第一部　序論

No. 1

第一章　研究の目的

　この研究の目的は

「盲児に

　1. 空間の性質を理解させ

　2. 空間の性質を取扱う能力を与える

為に必要な最も基本的な指導の方法を明らかにする事」

である。

　ここで「盲児」というのは、教育行政上の用語に従った盲学校小学部児童を意味するものではなく、もっと一般的な意味で盲学校に在学する児童・生徒を意味するものとする。

　また、「空間」というのは、いわゆる「立体」の意味ではなく、点（零次元空間）、直線（一次元空間）、平面（二次元空間）、立体（三次元空間）などを含むものとする。従って、空間の性質としては次のようなものを考える。

　C₁ 点，直線，平面，立体の性質，および

No. 2

これらの結合関係。空間の次元（自由度）。

C_2 直線上の点の順序。直線によって二分される平面の側（左右）。三角形によって二分される平面の側（内外，右廻り．左廻り）。直線の向き、三角形の向き。

C_3 線分，角．三角形．四面体の合同．

C_4 平行線の性質。

C_5 計測の原理。長さ，長さの単位，角度，面積，体積。

C_6 平面上の直線図形の性質。直線図形の分解と結合。直線図形の面積。面積の単位。棒グラフ．帯グラフ，正方形グラフ。

C_7 平面上の曲線図形の性質，曲線図形の直線図形による近似，折線グラフ。円の性質，角度の単位，．円周の長さ．円の面積，円グラフ，その他の曲線図形の面積。

C_8 平面で囲まれた立体の性質。多面体の分解と結合。多面体の体積。体積の単位。展開図。

C_9 曲面で囲まれた立体。曲面の平面によ

る近似。球の性質。球の表面積、球の体積、その他の曲面で囲まれた立体の体積。

C₁₀ 曲線および曲面の位相。自分自身と交わらない閉じた曲線は平面を二分すること。一筆がき、案内図、迷路。

C₁₁ 相似，縮図，地図。方位。

C₁₂ 投影図、透視図。

C₁₃ 座標形，点の座標，二点間の距離、式と図形の対応。

C₁₄ 図形又は座標形の平行移動，対称移動，廻転。線対称，点対称，廻転体。

従って，これを現在用いられている「小学校算数科学習指導要領」による教材の分類に従えば，「図形教材」「測定教材」の一部，「グラフ教材」などが含まれる事になる。なお，この論文では，特に必要がない限り算数と数学との用語の使いわけはしない事にする。以下，単に数学といえば，この両者を含むものとする。

さて，この研究に於て取扱う問題は，「空

間の性質をいかに指導すべきか」ということにあるが、この問題にとりかかる前に、まず「空間の性質を理解し、且つ、これを取扱う能力を伸ばすこと」が、盲児にとって、いかなる意義を持つか。いいかえれば、盲児に空間の性質を指導する事が、盲教育にとっていかなる意義を持つかを考えておこう。

その為に、まず、空間の性質を指導することが、数学教育に於ては　いかなる役割を果すかを考えてみる。

1．空間の性質の指導は、数学教育に於いて、いかなる役割を果し得るか。

空間は古来、数と並んで数学の最も主要な研究の対象と考えられて来た。かつては、「数学とは　数と空間に関する科学である（mathematics : abstract science of space & number）」とさえ考えられたこともある。今日では、数学をこのように定義する事は不適当であるには違いないが、しかし、空間が数学の最も主

要な研究対象の一つであることには何らの違いもない。では、空間の性質の指導は数学教育にとってどの様な意義を持つであろうか。筆者はこれを次の二つの面について考えてみる。

まず第一に、児童・生徒が空間の性質そのものを知ることの意義であり、第二に、空間の性質を研究する方法を知ることの意義である。すなわち、空間の性質そのものを知ることによって、児童・生徒は一般に空間に関係する問題解決の能力を身につけることが出来る。例えば、身近かな日常の問題についてならば、色々な箱や家具などをつくるのに注意しなければならない事柄を知る。衣服、住居、宅地、耕地などの取扱いに必要な図形の性質や長さ、面積などに関する知識を得る事が出来る。次に、空間に関する知識は数学の他の分野、或いはその他の科学の理解にとって不可欠なものでもある。例えば、ピタゴラスの定理は、三角函数の理解にとっ

て不可欠なものである。三角函数の理解は複素数の性質の研究やフーリエ級数の研究にとって基本的なものである。平行四辺形の性質は、力の分解と合成を考えるのに欠くことが出来ない。また、各種の座標形に関する知識は、力学に於て質点の運動を解析するのに重要な役割を演ずる。従って、空間の性質を理解することは、物理学をはじめ、科学一般にとって不可欠なものである。

第三に、空間の性質は、数学の各種の分野の研究をはじめ、科学の研究一般に広く用いられる。それは、抽象的な事柄を空間の性質