば g も同じ境界条件

$$c_1 g(-\ell_-) + c_2 D_s^+ g(-\ell_-) = 0$$

を満たす.

例 5.2 (反射壁 Brown 運動). $\mathcal{L} = (1/2) d^2/dx^2$ を $I = [0, \infty)$ で考える．$dm(x) = 2dx$ である.

$$\mathcal{L} u = \alpha u \quad (\alpha > 0)$$

の一次独立な解として $u_1(x) = e^{-\sqrt{2\alpha}x}$ と $u_2(x) = e^{-\sqrt{2\alpha}x} + e^{\sqrt{2\alpha}x}$ を選ぶ. (u_1 は有界になるように，また u_2 は $D_s^+ u(0) = 0$ となるように選んだ.）このときロンスキアンは $2\sqrt{2\alpha}$ であるので

$$G_\alpha(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}} (e^{-\sqrt{2\alpha}|x-y|} + e^{-\sqrt{2\alpha}(x+y)})$$

となる．よって有界連続な f について $(\alpha - \mathcal{L})u = f$ の一般解は

$$g(x) = G_\alpha f(x) + c_1 e^{-\sqrt{2\alpha}x} + c_2 (e^{-\sqrt{2\alpha}x} + e^{\sqrt{2\alpha}x})$$

であり，$g'(0-) = 0$ を要求すると $c_1 = 0$，さらに g に有界性を要求すると $c_2 = 0$ となるので,

$$(\alpha - \mathcal{L}) u(x) = f(x), \quad D_s^+ u(0+) = 0$$

の有界な解は一意に，$u(x) = G_\alpha f(x)$ で与えられる.

また，$G_\alpha(x,y)$ の Laplace 逆変換をとると

$$p(t,x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-|x-y|^2/(2t)} + e^{-(x+y)^2/(2t)} \right) \quad (x, y \geq 0)$$

となる．もちろんこれが反射壁 Brown 運動の（$dm(x) = 2dx$ に関する）確率推移密度である.

補題 5.1 に関連して次のことをかいておく.（あとの準備であるから今の段階では趣旨がわかりにくいかもしれない．よって必要になったときに戻るのもよい.）

$$K(x,y) = K(\lambda; x, y) := \varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y) - \varphi_\lambda(y)\psi_\lambda(x)$$

を積分核として

$$(5.3)\quad \begin{aligned} Kf(x) &= \int_0^x K(x,y) f(y)\, dm(y) \\ &= \varphi_\lambda(x)\int_0^x \psi_\lambda(y) f(y)\, dm(y) - \psi_\lambda(x)\int_0^x \varphi_\lambda(y) f(y)\, dm(y) \end{aligned}$$

と定義すると，

補題 5.3. $\lambda \in \mathbb{C}$ とする．f が連続関数のとき

$$-\mathcal{L}u(x) = \lambda u + f(x), \quad u(0) = D_s^+ u(-0) = 0$$

の一意解は $g(x) = Kf(x)$ で与えられる．

証明. 2 つ解があればその差は斉次方程式

$$-\mathcal{L}u(x) = \lambda u(x), \quad u(0) = D_s^+ u(-0) = 0$$

をみたすが，これは $u(x) = 0$ を意味するから解の一意性の部分は明らかである．

$g(x) = Kf(x)$ が $(-\lambda - \mathcal{L})u(x) = f(x)$ をみたすことは $G_\alpha f$ のときと同様に計算するだけでよい．たとえば $G_\alpha f$ のときと同様な計算で

$$D_s^+ g(x) = (D_s^+\varphi_\lambda)(x)\int_0^x \psi_\lambda(y) f(y) dm(y) - (D_s^+\psi_\lambda)(x)\int_0^x \varphi_\lambda(y) f(y) dm(y)$$

となる．残るは条件 $u(0) = D_s^+ u(-0) = 0$ のチェックであるが，$g(0) = 0$ は (5.3) の最右辺から明らかである．また $D_s^+ g(0) = 0$ も上の $D_s^+ g(x)$ の式から明らかである． □

6. 例：Bessel 過程

Bessel 過程とは $[0, \infty)$ 上の拡散過程で局所生成作用素が

$$(6.1)\qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\rho - 1}{x}\frac{d}{dx}\right), \quad x > 0$$

となるものである．$\rho \in \mathbb{R}$ を**次元**といい，$\nu := (\rho/2) - 1$ を**オーダー**という．ρ が自然数のときは ρ 次元 Brown 運動の 動径成分 に相当する．

$$W(x) = x^{\rho-1}\big(= x^{2\nu+1}\big), \quad x > 0$$

とおけば

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{W'(x)}{W(x)}\frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{2W(x)}\frac{d}{dx}\left(W(x)\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dm(x)}\frac{d}{ds(x)}$$

であるから (6.1) の Feller 標準形は

$$dm(x) = 2W(x)dx, \quad ds(x) = \frac{1}{W(x)}dx$$

である．よってスケール関数 $s(x)$ と標準測度 $dm(x)$ は次で与えられる．

$$\boxed{dm(x) = 2x^{2\nu+1}dx, \quad s(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^{-2\nu}}{2\nu} & (\nu \neq 0) \\ \log x & (\nu = 0) \end{cases}, \quad x > 0.}$$

さて，**変形された Bessel 関数** $I_\nu(x)$ $(\nu \in \mathbb{R})$ は次で定義される特殊関数である．

$$I_\nu(x) = (x/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

ただし，$\nu = -1, -2, \dots$ については右辺が意味をもたないので別途

$$I_{-\nu}(x) = I_\nu(x) \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

で定義され，また，“もう 1 つの変形された Bessel 関数” $K_\nu(x)$ は次で定義されている．

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\big(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\big)$$

これも $\nu = -1, -2, \dots$ のときはそのままでは意味がないので $\lim_{\epsilon\to 0} K_{\nu+\epsilon}(x)$ を考えるが細部は特殊関数の専門書に譲る．

なお，とくに $\rho = 1$ すなわち $\nu = -1/2$ のとき

(6.2) $$I_\nu(x) = \sqrt{2/(\pi x)}\cosh x, \quad I_{-\nu}(x) = \sqrt{2/(\pi x)}\sinh x.$$

したがってこのとき

$$K_{-1/2}(x) = \sqrt{\pi/(2x)}\,e^{-x}.$$

以上の準備のもとで上記 Bessel 過程のグリーン関数を求めよう．

$$\mathcal{L}u = \alpha u \quad (\alpha > 0)$$

の一次独立解は

$$f(x) = x^{-\nu}I_\nu(x\sqrt{2\alpha}), \quad g(x) = x^{-\nu}I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha})$$

である（参考までにこの節の終わりに証明の計算をかいておく）．K_ν は $I_\nu, I_{-\nu}$ の一次結合であるから，よって「一次独立解」のペアとしては例えば

$$u_1(x) = x^{-\nu}I_\nu(x\sqrt{2\alpha}), \quad u_2(x) = x^{-\nu}I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha}), \quad u_3(x) = x^{-\nu}K_\nu(x\sqrt{2\alpha})$$

の中から 2 つを選べばよい．(ただし ν が整数のときは I_ν と $I_{-\nu}$ は同じなので，$\{u_1, u_2\}$ という組み合わせは不可.）なお，$I_\nu(x)$ の定義式から

$$D_s^+ u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0$$

がわかり，また $u_3(x)$ はよく知られているように遠方で有界である[8]．

[**原点が正則な場合**]($0<\rho<2; -1<\nu<0$)

一般に，$m(+0)$ も $s(+0)$ も有限であるとき，原点は正則境界であるという（確率論的には流入と流出が可能な境界である）．Bessel 過程の場合，$0<\rho<2; -1<\nu<0$ のとき（またそのときに限り）原点は正則境界となる．一方，$u_1(x)$ は反射壁の境界条件 $D_s^+ u(0)=0$ を満たす．また $u_3(x)$ は遠方で有界．また両者のロンスキアンは 1 なので（この節の最後の計算参照），原点反射壁の場合のグリーン関数は

$$G_\alpha(x,y)=u_1(x)u_3(y)=x^{-\nu}I_\nu(x\sqrt{2\alpha})y^{-\nu}K_\nu(y\sqrt{2\alpha}) \quad (0<x\le y)$$

で与えられる．また，$u_2(0)=0$ であるから，原点吸収壁の場合は同様に

$$G_\alpha(x,y)=u_2(x)u_3(y)=x^{-\nu}I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha})y^{-\nu}K_\nu(y\sqrt{2\alpha}) \quad (0<x\le y)$$

である．

[**原点が流出・非流入の場合**]($\rho\le 0; \nu\le -1$)

$u_1(x)$ は $x\to +0$ のとき有界でないので，$(\alpha-\mathcal{L})u=f$ の有界解を与えるグリーン関数を作るためには u_2 と u_3 を選ぶ必要があり,「正則・吸収壁｝のときと同じである．

[**原点が流入・非流出の場合**]($\rho>2; \nu>0$)

$u_2(x)$ は $x\to +0$ のとき有界でないので，$(\alpha-\mathcal{L})u=f$ の有界解を与えるためには u_1 と u_3 という組を選ぶ必要があり,「正則・反射壁｝のときと同じである．

[**原点が自然境界の場合**]($\rho=2; \nu=0$)

複雑なので省略.

計算

気になる人のために上記の中で使った計算をかいておく．次はよく知られた公式である．

$$(x^{-\nu}I_\nu(x))'=x^{-\nu}I_{\nu+1}(x), \quad (x^{-\nu}I_{-\nu}(x))'=x^{-\nu}I_{-\nu-1}(x)$$

（前者は項別微分で直ちにでるが，後者は少し工夫が必要である[9]．）変数変換すれば

$$(x^{-\nu}I_\nu(x\sqrt{2\alpha}))'=\sqrt{2\alpha}\,x^{-\nu}I_{\nu+1}(x\sqrt{2\alpha});$$
$$(x^{-\nu}I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha}))'=\sqrt{2\alpha}\,x^{-\nu}I_{-\nu-1}(x\sqrt{2\alpha}).$$

これを用いて

$$f(x):=x^{-\nu}I_\nu(x\sqrt{2\alpha}), \quad g(x):=x^{-\nu}I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha})$$

に $\mathcal{L}=D_mD_s^+$ を施してみよう．

[8] $K_\nu(x)\approx\sqrt{\pi/(2x)}e^{-x}\ (x\to\infty)$

[9] 1 つの方法として $I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_\nu(x)$ を使う．

まず，微分 D_s^+, D_m と通常の微分 d/dx との関係について注意しておく．

$$D_s^+ = \frac{d^+}{ds(x)} = \frac{d^+}{s'(x)dx} = x^{2\nu+1}\frac{d^+}{dx}$$

同様に

$$D_m = \frac{1}{2}x^{-(2\nu+1)}\frac{d}{dx} \tag{6.3}$$

よって上記の f, g については

$$\begin{aligned} D_s^+ f(x) &= \big(x^{-\nu}I_\nu(x\sqrt{2\alpha})\big)' \cdot x^{2\nu+1} \\ &= \sqrt{2\alpha}x^{-\nu}I_{\nu+1}(x\sqrt{2\alpha}) \cdot x^{2\nu+1} \\ &= \sqrt{2\alpha}x^{\nu+1}I_{\nu+1}(x\sqrt{2\alpha}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} D_s^+ g(x) &= \big(x^{-\nu}I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha})\big)' \cdot x^{2\nu+1} \\ &= \sqrt{2\alpha}x^{\nu+1}I_{-\nu-1}(x\sqrt{2\alpha}) \end{aligned}$$

よってとくに，

$$f(0) = \big(\sqrt{2\alpha}/2\big)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad D_s^+ f(0) = 0$$

$$g(0) = 0, \quad D_s^+ g(0) = 2\big(\sqrt{2\alpha}/2\big)^{-\nu}\frac{1}{\Gamma(-\nu)}$$

であり，また

$$\begin{aligned} W[f,g](x) &= f(0)D_s^+ g(0) - g(0)D_s^+ f(0) \\ &= \frac{2}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} = \frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi} \end{aligned} \tag{6.5}$$

ここで (6.4) の両辺に d/dx を施すと

$$\begin{aligned} (D_s^+ f(x))' &= 2\alpha x^{\nu+1}I_\nu(x\sqrt{2\alpha}) \\ (D_s^+ g(x))' &= 2\alpha x^\nu I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha}) \end{aligned}$$

よって D_m については (6.3) により

$$\begin{aligned} D_m D_s^+ f(x) &= \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\, x^{\nu+1}I_{-\nu}(x) \times x^{-(2\nu+1)} = \alpha f(x) \\ D_m D_s^+ g(x) &= \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\, x^{\nu+1}I_\nu(x) \times x^{-(2\nu+1)} = \alpha g(x) \end{aligned}$$

このように f, g は $\mathcal{L}u = \alpha u$ の 2 つの解である．

さきに定義した u_1, u_2, u_2 はそれぞれ

$$u_1(x) = f(x), \quad u_2(x) = g(x), \quad u_3(x) = \frac{\pi}{2\sin(\nu x)}\big(g(x) - f(x)\big),$$

でありさらに，u_1 は遠方で有界，u_2 は原点で反射壁の境界条件を満たす $\mathcal{L}u = \alpha u$ の解で，そのロンスキアンは (6.5) により

$$W[u_1, u_3] = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}W[f, g-f](x) = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}W[f,g](x) = 1.$$

上式最後の等号は (6.5) による．

7. グリーンの公式

この節では，後に必要となる重要な公式の準備をする．とりあえず全体の流れを知りたいという人は，この節をスキップして，必要になった段階で戻るのも一法である．

後に使う重要な公式を準備しよう．$\mathcal{L}f$ 等が意味をもつとき，積の微分公式 (3.7) から

$$d(fD_s^+g) = fd(D_s^+g) + (D_s^+g)df = f(\mathcal{L}g)dm + (D_s^+g)(D_s^+f)ds(x)$$

であるから[10]

$$\left[fD_s^+g\right]_a^b = \int_a^b f(\mathcal{L}g)dm + \int_a^b (D_s^+f)(D_s^+g)ds(x)$$

となり，移項すれば部分積分の公式

$$\int_a^b f(\mathcal{L}g)dm = \left[f(D_s^+g)\right]_a^b - \int_a^b (D_s^+f)(D_s^+g)ds(x)$$

が成り立つ.（ただし，a,b が $m(x)$ の不連続点のときはそれぞれ $a+0, b+0$ と理解する.）

ここで f と g を入れ替えたものとの差をとると

補題 7.1 (グリーンの公式)**.**

(7.1) $$\int_a^b \{f\mathcal{L}g - g\mathcal{L}f\}dm(x) = \left[f(D_s^+g) - (D_s^+f)g\right]_a^b \quad \left(= W[f,g](x)\Big|_a^b\right)$$

この公式を $\{\varphi_\lambda, \varphi_\mu\}$ および $\{\psi_\lambda, \psi_\mu\}$ に適用してみよう．どちらのケースも $\mathcal{L}f = -\lambda f, \mathcal{L}g = -\mu g, W[f,g](0) = 0$ であることに注意すると次をえる．$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ について

$$W[\varphi_\lambda, \varphi_\mu](b) = (\lambda - \mu)\int_0^b \varphi_\lambda(x)\varphi_\mu(x)dm(x) \quad (0 \le b \le \ell_+).$$

とくに，$\mu = \overline{\lambda}$ とおくと[11] $\overline{\varphi_\lambda(x)} = \varphi_{\overline{\lambda}}(x)$ に注意すれば（(3.4) 参照）次をえる．

補題 7.2.

(7.2) $$W[\varphi_\lambda, \overline{\varphi_\lambda}](b) = 2i\mathrm{Im}(\lambda)\int_0^b |\varphi_\lambda(x)|^2 dm(x)$$

---

[10] $d(D_s^+g)/dm = \mathcal{L}g$ により $d(D_s^+g) = (\mathcal{L}g)dm, \quad df = (D_s^+f)ds$

[11] $\overline{\lambda}$ は λ の複素共役.

より一般に $\mathcal{L}f = -\lambda f$ を満たす f とその複素共役 $g = \overline{f}$ に適用してみよう．$\mathcal{L}g = -\overline{\lambda}\, g$ であるから

$$f\mathcal{L}g - g\mathcal{L}f = (-\overline{\lambda} + \lambda)fg = 2i\mathrm{Im}(\lambda)|f|^2$$

に注意すると

$$2i\mathrm{Im}(\lambda)\int_0^b |f(x)|^2 dm(x) = W[f,\overline{f}](b) - W[f,\overline{f}](0) \tag{7.3}$$

ところが，

$$\mathrm{Im}\frac{f(x)}{D_s^+ f(x)} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{f(x)}{D_s^+ f(x)} - \overline{\frac{f(b)}{D_s^+ f(b)}}\right\} = \frac{1}{2i}\frac{W[f,\overline{f}](x)}{|D_s^+ f(x)|^2}$$

から

$$W[f,\overline{f}](x) = (2i)\,|D_s^+ f(x)|^2 \mathrm{Im}\frac{f(x)}{D_s^+ f(x)}.$$

を得るので，これを (7.3) の右辺に代入して $2i$ で割ると；

補題 7.3. f が $\mathcal{L}f = -\lambda f$ をみたすとき

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(\lambda)\int_0^b |f(x)|^2 dm(x) \\
&= |D_s^+ f(b)|^2 \mathrm{Im}\frac{f(b)}{D_s^+ f(b)} - |D_s^+ f(0)|^2 \mathrm{Im}\frac{f(0)}{D_s^+ f(0)} \\
&= \mathrm{Im}\{f(b)\overline{D_s^+ f(b)}\} - \mathrm{Im}\{f(0)\overline{D_s^+ f(0)}\}
\end{aligned}$$

ただし，$D_s^+ f(b) = 0$ または $D_s^+ f(0) = 0$ のときは真ん中の式は分母が 0 で意味がないので除く．

とくに $f(x) = \varphi_\lambda(x)$ のときは $D_s^+ \varphi_\lambda(-0) = 0$ なので補題の第 1 の等号から次がでる：

$$\mathrm{Im}\frac{\varphi_\lambda(b)}{D_s^+ \varphi_\lambda(b)} = \frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{|D_s^+ \varphi_\lambda(b)|^2}\int_{-0}^b |\varphi_\lambda(x)|^2 dm(x). \tag{7.4}$$

同様に

$$\mathrm{Im}\frac{\psi_\lambda(b)}{D_s^+ \psi_\lambda(b)} = \frac{\mathrm{Im}(\lambda)}{|D_s^+ \psi_\lambda(b)|^2}\int_{-0}^b |\psi_\lambda(x)|^2 dm(x). \tag{7.5}$$

8. 境界値問題のグリーン関数

この節では，考える区間は原点を含む有限閉区間 $I = [-\ell_-, \ell_+]$ であり，$m(-\ell_-), m(\ell_+), s(-\ell_-), s(\ell_+)$ はすべて有限とする．既に述べたように，このようなケースを，左右の境界が**正則**なときという．確率論的には，正則境界とは流入と流出がともに可能な境界のことである．なお非正則（特異）な境界については節を改めて解説する．

以下では，$\mathcal{L}$ の定義域に境界条件 (**Sturm-Liouville の境界条件**という）

$$u(\ell_+) + t_+ D_s^+ u(\ell_+) = 0, \quad u(-\ell_-) - t_- D_s^+ u(-\ell_-) = 0 \tag{8.1}$$

を付加する[12]．ただし，$t_\pm = \infty$ のときは (8.1) はそれぞれ

$$D_s^+ u(\ell_+) = 0, \quad D_s^+ u(-\ell_-) = 0 \tag{8.2}$$

と読み替えるものとする．

このような「読み替え」を避けるための表記方法として (8.1) と (8.2) を

$$u(\ell_+)\sin\theta_+ - D_s^+ u(\ell_+)\cos\theta_+ = 0$$

などの形でまとめることが多い．これは $t_+ = -\cot\theta_+$ とおいてみれば同じことであるがわかる．しかし拡散過程に限れば (8.1) と (8.2) の書き方の方が理解しやすいと個人的には思う．

右端・左端それぞれについて，$t_\pm = 0$ （すなわち境界で $u = 0$）のとき**吸収壁**（または **Dirichlet** ）の境界条件といい，$t_\pm = \infty$（すなわち $u' = 0$）のとき**反射壁** （または **Neumann**）の境界条件という．$0 < t_\pm < \infty$ のときは**弾性壁**という．

確率論では (8.1) をもう少し一般化した境界条件

$$\alpha u(\ell_+) + \beta D_s^+ u(\ell_+ -) + \gamma \mathcal{L} u(\ell_+) = 0$$

のタイプが現れるが，実はそれも (8.1) に帰着出来ることを後に (13.2) で触れる．また，細かいことをいうと $D_s^+ u(\ell_+ -)$ と $D_s^+ u(\ell_+)$ の使い分けが気になるかもしれないが，これは $dm(x)$ が ℓ_+ で point mass をもつとき両者が異なるからである．しかし，じつはこれも「あまり気にしなくてよい」ことが (13.2) で明らかになるので，ここでは深入りしない．

以下では，この境界条件 (8.1) の下で非斉次方程式

$$(\alpha - \mathcal{L})u = f$$

を解くことを考えよう．与えられた f について未知関数 u を境界条件 (8.1) の下で求めようという意味である．前節でみたように，グリーン関数が作れるとき $G_\alpha f(x)$ が $(\alpha - \mathcal{L})u = f$ の 1 つの特殊解を与え，それに斉次方程式の一般解を加えたものが非斉次方程式の一般解である．そのなかで，境界条件を満たすものをみつける問題であり，グリーン関数をうまく選べば $G_\alpha f$ そのものが求める境界値問題の解になることをみていく．

[12] 丁寧にかけば $D_s^+ u(\ell_+)$ は $D_s^+ u(\ell_+ -)$ 等の意味である．

まず，ひとつ言葉を準備する：一般に，斉次方程式 $\mathcal{L}u = -\lambda u$ の非自明解 u で両端の境界条件 (8.1) をみたすものがあるとき，その $\lambda \in \mathbb{C}$ と u の組をこの境界値問題の**固有値**と**固有関数**という．

定理 8.1. $t_+, t_- \in (-\infty, \infty]$ とし，$-\alpha(\in \mathbb{C})$ が境界値問題 *(8.1)* の固有値<u>でない</u>とする．

このとき $\mathcal{L}u(x) = \alpha u(x)$ の非自明解で，それぞれ境界条件

$$u_1(\ell_+) + t_+ D_s u_1(\ell_+) = 0, \quad u_2(-\ell_-) - t_- D_s u_2(-\ell_-) = 0 \tag{8.3}$$

をみたす u_1, u_2 は一次独立で，これから作られるグリーン関数 $G_\alpha(x, y)$ について次のことがいえる．

$[-\ell_-, \ell_+]$ 上の連続関数 $f(x)$ について，次は同値．

（条件 *A*）

$$g(x) = G_\alpha f(x)$$

（条件 *B*）

$$(\alpha - \mathcal{L})g(x) = f(x), \quad g(\ell_+) + t_+ D_s g(\ell_+) = 0, \quad g(-\ell_-) - t_- D_s g(-\ell_-) = 0$$

従って，シンボリックにかけば $\mathcal{L}$ の定義域に境界条件を付加して考えるものとすると；

$$\boxed{G_\alpha = (\alpha - \mathcal{L})^{-1}}$$

定理の証明. u_1, u_2 が一次従属であれば両端の境界条件を満たす非自明解があることになり，$-\alpha$ が固有値でないという仮定に反するので，u_1, u_2 は一次独立でなければならない．条件 A から条件 B が出ることは補題 5.2 から明らかである．また，その逆をみるには次のようにすればよい．$u(x) := G_\alpha f(x) - g(x)$ は $\mathcal{L}u = \alpha u$ を満たし，また両端の境界条件も満たすので，($-\alpha$ が固有値でないという仮定により）$u(x) = 0$ である． □

例 8.1. $[0, 1]$ で $u''(x) = \alpha u(x)$ を両端吸収壁（Dirichlet 条件）で考えよう．簡単のため，$\alpha = 0$ の場合だけを考える．$u(1) = 0$ なる解は $u_1(x) = 1 - x$ であり，$u(0) = 0$ なる解は $u_2(x) = x$ である．これらのヤコビアンは 1 なのでグリーン関数は

$$G_0(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & (x \le y) \\ y(1-x) & (y < x) \end{cases}$$

となり，

$$u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

の一意解は $G_0 f(x)$ である．

つぎに (8.3) を満たす u_1, u_2 について考察してみよう．u_1 は $\varphi_{-\alpha}$ と $\psi_{-\alpha}$ の線形結合であるから，とくに $u_1(0) \neq 0$ であれば定数倍して $u_1(0) = 1$ と正規化しておくと

$$u_1(x) = \varphi_{-\alpha}(x) - \frac{1}{c}\psi_{-\alpha}(x) \tag{8.4}$$

の形であるが，

$$u_1(\ell_+) + t_+ D_s^+ u_1(\ell_+) = 0$$

の条件から (8.4) で $x \uparrow \ell_+$ としてみると (8.4) の c は

$$c = \frac{\psi_{-\alpha}(\ell_+) + t_+ D_s^+ \psi_{-\alpha}(\ell_+)}{\varphi_{-\alpha}(\ell_+) + t_+ D_s^+ \varphi_{-\alpha}(\ell_+)}$$

であることがわかる．u_2 についても同様である．この c は $\alpha \in \mathbb{R}$ に依存するので次のように $h_\pm(\alpha)$ で表すことにする：

$t_+, t_- \in (-\infty, \infty]$ を 1 組固定して，$\alpha \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} h_+(\alpha) &:= \frac{\psi_{-\alpha}(\ell_+) + t_+ D_s^+ \psi_{-\alpha}(\ell_+)}{\varphi_{-\alpha}(\ell_+) + t_+ D_s^+ \varphi_{-\alpha}(\ell_+)} \\ h_-(\alpha) &:= -\frac{\psi_{-\alpha}(-\ell_-) - t_- D_s^+ \psi_{-\alpha}(-\ell_-)}{\varphi_{-\alpha}(-\ell_-) - t_- D_s^+ \varphi_{-\alpha}(-\ell_-)} \end{aligned}$$

とおく[13]．ただし，$t_+ = \infty$ または $t_- = \infty$ のときはそれぞれ

$$h_+(\alpha) = \frac{D_s^+ \psi_{-\alpha}(\ell_+)}{D_s^+ \varphi_{-\alpha}(\ell_+)}, \quad h_-(\alpha) = -\frac{D_s^+ \psi_{-\alpha}(-\ell_-)}{D_s^+ \varphi_{-\alpha}(-\ell_-)}$$

と読み替えるものとする．$h_\pm(\alpha)$ はそれぞれ分母または分子が 0 となる α を除外して定義され，このとき

$$u_1(x) = \varphi_{-\alpha}(x) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x), \quad u_2(x) = \varphi_{-\alpha}(x) + \frac{1}{h_-(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x)$$

はそれぞれ右端，左端の境界条件を満たす解となる．例えば，$t_+ \geq 0$ とすれば分母・分子は非負であるから，少なくとも $\alpha > 0$ のとき $h_+(\alpha), u_1, u_2$ は意味をもつ．なお，のちに α を複素数まで拡張して考える場面がある．この場合は誤解のないように文字を h から H に変えて

$$H_+(z) = H_+(t_+; z) := \frac{\psi_z(\ell_+) + t_+ D_s^+ \psi_z(\ell_+)}{\varphi_z(\ell_+) + t_+ D_s^+ \varphi_z(\ell_+)} \tag{8.5}$$

$$H_-(z) = H_-(t_-; z) := -\frac{\psi_z(-\ell_-) - t_- \psi_z'(-\ell_-)}{\varphi_z(-\ell_-) - t_- \varphi_z'(-\ell_-)} \tag{8.6}$$

とおくことにする．形式的には

$$h_\pm(\alpha) = H_\pm(-\alpha)$$

[13] ここでは $h_-(\alpha)$ の定義においてマイナス符号を付けた．その理由は，$\mathcal{L}$ が正側と負側で対称なとき $h_+ = h_-$ になるようにするため．これは本によって流儀が違うので注意．

となる．

$H_\pm(z)$ は複素平面上で整関数の比であるから（z の関数として）有理型関数であり，さらに**極と零点は実軸上に限られる**．なぜなら，$\mathrm{Im}(z)\neq 0$ のとき (3.3) と (7.5) によれば，$\varphi_z(b)/D_s^+\varphi_z(b)$ と $\psi_z(b)/D_s^+\psi_z(b)$ は虚数なので，$t_\pm$ が実数であるという条件の下では $H_\pm(z)$ の分子・分母は 0 にならない．よって，極と零点は実軸上に限られる．

また，

定理 8.2. $t\in(-\infty,\infty]$ とする．$\mathrm{Im}(z)>0$ のとき

$$\mathrm{Im}\,H_\pm(t;z)>0.$$

証明. どちらでも同じなので $H_+(t;z)$ についてのみ述べる．

$$w:=H_+(t;z)=\frac{\psi_z(\ell_+)+tD_s^+\psi_z(\ell_+)}{\varphi_z(\ell_+)+tD_s^+\varphi_z(\ell_+)}$$

とおく．このとき t を w で表すと

$$t=-\frac{w\varphi_z(\ell_+)-\psi_z(\ell_+)}{wD_s^+\varphi_z(\ell_+)-D_s^+\psi_z(\ell_+)}$$

であるから

$$t=-\frac{f_w(\ell_+)}{D_s^+f_w(\ell_+)},\quad \text{where}\quad f_w(z)=w\varphi_z(\ell_+)-\psi_z(\ell_+).$$

の形であり，t が実数という仮定から

$$\mathrm{Im}\,\frac{f_w(\ell_+)}{D_s^+f_w(\ell_+)}=0. \tag{8.7}$$

一方，補題 7.3 によれば

$$\mathrm{Im}(z)\int_0^\ell|f_w(x)|^2dm(x)=|D_s^+f_w(\ell)|^2\mathrm{Im}\frac{f_w(\ell)}{D_s^+f_w(\ell)}-|D_s^+f_w(0)|^2\mathrm{Im}\frac{f_w(0)}{D_s^+f_w(0)}$$

であるが，ここで右辺第 1 項は (8.7) により 0 であり，また第 2 項は $f_w(0)=w$, $D_s^+f_w(0)=-1$ を使えば次を得る．

$$\mathrm{Im}(z)\int_0^\ell|f_w(x)|^2dm(x)=\mathrm{Im}(w) \tag{8.8}$$

よって，$\mathrm{Im}(z)>0$ であれば $\mathrm{Im}(w)>0$. □

このような

「$\mathrm{Im}(z)>0$ であれば $\mathrm{Im}\,H(z)\geq 0$」

という性質をもつ「複素上半平面で正則な関数」$H(z)$ を **Herglotz 関数**，あるいは **Nevanlinna 関数**といい，次のような表現が可能なことがよく知られている．

$$H(z)=a+vz+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)d\sigma(\lambda),\quad a\in\mathbb{R},v\geq 0 \tag{8.9}$$

ここに $d\sigma(\lambda)$ は $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度で次の積分条件を満たす．(8.9) の被積分関数において第 2 項はこの条件下で積分を収束させるための補正項である．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+1} < \infty$$

なお，$\sigma(\lambda)$ の連続点 $s, t\,(s<t)$ については逆公式が成り立つ．一応証明を Appendix につけておく（定理 22.7）（直感的には留数による積分公式である）[14]：

$$\sigma((s,t]) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\pi}\int_s^t \mathrm{Im}(H(x+i\varepsilon))\,dx \tag{8.10}$$

(8.9) の表現式は当面，陽には使わないが，記憶にとどめておくと以下の議論の背景がよく理解できると思われる．興味のある学生のために本稿の最後の Appendix に証明を付けておく．

以上の準備のもとで，$\alpha\in\mathbb{R}$ について，非斉次方程式 $(\alpha-\mathcal{L})u=f$ を解く問題に戻る．$h_\pm(\alpha)$ が存在するような $\alpha\in\mathbb{R}$ について，u_1, u_2 を

$$\begin{aligned} u_1(x) = u_1(\alpha; x) &:= \varphi_{-\alpha}(x) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x) \\ u_2(x) = u_2(\alpha; x) &:= \varphi_{-\alpha}(x) + \frac{1}{h_-(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x) \end{aligned}$$

とおくと，これらは $\mathcal{L}u=\alpha u$ の実数値非自明解で，u_1 は右端で，u_2 は左端で与えられた Sturm-Liouville の境界条件をみたす：

$$u_1(\ell_+) + t_+ D_s^+ u_1(\ell_+) = 0, \quad u_2(-\ell_-) - t_- D_s^+ u_2(-\ell_-) = 0 \tag{8.11}$$

よって，$-\alpha$ が $\mathcal{L}$ の境界値問題の固有値でなければ上記の u_1, u_2 が 1 次独立であり，[15]$h(\alpha) = 1/W[u_1,u_2](0)$ として

$$G_\alpha(x,y) = \begin{cases} h(\alpha)u_2(x)u_1(y) & (x\le y) \\ h(\alpha)u_2(y)u_1(x) & (y<x) \end{cases}$$

とおけば，これが（境界値問題の）グリーン関数となる．このときは，簡単な計算でわかるように

$$W[u_1,u_2](x) = \frac{1}{h_+(\alpha)} + \frac{1}{h_-(\alpha)}$$

であるから，$h(\alpha) = 1/W[u_1,u_2](0)$ は次の関係で決まる．

$$\boxed{\frac{1}{h(\alpha)} = \frac{1}{h_+(\alpha)} + \frac{1}{h_-(\alpha)} \tag{8.12}}$$

[14]実軸上の区間 $[s,t]$ の周りを一周する積分路をとって考えよ．

[15]u_1, u_2 が 1 次独立でなければ，固有関数になってしまう．

9. G_α による Hilbert–Schmidt 展開

しばらく前節の話しから離れて，エルミット対称核の一般論からの準備をしよう．

有限閉区間I=$[a,b]\subset\mathbb{R}$で考える．$I\times I$ 区間上の 複素数値 の連続関数 $K(x,y)$ が**エルミット対称**，すなわち

$$K(x,y)=\overline{K(y,x)}$$

であるとする．ただし，恒等的に 0 の場合はつまらないので対象外．また，$dm(x)$ を I 上の 有限 測度とする．このとき連続関数 $f(x)$ に対し

$$Kf(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)dm(y)\quad (x\in I)$$

と定義する．$K(x,y)$ は連続で $dm(x)$ は有限測度と仮定しているので $Kf(x)$ は x についての連続関数である[16]．さらに，

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2dm(x)dm(y)<\infty$$

であるから，$K(x,y)$ はいわゆる **Hilbert-Schmidt 型の積分核**であり，従って作用素 K は L^2 空間から自身への写像とみたとき関数解析でいう**完全連続性**をもつ（m が有限区間の有限測度という条件が効いている）．

> ここでの完全連続性とは，L^2 有界集合の像が相対コンパクトになるという意味である．完全連続性の証明はここではしないが，本質的に Ascoli–Arzèla の定理（一様有界性と同等連続性の議論）である．

さて，

$$\lambda Ku=u,\quad u(x)\not\equiv 0$$

をみたす u があるとき $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ を**固有値**，u を**固有関数**という．

> 一見，$\lambda Ku=u$ ではなく $Ku=\lambda u$ ではないか？と思う人がいるかもしれないが，積分作用素の場合は $\lambda Ku=u$ を定義としたほうが（逆作用素である）微分作用素の場合との整合性がよいことが後にわかる．

エルミット対称という仮定から，固有値は必ず存在し，それは実数でなくてはならず，また異なる固有値に対応する固有関数は直交する．これらの証明は線形代数のときと全く同じである．また，固有値は高々可算であり，$\pm\infty$ 以外には集積しない．また，すべての固有値について 多重度は有限 である．これらの証明には作用素 K の完全連続性が本質的である．

以上を予備知識として，固有値を $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$，対応する固有関数を u_n とおく．ただし，固有関数は $L^2(I,dm)$ ノルムが 1 になるように正規化し，また同じ固有値に属する固有関数は互いに直交するように取り直しておく．

このとき

[16]有界収束定理により明らか．

定理 9.1 (Hilbert–Schmidt の展開定理). 連続関数 $f(x)$ を用いて $g(x) = Kf(x)$ と表せる $g(x)$ については次の固有関数展開が可能である．

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, u_n) u_n(x), \quad dm(x) - a.e.$$

ここで右辺は x について一様かつ絶対収束である．なお，(g, u_n) は $L^2(dm)$ における内積である：

$$(f_1, f_2) = \int_I f_1(x) \overline{f_2(x)} dm(x)$$

例 9.1. $[0,1]$ にて $\mathcal{L} = d^2/dx^2$ を境界条件 $u(0) = u(1) = 0$ で考える．このとき，$\alpha \geq 0$ であればグリーン関数 $G_\alpha(x,y)$ がある．これは実対称な積分核なので，上記定理により固有関数展開が可能である．固有関数とは $\lambda G_\alpha u = u$ の解のことであるが，これは定理 8.1 により $\lambda u(x) = \alpha u(x) - u''(x)$, $u(0) = u(1) = 0$ と同等であるから

$$(\lambda - \alpha) u(x) = -u''(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

と書き直してみると，正規化した固有関数は $\{\sqrt{2} \sin(n\pi x)\}_n$ で尽くされることがわかる．（対応する G_α の固有値は $(n\pi)^2 + \alpha$ である．）

よって，定理によれば，$g(x) = G_\alpha f(x)$ なる f が存在するような $g(x)$ については

$$g(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x), \quad \alpha_n = \sqrt{2} \int_0^1 g(x) \sin(n\pi x) dx$$

の展開が可能である．収束は一様かつ絶対である．なお，定理は $g = G_\alpha f$ なる f が存在するような g についての展開であるが，それは具体的にどのような関数かというと，2 回連続微分可能で $g(0) = g(1) = 0$ であればよい．なぜなら，このとき $f = (\alpha - \mathcal{L})g$ とおけば $g = G_\alpha f$.

つぎに，エルミット対称核 $K(x,y)$ 自身の展開を考えよう．結論となる主張の導入のために，しばらくは heuristic な議論をおこなう．上述のように,（実数値）連続関数 $f(x)$ については

$$Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (Kf, u_n) u_n(x), \quad dm(x) - a.e.$$

であるが，K の対称性から $(Kf, u_n) = (f, Ku_n) = \dfrac{1}{\lambda_n}(f, u_n)$ であるから

$$Kf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f, u_n) u_n(x), \quad dm(x) - a.e. \tag{9.1}$$

すなわち，

$$\int_a^b K(x,y) f(y) dm(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{1}{\lambda_n} f(y) u_n(y) u_n(x) \, dm(y), \quad dm(x) - a.e.$$

が成り立つ．ここで両辺を比べると

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}u_n(x)u_n(y),\quad dm(x)-a.e. \tag{9.2}$$

と予想できる．しかし，一般にはこれをそのまま正当化できない．そもそも (9.2) の右辺の収束が一般には期待できない．ところが，**正値核**の場合であれば (9.2) は正しいことが証明できるので，以下にこれを解説する．なお，ここで複素数値の自明でない積分核 $K(x,y)$ が正値核であるとは，$(Kf,f)\geq 0$ すなわち

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y)f(x)\overline{f(y)}dm(x)dm(y)\geq 0$$

がすべての連続な複素数値関数 $f(x)$ について成り立つことをいう．正値核の定義にエルミット対称性は陽に含まないが，実は必要条件であることがよく知られている．また，正値核は対角線上で実数かつ非負（$K(x,x)\geq 0$）となる．

定理 9.2 (Mercer の展開定理)．$K(x,y)$ が正値核であるとき *(9.2)* が成り立つ．その収束は絶対かつ一様収束である．

略証にとどめる．線形代数の問題であるから証明は略すが，固有値は正である．よって $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\to\infty$ とする．このとき

$$K_N(x,y):=K(x,y)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}u_n(x)u_n(y)$$

が再び正値核であることが示せるので $K_N(x,x)\geq 0$ により

$$K(x,x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}u_n(x)^2=K_N(x,x)\geq 0$$

となり

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}u_n(x)^2\leq K(x,x)$$

が従う．よって (9.2) の右辺の収束が対角線上でなりたつことがわかる．なお，対角線以外の部分についてはSchwarz 不等式で対角線部分の話しに帰着すればよい．また，K_N の固有値の絶対値は $|\lambda_N|$ 以下であるから，K_N の極限が 0 でないとすると，それも正値核であるから有限な固有値をもつことになり矛盾となる．

10. $G_\alpha(x,y)$ の展開公式（その１）：両側正則で $G_\alpha\geq 0$ の場合

この節では引き続き，左右の境界が正則であるような $\mathcal{L}$ について，グリーン関数 G_α を $\alpha\in\mathbb{R}$ の範囲で考える．このとき $G_\alpha(x,y)$ が存在すれば実対称であるからエルミット対称であり，したがって G_α を前節のエルミット核 K として適用することができる．よって，Hilbert–Schmidt の展開が可能であり，さらに正値核であれば Mercer の展開も可能である．

一般に $G_\alpha(x,y)$ は対称ではあるが，必ずしも正値核ではない．しかし，境界条件によっては正値核となる．以下でこれをみていこう．

考える区間は原点を含む有限閉区間 $[-\ell_-,\ell_+]$ であり，両端は正則（すなわち，$m(-\ell_-)$,$m(\ell_+)$, $s(-\ell_-)$,$s(\ell_+)$ はすべて有限）とする．境界条件は Sturm–Liouville の境界条件

$$u(\ell_+)+t_+D_s^+u(\ell_+)=0,\quad u(-\ell_-)-t_-D_s^+u(-\ell_-)=0$$

を考える．

補題 10.1. $t_+,t_-\in[0,\infty]$ のとき，グリーン関数 $G_\alpha(\alpha>0)$ は正値核．このとき，$t_+=t_-=\infty$ のときを除けば（従って G_0 が定義されるときは），G_0 も正値核.

> 通常の確率過程においては $t_+,t_-\in[0,\infty]$ という条件は標準的である．$t_\pm$ が負になるのは，境界で粒子が分裂・増殖するという（特殊な？）ケースに相当する．

証明. $u=G_\alpha f$ と置くと，定理 8.1 で述べたように，これは $f=(\alpha-\mathcal{L})u$ を意味するから

$$(G_\alpha f,f)=(u,(\alpha-\mathcal{L})u)=\alpha(u,u)-(u,\mathcal{L}u)$$

ここで最右辺第 1 項は（$\alpha\geq 0$ の仮定があるので）明らかに非負．よって最右辺第 2 項が非負であることをみていこう．

$$\begin{aligned}-(u,\mathcal{L}u) &= -\int_{-\ell_-}^{\ell_+}u(x)\frac{dD_s^+u(x)}{dm(x)}dm(x)=-\int_{-\ell_-}^{\ell_+}u(x)dD_s^+u(x)\\ &= -u(\ell_+)D_s^+u(\ell_+)+u(-\ell_-)D_s^+u(-\ell_-)+\int_{-\ell_-}^{\ell_+}D_s^+u(x)^2dx\end{aligned}$$

であるから[17]，境界条件（u と D_s^+u の境界での関係）を考慮すると

$$-(u,\mathcal{L}u)=t_+(D_s^+u(\ell_+))^2+(t_-D_s^+u(-\ell_-))^2+\int_{-\ell_-}^{\ell_+}(D_s^+u(x))^2dx$$

となる．ただし，u と D_s^+u の境界での関係から $t_+(D_s^+u(\ell_+))^2$ と $t_-(D_s^+u(-\ell_-))^2$ はそれぞれ $u(\ell_+)^2/t_+$ と $u(-\ell_-)^2/t_-$ としても同じであるから，$t_+=\infty$ あるいは $t_-=\infty$ のときは，そちらを採用することとする．よって，$t_+,t_-\in[0,\infty]$ のときは $(G_\alpha f,f)>0\,(\alpha>0)$．なお，$\alpha=0$ の場合も同様. □

例 10.1. 例 9.1 では両端が吸収壁（$t_+=t_-=0$）のケースであるから，$t_+,t_-\geq 0$ の条件の範囲内であり，従って，$\alpha\geq 0$ のとき G_α は正値核である．G_α の固有値は $\{(n\pi)^2+\alpha\}_{n=1}^\infty$ で，対応する正規化された固有関数は $\{\sqrt{2}\sin(n\pi x)\}_n$ であったから，Mercer の定理により次の展開式を得る．

$$G_\alpha(x,y)=2\sum_{n=1}^\infty\frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{(n\pi)^2+\alpha}\quad(\alpha\geq 0)$$

[17] 部分積分による．

収束は一様に絶対収束である．

11. $G_\alpha(x,y)$ の展開公式（その２）：原点反射壁の場合

前節では両端が正則な場合を扱ったので，次に一般の場合を扱いたいのであるが，アイデアを理解するために，この節では左端が原点で反射壁 ($\ell_- = 0, t_- = 0$) の場合のみを考えてみる．よってこの節では左端が原点で反射壁とする．

右端について一般の場合を扱いたいのであるがまず $0 \le t_+ \le \infty$ の場合を考えてみよう．すなわち，$[0,\ell_+]$ 上で $\mathcal{L}$ を境界条件

$$D_s^+ u(-0) = 0, \quad u(\ell_+) + t_+ D_s^+ u(\ell_+) = 0$$

で考える．$\mathcal{L}u = \alpha u$ の解で $D_s^+ u(-0) = 0$ となるのは $\varphi_{-\alpha}$（の定数倍）なので，u_1 として $\varphi_{-\alpha}$ を選ぶ．また，右端の境界条件をみたすものは

$$u_2(x) = \varphi_{-\alpha}(x) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x)$$

であるから，グリーン関数は $\alpha > 0$ のとき

$$G_\alpha(x,y) = G_\alpha(y,x) = h(\alpha)\varphi_{-\alpha}(x)\left\{\varphi_{-\alpha}(y) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(y)\right\} \quad (x \le y).$$

ただし，$h(\alpha)$ は u_1, u_2 のロンスキアンの逆数であり，実は $h(\alpha) = h_+(\alpha)$ である．この式は後で使う．

ここでとくに，$a = \inf\{\mathrm{Supp}\{dm(x)\}\}$（本質的な左端）とおくと，$\varphi_{-\alpha}(a) = 1$, $\psi_{-\alpha}(a) = a$ に注意して

$$G_\alpha(a,a) = h(\alpha) - a \tag{11.1}$$

を得る．

つぎに，固有値・固有関数について検討しよう．μ が G_α の固有値ということは，$\mu G_\alpha u = u$ をみたす非自明解 $u(x)$ があるということであったが，これは既に見てきたとおり，$u(x)$ が $(\alpha - \mathcal{L})u = \mu u$ および境界条件をみたすことである．よって $\alpha + \lambda$ と u が G_α の固有値・固有関数であるの固有値であるということは $-\mathcal{L}u = \lambda u$ かつ u が両端での境界条件をみたすことである．この固有関数は左端（原点）での境界条件 $D_s^+ u(-0) = 0$ から固有関数は φ_λ の定数倍でなくてはいけない．このことから，多重度は 1 であることがわかる．さらに右端の境界条件から

$$\varphi_\lambda(\ell_+) + t_+ D_s^+ \varphi_\lambda(\ell_+) = 0 \tag{11.2}$$

も要請される．すなわち，(11.2) をみたす λ と φ_λ が微分方程式の境界値問題に関する固有値・固有関数で，G_α の固有値・固有関数は $\alpha + \lambda$ と φ_λ で与えられる．よって，Mercer の定理によれば

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$$

が存在して，

$$
G_\alpha(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n + \alpha} \frac{1}{\|\varphi_{\lambda_n}\|^2}, \quad dm(x)dm(y) - a.s. \tag{11.3}
$$

と展開される．

ここで階段関数

$$
\sigma(\lambda) := \sum_{\lambda_n \le \lambda} \frac{1}{\|\varphi_{\lambda_n}\|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}
$$

を**スペクトル関数**という．この関数を用いると (11.3) は Lebesgue-Stieljes 測度 $d\sigma(\lambda)$ を用いて

$$
G_\alpha(x,y) = \int_{0-}^{\infty} \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda + \alpha} d\sigma(\lambda), \quad dm(x)dm(y) - a.s. \tag{11.4}
$$

と積分の形にかける．この積分形式による表示は後に連続スペクトルが出てくるケースを扱うときに役に立つ．

次に，λ_n や $\sigma(\lambda)$ の計算方法を与えよう．(11.3) において

$$
x = y = a := \inf\{\mathrm{Supp}\{dm(x)\}\}
$$

とおけば[18]次を得る．

$$
G_\alpha(a,a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda_n + \alpha}, \quad \sigma_n = \frac{1}{\|\varphi_{\lambda_n}\|^2}
$$

これと (11.1) をあわせると次がわかる．

$$
h(\alpha) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda_n + \alpha}, \quad \sigma_n = \frac{1}{\|\varphi_{\lambda_n}\|^2} \tag{11.5}
$$

以上をまとめると，

[18](11.4) の等号は，あくまでも $dm(x)dm(y)$–a.e. なので $x = y = 0$ ではだめ．

$[0, \ell_+]$ で考える．原点が反射壁で，右端条件は $t_+ \in [0, \infty]$ のとき

$$h_+(\alpha) := \frac{\psi_{-\alpha}(\ell_+) + t_+ D_s^+ \psi_{-\alpha}(\ell_+)}{\varphi_{-\alpha}(\ell_+) + t_+ D_s^+ \varphi_{-\alpha}(\ell_+)} \quad (\alpha > 0)$$

は

$$(11.6) \qquad h_+(\alpha) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda_n + \alpha} \quad (0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty, \sigma_n > 0)$$

の形に展開できて，この λ_n が $\mathcal{L}$ の境界値問題の固有値であり，φ_{λ_n} が固有関数である．また $\sigma_n = 1/\|\varphi_{\lambda_n}\|^2$.
さらに，次の展開式がなりたつ．

$$(11.7) \qquad G_\alpha(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n + \alpha}\sigma_n, \quad dm(x)dm(y) - a.s.$$

また，$g(x)$ が $G_\alpha f(x)$ の形にかけるとき

$$(11.8) \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, \varphi_{\lambda_n})\varphi_{\lambda_n}(x)\sigma_n, \quad dm(x) - a.s.$$

上記 2 式において右辺の級数は一様かつ絶対収束である．

また，Hilbert-Schmidt 展開によれば，$\{\varphi_{\lambda_n}(x)/\|\varphi_{\lambda_n}\|\}$ は $L^2([0, \ell_+], dm)$ で C.O.N.S. をなすので複素値の $f, g \in L^2([0, \ell_+], dm)$ の内積 (f, g) は次のようになる．

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_{\lambda_n})\overline{(g, \varphi_{\lambda_n})}\sigma_n$$

ノルムの形でいえば，

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_{\lambda_n})|^2 \sigma_n \quad \text{（Parceval 等式）}$$

以上は $t_+ \in [0, \infty]$ の場合であるが，$t_+ < 0$ のときはグリーン関数 G_α が α によっては存在する．その場合，正値積分核ではないので，(11.7) は成り立たないが，Hilbert-Schmidt の展開や固有値・固有関数の部分は生きている．

12. $G_\alpha(x, y)$ の展開公式（その３）：原点吸収壁の場合

特に

$$\ell_- = 0, \quad t_- = 0, \quad 0 < \ell_+ < \infty, \quad 0 \le t_+ \le \infty$$

の場合を考える．すなわち，$[0, \ell_+]$ 上で $\mathcal{L}$ を境界条件

$$u(0) = 0, \quad u(\ell_+) + t_+ D_s^+ u(\ell_+) = 0$$

で考える．このとき，右端の境界条件を満たす解は前節と同じく

$$u_1(x) = \varphi_{-\alpha}(x) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x)$$

であるが，左端の境界条件を満たす解 $u_2(x)$ は $\varphi_{-\alpha}(x)$ ではなく $\psi_{-\alpha}(x)$ に変わる．このとき u_1, u_2 のロンスキアンは 1 であるから，グリーン関数は $\alpha > 0$ のとき

$$G_\alpha(x,y) = G_\alpha(y,x) = \psi_{-\alpha}(x)\left\{\varphi_{-\alpha}(y) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(y)\right\}, \quad (x \le y) \tag{12.1}$$

となる．したがって

$$G_\alpha f(x) = \int_0^{\ell_+} \psi_{-\alpha}(x \wedge y)\varphi_{-\alpha}(x \vee y) f(y) dm(y) - \frac{(\psi_{-\alpha}, f)}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x)$$

となる．λ が $-\mathcal{L}$ の固有値（$\lambda+\alpha$ が G_α の固有値）であれば，固有関数は，$\mathcal{L}u = -\lambda u$ を満たすことと原点での境界条件 $u(-0) = 0$ から，ψ_λ の定数倍でなくてはいけなくて，また右端の境界条件から

$$\psi_\lambda(\ell_+) + t_+ D_s^+ \psi_\lambda(\ell_+) = 0 \tag{12.2}$$

が要請される．すなわち，(12.2) をみたす λ を $\{\lambda_n\}_n$ とすると $\{\lambda_n + \alpha\}_n$ が G_α の固有値で，固有関数は ψ_{λ_n} の定数倍である．このことから，多重度は 1 であることがわかる．よって Mercer の展開式は

$$\sigma_n = \frac{1}{\|\psi_{\lambda_n}\|^2}$$

とおくと $\alpha > 0$ のとき

$$G_\alpha(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n + \alpha}\sigma_n, \quad dm(x)dm(y) - a.s. \tag{12.3}$$

また Hilbert–Schmidt 展開式は，$\alpha + \lambda_n \neq 0\,(\forall n)$ なる $\alpha \in \mathbb{R}$ について

$$G_\alpha f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (G_\alpha f, \psi_{\lambda_n})\frac{\psi_{\lambda_n}(x)}{\|\psi_{\lambda_n}\|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \psi_{\lambda_n})}{\lambda_n + \alpha}\psi_{\lambda_n}(x)\sigma_n \tag{12.4}$$

ここで，λ_n, σ_n の計算方法を考えよう．前節と同様に，(12.3) において

$$x = y = a := \inf\{\mathrm{Supp}\{dm(x)\}\}$$

とおけば良さそうに思えるかもしれないが，問題がある．実際，$a > 0$ のときはいいが，一番大事な $a = 0$ の場合は $\psi(0) = 0$ であるから[19]両辺が 0 となってしまい，自明な式しか得られない．

[19] $a > 0$ のときは a が実質的な左端であり, 0 が吸収壁という条件に合わない.

したがって (12.3) ではなく，(12.4) を使う．$h_+(\alpha)$ が (11.6) の表現をもつとき，$-1/h_+(\alpha)$ は次の表現をもつことに注意する．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\mu_n^2+1} < \infty \tag{12.5}$$

なる $\mu_n \geq 0, \sigma_n > 0, v \geq 0, b \in \mathbb{R}$ が存在して

$$-\frac{1}{h_+(\alpha)} = -vs + b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_n + \alpha} - \frac{\mu_n}{\mu_n^2+1} \right) \sigma_n. \tag{12.6}$$

このことは初等的に証明できるので Appendix に証明をかいておくが，Nevanlinna 関数の標準形 (8.9) を知っていれば明らかなことでもある．なぜなら，$H(z)$ が Nevanlinna 関数であれば $-1/H(z)$ も Nevanlinna 関数であるからである．話しをもとに戻そう．$G_\alpha f(x)$ を（x を固定して）α の関数とみると，複素平面での有理型関数とみなすこともできる．そこで (12.4) と (12.1) を比較してみよう．両者の極と留数は (12.4) からは

$$-\lambda_n, \quad -(f, \psi_{-\lambda_n})\psi_{-\lambda_n}(x)\|\psi_{\lambda_n}\|^2$$

が得られ，(12.1) からは

$$-\mu_n, \quad -(f, \psi_{-\mu_n})\psi_{-\mu_n}(x)\sigma_n$$

は得られる．よって，実は $\{\mu_n\}_n = \{\lambda_n\}_n$ かつ $1/\|\psi_{\lambda_n}\|^2 = \sigma_n$ であることがわかる．

まとめると，

> $[0, \ell_+]$ において，原点を吸収壁（$t_- = 0$），右端のパラメータを $t_+ \in [0, \infty]$ とする境界値問題を考える．このとき，
>
> $$h_+(\alpha) := \frac{\psi_{-\alpha}(\ell_+) + t_+ D_s^+ \psi_{-\alpha}(\ell_+)}{\varphi_{-\alpha}(\ell_+) + t_+ D_s^+ \varphi_{-\alpha}(\ell_+)} \quad (\alpha > 0)$$
>
> とおくと，(12.5) をみたす
>
> $$0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \cdots \to \infty, \quad \sigma_n > 0$$
>
> が存在し，$-1/h_+(\alpha)$ は (12.6) の形に展開できて，この μ_n が $\mathcal{L}$ の境界値問題の固有値で，ψ_{μ_n} が対応する固有関数である．また，$\sigma_n = 1/\|\psi_{\mu_n}\|^2$．さらに，このとき Mercer の展開式
>
> $$G_\alpha(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_{\mu_n}(x)\psi_{\mu_n}(y)}{\mu_n + \alpha}\sigma_n, \quad dm(x)dm(y) - a.s. \tag{12.7}$$
>
> が成り立つ．収束は一様かつ絶対収束である．

もちろん Hilbert–Schmidt の展開式

$$G_\alpha f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(G_\alpha f,\psi_{\mu_n})\psi_{\mu_n}(x)\sigma_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\psi_{\mu_n})\psi_{\mu_n}(x)}{\mu_n+\alpha}\sigma_n,\quad dm(x)-a.s.$$

も（少なくとも $\alpha>0$ の範囲で）成り立つ．

また，$\{\psi_{\lambda_n}(x)/\|\psi_{\lambda_n}\|\}$ は $L^2([0,\ell_+],dm)$ で完全正規直交系（C.O.N.S.）をなすので複素数値 $f,g\in L^2([0,\ell_+],dm)$ について次が成り立つ．

$$\begin{aligned}(f,g)&=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\psi_{\mu_n})\overline{(g,\psi_{\mu_n})}\sigma_n\\ \|f\|^2&=\sum_{n=1}^{\infty}|(f,\psi_{\mu_n})|^2\sigma_n\qquad\text{（Parceval 等式）}\end{aligned}$$

なお，この節の例としては例 9.1 と例 10.1 をみよ．

13. Inextensible measure

方程式 $\mathcal{L}u=\alpha u$ を境界条件

(13.1) $$u(\ell_+)+t_+D_s^+u(\ell_+)=0,\quad u(-\ell_-)-t_-D_s^+u(-\ell_-)=0$$

で考えているわけであるが，前の 2 つの節では，$t_\pm\in[0,\infty]$ の範囲で考えてきた．ところが，実はこの場合は，あるトリックにより $t_\pm=0$（すなわち吸収壁）のケースに帰着できることを以下に説明する．この方法により，境界のパラメータを気にしなくてよいことになり，大変好都合である．

以下では右端点だけについて述べるが，左端の側でも全く同様である．$0\le t_\pm\le\infty$ として，与えられた $m(x)$ を $[-\ell_-,\ell_+]$ から次のように $\mathbb{R}$ 全体に延長・拡張する．

$$m_{ext}(x)=\begin{cases}-\infty, & (x\le-\ell_--t_-)\\ m(-\ell_-), & (-\ell_--t_-\le x<-\ell_-)\\ m(x), & (-\ell_-\le x<\ell_+)\\ m(\ell_+), & (\ell_+\le x<\ell_++t_+)\\ +\infty, & (\ell_++t_+\le x)\end{cases}$$

測度の形でかけば

$$dm_{ext}(x)=1_{(-\ell_-,\ell_+)}(x)dm(x)+\infty\cdot\delta_{\ell_++t_+}(dx)+\infty\cdot\delta_{-\ell_--t_-}(dx)\quad(x\in\mathbb{R}).$$

この拡張された m_{ext} は，$\mathbb{R}$ から $[-\infty,\infty]$ への写像になるが，元の $(m(x),t_+,t_-)$ と m_{ext} とは 1 対 1 の対応である．(厳密には，$dm(x)$ が $\pm\ell_\pm$ で point mass をもつ場合は多少の注意が必要であるが，これについては後述する．) 要するに，m_{ext} は m に境界条件を付加したものである．

このように $m(x)$ を $\mathbb{R}$ 全体に拡張しておくと，u が $\mathcal{L}u=-\lambda u$ の解であれば，(dm が (ℓ_+,ℓ_++t_+) では mass を持たないことから）u は $[\ell_+,\ell_++t_+]$ 上では線

形でなくてはならないので，

$$u(\ell_+ + t_+) = u(\ell_+) + t_+ D_s^+ u(\ell_+ + 0)$$

となる．よって (13.1) は

$$u(\ell_+ + t_+) = 0, \quad u(-\ell_- - t_-) = 0$$

というように '$\ell_+ + t_+ t$ と $-\ell_- - t_-$ における吸収壁' の条件としてかける．よって $0 \le t_\pm < \infty$ のとき，Sturm–Liouville の境界条件は吸収壁の場合に帰着される．反射壁の場合は含まれないが，$t_+ \to \infty$ の場合（すなわち，吸収壁が無限遠点にある）と理解すればよい．結局，

吸収壁の場合だけ考えればよい

ということになり便利である．

実は (13.1) をもう少し一般化した境界条件がある．有限区間 $[-\ell_-, \ell_+]$ 上で $m(x)$ が与えられたとき $\beta \ge 0$ として

$$m_{ext}(x) = \begin{cases} m(x), & (x < \ell_+) \\ m(\ell_+) + \beta, & (\ell_+ \le x < \ell_+ + t_+) \\ +\infty, & (x \ge \ell_+ + t_+) \\ -\infty, & (x < -\ell_-) \end{cases}$$

を考える．要するに，ℓ_+ に β だけ mass を付け加え，$\ell_+ + t_+$ に吸収壁を置くわけである．このとき $-\mathcal{L}u = \lambda u$ の解で $u(\ell_+ + t_+) = 0$ という条件を考えてみよう．前述のとおり，これは $u(\ell_+) + t_+ D_s^+ u(\ell_+) = 0$ と同じであるが，$dD_s^+ u(x) = -su(x)dm(x)$ であるから $D_s^+ u(\ell_+) = D_s^+ u(\ell_+ - 0) - \beta s u(\ell_+) = D_s^+ u(\ell_+ - 0) + \beta \mathcal{L} u(\ell_+)$ なので，$u(\ell_+ + t_+) = 0$ は ℓ_+ における条件に書き換えると

$$u(\ell_+) + t_+ D_s^+ u(\ell_+ - 0) + \gamma \mathcal{L} u(\ell_+) = 0 \tag{13.2}$$

となる（$\gamma := \beta t_+$ である）．実は，確率論的には (13.2) がより一般の境界条件であり，β は境界での**滞留**を表すパラメータである[20]．

このように，有限区間で与えられた m を $\mathbb{R}$ 全体から $[-\infty, \infty]$ への写像に拡張したもの，あるいは $dm(x)$ を **inextensible measure** という．要するに，

> inextensible measure とは (13.2) 型の境界条件を dm に組み込んだものである.（ただし，この用語は必ずしも広く知られているわけではないので，論文等に使う場合は補足説明が必要であろう.）

そのような訳で，この概念を使うことにより（$t_\pm \in [0, \infty]$ の場合は）境界条件はあまり気にしなくてよいことになる．

例 13.1. $[0,1]$ 区間で $\mathcal{L} = d^2/dx^2$ を考える．

[20] 滞留のある境界を sticky boundary という．

(1) 左端が反射壁，右端が吸収壁の場合，左右の吸収壁はそれぞれ $-\infty$ と 1 にあると理解するので

$$m_{ext}(x) = \begin{cases} x \vee 0 & x \leq 1 \\ +\infty & x \geq 1 \end{cases}$$

(2) 左端が吸収壁，右端が $u(1) + D_s^+ u(1) = 0$ の場合は左右の吸収壁は 0 と 2 と理解するので

$$m_{ext}(x) = \begin{cases} -\infty & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ +\infty & 2 \leq x \end{cases}$$

14. $G_\alpha(x,y)$ の展開公式（その 4）：両側の場合

この節では，有限閉区間 $I = [-\ell_-, \ell_+]$ において $t_\pm \in [0,\infty]$ の場合を考える．また，簡単のため原点は $dm(x)$ の Support に入っているものとする（必要なら座標をシフトすればよい）．

$t_\pm \in [0,\infty]$ の場合であるから，既に述べた通り，G_α は正値核である．固有値 $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$ と固有関数 $u_n(x)$ があって

$$G_\alpha(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n + \alpha} \frac{1}{\|u_n\|^2}, \quad dm(x)dm(y) - a.s. \tag{14.1}$$

と展開できる（Mercer の展開式）．この u_n を $\varphi_\lambda, \psi_\lambda$ を用いて表すことを考える．要するに $\sin, \cos$ を用いた Fourier 級数展開の一般化である．

本論に入る前に，準備を 1 つしておく．(14.1) の収束についての評価式である．

補題 14.1. $\alpha > 0$ とするとき

$$\left| G_\alpha(x,y) - \sum_{\lambda_n \leq A} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n + \alpha} \frac{1}{\|u_n\|^2} \right| \leq 2\sqrt{G_A(x,x)G_A(y,y)} \quad (A > 0)$$

証明.

$$\frac{1}{\lambda + \alpha} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda + A} \quad (\lambda \geq A)$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\left| G_\alpha(x,y) - \sum_{\lambda_n \le A} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n+\alpha}\frac{1}{\|u_n\|^2} \right| = \left| \sum_{\lambda_n > A} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\lambda_n+\alpha}\frac{1}{\|u_n\|^2} \right| \\
\le\ & 2\sum_{\lambda_n \ge 0} \frac{|u_n(x)u_n(y)|}{\lambda_n+A}\frac{1}{\|u_n\|^2} \\
\le\ & 2\sqrt{\sum_{\lambda_n \ge 0} \frac{u_n(x)^2}{\lambda_n+A}\frac{1}{\|u_n\|^2}}\sqrt{\sum_{\lambda_n \ge 0} \frac{u_n(y)^2}{\lambda_n+A}\frac{1}{\|u_n\|^2}} \\
=\ & 2\sqrt{G_A(x,x)G_A(y,y)}.
\end{aligned}
$$

□

さて，展開式 (14.1) にもどる．前の 2 つの節では片側区間で考えたので，$u_n(x)$ は反射壁のとき $\varphi_{\lambda_n}(x)$，吸収壁のとき $\psi_{\lambda_n}(x)$ となったが，今度は

$$u_n(x) = \alpha_n\varphi_{\lambda_n}(x) + \beta_n\psi_{\lambda_n}(x)$$

という一般の形でやる必要がある．よって展開式 (14.1) は次の形になる．

$$
\begin{aligned}
G_\alpha(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\varphi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{1,1} + \frac{\varphi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{1,2} \\
&+ \frac{\psi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{2,1} + \frac{\psi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{2,2}\Big)
\end{aligned}
\tag{14.2}
$$

ただしここで

$$\sigma_n^{1,1} = \frac{\alpha_n^2}{\|u_n\|^2}, \quad \sigma_n^{2,1} = \sigma_n^{1,2} = \frac{\alpha_n\beta_n}{\|u_n\|^2}, \quad \sigma_n^{2,2} = \frac{\beta_n^2}{\|u_n\|^2}.$$

注意

(i) $\sigma_n^{1,1}, \sigma_n^{2,2} \ge 0$ であるが，$\sigma_n^{1,2}, \sigma_n^{2,1}$ は非負とは限らない．

(ii) $|\sigma_n^{1,2}| = \sqrt{\sigma_n^{1,1}\sigma_n^{2,2}}$ であるから Schwarz 不等式により

$$\Big(\sum_{n=j}^{k}|\sigma_n^{1,2}|\Big)^2 \le \Big(\sum_{n=j}^{k}\sigma_n^{1,1}\Big)\Big(\sum_{n=j}^{k}\sigma_n^{2,2}\Big) \quad (k \ge j \ge 1)$$

である．したがってスペクトル関数の増分を表す次の行列は正定値となる．

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=j}^{k}\sigma_n^{1,1} & \sum_{n=j}^{k}\sigma_n^{1,2} \\ \sum_{n=j}^{k}\sigma_n^{2,1} & \sum_{n=j}^{k}\sigma_n^{2,2} \end{pmatrix}$$

(iii) 同様に次も成り立つ．

$$(14.3)\qquad \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_n^{1,2}|}{\alpha+\lambda_n^2}\Big)^2 \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^{1,1}}{\alpha+\lambda_n^2}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^{2,2}}{\alpha+\lambda_n^2}\Big)\quad(\alpha>0)$$

次に，$\sigma_n^{1,1},\sigma_n^{2,1},\sigma_n^{1,2},\sigma_n^{2,2}$ の計算法を考えよう．
まず，$x\le y$ のとき

$$(14.4)\quad G_\alpha(x,y)=h(\alpha)\left\{\varphi_{-\alpha}(x)+\frac{1}{h_-(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x)\right\}\left\{\varphi_{-\alpha}(y)-\frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(y)\right\}$$

であったから，ここで (14.2) と (14.4) において $x=y=0$ と置くと[21]

$$(14.5)\qquad h(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{1,1}$$

がわかる．右辺は正項級数なので，上記議論はこの級数の収束も示している．
また (14.2) から

$$(14.6)\qquad \left.\frac{\partial G_\alpha(x,y)}{\partial x}\right|_{x=-0,y=+0}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+\lambda_n}\right)\sigma_n^{1,2}$$

一方，(14.4) から

$$\left.\frac{\partial G_\alpha(x,y)}{\partial x}\right|_{x=-0,y=+0}=\frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)}$$

よって

$$\frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+\lambda_n}\right)\sigma_n^{1,2}$$

とやりたいところであるが，この議論は正当化出来ない．実際，$x=-0,y=+0$ のかわりに $x=+0,y=-0$ で考えると異なる結果が出てくる．その原因は (5.2) でみたように $G_\alpha(x,y)$ が対角線上で微分可能でないからである．別の見方をすると，右辺の級数が収束していないことが背景にある．しかし，$\alpha_0>0$ として $G_\alpha(x,y)-G_{\alpha_0}(x,y)$ を考えると，対角線上での singularity がキャンセルできるので，これを使うとよい．実際，(後に示すように)

$$(14.7)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_n^{1,2}|}{1+\lambda_n^2}<\infty$$

が成り立つので，次のように少し修正すればよい．ただし，厳密な証明は後の節でより一般の形で証明するので，ここでは以下のような heuristic 議論 にとど

[21] 0 は dm の support に含まれると仮定していた．

める．(14.6) は収束に問題があったが，代わりに次のようにすれば収束問題はクリヤーされる．

$$\left.\frac{\partial(G_\alpha(x,y)-G_1(x,y))}{\partial x}\right|_{x=-0,y=+0} = \frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)} - \frac{h(1)}{h_-(1)}$$

よって

$$\frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)} = \frac{h(1)}{h_-(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+\lambda_n} - \frac{1}{1+\lambda_n}\right)\sigma_n^{1,2} \tag{14.8}$$

なお，ここで (14.7) により，(14.8) の右辺は絶対収束している．

同様に x による偏微分を y による偏微分に入れ替えると次を得る．

$$-\frac{h(\alpha)}{h_+(\alpha)} = -\frac{h(1)}{h_+(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+\lambda_n} - \frac{1}{1+\lambda_n}\right)\sigma_n^{2,1} \tag{14.9}$$

もっとも，（h の定義から）$-h/h_+ = h/h_- - 1$ であるので，(14.9) は実質的に (14.8) と同じ式である．よって $\sigma_n^{1,2} = \sigma_n^{2,1}$ である．また同様に 2 階微分を使うと，(14.2) から

$$\left.\frac{\partial^2(G_\alpha(x,y)-G_1(x,y))}{\partial x\partial y}\right|_{x=-0,y=+0} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+\lambda_n} - \frac{1}{1+\lambda_n}\right)\sigma_n^{2,2}$$

一方，(14.4) からは

$$\left.\frac{\partial^2(G_\alpha(x,y)-G_1(x,y))}{\partial x\partial y}\right|_{x=-0,y=+0} = -\frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)h_+(\alpha)} + \frac{h(1)}{h_-(1)h_+(1)}.$$

よって

$$-\frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)h_+(\alpha)} = -\frac{h(1)}{h_-(1)h_+(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+\lambda_n} - \frac{1}{1+\lambda_n}\right)\sigma_n^{2,2}. \tag{14.10}$$

なお，$h(\alpha)/(h_-(\alpha)h_+(\alpha)) = 1/(h_+(\alpha)+h_-(\alpha))$ であるから，書き直すと

$$-\frac{1}{h_+(\alpha)+h_-(\alpha)} = \mathrm{const} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+\lambda_n} - \frac{1}{1+\lambda_n}\right)\sigma_n^{2,2} \tag{14.11}$$

同じように (14.8) も次のように書き直せる．

$$\frac{h_+(\alpha)}{h_+(\alpha)+h_-(\alpha)} = \mathrm{const} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+\lambda_n} - \frac{1}{1+\lambda_n}\right)\sigma_n^{1,2} \tag{14.12}$$

なお，この右辺の級数は (14.3) でみたように絶対収束している．

具体的に $\lambda_n, \sigma_n^{i,j}$ を計算するには，$\alpha > 0$ で定義された関数 $1/(h_+(\alpha)+h_-(\alpha))$ 等を複素平面まで解析接続をして考え，その極と留数を計算すればよい．念のために繰り返すが，以上は heuristic 議論であり，厳密には上で const. とかいた

部分はじつは m が 0 で不連続のときは 1 次の項も出る．しかしこれは留数計算には影響ないので深入りしない．

まとめ

> $[-\ell_-, \ell_+]$ において，両端が正則であり，$t_+, t_- \in [0, \infty]$ のとき，$\alpha > 0$ について
>
> $$(14.13)\quad G_\alpha(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\varphi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{1,1} + \frac{\varphi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{1,2} + \frac{\psi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{2,1} + \frac{\psi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{2,2}\Big)$$
>
> なる展開が可能である．右辺は一様に絶対収束である．ここで $\sigma_n^{1,1}, \sigma_n^{1,2}(=\sigma_n^{2,1}), \sigma_n^{2,2}$ は h_+, h_- から (14.5), (14.12), (14.11) により定まる．

なお，(14.13) の右辺の級数は，4 項の和の級数であって，それを 4 つの級数に分けられるとまでは主張していない（おのおのが収束するか分からない）．

15. Fourier 式展開公式：両側正則の場合

$t_+, t_- \in [0, \infty]$ という条件を外すと，もはや $G_\alpha(x, y)$ は正値核ではないので，$G_\alpha(x, y)$ 自身の Mercer 展開は期待できない．しかし，Hilbert–Schmidt の展開（固有関数による Fourier 型の展開）の部分は成立する．すなわち，$\mathcal{L}u = \alpha u$ の自明でない解で左右両方の境界条件

$$(15.1)\qquad u(\ell_+) + t_+ D_s^+ u(\ell_+) = 0, \quad u(-\ell_-) - t_- D_s^+ u(-\ell_-) = 0$$

を満たすものがあればその $-\alpha$ を「（境界値問題の）固有値」といったが，それらは高々可算個で，かつ（無限遠点以外に）集積しないことは既に述べた．それらの α を除外した $\alpha \in \mathbb{R}$ について，グリーン関数 $G_\alpha(x, y)$ が作れ，これを積分核とする Hilbert–Schmidt 展開が可能であった．

G_α の固有値は既に述べたように，α に依存しない λ_n を用いて $\lambda_n + \alpha$ の形になっており，対応する固有関数は $u_n(x) = \alpha_n\varphi_{\lambda_n}(x) + \beta_n\psi_{\lambda_n}(x)$ の形をしている．Hilbert–Schmidt 展開によれば，$\{u_n(x)/\|u_n\|\}_n$ は $L^2([-\ell_-, \ell_+], dm)$ における C.O.N.S. をなして，

$$(15.2)\qquad G_\alpha f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(G_\alpha f, u_n)\frac{u_n(x)}{\|u_n\|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f, u_n)}{\lambda_n+\alpha}\frac{u_n(x)}{\|u_n\|^2}$$

が成り立つ（(9.1) 参照）．ここで $u_n(x)=\alpha_n\varphi_{\lambda_n}(x)+\beta_n\psi_{\lambda_n}(x)$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
G_\alpha f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{(f,\varphi_{\lambda_n})\varphi_{\lambda_n}(x)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{1,1}+\frac{(f,\varphi_{\lambda_n})\psi_{\lambda_n}(x)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{1,2} \\
&+ \frac{(f,\psi_{\lambda_n})\varphi_{\lambda_n}(x)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{2,1}+\frac{(f,\psi_{\lambda_n})\psi_{\lambda_n}(x)}{\lambda_n+\alpha}\sigma_n^{2,2}\Big\}
\end{aligned} \tag{15.3}
$$

の形になる．ただし $\sigma_n^{j,k}\,(j,k=1,2)$ は以前と同じで

$$
\sigma_n^{1,1}=\frac{\alpha_n^2}{\|u_n\|^2},\quad \sigma_n^{1,2}=\sigma_n^{2,1}=\frac{\alpha_n\beta_n}{\|u_n\|^2},\quad \sigma_n^{2,2}=\frac{\beta_n^2}{\|u_n\|^2}
$$

同じことを別の形でかくと，(適当な $\alpha\in\mathbb{R}$ と $f(x)$ を使って）$g(x)=G_\alpha f(x)$ の形に表せる $g(x)$ については次の Fourier 型の展開ができる．

$$
\boxed{
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(g,\varphi_{\lambda_n})\varphi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{1,1}+(g,\varphi_{\lambda_n})\psi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{1,2} \\
&\quad +(g,\psi_{\lambda_n})\varphi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{2,1}+(g,\psi_{\lambda_n})\psi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{2,2}\Big\}
\end{aligned}
}
$$

つぎに，$\sigma_n^{j,k}\,(j,k=1,2)$ の計算方法を考えよう．$x\le y$ のとき

$$
\begin{aligned}
G_\alpha(x,y) &= G_\alpha(y,x) \\
&= h(\alpha)\left\{\varphi_{-\alpha}(x)+\frac{1}{h_-(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x)\right\}\left\{\varphi_{-\alpha}(y)-\frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(y)\right\}
\end{aligned}
$$

であったから，これをもちいて

$$
G_\alpha f(x)=\int_{-\ell_-}^{\ell_+}G_\alpha(x,y)f(y)dm(y)
$$

を展開し，$\varphi_{-\alpha}(x)$ と $\psi_{-\alpha}(x)$ について整理すると

$$
G_\alpha f(x)=P(\alpha,x)\varphi_{-\alpha}(x)+Q(\alpha,x)\psi_{-\alpha}(x) \tag{15.4}
$$

の形になる．ここで

$$
\begin{aligned}
P(\alpha,x) &= h(\alpha)(f,\varphi_{-\alpha})+\frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)}(f,\varphi_{-\alpha})-\int_{-\ell_-}^{x}\psi_{-s}(y)f(y)dm(y) \\
Q(\alpha,x) &= -\frac{h(\alpha)}{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}(f,\psi_{-\alpha})-\frac{h(\alpha)}{h_+(\alpha)}(f,\varphi_{-\alpha}) \\
&\quad +\int_{x}^{\ell_+}\varphi_{-\alpha}(y)f(y)dm(y)
\end{aligned}
$$

である．

$G_\alpha f(x)$ の表現が (15.3) と (15.4) の 2 通り出来たので，両者を比べることにより，$h, h_\pm$ から $\lambda_n, \sigma_n^{j,k}$ が以下のように求まる．
以下で記号を簡単にするため，関数 $F(\alpha)$ について

$$\mathrm{Res}(F(\alpha); c) = \lim_{\alpha\to c}(\alpha - c)F(\alpha)$$

と定義しておく（複素関数 $F(z)$ の c における留数の意味である）．
まず (15.4) から，x を固定する毎に α の関数とみて

$$\mathrm{Res}(G_\alpha f(x); -\lambda_n) = \mathrm{Res}(P(\alpha, x); -\lambda_n)\varphi_{\lambda_n}(x) + \mathrm{Res}(Q(\alpha, x); -\lambda_n)\psi_{\lambda_n}(x)$$

であるが，右辺を P, Q の定義を使って計算すると

$$\begin{aligned}&\{\mathrm{Res}(h; -\lambda_n)(f, \varphi_{\lambda_n}) + \mathrm{Res}(h/h_-; -\lambda_n)(f, \psi_{\lambda_n})\}\,\varphi_{\lambda_n}(x)\\ &-\Big\{\mathrm{Res}(h/h_+; -\lambda_n)(f, \varphi_{\lambda_n}) + \mathrm{Res}(h/(h_+h_-); -\lambda_n)(f, \psi_{\lambda_n})\Big\}\psi_{\lambda_n}(x)\end{aligned}$$

一方，同じ $\mathrm{Res}(G_\alpha f(x); -\lambda_n)$ を (15.3) で計算すれば次がわかる．

$$\Big\{(f, \varphi_{\lambda_n})\sigma_n^{1,1} + (f, \psi_{\lambda_n})\sigma_n^{2,1}\Big\}\,\varphi_{\lambda_n}(x) + \Big\{(f, \varphi_{\lambda_n})\sigma_n^{1,2} + (f, \psi_{\lambda_n})\sigma_n^{2,2}\Big\}\,\psi_{\lambda_n}(x)$$

このように，$\mathrm{Res}(G_\alpha f(x); -\lambda_n)$ の 2 通りの表現ができたが，これらを比較し，$\varphi_{\lambda_n}(x)$ と $\psi_{\lambda_n}(x)$ の 1 次独立性を考慮すれば次を得る．

$$\begin{aligned}(f, \varphi_{\lambda_n})\sigma_n^{1,1} + (f, \psi_{\lambda_n})\sigma_n^{2,1} &= \mathrm{Res}(h; -\lambda_n)(f, \varphi_{\lambda_n}) + \mathrm{Res}(h/h_-; -\lambda_n)(f, \psi_{\lambda_n})\\ (f, \varphi_{\lambda_n})\sigma_n^{1,2} + (f, \psi_{\lambda_n})\sigma_n^{2,2} &= -\mathrm{Res}(h/h_+; -\lambda_n)(f, \varphi_{\lambda_n})\\ &\qquad -\mathrm{Res}(h/(h_+h_-); -\lambda_n)(f, \psi_{\lambda_n})\end{aligned}$$

さらにここで f が任意であることを考慮すると

$$\begin{aligned}&\sigma_n^{1,1} = \mathrm{Res}(h; -\lambda_n), \quad \sigma_n^{2,1} = \sigma_n^{1,2} = \mathrm{Res}(h/h_-; -\lambda_n),\\ &\sigma_n^{2,2} = \mathrm{Res}(-h/(h_+h_-); -\lambda_n)\end{aligned}$$

以上から，$\lambda_n, \sigma_n^{1,1}, \sigma_n^{1,2}(= \sigma_n^{2,1}), \sigma_n^{2,2}$ は $h, h/h_-, h/(h_-h_+)$ の極と留数を計算することにより得られることが分かった．

念のため，補足すると，λ が固有値でないときも上の議論は適用出来るので，

$$\begin{aligned}&0 = \mathrm{Res}(h; -\lambda), \quad 0 = \mathrm{Res}(h/h_-; -\lambda),\\ &0 = \mathrm{Res}(-h/(h_+h_-); -\lambda)\end{aligned}$$

が得られる．よって，λ が固有値でないとき，$-\lambda$ は $h, h/h_-, h/(h_-h_+)$ のいずれの極でもないことがわかる．

以上のように

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \frac{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}{h_+(\alpha)+h_-(\alpha)}, \\ \frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)} &= \frac{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}{h_+(\alpha)+h_-(\alpha)}, \\ \frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)} &= \frac{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}{h_+(\alpha)+h_-(\alpha)} \end{aligned}$$

は

$$\boxed{\begin{aligned} &(15.5)\ \frac{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}{h_+(\alpha)+h_-(\alpha)} = a_0+b_0\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n+\alpha}\right)\sigma_n^{1,1} \\ &(15.6)\ \frac{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}{h_+(\alpha)+h_-(\alpha)} = a_1+b_1\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n+\alpha}-\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+1}\right)\sigma_n^{1,2} \\ &(15.7)-\frac{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}{h_+(\alpha)+h_-(\alpha)} = a_2+b_2\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n+\alpha}-\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2+1}\right)\sigma_n^{2,2} \end{aligned}}$$

の表現をもち，ここに現れる $\lambda_n, \sigma_n^{j,k}$ が求めるものであることが分かった．

(14.5), (14.12), (14.11) と多少違うように見えるかもしれないが，我々の仮定のもとでは a_0, b_0, b_1, b_2 は実はいずれも 0 となるので，矛盾はない．積分や級数（を収束させるため）の補正項が多少違うように見えるが，$\lambda_n \geq 0$ のときは実質同じ（その差は定数項で吸収される）．いずれにしても極や留数の計算に影響しない．

内積の形でかくと次のようになる：
$\mathbb{C}$ 値の $f, g \in L^2(I, dm)$ $(I = [-\ell_-, \ell_+])$ の内積 (f, g) は次のように表せた．

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}(f, u_n)\overline{(g, u_n)}\sigma_n$$

ここで，u_n は $u_n(x) = \alpha_n\varphi_{\lambda_n}(x) + \beta_n\psi_{\lambda_n}(x)$ の形であるから

$$\begin{aligned} (15.8)\qquad (f,g) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(f,\varphi_{\lambda_n})\overline{(g,\varphi_{\lambda_n})}\sigma_n^{1,1}+(f,\varphi_{\lambda_n})\overline{(g,\psi_{\lambda_n})}\sigma_n^{1,2} \\ &+ (f,\psi_{\lambda_n})\overline{(g,\varphi_{\lambda_n})}\sigma_n^{2,1}+(f,\psi_{\lambda_n})\overline{(g,\psi_{\lambda_n})}\sigma_n^{2,2}\Big\} \end{aligned}$$

の形に展開できることがわかった．まとめると；

$$\sigma^{j,k}(\lambda) = \sum_{n;\lambda_n\leq\lambda}\sigma_n^{j,k} \quad (j,k=1,2)$$

と‘スペクトル行列’を定義し，また一般化された Fourier 変換を

$$\widehat{f}^{(1)}(\lambda)=\int_I f(x)\varphi_\lambda(x)dm(x),\quad \widehat{f}^{(2)}(\lambda)=\int_I f(x)\psi_\lambda(x)dm(x)\quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

で定義すると，(15.8) は積分形でつぎのようになる．

$$\boxed{(15.9)\qquad (f,g)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2}\left\{\widehat{f}^{(j)}(\lambda)\overline{\widehat{g}^{(k)}(\lambda)}d\sigma^{j,k}(\lambda)\right\}}$$

Hilbert–Schmidt 展開は次のようになる．$g(x)=G_\alpha f(x)$ の形にかける $g(x)$ について

$$(15.10)\qquad g(x)\ =\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\widehat{g}^{(1)}(\lambda_n)\varphi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{1,1}+\widehat{g}^{(2)}(\lambda_n)\varphi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{1,2}$$
$$+\widehat{g}^{(1)}(\lambda_n)\psi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{2,1}+\widehat{g}^{(2)}(\lambda_n)\psi_{\lambda_n}(x)\sigma_n^{2,2}\Big\}$$

積分形では

$$(15.11)\quad g(x)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\widehat{g}^{(1)}(\lambda)\varphi_\lambda(x)d\sigma^{1,1}(\lambda)+\widehat{g}^{(2)}(\lambda)\varphi_\lambda(x)d\sigma^{1,2}(\lambda)$$
$$+\widehat{g}^{(1)}(\lambda)\psi_\lambda(x)d\sigma^{2,1}(\lambda)+\widehat{g}^{(2)}(\lambda)\psi_\lambda(x)d\sigma^{2,2}(\lambda)\Big\}$$

16. 特異境界：片側の場合

つぎに境界が必ずしも正則でない場合を考えよう．原理を理解しやすくするため，この節ではとりあえず一番簡単な場合を扱い，一般の場合は次節以降で扱う．

左端は原点で，境界条件は正則・反射壁とする．一方，右端 ℓ_+ は特異（非正則），すなわち「 $\ell_+=\infty$ または $m(\ell_+-)=\infty$」の場合を考えよう．

このような場合はまず正則区間 $[0,b]$ $(0<b<\ell_+)$ で展開式を考えて，次に $b\uparrow\ell_+$ とする方針である．そのために，$[0,b]$ にて h_+ を考えるが，b と t に依存するので

$$h_+^{b,t}(\alpha)=\frac{\psi_{-\alpha}(b)+tD_s^+\psi_{-\alpha}(b)}{\varphi_{-\alpha}(b)+tD_s^+\varphi_{-\alpha}(b)}$$

とかくことにする．とくに吸収壁 $(t=0)$, 反射壁 $(t=\infty)$ のときをそれぞれ $h_+^{b,\min},h_+^{b,\max}$ とかこう．すなわち

$$h_+^{b,\min}(\alpha)=\frac{\psi_{-\alpha}(b)}{\varphi_{-\alpha}(b)},\quad h_+^{b,\max}(\alpha)=\frac{D_s^+\psi_{-\alpha}(b)}{D_s^+\varphi_{-\alpha}(b)}$$

である．$b\uparrow\ell_+$ とするための準備として：

補題 16.1. $\alpha > 0$ のとき，$\psi_{-\alpha}(x)/\varphi_{-\alpha}(x)$ は x について単調非減少であり，$D_s^+\psi_{-\alpha}(x)/D_s^+\varphi_{-\alpha}(x)$ は x について単調非増加．さらに

$$\frac{\psi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)} < \frac{D_s^+\psi_{-\alpha}(x)}{D_s^+\varphi_{-\alpha}(x)}, \quad x \in [0, \ell_+)$$

証明.

$$\frac{d}{ds(x)}\left(\frac{\psi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)}\right) = \frac{D_s^+\psi_{-\alpha}(x)\varphi_{-\alpha}(x) - \psi_{-\alpha}(x)D_s^+\varphi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)^2} = \frac{1}{\varphi_{-\alpha}(x)^2} > 0$$

同様に

$$d\left(\frac{D_s^+\psi_{-\alpha}(x)}{D_s^+\varphi_{-\alpha}(x)}\right) = \frac{-1}{(D_s^+\varphi_{-\alpha}(x))^2}dm(x) \leq 0.$$

また

$$\frac{D_s^+\psi_{-\alpha}(x)}{D_s^+\varphi_{-\alpha}(x)} - \frac{\psi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)} = \frac{W[\varphi_{-\alpha}, \psi_{-\alpha}](x)}{(D_s^+\varphi_{-\alpha}(x))\varphi_{-\alpha}(x)} = \frac{1}{(D_s^+\varphi_{-\alpha}(x))\varphi_{-\alpha}(x)} > 0 \tag{16.1}$$

□

よって，(16.1) でとくに $x = b$ とおいてみると

$$h_+^{b,\max}(\alpha) - h_+^{b,\min}(\alpha) = \frac{1}{\varphi_{-\alpha}(b)D_s^+\varphi_{-\alpha}(b)} \tag{16.2}$$

であるから $h_+^{b,\min}(\alpha) \leq h_+^{b,\max}(\alpha)$ であり，これからさらに（初等数学で）次がわかる．

$$h_+^{b,\min}(\alpha) \leq h_+^{b,t}(\alpha) \leq h_+^{b,\max}(\alpha) \quad (0 < t < \infty)$$

上の補題によれば，$b \uparrow \ell_+$ のとき，$h_+^{b,\min}(\alpha)$ は b について単調増大，$h_+^{b,\max}(\alpha)$ は単調減少なのでともに有限確定な極限をもつ．ところが（特異境界の場合は）この両極限が一致する．これをみるために (16.2) の右辺を調べてみよう．

$$\varphi_{-\alpha}(x) = 1 + \alpha\int_0^x ds(y)\int_0^y \varphi_{-\alpha}(y)dm(y) \geq \alpha\int_0^x m(u)ds(u)$$

と

$$D_s^+\varphi_{-\alpha}(x) = \alpha\int_0^x \varphi_{-\alpha}(u)dm(u) \geq \alpha m(x)$$

から，非正則（$s(\ell_+) = \infty$ または $m(\lambda_+ - 0) = \infty$）の仮定を考慮すると

$$(D_s^+\varphi_{-\alpha})(x)\varphi_{-\alpha}(x) \to \infty \quad (x \uparrow \ell_+)$$

が成り立つ．よって (16.2) の右辺は 0 に収束する．

以上から，特異境界のとき

$$h_+(\alpha) := \lim_{x\uparrow\ell_+} h_+^{b,t}(\alpha) \quad (\alpha > 0) \tag{16.3}$$

は存在し，$t \in [0,\infty]$ に依らない．そのようなわけで，以下では（$t=0$ と選ぶことにして）

$$h_+(\alpha) := \lim_{b\uparrow\ell_+} \uparrow h_+^{b,\min}(\alpha) \left(= \lim_{b\uparrow\ell_+} \uparrow \frac{\psi_{-\alpha}(b)}{\varphi_{-\alpha}(b)} \right) \quad (\alpha > 0)$$

を定義とする．実はこの定義は右端が正則の場合と整合している.（正則な場合は吸収壁の条件にみえるが，inextensible measure の考え方により，実は一般の場合（$t_+ \in [0,\infty]$）も含んでいる.）よって，右端が正則・非正則に関わらず，これを定義としてよい．なお，$\psi_{-\alpha}(x)/\varphi_{-\alpha}(x)$ の D_s^+ 微分は $1/\varphi_{-\alpha}(x)^2$ であるから

$$h_+(\alpha) = \int_0^{\ell_+} \frac{ds(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)^2} \quad (\alpha > 0)$$

ともかける．

上の議論から次のことも成り立つことに注意しておく（後で使う）.

$$h_+(\alpha) \le h_+^{b,\max}(\alpha) \quad (0 < \forall b < \ell_+) \tag{16.4}$$

さて，$[0,b]$ でのグリーン関数は $x \le y$ のとき

$$G_\alpha^b(x,y) = G_\alpha^b(y,x) = h_+^b(\alpha)\varphi_{-\alpha}(x)\left\{\varphi_{-\alpha}(y) - \frac{1}{h_+^b(\alpha)}\psi_{-\alpha}(y)\right\}$$

であった．ここで $b \uparrow \ell_+$ とすると $G_\alpha^b(x,y)$ の極限 $G_\alpha(x,y)$ は x,y 対称で，次で与えられる．

$$G_\alpha(x,y) = h_+(\alpha)\varphi_{-\alpha}(x)\left\{\varphi_{-\alpha}(y) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(y)\right\} \quad (x \le y) \tag{16.5}$$

言い換えると次の形である.（α は固定.）

$$G_\alpha(x,y) = \begin{cases} h(\alpha)u_1(x)u_2(y) & (y \le x) \\ h(\alpha)u_2(x)u_1(y) & (y < x) \end{cases}$$

ただし，ここで

$$u_1(x) = \varphi_{-\alpha}(x) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x), \quad u_2(x) = \varphi_{-\alpha}(x)$$

であるが，

$u_1(x), u_2(x)$ は $\mathcal{L}u = \alpha u$, $u(0)=1$ の解であり， $u_1(x)$ は非負非増加関数， $u_2(x)$ は $D_s^+ u(-0) = 0$ なる非負非減少関数である． $h(\alpha) = 1/W[u_1,u_2](0)\ \big(= h_+(\alpha)\big)$

また u_1, u_2 は上記性質で特徴づけられることを強調しておく．

このとき，$G_\alpha(x,y)$ は $[0,\ell_+)$ における（つぎの意味での）グリーン関数となる：$f(x)$ が連続で $[0,\ell_+)$ 内でコンパクト台をもつとき

$$G_\alpha f(x) = u(x)$$

は

$$(\alpha - \mathcal{L})u(x) = f(x), \quad D_s^+ u(-0) = 0, \quad u(x) : \text{bounded}$$

と同値（第 5 節参照）．

つぎにこのグリーン関数 $G_\alpha^b(x,y)$ の Mercer 式の展開を考えよう．

$$G_\alpha^b(x,y) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+^b(\lambda) \tag{16.6}$$

の展開が可能であったから，$b \uparrow \ell_+$ とすると既に述べたとおり，$h_+^b(\alpha) \to h_+(\alpha)$ により左辺は $G_\alpha^b(x,y) \to G_\alpha(x,y)$ である．右辺も

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+(\lambda)$$

の形の極限をもつであろうと推測できるので，それをみていこう．

まず，$h_+^b(\alpha)$ はスペクトル関数

$$\sigma_+^b(\lambda) := \sum_{\lambda_n^b \le \lambda} \sigma_n^b, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

を用いて

$$h_+^b(\alpha) = a + \int_0^\infty \frac{d\sigma_+^b(\lambda)}{\lambda+\alpha} \quad (s>0) \tag{16.7}$$

の表現ができた（σ_n^b という表記は σ_n の b 乗と紛らわしいので $\sigma_n^{(b)}$ とでもかくべきであるが，煩わしいので，このままにする）．$h_+^b(\alpha) \to h_+(\alpha)$, $(b \to \ell_+ -)$ であるが，$h_+^b(\alpha)$ が (16.7) の表現をもつので（一般論により），その極限 $h_+(\alpha)$ も同様に

$$h_+(\alpha) = a^* + \int_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+\alpha} \quad (\alpha>0)$$

の形であることがわかる（Appendix の定理 22.1）ここでは必要ないので証明しないが，結果的に実は $a^* = a$ である．$\sigma^b(\lambda)$ は階段関数であるが，その極限である $\sigma(\lambda)$ は必ずしもそうではないを強調しておく．また，(16.3) は

$$\sigma_+^b(\lambda) \to \sigma_+(\lambda) \quad (b \uparrow \ell_+) \tag{16.8}$$

が $\sigma_+(\cdot)$ の連続点で成り立つことも意味する（Appendix 参照）．グリーン関数とその展開についても同様であることをみていこう：(16.6) の両辺で $b \uparrow \ell_+$ とすると (16.8) により次をえる．

$$G_\alpha(x,y) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+(\lambda) \tag{16.9}$$

また，$[0,\ell_+)$ の中でコンパクト台をもつ連続関数 $f(x)$ についても

(16.10) $$G_\alpha^b f(x) = \int_0^\infty \frac{(f,\varphi_\lambda)\varphi_\lambda(x)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+^b(\lambda)$$

の展開が可能であったから，$b \uparrow \ell_+$ とすると

(16.11) $$G_\alpha f(x) = \int_0^\infty \frac{(f,\varphi_\lambda)\varphi_\lambda(x)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+(\lambda)$$

言い換えると，$g(x) = G_\alpha f(x)$ の形の $g(x)$ は次のように展開できる．

(16.12) $$g(x) = \int_0^\infty (g,\varphi_\lambda)\varphi_\lambda(x) d\sigma_+(\lambda)$$

[**註**]$\sigma_+^b(\lambda) \to \sigma_+(\lambda)$ から

$$\int_0^A \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+^b(\lambda) \longrightarrow \int_0^A \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+(\lambda)$$

は直ちに出るが，うるさいことを言うと，無限区間での積分について

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+^b(\lambda) \longrightarrow \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+(\lambda)$$

は自明ではない．

$$\lim_{A\to\infty} \limsup_{b\uparrow\ell_+} \left| \int_A^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+^b(\lambda) \right| = 0$$

を言う必要がある．これは補題 14.1 により，次を示すことに帰着される．

(16.13) $$\lim_{A\to\infty} \limsup_{b\uparrow\ell_+} G_A^b(x,x) = 0$$

そこで (16.13) を示そう．G_α^b の定義に使った $h^b(\alpha)$ については $h^b(\alpha) \le h^{b,max}(\alpha)$ であった．また，$h^{b,max}(\alpha)$ は b について単調非増加であったから $h^b(\alpha) \le h^{b_0,max}(\alpha)$ が $b \ge b_0$ でなりたつ．よって，x が与えられたとき $x < b_0$ なる b_0 を固定しておき

$$G_\alpha^b(x,x) = h^b(\alpha)\varphi_{-\alpha}(x)^2 - \varphi_{-\alpha}(x)\psi_{-\alpha}(x)$$

と組み合わせると，$b \ge b_0$ のとき

$$G_\alpha^b(x,x) \le h^{b_0,max}(\alpha)\varphi_{-\alpha}(x)^2 - \varphi_{-\alpha}(x)\psi_{-\alpha}(x) = G_\alpha^{b_0,ref}(x,x)$$

（この不等式は，対応する拡散過程を考えれば直感的にも成り立つべき式であることが分かる.）よって (16.13) を示すには b に依存しない式

$$\lim_{A\to\infty} G_A^{b_0,ref}(x,x) = 0$$

を示せばいいのであるが,（b_0 を固定しているので）これは $G_A^{b_0}(x,y)$ のスペクトル展開 (16.6) から明らかである．

同様に (16.11) のための極限操作も正当化できる．

$$\lim_{A\to\infty} \limsup_{b\uparrow\ell_+} \left| \int_A^\infty \frac{(f,\varphi_\lambda)\varphi_\lambda(x)}{\lambda+\alpha} d\sigma_+^b(\lambda) \right| = 0$$

をいえばいいが，

$$\left|\int_A^\infty \frac{(f,\varphi_\lambda)\varphi_\lambda(x)}{\lambda+\alpha}d\sigma_+^b(\lambda)\right| \le \int_0^\infty \frac{(f,\varphi_\lambda)^2}{\lambda+\alpha}d\sigma_+^b(\lambda)\int_A^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)^2}{\lambda+\alpha}d\sigma_+^b(\lambda)$$

であり，右辺第 1 因子は

$$\int_0^\infty \frac{(f,\varphi_\lambda)^2}{\lambda+\alpha}d\sigma_+^b(\lambda) = (G_\alpha^b f, f) \to (G_\alpha f, f) < \infty$$

で有界であり，従って残る右辺第 2 因子の評価が問題であるが，これは既に上記で扱っている．

以上をまとめると

$$h_+(\alpha) = \lim_{b\uparrow\ell_+} \uparrow \frac{\psi_{-\alpha}(b)}{\varphi_{-\alpha}(b)}, \quad \alpha > 0$$

と定義すると，h_+ は Lebesgue-Stieltjes 測度 $d\sigma_+(\lambda)$ を用いて

$$h_+(\alpha) = a^* + \int_0^\infty \frac{d\sigma_+(\lambda)}{\lambda+\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

の表現をもち，$G_\alpha(x,y)$ $(\alpha > 0)$ を (16.5) で定義すると次がなりたつ．

$$G_\alpha(x,y) = \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma_+(\lambda) \quad dm(x)dm(y) - a.e.$$

また，$g(x) = G_\alpha f(x)$ の形にかける $g(x)$ については次の展開ができる．

$$g(x) = \int_0^\infty (g,\varphi_\lambda)\varphi_\lambda(x)d\sigma_+(\lambda)$$

補足

(1) $g(x) = G_\alpha f(x)$ の形にかける $g(x)$ はどのような関数かといえば，$[0,\ell_+)$ でコンパクト台をもち $\mathcal{L}g$ が存在し，$D_s^+g(-0) = 0$ であればよい．実際，このとき $f(x) = (\alpha - \mathcal{L})g(x)$ とおけば $g(x) = G_\alpha f(x)$.

(2) (11.6) で $x = a := \inf\{\mathrm{Supp}(dm)\}$ を代入してみると，

$$G_\alpha(a,a)(= h_+(\alpha) - a) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda+\alpha}d\sigma_+(\lambda)$$

となるので，実は $a^* = a$ であることがわかる．

Hilbert-Schmidt 展開によれば，$\{\varphi_{\lambda_n}(x)/\|\varphi_{\lambda_n}\|\}$ は $L^2([0,b],dm)$ で完全正規直交系（C.O.N.S.）をなすので実数値 $f \in L^2([0,b],dm)$ について次の Parceval 等式が成り立つことは既に述べた．

(16.14)
$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(f,\varphi_{\lambda_n})|^2\sigma_n^b = \int_0^\infty |(f,\varphi_\lambda)|^2 d\sigma^b(\lambda)$$

よって $b\uparrow\ell_+$ としてみれば $[0,\ell_+)$ でコンパクト台をもつ L^2 関数については

$$\|f\|^2=\int_0^\infty|(f,\varphi_\lambda)|^2d\sigma(\lambda) \tag{16.15}$$

が成り立つことがわかる．この式は φ_λ による Fourier 変換

$$\widehat{f}(\lambda):=(f,\varphi_\lambda)\quad(\lambda\in[0,\infty))$$

を使ってかけば次のように通常の Fourier 変換でおなじみの **Parceval 等式**になる．

$$\boxed{\|f\|_{L^2(I,dm)}=\|\widehat{f}\|_{L^2([0,\infty),d\sigma)}}$$

厳密にいえば，(16.14) から (16.15) を導くのは自明ではない．$\sigma^b(\lambda)\to\sigma(\lambda)$ からは，$\sigma(\lambda)$ の任意の連続点 $A>0$ について

$$\int_0^A|(f,\varphi_\lambda)|^2d\sigma^b(\lambda)\to\int_0^A|(f,\varphi_\lambda)|^2d\sigma(\lambda)$$

は出てくるが，(16.15) を導くには次の評価を証明しなくてはならない．

$$\lim_{A\to\infty}\limsup_{b\uparrow\ell_+}\int_A^\infty|(f,\varphi_\lambda)|^2d\sigma^b(\lambda)=0 \tag{16.16}$$

通常の $\sin,\cos$ による Fourier 変換の場合を思い起こして欲しいのであるが，実はすべての L^2 関数について (16.15) を示す必要はなく，十分たくさんの f について成り立てばよい．よって f として，$\mathcal{L}$ が定義され，かつ $D_s^+f(-0)=0$ をみたし，$[0,\ell_+)$ 内にコンパクト台をもつものに限ることにする．このとき

$$(\mathcal{L}f,\varphi_{\lambda_n})=(f,\mathcal{L}\varphi_{\lambda_n})=\lambda_n(f,\varphi_{\lambda_n})$$

が成り立つ.（最初の等号はグリーンの公式（補題 7.1）による.）よって

$$\sum_{\lambda_n\ge A}|(f,\varphi_{\lambda_n})|^2\sigma_n^b=\sum_{\lambda_n\ge A}\frac{1}{\lambda_n^2}|(\mathcal{L}f,\varphi_{\lambda_n})|^2\sigma_n^b\le\frac{1}{A^2}\sum_{\lambda_n\ge A}|(\mathcal{L}f,\varphi_{\lambda_n})|^2\sigma_n^b$$

から

$$\sum_{\lambda_n\ge A}|(f,\varphi_{\lambda_n})|^2\sigma_n^b\le\frac{1}{A^2}\sum_{\lambda_n\ge 0}|(\mathcal{L}f,\varphi_{\lambda_n})|^2\sigma_n^b=\frac{1}{A^2}\|\mathcal{L}f\|^2$$

を得て，(16.16) が示される．

例 16.1. 第 6 節で扱った Bessel 過程について：

$$\varphi_{-\alpha}(x)=\big(\sqrt{2\alpha}/2\big)^{-\nu}\Gamma(\nu+1)x^{-\nu}I_\nu(x\sqrt{2\alpha})$$
$$\psi_{-\alpha}(x)=(1/2)\big(\sqrt{2\alpha}/2\big)^{\nu}\Gamma(-\nu)x^{-\nu}I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha})$$

であるから，

$$\frac{\psi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)}=C_\nu\,\alpha^\nu\frac{I_{-\nu}(x\sqrt{2\alpha})}{I_\nu(x\sqrt{2\alpha})}$$

ゆえに $x \to \infty$ として

$$h(\alpha) = C_\nu \alpha^\nu$$

Stieltjes 逆変換をすれば次をえる．

$$\sigma(\lambda) = \text{const } \cdot \lambda^{\nu+1}$$

$$G_\alpha(x,y) = \text{const. } (xy)^{-\nu} \int_0^\infty \frac{I_\nu(x\sqrt{2\lambda}) I_\nu(y\sqrt{2\lambda})}{\alpha+\lambda} \lambda^\nu d\lambda$$

Laplace 逆変換をとれば

$$p(t,x,y) = \text{const } \cdot (xy)^{-\nu} \int_0^\infty e^{-t\lambda} I_\nu(x\sqrt{2\lambda}) I_\nu(y\sqrt{2\lambda}) \lambda^\nu d\lambda$$

17. 特異境界：両側の場合

前節で片側の場合（$I = [0, \ell_+)$）を扱ったが，両側の場合もほぼ同様である．すなわち，まず $-\ell_- < a \leq 0 < b < \ell_+$ なる a, b をとってきて $[a, b]$ で考える．

$$h_+^b(\alpha) = \frac{\psi_{-\alpha}(b)}{\varphi_{-\alpha}(b)} \quad (\alpha > 0)$$

$$h_-^a(\alpha) = -\frac{\psi_{-\alpha}(a)}{\varphi_{-\alpha}(a)} \quad (\alpha > 0)$$

また $h^{a,b}(\alpha)$ を

$$\frac{1}{h^{a,b}(\alpha)} = \frac{1}{h_-^a(\alpha)} + \frac{1}{h_+^b(\alpha)}$$

で定義する．グリーン関数 $G_s^{a,b}(x,y)\,(x, y \in [a,b])$ は $x \leq y$ のとき

$$\begin{aligned} \text{(17.1)} \qquad G_\alpha^{a,b}(x,y) &= G_\alpha^{a,b}(y,x) \\ &= h^{a,b}(\alpha) \left\{ \varphi_{-\alpha}(x) + \frac{1}{h_-^a(\alpha)} \psi_{-\alpha}(x) \right\} \left\{ \varphi_{-\alpha}(y) - \frac{1}{h_+^b(\alpha)} \psi_{-\alpha}(y) \right\} \end{aligned}$$

であり，次のように展開された．

$$\begin{aligned} \text{(17.2)} \qquad G_\alpha^{a,b}(x,y) &= \sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{\varphi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha} \sigma_{n,a,b}^{1,1} + \frac{\varphi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha} \sigma_{n,a,b}^{1,2} \\ &+ \frac{\psi_{\lambda_n}(x)\varphi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha} \sigma_{n,a,b}^{2,1} + \frac{\psi_{\lambda_n}(x)\psi_{\lambda_n}(y)}{\lambda_n+\alpha} \sigma_{n,a,b}^{2,2} \Big) \end{aligned}$$

ここでスペクトル行列を

$$\sigma_{a,b}^{i,j}(\lambda) = \sum_{n; \lambda_n \leq \lambda} \sigma_{n,a,b}^{i,j} \quad (i, j = 1, 2)$$

とおくと

$$(17.3)\quad G_\alpha^{a,b}(x,y) = \int_0^\infty \Big(\frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_{a,b}^{1,1}(\lambda) + \frac{\varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_{a,b}^{1,2}(\lambda) + \frac{\psi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_{a,b}^{2,1}(\lambda) + \frac{\psi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha} d\sigma_{a,b}^{2,2}(\lambda) \Big)$$

と書き直せる．また，一般化された Fourier 変換を有界可測関数 f について

$$\widehat{f}^{(1)}(\lambda) = \int_a^b f(x)\varphi_\lambda(x)dm(x), \quad \widehat{f}^{(2)}(\lambda) = \int_a^b f(x)\psi_\lambda(x)dm(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

で定義すると $L^2([a,b],dm)$ での内積はつぎのように (15.9) の形になる．

$$(17.4)\qquad (f,g) = \int_{-\infty}^\infty \sum_{j,k=1}^2 \Big\{ \widehat{f}^{(j)} \overline{\widehat{g}^{(k)}} d\sigma_{a,b}^{j,k} \Big\}$$

また，Hilbet–Schmidt 展開は $g(x) = G_\alpha f(x)$ の形の g について

$$(17.5)\qquad g(x) = \int_{-\infty}^\infty \Big\{ \widehat{g}^{(1)}(\lambda)\varphi_\lambda(x)d\sigma_{a,b}^{1,1} + \widehat{g}^{(1)}(\lambda)\psi_\lambda(x)d\sigma_{a,b}^{2,1} + \widehat{g}^{(2)}(\lambda)\varphi_\lambda(x)d\sigma_{a,b}^{1,2} + \widehat{g}^{(2)}(\lambda)\psi_\lambda(x)d\sigma_{a,b}^{2,2} \Big\}$$

ここで (17.3) や (17.4)，(17.5) において $a \downarrow -\ell_-$, $b \uparrow \ell_+$ としたときどうなるかをみていこう．前節に示したように

$$h_+(\alpha) = \lim_{b\uparrow\ell_+} h_+^b(\alpha) = \lim_{x\uparrow\ell_+} \uparrow \frac{\psi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)} \quad (\alpha > 0)$$

が定義され，

$$h_-(\alpha) = \lim_{a\downarrow-\ell_-} h_-^a(\alpha) = \lim_{x\downarrow-\ell_-} \uparrow \frac{-\psi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)} \quad (\alpha > 0)$$

も同様に定義されるので，$h(\alpha)$ も次で定義する．

$$\frac{1}{h(\alpha)} = \frac{1}{h_+(\alpha)} + \frac{1}{h_-(\alpha)}$$

以上の話しは，両端が特異境界の場合が念頭にあるが，片側が正則の場合もそのまま適用可能である．

こうすると，(17.1) は $a \downarrow -\ell_-$, $b \uparrow \ell_+$ のとき

$$(17.6)\qquad G_\alpha(x,y) = G_\alpha(y,x) := h(\alpha)u_1(x)u_2(y) \quad (x \geq y)$$

に収束する．ここに

$$u_1(x) = \varphi_{-\alpha}(x) - \frac{1}{h_+(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x)$$
$$u_2(x) = \varphi_{-\alpha}(x) + \frac{1}{h_-(\alpha)}\psi_{-\alpha}(x)$$

であり，u_1 は非負非増加，u_2 は非負非減少な $\mathcal{L}u = \alpha u, u(0) = 1$ の解で，そのロンスキアンが $1/h(\alpha)$ である．

次に，スペクトル関数の収束をみよう．$\sigma^{i,j}_{a,b}(\lambda)$ は次でさだまった（(15.5), (15.6), (15.7) を参照）．

$$h^{a,b}(\alpha) = a + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda+\alpha}\sigma^{1,1}_{a,b}(\lambda)$$

$$\frac{h^{a,b}(\alpha)}{h^{a,b}_-(\alpha)} = \text{一次関数} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha+\lambda} - \frac{1}{1+\lambda}\right) d\sigma^{1,2}_{a,b}(\lambda)$$

$$-\frac{h^{a,b}(\alpha)}{h^{a,b}_-(\alpha)h^{a,b}_+(\alpha)} = \text{一次関数} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha+\lambda} - \frac{1}{1+\lambda}\right) d\sigma^{2,2}_{a,b}(\lambda)$$

これらの 3 式の左辺は $a \downarrow -\ell_-, b \uparrow \ell_+$ のときそれぞれ $h, h/h_-, h/(h_-h_+)$ に収束するので，その極限も

$$h(\alpha) = a + \int_0^\infty \frac{1}{\lambda+\alpha}\sigma^{1,1}(\lambda) \tag{17.7}$$

$$\frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)} = \text{一次関数} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha+\lambda} - \frac{1}{1+\lambda}\right) d\sigma^{1,2}(\lambda) \tag{17.8}$$

$$-\frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)h_+(\alpha)} = \text{一次関数} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha+\lambda} - \frac{1}{1+\lambda}\right) d\sigma^{2,2}(\lambda) \tag{17.9}$$

の表現をもち，さらにスペクトル関数 $\sigma^{1,2}_{a,b}(\lambda)$ は $\sigma^{1,2}(\lambda)$ に連続点での各点収束の意味で収束する．よって，(17.3) の両辺の極限をとると

$$\begin{aligned} G_\alpha(x,y) &= \int_0^\infty \Big(\frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{1,1}(\lambda) + \frac{\varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{1,2}(\lambda) \\ &+ \frac{\psi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{2,1}(\lambda) + \frac{\psi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{2,2}(\lambda)\Big) \end{aligned}$$

ただし，ここで無限区間の積分の意味は，厳密には

$$\begin{aligned} G_\alpha(x,y) &= \lim_{A\to\infty}\int_0^A \Big(\frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{1,1}(\lambda) + \frac{\varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{1,2}(\lambda) \\ &\quad + \frac{\psi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{2,1}(\lambda) + \frac{\psi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{2,2}(\lambda)\Big) \end{aligned}$$

である．したがって，上記での積分と極限の順序交換には

$$\begin{aligned} \lim_{A\to\infty}\limsup_{a\downarrow-\ell_-,b\uparrow\ell_+}\Big|\int_A^\infty \Big(&\frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{1,1}_{a,b}(\lambda) + \frac{\varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{1,2}_{a,b}(\lambda) \\ &+ \frac{\psi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{2,1}_{a,b}(\lambda) + \frac{\psi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{2,2}_{a,b}(\lambda)\Big)\Big| = 0 \end{aligned}$$

をいう必要があるが，これは片側のときと同様である．

まとめ

$t_\pm \in [0,\infty]$ のとき，

$$\begin{aligned}G_\alpha(x,y) &= \int_0^{\infty-}\Big(\frac{\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{1,1}(\lambda)+\frac{\varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{1,2}(\lambda)\\ &\quad +\frac{\psi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{2,1}(\lambda)+\frac{\psi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)}{\lambda+\alpha}d\sigma^{2,2}(\lambda)\Big)\quad(\alpha>0)\end{aligned}$$

の展開が可能であり，$\sigma^{i,j}(\lambda)$ は (17.7),(17.8),(17.9) で定まる．

なお，上記は 4 つの項の 和の積分 の形であることに再度注意しておく．これが 4 つの 積分の和 にバラせるかは別問題である（4 つの積分がそれぞれ収束するとまでは主張していない）．

補足

序で述べたとおり，$G_\alpha(x,y)$ は推移確率密度 $p(t,x,y)$ の Laplace 変換であったので，上記の展開式の逆変換を考えると次をえる：

$$\begin{aligned}p(t,x,y) &= \int_0^{\infty-} e^{-t\lambda}\Big(\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)d\sigma^{1,1}(\lambda)+\varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)d\sigma^{1,2}(\lambda)\\ &\quad +\psi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)d\sigma^{2,1}(\lambda)+\psi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)d\sigma^{2,2}(\lambda)\Big)\quad(t>0)\end{aligned}$$

とくに $x=y=0$ とおくとよく知られた次の公式を得る．

$$p(t,0,0)=\int_0^\infty e^{-t\lambda}\,d\sigma^{1,1}(\lambda)\quad(t>0)$$

例 17.1. $\mathcal{L}=d^2/dx^2$ を $-\infty<x<\infty$ で考える．すでに例 5.1 で扱ったとおり，$\alpha>0$ のとき $\mathcal{L}u=\alpha u$ の解のうち $u_1(x)=e^{-\sqrt{\alpha}x}$ は非負単調減少，$u_2(x)=e^{\sqrt{\alpha}x}$ は非負単調増大．両者のロンスキアンは 2 なのでグリーン関数は

$$G_\alpha(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,e^{-\sqrt{\alpha}|x-y|}$$

であり，Laplace 逆変換をとれば

$$p(t,x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-|x-y|^2/(4t)}$$

であった．ここで，スペクトル関数による展開を考えてみよう．

$$\varphi_{-\alpha}(x)=\cosh(\sqrt{\alpha}x),\quad \psi_{-\alpha}(x)=(1/\sqrt{\alpha})\sinh(\sqrt{\alpha}x)\quad(\alpha>0)$$

であるから

$$h_\pm(\alpha)=\lim_{x\to\infty}\frac{\psi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\quad(\alpha>0)$$

よって

$$h(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}},\quad \frac{h(\alpha)}{h_-(\alpha)}=\frac{1}{2},\quad -\frac{h(\alpha)}{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}=-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}$$

第 1 の式から $\sigma^{1,1}(\lambda)=(1/\pi)\sqrt{\lambda}$，第 2 の式から $\sigma^{1,2}(\lambda)=\alpha^{2,1}(\lambda)=0$ となる．$\sigma^{2,2}(\lambda)$ は

$$-\frac{h(\alpha)}{h_+(\alpha)h_-(\alpha)}\Big(=-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\Big)=\mathrm{const}+\int_0^\infty\left(\frac{1}{\alpha+\lambda}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)d\sigma^{2,2}(\lambda)$$

で決まるが，これから $\sigma^{2,2}(\lambda)$ を求めるには，両辺を微分して -1 を掛けると

$$\frac{1}{4\sqrt{\alpha}}=\int_0^\infty\frac{1}{(\alpha+\lambda)^2}d\sigma^{2,2}(\lambda)$$

となるので，

$$\sigma^{2,2}(\lambda)=\frac{1}{3\pi}\lambda^{3/2}\quad(\lambda>0)$$

とわかる．

この計算について補足する：公式

$$\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx=B(p,q)$$

から

$$\int_0^\infty\frac{1}{(\alpha+\lambda)^2}d\lambda^{3/2}=\frac{3\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

よって Hilbert–Schmidt の展開式は

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_{-\infty}^\infty\Big\{\left(\int_{-\infty}^\infty g(y)\cos(\sqrt{\lambda}y)dy\right)\cos(\sqrt{\lambda}x)d\sigma^{1,1}(\lambda)\\&\quad+\left(\int_{-\infty}^\infty g(y)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}y)}{\sqrt{\lambda}}dy\right)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}d\sigma^{2,2}(\lambda)\Big\}\\&=\int_{-\infty}^\infty\Big\{\left(\int_{-\infty}^\infty g(y)\cos(\sqrt{\lambda}y)dy\right)\cos(\sqrt{\lambda}x)\frac{1}{\pi}d\sqrt{\lambda}\\&\quad+\left(\int_{-\infty}^\infty g(y)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}y)}{\sqrt{\lambda}}dy\right)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{3\pi}d\sqrt{\lambda^3}\Big\}\end{aligned}$$

であるから，$\sqrt{\lambda}$ をあらためて λ とかいて整理すると

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,\cos(\lambda y)dy\right)\cos(\lambda x) \\ &\qquad + \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\sin(\lambda y)dy\right)\sin(\lambda x)\Big\}d\lambda \end{aligned}$$

同様に，グリーン関数の展開は

$$G_\alpha(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)\cos(\lambda y)+\sin(\lambda x)\sin(\lambda y)}{\alpha+\lambda^2}d\lambda \quad (\alpha>0).$$

Laplace 逆変換をとると

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\{\cos(\lambda x)\cos(\lambda y)+\sin(\lambda x)\sin(\lambda y)\}d\lambda \quad (t>0).$$

なお，被積分関数内の三角関数の積を和に直すと

$$\cos(\lambda x)\cos(\lambda y)+\sin(\lambda x)\sin(\lambda y) = \cos\lambda(x-y).$$

18. 一般展開定理

$(-\ell_-,\ell_+)$ の片側あるいは両側が特異境界としよう．便宜上，両側特異の場合だけをかく．$[a,b]\subset(-\ell_-,\ell_+)$ なる区間を考えると，この区間では第 15 節の Fourier 式（級数）展開が可能であり，そこで $a\downarrow -\ell_-, b\uparrow \ell_+$ としたときスペクトル関数が収束すれば，それを用いて $(-\ell_-,\ell_+)$ での展開定理が得られるわけである．そこでスペクトル関数の収束が問題となる．$[a,b]$ 区間でのスペクトル関数は

$$h_+^{b,t}(\alpha) = \frac{\psi_{-\alpha}(\ell_+)+t_+D_s^+\psi_{-\alpha}(\ell_+)}{\varphi_{-\alpha}(\ell_+)+t_+D_s^+\varphi_{-\alpha}(\ell_+)}$$

等を用いて計算できた．そして，前節では $t_a,t_b\in[0,\infty]$ であれば

$$(18.1)\qquad h_+(\alpha) := \lim_{b\uparrow\ell_+} h_+^{b,t_b}(\alpha), \quad h_-(\alpha) := \lim_{a\downarrow-\ell_-} h_-^{a,t_a}(\alpha) \quad (\alpha>0)$$

が t_a,t_b の選び方に依らない極限をもち，よってスペクトル関数の収束がいえた．しかし，そこでは t_a,t_b が非負という条件が効いて，スペクトルが非負の側しかないという事情がある．よって，条件 $t_a,t_b\in[0,\infty]$ を外すと状況が変わる．以下ではその場合の扱いを考えてみよう．ただし概説にとどめ細部には深入りしないことにする.（確率論的には $t_\pm\geq 0$ の場合が重要なので.）

t_a,t_b が非負という条件を外すとスペクトルが負の側にも出てくるので，スペクトルの収束を (18.1) のような $h_+^{b,t_b}(\alpha)$ の収束に帰着することができない．なぜなら $t_\pm\in[0,\infty]$ のとき $h_+^{b,t_b}(\alpha)$ 等は $\alpha>0$ の範囲で意味をもったが，$t_\pm<0$ のときはそうではないので (18.1) は一般には意味がなく，スペクトル関数の収束を考えるには，(8.5) でかいたように，α を複素数 z まで拡げて

$$(18.2)\qquad H_+^b(t_+;z) := \frac{\psi_z(b)+t_+D_s^+\psi_z(b)}{\varphi_z(b)+t_+D_s^+\varphi_z(b)}$$

を考える必要がある．これは z の関数として実軸を除く領域で正則であり，この関数の収束がスペクトル関数の収束と同値である（Appendix 参照）．よって $H_+^b(t_+;z)$ の $b\uparrow\ell_+$ のときの収束を問題とする．結論を先にかけば,「**適当な部分列を選べば**収束させることができ，極限関数から決まるスペクトル関数を使った Fourier 変換式展開が可能である」ということになる．なお，$H_-^b(t_-;z)$ も全く同様であるので，以下では $H_+^b(t_+;z)$ についてのみ記す.

$H_+^b(t_+;z)$ は既に述べたとおり，z については有理型関数であり，その極・零点はすべて実軸上にあった．よって $z\mapsto H_+^b(t_+;z)$ は $\{z\in\mathbb{C};\mathrm{Im}(z)>0\}$ で正則となり）,（上半平面を上半平面に写すので）次の表現をもつ.

(18.3)

$$H_+^b(t;z)=a^{b,t}+v^{b,t}z+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)d\sigma^{b,t}(\lambda),\quad a^{b,t}\in\mathbb{R},v^{b,t}\geq 0$$

上記のとおり，スペクトル関数の収束問題は，この $H_+^b(t;z)$ の $b\uparrow\ell_+$ のときの収束問題に帰着される．この収束問題の考え方を概説すると次のようになる．前節では（$\alpha>0$ を固定したとき）

> t が $[0,\infty)$ 上を動くとき，$h_+^{b,t}(\alpha)$ は閉区間に収まり，b が増えるに従ってこの区間は縮小し，$b\uparrow\ell_+$ としたとき 1 点に収縮した.
> よってその（t によらない）極限を $h_+(\alpha)$ と定義した.

同様なことを $H_+^b(t;z)$ について考えてみることにしよう．当然ながら，同様にいく部分といかない部分がでてくる：

$\mathrm{Im}(z_0)>0$ なる $z_0\in\mathbb{C}$ を 1 つ固定して，$H_+^b(t;z_0)$ を考える.

t が実軸上を動くとき，(18.2) は一次分数変換の形であるから，円を描く（関数論でよく知られたことである）.（定理 8.2 によればこの円は複素平面の上半面にある.）この円

$$C_{z_0}(b):=\{H_+^b(t;z_0);t\in(-\infty,\infty]\}$$

は $b\uparrow\ell_+$ のとき <u>内部に縮小していく</u>．この証明は後回しにして，事実と認めて話しを続けよう．$t_\pm\geq 0$ のときと異なり，その極限

$$C_{z_0}(\ell_+):=\lim_{b\uparrow\ell_+}C_{z_0}(b)$$

は残念ながら（？）1 点になるとは限らない．1 点になる場合（**極限点型**）と円になる場合（**極限円型**）に分かれる.（実は極限点型か極限円型かは dm で定まり，z_0 によらないことは次節で示すが，とりあえずここでは固定した z_0 に関する話しとしておく.）

まとめると,

> 円 $\{H_b(t;z_0);t\in\overline{\mathbb{R}}\}$ は $b\uparrow\ell_+$ のとき内部に縮小していく．その極限は円になる場合と，1 点になる場合がある.

極限円・極限点の問題は次節で議論することにして，以下で必要なことはいずれの場合も（z_0 を固定したとき）$\{H_b(t;z_0);t\in\overline{\mathbb{R}}\}$ は $b\uparrow\ell_+$ のとき有界にとどまるということである.

ここでとくに $z_0 = i$ とすると

$$\operatorname{Im} H_+^b(t;i)$$

は上記のとおり b, t について一様有界であるから次のことがわかる（Appendix 参照）．与えられた $b_n \uparrow \ell_+$ と $t_n \in \overline{\mathbb{R}}$ について，適当に部分列を選べば，ある Nevanlinna 関数

$$H_+(z) = a + vz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \right) d\sigma(\lambda), \quad a \in \mathbb{R}, v \geq 0 \tag{18.4}$$

に上半平面で（広義一様）収束させることができる．

部分列が選べることの背景を説明する．(8.9) で述べたとおり

$$H_+^b(z) = a^{(b)} + v^{(b)} z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1} \right) d\sigma_+^b(\lambda)$$

の形であるから

$$\operatorname{Im}(H_+^b(i)) = v^{(b)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_+^b(\lambda)}{\lambda^2+1}, \quad v^{(b)} \geq 0$$

なので，これが有界であれば，Helly の選出定理から $v^{(b)}$ と $\sigma_+^b(\lambda)$ が収束する部分列をもつことは容易にわかる．この部分列をとれば $H_+^b(z)$ も収束する．

さらに部分列を選べば同様に $H_-^{b_n}(t_n; z)$ についても同時に収束させることができる．こうして得られた 2 つの極限関数 $H_+(z), H_-(z)$ を用いて

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1}{H_+(z)} + \frac{1}{H_-(z)}$$

で $H(z)$ を定義し，

$$H^{1,1}(z) = H(z), \quad H^{1,2}(z) = H^{2,1}(z) = \frac{H(z)}{H_-(z)}, \quad H^{2,2}(z) = \frac{H(z)}{H_+(z)H_-(z)}$$

とおくと，対応するスペクトル測度は $d\sigma^{j,k}(\lambda)$ の連続点 $s < t$ で

$$\sigma^{j,k}((s,t]) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im}(H^{j,k}(x + i\varepsilon)) dx$$

と計算される（Appendix の定理 22.7 参照）．$H_{a,b}^{j,k}(\cdot)$（の部分列）が $H^{j,k}(\cdot)$ に収束するので，対応するスペクトル測度 $d\sigma_{a,b}^{j,k}(\lambda)$ も $d\sigma^{j,k}(\lambda)$ に収束する（$j, k = 1, 2$）．

こうして得られるスペクトル関数 $\sigma^{j,k}(\lambda)$ を用いて (15.11) 型の Fourier 式展開が可能となる．この展開定理および $\sigma^{j,k}(\lambda)$ の計算式を **Weyl–Stone–Titchmarsh–小平 の一般展開定理**という．

そのようなわけで，以下では先送りした問題を扱う．(18.2) について，（z を固定して）t_+ が実軸上を動くときに描く円とその内部のつくる円 $C_z(b)$ が $b \uparrow \ell_+$ につれて内部に縮小していくことの証明をみていこう．

まず，この円の中心と半径を求めるところから始める．
$A,B,C,D\in\mathbb{C}$ として，一次分数変換

$$\mathbb{C}\ni\xi\mapsto w=\frac{A+B\xi}{C+D\xi}\in\mathbb{C}$$

を考える．これは円を円に移す変換であるから，実軸の像は円となる．その中心とその原像はそれぞれ

$$w_c:=\frac{B\overline{C}-A\overline{D}}{D\overline{C}-\overline{D}C};\quad \xi_c:=-\overline{D}/\overline{C}$$

であり，半径は

$$r=\left|\frac{BC-AD}{D\overline{C}-\overline{D}C}\right| \tag{18.5}$$

である．

中心と半径を求めるには次のように考えるとよい．まず中心の求め方であるが，$-C/D$ は ∞ に移されるから，鏡像を考えると $-\overline{C}/\overline{D}$ は '∞ の鏡像' すなわち '円の中心' に移される．よって中心は $\xi_c:=-\overline{C}/\overline{D}$ の像である上記の w_c である．また，半径 r は，円の中心 w_c と円上の任意の一点（例えば $z=0$ の像 A/C）との距離であるから

$$r=\left|\frac{B\overline{C}-A\overline{D}}{D\overline{C}-\overline{D}C}-\frac{A}{C}\right|=\left|\frac{BC-AD}{D\overline{C}-\overline{D}C}\right|$$

となり (18.5) が得られる．

さて，$b\in(0,\ell_+)$ と虚数 z $(\mathrm{Im}(z)>0)$ をそれぞれ固定して，一次分数変換

$$\mathbb{C}\ni\xi\mapsto H_b(\xi;z):=\frac{\psi_z(b)+\xi D_s^+\psi_z(b)}{\varphi_z(b)+\xi D_s^+\varphi_z(b)} \tag{18.6}$$

を考えると，ξ が実軸上を動くとき，その像

$$C_z(b)=\left\{\frac{\psi_z(b)+tD_s^+\psi_z(b)}{\varphi_z(b)+tD_s^+\varphi_z(b)};\,t\in\mathbb{R}\right\}$$

の半径 $r=r(z,b)$ は (18.5) より

$$r=\left|\frac{W[\varphi_z,\psi_z](b)}{W[\varphi_z,\overline{\varphi_z}](b)}\right|$$

であるが，分子は 1 なので結局

$$r=\left|\frac{1}{W[\varphi_z,\overline{\varphi_z}](b)}\right|=\frac{1}{2|\mathrm{Im}(z)|\int_0^b|\varphi_z(x)|^2dm(x)} \tag{18.7}$$

ただし，ここで最後の等号はグリーンの公式（7.2）による．

よって，$\varphi_z\in L^2([0,\ell_+),dm)$ であれば $b\uparrow\ell_+$ のとき $r\to c\,(>0)$ となり極限円である．また $\varphi_z\notin L^2([0,\ell_+),dm)$ のとき $r\to 0$ となり，極限点となる．まとめると；

系 18.1. $\mathrm{Im}(z) > 0$ とする．極限円になるための必要十分条件は

$$\varphi_z \in L^2([0, \ell_+); dm)$$

である．

（**註：** この条件は z を固定しての話しであるが，z によらないことが次節で示される.）

さて，上では $b \uparrow \ell_+$ のとき円の半径は小さくなっていくことを示したが，じつは内部に縮んでいくことの証明にはもう少し議論が必要である．そのためには，円の内部，外部の特徴付けが必要であるから，それをみていこう．(18.6) の対応では，実軸が上記の円 $C_b(z)$ の円周に移るので，上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{\xi; \mathrm{Im}(\xi) > 0\}$ はこの円の内部全体か外部全部のどちらかに対応するはずであるが，次にしめすとおり，Im(z) > 0 のとき内部の方に対応する．言い換えると，

> w が円の内部にあるための必要十分条件は $w = H_b(\xi; z)$ としたとき $\mathrm{Im}(\xi) > 0$.

定理 18.1. $\mathrm{Im}(z) > 0$ なる z を固定する．

$$\xi \leftrightarrow w = H_b(\xi; z)$$

の対応で実軸は上記の円周に，上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{\xi; \mathrm{Im}(\xi) > 0\}$ は円の内部に対応する．

また，$w \in \mathbb{C}$ が円の内部にある必要十分条件は

$$\int_0^b |w\varphi_z(x) - \psi_z(x)|^2 dm(x) < \frac{\mathrm{Im}(w)}{\mathrm{Im}(z)}.$$

$w \in \mathbb{C}$ が円周上にある必要十分条件は

$$\int_0^b |w\varphi_z(x) - \psi_z(x)|^2 dm(x) = \frac{\mathrm{Im}(w)}{\mathrm{Im}(z)}.$$

証明. すでに述べたとおり，上半面と下半面はそれぞれ円の内部か外部のどちらかに対応するわけであるから，下半面のある１点が円の外部に移されることを言えば，上半面は円の内部に移ることになる．そこでその１点として $\xi_0 := -\varphi_z(b)/D_s^+\varphi_z(b)$ を選ぶ．これは下半面にある（(3.3) 参照）．ξ_0 の像 $H_b(\xi_0; z)$ は ∞ であるが，∞ は明らかに円の外部である．よって，下半平面は円の外部に，上半平面は円の内部に対応することがわかった．

後半を示す．w が円の内部にある条件は

$$w = H_b(\xi; z)$$

の対応において $\mathrm{Im}(\xi) > 0$ であることを前半で示した．よって $\mathrm{Im}(\xi)$ を計算してみよう．まず ξ を w で表すと

$$\xi = -\frac{w\varphi_z(b) - \psi_z(b)}{wD_s^+\varphi_z(b) - D_s^+\psi_z(b)}$$

であるから，この ξ について $\mathrm{Im}(\xi) > 0$ を示せばよい．そのために $f_w(x) = w\varphi_z(x) - \psi_z(x)$ とおくと

$$\xi = -\frac{f_w(b)}{D_s^+ f_w(b)}$$

の形であるから $\mathrm{Im}(\xi)$ は次のように計算できる．

$$\mathrm{Im}(\xi) = \frac{1}{2i}\left(-\frac{f_w(b)}{D_s^+ f_w(b)} + \overline{\left\{\frac{f_w(b)}{D_s^+ f_w(b)}\right\}}\right) = \frac{-1}{2i}\frac{W[f_w, \overline{f_w}](b)}{|D_s^+ f_w(b)|^2}$$

右辺の分子についてはグリーンの公式 (7.3) から

$$\begin{aligned} W[f_w, \overline{f_w}](b) &= W[f_w, \overline{f_w}](0) + 2i\mathrm{Im}(z)\int_0^b |f_w(x)|^2 dm(x) \\ &= -2i\mathrm{Im}(w) + 2i\mathrm{Im}(\lambda)\int_0^b |f_w(x)|^2 dm(x) \end{aligned}$$

であるから，結局

$$\mathrm{Im}(\xi) = \frac{1}{|D_s^+ f_w(b)|^2}\left\{\mathrm{Im}(w) - \mathrm{Im}(z)\int_0^b |f_w(x)|^2 dm(x)\right\} \tag{18.8}$$

である．よって問題の条件 $\mathrm{Im}(\xi) > 0$ は次と同値であることがわかる．

$$\mathrm{Im}(w) > \mathrm{Im}(z)\int_0^b |f_w(x)|^2 dm(x)$$

よって定理の後半の主張が証明された．(定理の最後の部分は上記の不等号を等号に置き換えればよい.) □

ここで話しをもとに戻す．定理 18.1 によれば $b < b'$ のとき $C_b(z) \supset C_{b'}(z)$ がわかるので b を増やすと $C_b(z)$ が内部に縮小していくことがわかった．

まとめ

$$H_+^b(t; z) := \frac{\psi_z(b) + tD_s^+\psi_z(b)}{\varphi_z(b) + tD_s^+\varphi_z(b)}, \quad H_-^a(t; z) := -\frac{\psi_z(a) - tD_s^+\psi_z(a)}{\varphi_z(a) - tD_s^+\varphi_z(a)}$$

とおくと，t, b について適当に部分列を選べば $b \uparrow \ell_+, a \downarrow -\ell_-$ のときこれらを収束させることが出来る．収束先を $H_+(z), H_-(z)$ とすると，これらから決まるスペクトル関数による (17.4) や (17.5) 型の展開が可能である．

極限関数 $H_+(z), H_-(z)$ について一意性が成り立つかどうか（極限円か極限点か）の問題は次節で議論するが，準備として定理 18.1 からすぐわかることを系として下に述べておく．

系 18.2. $\mathrm{Im}(z) > 0$ なる z を固定する．

(1) $\mathcal{L}u = -zu$ の非自明解で $u \in L^2([0, \ell_+); dm)$ なるものが少なくとも *1* つ存在する．

(2) 極限円（$\varphi_z \in L^2$）の場合は，$\mathcal{L}u = -zu$ の解はすべて $L^2([0, \ell_+); dm)$ に属す．

(3) 極限点（$\varphi_z \notin L^2$）の場合は，$\mathcal{L}u = -zu$ の非自明解で $L^2([0, \ell_+); dm)$ に属すものは定数倍を除いてただ *1* つである．

証明. (1) $C_b(z)$ の $b \to \ell_+$ の極限（円または点）の中から 1 点 w_0 を選べば，すべての $\mathbb{C}_b(z)$ の中にあるから，任意の $0 < b < \ell_+$ について

$$\int_0^b |w_0\varphi_z(x) - \psi_z(x)|^2 dm(x) < \frac{\mathrm{Im}(w)}{\mathrm{Im}(z)}.$$

となる．よって $u = w_0\varphi_z - \psi_z$ が (1) で求めるものである．極限円の場合は，w_0 の選び方が 2 つ以上あるから，一次独立な L^2 解が 2 つ以上ある．任意の解はそれらの一次結合で表せるからすべて L^2 に属す．よって (2) がわかる．最後に (3) を示す．もし 2 つあれば，(2) のときと同じ議論ですべての解が L^2 に属し，従ってとくに $\varphi_z \in L^2$ となり，極限点という仮定に反する． □

19. Weyl による境界の分類：極限円と極限点

この節ではつぎのことを証明する．

定理 19.1. $L^2 = L^2([0, \ell_+); dm)$ において次の *4* 条件は互いに同値.

(1) $\varphi_{\lambda_0} \in L^2 \quad (\exists \lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$

(2) $\varphi_{\lambda_0}, \psi_{\lambda_0} \in L^2 \quad (\exists \lambda_0 \in \mathbb{C})$

(3) $\varphi_\lambda, \psi_\lambda \in L^2 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C})$

(4) $\varphi_0, \psi_0 \in L^2$

よって**前節の極限円・極限点の定義は** $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ **によらない**ことになる．また，(4) では $\varphi_0(x) = 1, \psi_0(x) = s(x) - s(0)$ であるから，つぎのことがわかる．

系 19.1. 特異境界 ℓ_+ が極限円型であるための必要十分条件は

$$\int_0^{\ell_+} \{1 + \big(s(x) - s(0)\big)^2\} dm(x) < \infty \tag{19.1}$$

よってとくに $m(\ell_+) < \infty$ は必要条件である．

じつは $s(x)$ が単調増加であることを考慮すれば，(19.1) の被積分関数の 1 はなくても同じであるが，あったほうが分かりやすい．

補足　(19.1) は 0 が正則という前提である．そうでない場合は適当な正則点 c を起点として次のように読み直す．

$$\int_c^{\ell_+} \{1 + \big(s(x) - s(c)\big)^2\} dm(x) < \infty$$

注意 19.1. (1) $s(\ell_+) < \infty$ の場合は極限点だけである．なぜなら極限円のときは $m(\ell_+) < \infty$ が必要条件であるから，もし $s(\ell_+) < \infty$ も成り立てば正則境界になってしまう．
(2) よって極限円型の場合は必然的に $s(\ell_+) = \infty$ かつ $m(\ell_+) < \infty$ である．確率論的には $s(\ell_+) = \infty$ は再帰的であることを意味し，$m(\ell_+) < \infty$ は正再帰的であることを意味する．また，極限円の場合は

$$\int_0^{\ell_+} (s(x) - s(0))dm(x) < \infty$$

であるから流入境界である．しかし，流入境界は極限円とは限らないので，極限円型の境界は「正則に近い流入境界」といえる．

例 19.1. 第 6 節で扱った ρ-次元 Bessel 過程の右境界 ∞ を考える．$dm(x) = 2x^{\rho-1}dx$ であるから $\rho \geq 0$ のとき $m(\infty) = \infty$ である．よって先の注意によれば極限点型の特異境界である．$\rho < 0$ のときも $s(x)^2 = \mathrm{const} \cdot x^{4-2\rho}$ を dm で積分してみると発散するのでやはり極限点.
　左境界 0 を考える．$0 < \rho < 2$ のとき正則である．$2 \leq \rho < 4$ のとき極限円となり，それ以外では極限点である．

　以下，定理 19.1 の証明をする．
　(1)⇒(2) は既に系 18.2(2) で示されている．つぎに (2)⇒(3) をみていく．$\varphi_\lambda(x)$ は λ について整関数であるから，λ_0 の周りで

$$\varphi_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k u_k(x) \tag{19.2}$$

と展開できる．$u_0(x) = \varphi_{\lambda_0}(x)$ である．上記の両辺に $-\mathcal{L}$ をほどこすと

$$\lambda\varphi_\lambda(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{L}u_k(x) \tag{19.3}$$

(少し乱暴な議論にみえるかもしれないが，下で u_k を具体的に計算するので，気になる人はそちらから出発すればよい.)
　一方，(19.2) の両辺に λ をかけると

$$\lambda\varphi_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\lambda - \lambda_0)^k u_k(x) \tag{19.4}$$

よって (19.3) と (19.4) の λ^n の係数を比較して

$$-\mathcal{L}u_n(x) = \lambda_0 u_n(x) + u_{n-1}(x) \quad (n \geq 1) \tag{19.5}$$

また，初期値は $\varphi_\lambda(0) = 1, D_s^+\varphi_\lambda(0) = 0$ により

$$u_n(0) = D_s^+ u_n(-0) = 0 \quad (n \geq 1)$$

と定まる．ここで補題 5.3 を使うと

$$K(x,y) = K(\lambda_0; x,y) = \varphi_{\lambda_0}(x)\psi_{\lambda_0}(y) - \varphi_{\lambda_0}(y)\psi_{\lambda_0}(x)$$

を使って

$$u_n(x) = \int_0^x K(x,y)u_{n-1}(y)\,dm(y) \quad (n \geq 1) \tag{19.6}$$

と具体的に定まる．なお，定義から

$$u_0(x) = \varphi_{\lambda_0}(x)$$

であるから，仮定は $\|u_0\| < \infty$ とかける．ただし $\|\cdot\|$ は $L^2([0,\ell_+); dm)$ ノルムである．

$\|u_n\|$ の評価をしよう．

$$p(x) = \int_0^x |K(x,y)|^2\,dm(y), \quad P(x) = \int_0^x p(y)\,dm(y)$$

とおくと

$$\begin{aligned}
P(\ell_+) &= \int_0^{\ell_+}\Big(\int_0^x |K(x,y)|^2\,dm(y)\Big)dm(x) \\
&\leq \int_0^{\ell_+}\Big(\int_0^{\ell_+} |K(x,y)|^2\,dm(y)\Big)dm(x) \\
&\leq 2\int_0^{\ell_+}\int_0^{\ell_+} |\varphi_{\lambda_0}(x)\psi_{\lambda_0}(y)|^2 + |\varphi_{\lambda_0}(y)\psi_{\lambda_0}(x)|^2\,dm(y) \\
&\leq 2\{\|\psi_{\lambda_0}\|^2\cdot\|\varphi_{\lambda_0}\|^2 + \|\varphi_{\lambda_0}\|^2\cdot\|\psi_{\lambda_0}\|^2\} = 4\|\psi_{\lambda_0}\|^2\cdot\|\varphi_{\lambda_0}\|^2
\end{aligned}$$

であるから $\|\psi_{\lambda_0}\|, \|\varphi_{\lambda_0}\| < \infty$ の仮定から

$$P(\ell_+) < \infty \tag{19.7}$$

つぎに

$$|u_n(x)|^2 \leq \frac{\|u_0\|^2}{(n-1)!}p(x)P(x)^{n-1}(n \geq 1) \tag{19.8}$$

が成り立つことをみていこう．$n = 1$ のときは

$$\begin{aligned}
|u_1(x)|^2 &= \left|\int_0^x K(x,y)u_0(y)\,dm(y)\right|^2 \\
&\leq \int_0^x |K(x,y)|^2 dm(y)\int_0^x |u_0(y)|^2\,dm(y) \leq p(x)\|u_0\|^2
\end{aligned}$$

また n まで成立すると仮定すると

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1}(x)|^2 &= \left|\int_0^x K(x,y)u_n(y)\,dm(y)\right|^2 \\
&\le \int_0^x |K(x,y)|^2 dm(y) \int_0^x |u_n(y)|^2\,dm(y) \\
&\le p(x)\int_0^x \frac{\|u_0\|^2}{(n-1)!}p(y)P(y)^{n-1}\,dm(y) = \frac{\|u_0\|^2}{n!}p(x)P(x)^n
\end{aligned}
$$

よって n まで仮定すると $n+1$ でも成り立つ.

ここで (19.8) を $dm(x)$ で積分すると

$$
\|u_n\|^2 \le \frac{\|u_0\|^2}{(n-1)!}P(\ell_+)^{n-1} \quad (n\ge 2) \tag{19.9}
$$

なお, $P(\ell_+)<\infty$ であったことに注意 ((19.7) 参照).

この評価式 (19.9) からわかることは, 展開式 (19.2) は $L^2([0,\ell_+);dm)$ での収束にもなっており, かつ収束半径は無限大である.

以上で (1)⇒(2)⇒(3) が示されたが, (3)⇒(1) は自明であるから (1)(2)(3) の同値性が示された. 残るは (4) であるが, (4)⇒(2) は自明である. また (3)⇒(4) も自明である. □

まとめ

> ℓ_+ が特異境界のとき
>
> $$\int_c^{\ell_+}\left\{1+\big(s(x)-s(c)\big)^2\right\}dm(x)<\infty$$
>
> であれば $H_+(z)$ は存在するが一意に定まらない (極限円型). 積分が発散するときは $H_+(z)$ は一意に定まる (極限点型). $-\ell_-$ でも同様.

20. DUAL 作用素について

与えられた

$$
\mathcal{L} = \frac{d}{dm(x)}\frac{d^+}{ds(x)} \quad (0<x<\ell) \tag{20.1}
$$

について $s(x)$ と $m(x)$ を入れ替えた

$$
\mathcal{L}^* = \frac{d}{ds(x)}\frac{d^+}{dm(x)} \quad (0<x<\ell) \tag{20.2}
$$

を $\mathcal{L}$ の **dual** 作用素という. すなわち $m^*(x):=s(x), s^*(x):=m(x)$ とおいて

$$
\mathcal{L}^* = \frac{d}{dm^*(x)}\frac{d^+}{ds^*(x)}
$$

を考える.

右端が正則の場合は境界条件が必要であるが, $\mathcal{L}$ が反射壁なら $\mathcal{L}^*$ には吸収壁の条件を, また $\mathcal{L}$ が吸収壁なら $\mathcal{L}^*$ には反射壁の条件を与える．弾性壁の場合は inextensible の考えにより吸収壁の場合に帰着.

$\mathcal{L}^*$ に対応する基本系を求めてみよう．$\mathcal{L}$ に対する基本解系が $\{\varphi_\lambda, \psi_\lambda\}$ であれば $\mathcal{L}^*$ に対する基本解系 $\{\varphi_\lambda^*, \psi_\lambda^*\}$ は

$$\varphi_\lambda^* = D_s\psi_\lambda, \quad \psi_\lambda^* = (-1/\lambda)D_s\varphi_\lambda \tag{20.3}$$

であたえられる．実際,

$$\psi_\lambda(x) = s(x) - \lambda\int_{-0}^x ds(y)\int_0^y \psi_\lambda(u)\,dm(u)$$

から

$$D_s\psi_\lambda(x) = 1 - \lambda\int_{-0}^x \psi_\lambda(u)\,dm(u) = 1 - \lambda\int_{-0}^x\left(\int_{-0}^u D_s\psi_\lambda(y)ds(y)\right)dm(u)$$

をえるので $\varphi_\lambda^* = D_s\psi_\lambda$．$\psi_\lambda^* = (-1/\lambda)D_s\varphi_\lambda$ も同様である.

このことから次をえる.

定理 20.1. $h_+(\alpha)$ が $\mathcal{L}$ に対応するならば $\mathcal{L}^*$ に対応するのは

$$h^*(\alpha) := \frac{1}{\alpha h(\alpha)}, \quad \alpha > 0.$$

証明. 右端が正則の場合，$\mathcal{L}$ が反射壁のときは $\mathcal{L}^*$ は吸収壁とする約束であるから

$$h(\alpha) = \frac{D_s\psi_{-\alpha}(\ell)}{D_s\varphi_{-\alpha}(\ell)}, \quad h^*(\alpha) = \frac{\psi_{-\alpha}^*(\ell)}{\varphi_{-\alpha}^*(\ell)}.$$

よって (20.3) から明らか.

$\mathcal{L}$ の右端が正則で吸収壁のときは $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}$ に注意して $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}^*$ の役割を入れ替えれば上記の場合に帰着される．また，弾性壁の場合は inextensible measure の考えにより吸収壁の場合に含まれる.

残るは右端が特異境界のときであるが，このときは

$$h(\alpha) = \lim_{x\to\ell}\frac{D_s\psi_{-\alpha}(x)}{D_s\varphi_{-\alpha}(x)} = \lim_{x\to\ell}\frac{\psi_{-\alpha}(x)}{\varphi_{-\alpha}(x)}$$

であり，$h^*(\alpha)$ についても同様であるから上記の正則の場合と同じである． □

21. M. G. Krein の対応とその性質

単調非減少で右連続な関数 $m : [0,\infty) \to [0,\infty]$ を **Krein's string** といい, 以下ではそのような関数全体を $\mathcal{M}$ であらわす．値域は $+\infty$ を含むことに注意.

ただし, 恒等的に 0 または ∞ の関数は（とりあえず）除外するものとする．Krein's string m について

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dm(x)}\frac{d^+}{dx} \qquad (0 \le x < \ell) \tag{21.1}$$

を考えよう．前節までと違いスケール関数は $s(x) = x$ （natural scale）に固定している．ここに $\ell = \sup\{x \ge 0 | m(x) < \infty\}$ である．$m(\ell - 0) + \ell < \infty$ のときは右端で境界条件が必要であるが, すでに述べた「inextensible measure」の考えにより m に吸収されている．

string $m \in \mathcal{M}$ が与えられたとき $\psi_{-\alpha}(x), \varphi_{-\alpha}(x)$ や

$$h(\alpha) := \lim_{b \uparrow \ell} \uparrow \frac{\psi_{-\alpha}(b)}{\varphi_{-\alpha}(b)} = \int_0^{\ell-0} \frac{dx}{\varphi_{-\alpha}(x)^2} \quad (\alpha > 0)$$

を前節までと同様に定義する．なお，$x \ge \ell$ のとき $\varphi_{-\alpha}(x) = \infty$ と約束すれば

$$h(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{\varphi_{-\alpha}(x)^2} \quad (\alpha > 0) \tag{21.2}$$

ともかける．前節までに説明したとおり $h(\alpha)$ は

$$h(\alpha) = a + \int_{-0}^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\alpha + \lambda}, \quad \left(a \ge 0, \int_{-0}^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{1 + \lambda} < \infty\right)$$

の表現をもつ．そこで, このような表現を持つ関数全体を $\mathbb{H}$ であらわすと次の重要定理が成り立つ.

定理 21.1 (Krein の対応).
$m \in \mathcal{M}$ と $h \in \mathbb{H}$ の対応は 1 対 1 かつ上への対応である．

残念ながら証明は本稿の手に余るので他の文献を参照してほしい.

なお,

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dm(x)}\frac{d^+}{dx}$$

の dual 作用素は

$$\mathcal{L}^* = \frac{d}{dx}\frac{d^+}{dm(x)}$$

であるが，natural scale になおすと

$$\mathcal{L}^* = \frac{d}{dm^{-1}(x)}\frac{d^+}{dx}$$

となるので $m^*(x) := m^{-1}(x)$ を **dual string** という．このとき，前節で説明したとおり,

Krein の対応において, $m(x)$ に $h(s)$ が対応するならば $m^{-1}(x)$ には $h^*(s) := \dfrac{1}{sh(s)}$ が対応する.

例 21.1. $a \geq 0, 0 < b \leq \infty$ のとき

$$m(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,a) \\ b, & x \in [a,\infty) \end{cases}$$

に対応するのは

$$h(s) = a + \frac{1}{bs}$$

dual を考えると

$$m^*(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ b, & x \in (0,b) \\ \infty, & x \in [b,\infty) \end{cases}$$

のとき

$$h^*(s) = \frac{1}{s(a + 1/(bs))}$$

なお, 補足すると, とくに $a = 0$, $b > 0$ のとき, すなわち $m(x) = b(\forall x > 0)$ のとき $h(s) = 1/(bs)$.

> [**註**] $m(x)$ として恒等的に 0 または $+\infty$ の関数は $\mathcal{M}$ に含めないとしたが, 含めることも可能である. その場合は上記の例において $m(x) = b(\forall x > 0)$ の極限のケースとして理解すればよく, 対応する $h(s)$ は各々恒等的に ∞ と 0 である.

補題 21.1 (I. S. Kac の不等式). $h \in \mathbb{H}$ が $m \in \mathcal{M}$ に対応するとき

$$\frac{1}{s\,m(x) + (1/x)} \leq h(s) \leq x + \frac{1}{s\,m(x)}, \quad s, x > 0.$$

証明. $a > 0$ とする. $\varphi_{-s}(x) \geq 1$ であり, また

$$\varphi'_{-s}(x) = s\int_0^x \varphi_{-s}(u)dm(u)$$

であったから, $x \geq a$ のとき

$$\varphi'_{-s}(x) \geq s\int_0^a \varphi_{-s}(u)dm(u) = s\,m(a)$$

よって

$$\varphi_{-s}(x) \le \begin{cases} 1 & (0 \le x) \\ 1 + s\,m(a)(x-a) & (x > a) \end{cases}$$

よって

$$h(s) = \int_0^\infty \frac{dx}{\varphi_{-s}(x)^2} \le a + \int_a^\infty \frac{dx}{\{1 + s\,m(a)(x-a)\}^2} = a + \frac{1}{s\,m(a)}$$

つぎに下からの評価であるが，m^* について上からの評価を使うと

$$\frac{1}{sh(s)}\,(= h^*(s)) \le y + \frac{1}{s\,m^{-1}(y)}$$

よって

$$h(s) \ge \frac{1}{sy + (1/(m^{-1}(y))}$$

ここで $y = m(x)$ とおいてみよ． □

定理 21.2 (Krein の対応の両連続性)． $h_n \in \mathbb{H}$ が $m_n \in \mathcal{M}\,(n = 1, 2, \dots)$ に対応し，$h \in \mathbb{H}$ が $m \in \mathcal{M}$ に対応するとき次は同値：
(i) m のすべての連続点で $\lim_{n\to\infty} m_n(x) = m(x)$
(ii) $\lim_{n\to\infty} h_n(s) = h(s) \quad (\forall s > 0)$

[**補足**] $m(x) \equiv \infty$ や $m(x) \equiv 0$ の場合でも $m(x) \equiv 0$ に $h(s) \equiv \infty$ が対応し，$m(x) \equiv \infty$ に $h(s) \equiv 0$ が対応しているものと約束すれば上記の定理は成り立つ．Kac の不等式を使えばよい．

証明． (i)⇒(ii)

m_n に対応する $\varphi_{-s}(x)$ を $\varphi_{-s}^{(n)}(x)$ とする．区間 $[0, A]\,(0 < A < \ell)$ で一様に有界であり，導関数も同様であるから $\{\varphi_{-s}^{(n)}(x)\}_n$ は一様有界かつ同等連続．よって適当な部分列を選べば収束させることができるが，極限は（積分方程式の解の一意性により）m に対応する φ_{-s} に等しい．よって $\varphi_{-s}^{(n)}(x) \to \varphi_{-s}(x)$ が区間 $[0, \ell)$ で成り立つ．$x > \ell$ のときも $\varphi_{-s}^{(n)}(x) \to \infty = \varphi_{-s}(x)$ が成り立つ．よって

$$h_n(s) = \int_0^\infty \frac{dx}{\varphi_{-s}^{(n)}(x)^2} \to h(s) = \int_0^\infty \frac{dx}{\varphi_{-s}(x)^2}$$

が得られる．なお，この極限操作の正当化には $\varphi_{-s}^{(n)}(x) \ge 1 + cx$ のタイプの一様評価を示せばよいが

$$\varphi_{-s}^{(n)}(x) \ge 1 + s\int_0^x m_n(u)du$$

から容易である．

(ii)⇒(i)

$\{m_n(x)\}_n$ は非負単調非減少関数族であるから適当な部分列を選べば $m_{n_j} \to m_*(x)$ が連続点で成り立つようにできる．Kac の不等式によれば $h_n(s)$ が収束するとき $m_*(x)$ は恒等的に 0 や ∞ に等しいことはないので $m_* \in \mathcal{M}$ である．しかし $m_{n_j}(x) \to m_*(x)$ は $h_{n_j} \to h^*$ を意味するので, 実は $h^* = h$． したがって $m_* = m$ を意味する．以上から $m_n \to m$. □

補題 21.2. $m(x)$ に $h(s)$ が対応するとき m を右に $a \geq 0$ だけシフトしてできる *string*

$$m^a(x) := \begin{cases} 0, & (0 \leq a) \\ m(x-a), & (x \geq a) \end{cases}$$

に対応するのは

$$h^a(s) := a + h(s).$$

証明. m を右に a だけシフトすると $\varphi_{-\alpha}(x)$ は

$$\begin{cases} 1, & (0 \leq a) \\ \varphi_{-\alpha}(x-a), & (x \geq a) \end{cases}$$

に置き換わる．よって

$$h(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{\varphi_{-\alpha}(x)^2} \quad (\alpha > 0)$$

に注意すれば $h(\alpha)$ は $h(\alpha) + a$ に置き換わる． □

補題 21.3. $m(x)$ に $h(s)$ が対応するとき m を $b \geq 0$ だけ上にシフトしできる *string*

$$m_b(x) := b + m(x), \quad (x \geq 0)$$

に対応するのは

$$h_b(s) := \frac{1}{bs + \dfrac{1}{h(s)}}$$

証明. 上へ b だけシフトしすると $dm(x)$ は原点で b だけマスを持つのでこのとき $\varphi_{-\alpha}(x), \psi_{-\alpha}(x)$ を

$$\varphi_{-\alpha}(x) + bs\psi_{-\alpha}(x), \quad \psi_{-\alpha}(x)$$

に置き換えればよいので h は次のように置き換わる

$$\begin{aligned} h_b(s) \ &:= \ \lim_{x \uparrow \ell} \frac{\psi_{-s}(x)}{\varphi_{-s}(x) + bs\psi_{-s}(x)} = \lim_{x \uparrow \ell} \frac{1}{\frac{\varphi_{-s}(x)}{\psi_{-s}(x)} + bs} \\ &= \ \lim_{x \uparrow \ell} \frac{1}{bs + \dfrac{1}{\frac{\psi_{-s}(x)}{\varphi_{-s}(x)}}} = \frac{1}{bs + \dfrac{1}{h(s)}} \end{aligned}$$

□

系 21.1. *$m(x)$ に $h(s)$ が対応するとき m を $b \geq 0$ だけ上にシフトし, さらに右に $a \geq 0$ だけシフトしてできる string*

$$m_b^a(x) := \begin{cases} 0, & (0 \leq a) \\ b + m(x-a), & (x \geq a) \end{cases}$$

に対応するのは

$$a + \cfrac{1}{bs + \cfrac{1}{h(s)}}$$

証明. 上記 2 つの補題を使えばよい. □

よって,$m(x)$ が階段関数のとき $h(s)$ は <u>連分数展開</u> で計算できる.

定理 21.3 (scaling property)**.** $m \in \mathcal{M}$ に $h \in \mathbb{H}$ が対応するとし, スペクトル関数を $\sigma(\lambda)$ する. ことき

$$m_{a,c}(x) := \frac{a}{c} m(ax) \quad (a, c > 0)$$

には

$$h_{a,c}(s) = \frac{1}{a} h\left(\frac{s}{c}\right), \quad \sigma_{a,c}(\lambda) := \frac{c}{a} \sigma\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

が対応する.

証明. 単なる変数変換である. $\varphi_{-s}(x)$ は与変換で $\varphi_{-s/c}(ax)$ に変わる. □

22. Appendix

22.1. **Laplace 変換, Stieltjes 変換.**

$[0, \infty)$ 上の可測関数 $f(x)$ について

$$\widehat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

を Laplace 変換という. s は積分が収束している実数の範囲で考える. s_0 で収束していれば $s > s_0$ でも収束している. 例えば f が有界であれば $s > 0$ の範囲で考えることができる. なお, s を複素数まで拡張して考えることもある. そのときは s は複素平面において右半平面 $\{s | \mathrm{Re}(s) > s_0\}$ で考えることになる. また, $f(x)$ を $[0, \infty)$ 上の関数の代わりに $\mathbb{R}$ 上の関数について

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

を考えることもあり, そのときは両側 Laplace 変換という. Laplace 変換からもとの $f(x)$ は（殆ど到るところの意味で）一意に定まる[22].

[22] Fourier 変換の一意性に帰着できる.

つぎに $[0,\infty)$ 上の非負単調非減少な右連続関数 $\sigma(x)$ について $\sigma(-0)=0$ とおき， Lebesgue -Stieltjes 測度 $d\sigma(x)$ について

$$g(s)=\int_{-0}^{\infty} e^{-sx} d\sigma(x), \quad s>0$$

が収束するときこれを $\sigma(x)$ の Laplace-Stieltjes 変換（あるいは $d\sigma(x)$ の Laplace 変換）という．部分積分により

$$\int_{-0}^{\infty} e^{-sx} d\sigma(x)=\sigma(0)+s\int_{-0}^{\infty} e^{-sx}\sigma(x)dx$$

が成り立つので，関数の Laplace 変換の話しに帰着され，$g(s)$ から $\sigma(x)$ は一意に定まる．

上記の Lebesgue -Stieltjes 測度 $d\sigma(x)$ について

$$\int_{-0}^{\infty}\frac{d\sigma(x)}{1+x}<\infty$$

のとき

$$h(s)=\int_{-0}^{\infty}\frac{d\sigma(x)}{s+x} \quad (s>0)$$

を $d\sigma(x)$ の Stieltjes 変換という．これは容易にわかるように，上記 Laplace-Stieltjes 変換 $g(s)$ の更なる Laplace 変換になっている．よって Stieltjes 変換 $h(s)$ から $g(s)$ が定まり，従って $\sigma(x)$ も一意に定まる．

22.2. **Stieltjes 変換の連続性.** Stieltjes 変換に非負定数を加えた形の関数全体

$$\mathbb{H}_1=\Big\{h(s)=a+\int_{-0}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{s+\lambda};\ a\geq 0,\ \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda}<\infty\Big\}$$

を考える．このとき（$[0,\infty)$ をコンパクト化した）$[0,\infty]$ 上の有限測度 $\tau(dx)=d\sigma(x)/(1+x)+a\delta_\infty(dx)$ を用いると[23]

$$h(s)=a+\int_{-0}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{s+\lambda}=\int_{[0,\infty]}\frac{1+\lambda}{s+\lambda}\tau(d\lambda)$$

と表すことができる．ここで $\tau(d\lambda)$ はコンパクト集合 $[0,\infty]$ 上の有限測度で，被積分関数は $[0,\infty]$ 上の有界連続関数であることに注意する．また，$s=1$ とおくと

$$h(1)=\int_{[0,\infty]}\tau(d\lambda)$$

となり，$\tau(d\lambda)$ の total mass が $h(1)$ であることがわかる．よって，$h_n\in\mathbb{H}_1$ のとき，$\sup_n h_n(1)<\infty$ であれば $\{\tau_n(d\lambda)\}_n$ は弱位相に関して相対コンパクトと

[23] $\delta_\infty(dx)$ は ∞ における unit mass の意味.

なる（任意の部分列は収束する部分列を含むという意味）．[24]このことから直ちに次のことがわかる．

定理 22.1. $\mathbb{H}_1$ は各点収束で閉じている．すなわち；

$$h_n(s) = a_n + \int_{-0}^{\infty} \frac{d\sigma_n(\lambda)}{s+\lambda} = \int_{[0,\infty]} \frac{1+\lambda}{s+\lambda}\tau_n(d\lambda) \in \mathbb{H}_1$$

とする．各点収束の意味で

$$h(s) = \lim_{n\to\infty} h_n(s) \quad (s>0)$$

が存在するとき $h \in \mathbb{H}_1$ であり，したがって

$$h(s) = a + \int_{-0}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{s+\lambda} = \int_{[0,\infty]} \frac{1+\lambda}{s+\lambda}\tau(d\lambda)$$

の表現をもつ．さらにこのとき $\tau_n(d\lambda)$ は $\tau(d\lambda)$ に弱収束し，従って $\sigma_n(\lambda) \to \sigma(\lambda)$ が σ の連続点で成り立つ．

逆に，$\tau_n(d\lambda)$ が $\tau(d\lambda)$ に弱収束するならば $h_n(s)$ は $h(s)$ に各点収束する．

> [注意]　$a_n \to a$ は一般には不成立．正しくは
>
> $$a \geq \limsup_{n\to\infty} a_n$$
>
> なぜなら，$h_n(s) \geq a_n$ により
>
> $$a = \lim_{s\to\infty} h(s) = \lim_{s\to\infty}\lim_{n\to\infty} h_n(s) \geq \lim_{s\to\infty}\limsup_{n\to\infty} a_n.$$
>
> 等号が成り立たない例としては $a_n = 0, \tau_n(d\lambda) = \delta_n(d\lambda)$ がある[25]．このとき $\tau(d\lambda) = \delta_\infty(dx)$ なので $a_n = 0$ にもかかわらず $a = 1$ となる．

定理 22.2. $h \in \mathbb{H}_1$ のとき $h^*(s) := 1/(sh(s)) \in \mathbb{H}_1$.

（h^* を h の dual という．$(h^*)^* = h$ となる.）

証明. Krein の対応によれば h が m に対応するとき h^* は m^{-1} に対応するので定理は明らかであるが一応初等的に証明しよう．前定理により，次の形の場合に示せば十分である（一般の場合は $\sigma(\lambda)$ を階段関数で近似すればよい）．

$$h(s) = a + \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j}{s+\lambda_j}, \quad a \geq 0,\ \sigma_j > 0,\ 0 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_n.$$

このとき $h(s)$ は有理関数であり，零点は負の側にしかなく，微分してみればわかるが，その重複度は 1 である．よって，$h^*(s)$ は部分分数に分解すると

$$h^*(s) = P(s) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\sigma_j^*}{s+\lambda_j^*}, \quad 0 \leq \lambda_1^* < \cdots < \lambda_m^*$$

---

[24]有限測度の列が弱位相で収束するとは，任意の有界連続関数についてその積分が収束することである．

[25]$\delta_n(d\lambda)$ は点 n における unit mass.

の形である．$P(s)$ は多項式であるが，$a=0$ のときは $sh(s)\to\sum_j\sigma_j(s\to\infty)$ であるから，じつは $P(s)$ は定数 $a^*:=1/\sum_j\sigma_j(>0)$ であることがわかる[26]．また $a>0$ のときは $sh(s)\to\infty(s\to\infty)$ により $P(s)=0$ であることがわかる．いずれにしても $P(s)$ は非負定数である．したがって，残るは $\sigma_j^*>0$ の証明だけである．実際に微分してみれば分かるように，$(sh(s))'>0$ が特異点以外で成り立つので $h^*(s)'<0$．したがって，$h^*(s)$ は（特異点以外で）単調減少でなくてはならないが，それには $\sigma_j^*>0$ でなければならない． □

系 22.1. $h_1,h_2\in\mathbb{H}_1$ のとき h_3 を $1/h_3=1/h_1+1/h_2$ で定義すると，$h_3\in\mathbb{H}_1$.

証明. $h_k^*=1/(sh_k)$, $k=1,2,3$ とおくと前定理により，$h_1^*,h_2^*\in\mathbb{H}_1$．ところが与条件は書き換えると $h_3^*=h_1^*+h_2^*$ であるから，$h_3^*\in H_1$．よって $h_3=(h_3^*)^*\in\mathbb{H}_1$. □

つぎに，$h\in\mathbb{H}_1$ のとき $-1/h(s)$ について考える．すでにみたように

$$\frac{1}{sh(s)}=a^*+\int_{-0}^{\infty}\frac{d\sigma^*(\lambda)}{s+\lambda}$$

であるから両辺に $-s$ を掛けると

$$-\frac{1}{h(s)}=-a^*s+\int_{-0}^{\infty}\frac{-sd\sigma^*(\lambda)}{s+\lambda}=-a^*s+\int_{-0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}-1\right)d\sigma^*(\lambda). \tag{22.1}$$

ここで，$d\sigma^*(\lambda)$ が有限測度のばあいは total mass を $-b$ とおくと，最右辺の積分は分けることができて

$$-\frac{1}{h(s)}=b-a^*s+\int_{-0}^{\infty}\frac{\lambda d\sigma^*(\lambda)}{s+\lambda}$$

となるはずであるが，残念ながら一般の場合は右辺の積分は発散する．そこで右辺積分に補正項をつけた

$$\int_{-0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}-\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)d\sigma^*(\lambda)=(1-s)\int_{-0}^{\infty}\frac{\lambda d\sigma^*(\lambda)}{(s+\lambda)(1+\lambda)}$$

を考えると，

$$\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma^*(\lambda)}{1+\lambda}<\infty \tag{22.2}$$

の条件によりこの積分は収束する．よって，$d\sigma^\bullet(\lambda)=\lambda d\sigma^*(\lambda)$ とおくと (22.2) の条件は

$$\int_{0}^{\infty}\frac{d\sigma^\bullet(\lambda)}{1+\lambda^2}<\infty \tag{22.3}$$

とかけ，(22.1) はつぎのようにかける．

$$-\frac{1}{h(s)}=c-a^*s+\int_{-0}^{\infty}\left(\frac{1}{s+\lambda}-\frac{1}{1+\lambda}\right)d\sigma^\bullet(\lambda). \tag{22.4}$$

[26]遠方で定数に収束する多項式は定数以外にない．

ただし，$c \in \mathbb{R}$ は定数であり，また a^* は以前のままであるから $a^* \geq 0$ である．

上記をまとめると

定理 22.3. *$h \in \mathbb{H}_1$ のとき，$-1/h(s)$ は (22.3) をみたす $d\sigma^\bullet(\lambda)$ と $a^* \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ をもちいて (22.4) の表現をもつ．*

なお，とくに $h \in \mathbb{H}_1$ が

$$h(s) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda_n + s} \quad (0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty, \sigma_n > 0) \tag{22.5}$$

の形のとき $h(s)$ は有理型関数であり，極と零点が交互にある[27]．$1/h(s)$ の極は $h(s)$ の零点であることに気をつけると結局，(22.4) は次の形である．

$$-\frac{1}{h(s)} = c - a^* s + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu_n + s} - \frac{1}{\mu_n + 1} \right) \sigma_n^\bullet. \tag{22.6}$$

（さらに λ_n と μ_n は互いに交互に現れる.）

22.3. **Herglotz (Nevanlinna) 関数.** 前節で扱った $h(s)$ は測度が非負の側にのみあるケースなので $s > 0$ の範囲で考えられたが，測度が負の側にもあると同様な議論ができない．よって s を複素領域で考え，さらにその一般化として

$$H(z) = a + vz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) \sigma(d\lambda), \quad a \in \mathbb{R}, \tag{22.7}$$

を考えてみよう．この積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(d\lambda)}{\lambda^2 + 1} < \infty \tag{22.8}$$

のとき $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ であれば収束する．また

$$\mathrm{Im}(H(z)) = \mathrm{Im}(z) \left(v + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(d\lambda)}{\lambda^2 + 1} \right)$$

である．よって $H(z)$ は $v \geq 0$ のとき複素上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ において正則かつ虚部が非負である．このような

$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ で正則かつ虚部が非負である関数

を **Herglotz 関数**あるいは **Nevanlinna 関数**という．上記の話しは実は逆も成り立つ．すなわち；

定理 22.4. *Herglotz 関数は (22.7) の表現をもつ．ただし $a \in \mathbb{R}, v \geq 0$ であり，$\sigma(d\lambda)$ は (22.8) をみたす $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度.*

[27] 絵をかいてみればすぐ分かる．

以下このよく知られた事実を証明をするが，上半平面の話しを円板内の話しに帰着させる方針なので，まず単位円板内での正則関数の Poisson 表示について述べておく．

定理 22.5 (Poisson 核による表示)**.** 複素関数 $f(z)$ が領域 $D=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ で正則で，さらに境界までこめて連続とするとき，次の公式が成り立つ．

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)d\varphi\quad(\zeta=e^{i\varphi}),\quad z\in D \tag{22.9}$$

[**註**]$z=re^{i\theta},\zeta=e^{i\varphi}$ とするとき

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)=\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}$$

証明. Cauchy の積分公式から $\varepsilon>0$ のとき

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1-\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

であるが，f の連続性の仮定があるから $\varepsilon\to+0$ として

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

の正当化は容易．よって積分変数を $\zeta=e^{i\varphi}$ によって φ に変数変換すれば

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta-z}d\varphi.$$

ここでとくに $z=0$ とすれば

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,d\varphi$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{\zeta}{\zeta-z}d\varphi\\&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\left(1+\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)d\varphi\\&=\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\varphi.\end{aligned} \tag{22.10}$$

つづいて，$|z|<1$ にたいし $z^*=\zeta\overline{\zeta}/\overline{z}=1/\overline{z}$ とおいて上記と同じ計算をすると z^* は円の外部にあるので（被積分関数は正則だから）最左辺は 0 となり，よって

$$0=\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{\zeta+z^*}{\zeta-z^*}d\varphi$$

ここで z^* の定義から

$$\frac{\zeta + z^*}{\zeta - z^*} = -\frac{\overline{\zeta} + \overline{z}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}$$

が出ることに注意すると

$$\frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\frac{\overline{\zeta} + \overline{z}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}d\varphi$$

をえる．これと (22.10) から定理の主張 (22.9) をえる． □

さて，上記定理において (22.9) の両辺の虚部をとってみよう．$f(z)$ の虚部を $u(z)$ とすれば

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\,\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)d\varphi \quad (\zeta = e^{i\varphi})$$

であるが，これは $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(iz)$ に注意すれば次のようにかける．

$$\mathrm{Im}\bigl(f(z)\bigr) = \mathrm{Im}\left[\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)u(\zeta)\,d\varphi\right] \quad (\zeta = e^{i\varphi}) \tag{22.11}$$

ところが，一般に正則関数は Cauchy-Riemann の関係式があるので，虚部から実部は定数の自由度を除いて一意に決まるので；

系 22.2. 上の定理の仮定のもとで，$u(z) = \mathrm{Im}\bigl(f(z)\bigr)$ とすると

$$f(z) = \mathrm{Re}f(0) + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)u(\zeta)\,d\varphi \quad (\zeta = e^{i\varphi}). \tag{22.12}$$

この単位円内での話しを上半平面 $\mathbb{C}_+$ での話しにもっていくには次の変数変換をおこなえばよい．

$$\xi = \frac{z - i}{z + i} \quad \left(i.e.,\ z = i\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right)$$

[註] $z \in \mathbb{C}_+$ は $|z - i| < |z + i|$ で特徴づけられるから $z \in \mathbb{C}_+ \Leftrightarrow |\xi| < 1$.

この変数変換をおこなうと $H(z)$ が Nevanlinna 関数のとき，

$$f(\xi) := H(z) = H\left(i\frac{1 + \xi}{1 - \xi}\right)$$

は単位円板内で正則で虚部は非負となる．よって $H(z)$ が $\underline{\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}\ \text{で連続}}$ であれば系 22.2 により

$$f(\xi) = \mathrm{Re}f(0) + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\zeta + \xi}{\zeta - \xi}\,u(\zeta)\,d\varphi \quad (\zeta = e^{i\varphi}). \tag{22.13}$$

の表現をもつ．変数を z に戻してかくと

$$H(z) = \mathrm{Re}H(i) + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi} + \frac{z-i}{z+i}}{e^{i\varphi} - \frac{z-i}{z+i}}\,u(e^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{22.14}$$

この積分を実軸上の積分に変数変換しよう．

$$e^{i\varphi} = \frac{\lambda - i}{\lambda + 1}$$

とおくと $\varphi \in (0, 2\pi)$ は $\lambda \in (-\infty, \infty)$ に対応し，$d\varphi = 2d\lambda/(\lambda^2+1)$ であるから

$$H(z) = \mathrm{Re}H(i) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\lambda+1}{\lambda - z}\frac{u(\frac{\lambda-i}{\lambda+1})\,d\lambda}{\lambda^2+1}. \tag{22.15}$$

よって

$$a = \mathrm{Re}H(i), \quad \sigma(d\lambda) = \frac{1}{\pi}u\big(\frac{\lambda-i}{\lambda+1}\big)\,d\lambda$$

とおけば

$$H(z) = a + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\lambda+1}{\lambda-z}\frac{\sigma(d\lambda)}{\lambda^2+1} = a + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)\sigma(d\lambda) \tag{22.16}$$

よって，$H(z)$ が $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ で連続という付加条件のもとでは求める表現式が得られた．

つぎに $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ で連続という付加条件を外そう．そのために $H_\varepsilon(z) = H(z-\varepsilon)$ とおくとこれは $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ で連続だから上記のとおり

$$H(z-\varepsilon) = a_\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z\lambda+1}{\lambda-z}\frac{\sigma_\varepsilon(d\lambda)}{\lambda^2+1} \tag{22.17}$$

の表現式をもつ．よって，$\varepsilon \to +0$ としたときの右辺の極限を考えればよい．問題になるのは $\sigma_\varepsilon(d\lambda)$ の収束である．じつは $\mathbb{R}$ 上の測度としての収束は期待できない．mass が無限遠に逃げてしまう可能性があるからである．このようなときは $\mathbb{R}$ を一点コンパクトして $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ にて考えるの常套手段である．そこで

$$\tau_\varepsilon(d\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon(d\lambda)}{\lambda^2+1}$$

とおき $\tau_\varepsilon(d\lambda)$ を $\mathbb{R}$ を $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上の <u>有限測度</u> とみなして

$$H(z-\varepsilon) = a_\varepsilon + \int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} \frac{z\lambda+1}{\lambda-z}\tau_\varepsilon(d\lambda), \quad a \in \mathbb{R}, v \geq 0 \tag{22.18}$$

とかいてみよう[28]．とくに $z = i$ とおいてみると

$$\mathrm{Re}(H(i-\varepsilon)) = a_\varepsilon, \quad \mathrm{Im}(H(i-\varepsilon)) = \int_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} \tau_\varepsilon(d\lambda).$$

よって $\varepsilon \to +0$ のとき $a_\varepsilon \to a$ と $\tau_\varepsilon(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) \to \mathrm{Im}(H(i-\varepsilon))$ がわかる．$\tau_\varepsilon(d\lambda)$ の測度としての収束をみてみよう．$\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ はコンパクトであり total mass が有界であるから Helly の選出定理により部分列を選べばある $\tau(d\lambda)$ に弱収束[29]させることができる．(∞ に mass が現れるのを許すのがポイント.）このとき (22.18)

---

[28]被積分関数は ∞ では z と定義すると $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ で連続になる．

[29]有界連続関数の積分が収束するという意味.

の被積分関数が有界連続であることに注意すると $\tau_\varepsilon(d\lambda)$ による積分も収束するので（必要なら部分列を選んで）$\varepsilon \to +0$ とすれば

$$H(z) = a + \int_{R\cup\{\infty\}} \frac{z\lambda+1}{\lambda - z}\tau(d\lambda), \quad a \in \mathbb{R} \tag{22.19}$$

をえる．ここで $v = \tau(\{\infty\})$ とおき $\tau(d\lambda)$ を $\{\infty\}$ 部分と $\mathbb{R}$ 部分に分けて

$$\tau(d\lambda) = v\delta_\infty(d\lambda) + \frac{\sigma(d\lambda)}{\lambda^2+1}$$

とおくと (22.16) に vz を加えた形がでて定理 22.4 が証明された．

上の証明をたどれば，つぎのこともわかる．

定理 22.6. *Herglotz* 関数列 $H_n(z)$ $(n = 1, 2, \dots)$ が上半平面で極限 $H(z) = \lim_{n\to\infty} H_n(z)$ をもつとき，$H(z)$ もまた *Herglotz* 関数である．このときそれらの表現を

$$H_n(z) = a_n + v_n z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)\sigma_n(d\lambda) \tag{22.20}$$

$$H(z) = a + vz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)\sigma(d\lambda) \tag{22.21}$$

とすると $a_n \to a$, $\sigma_n(I) \to \sigma(I)$ が $\sigma(\partial I) = 0$ なる有限区間 I についてなりたつ（$v_n \to v$ とは限らない）．

定理 22.7. $H(z)$ が *(22.21)* の表現をもつとき $\sigma(d\lambda)$ の連続点 $a, b (a < b)$ について

$$\int_a^b \sigma(d\lambda) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^b \mathrm{Im}H(x+\varepsilon)dx \tag{22.22}$$

> [**注意**] $\sigma(d\lambda)$ は非負測度でなくても，2 つの非負測度の差という意味で有界変動な signed 測度であればよい．

証明. $\mathrm{Im}H(x+\varepsilon)$ を素直に計算すれば

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}H(x+\varepsilon) = \frac{v}{\pi}\varepsilon + \int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon(x-\lambda)\sigma(d\lambda), \quad p_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

がわかる．ここで $p_\varepsilon(x)$ は次の意味で Dirac 測度 $\delta_0(dx)$ に収束することに注意.

$p_\varepsilon(x) \to 0 \quad (\forall x \neq 0)$ かつ $\int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon(x)dx = 1$.

よって

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \mathrm{Im}H(x+\varepsilon)dx = v\epsilon(b-a) + \int_{\mathbb{R}}\left(\int_a^b p_\varepsilon(x-\lambda)dx\right)\sigma(d\lambda)$$

において $\varepsilon \to +0$ とするとき右辺の内側の（dx による）積分は $a < \lambda < b$ なら 1 に，また $\lambda < a$ or $\lambda > b$ なら 0 に収束する[30]ので，これを $\sigma(d\lambda)$ で積分したも

[30] $\lambda = a, b$ では 1/2 に収束.

のは $\sigma((a,b))$ に収束する.（$\lambda = a, b$ のところでの積分は $\sigma(d\lambda)$ の連続点という仮定なので無視.） $\square$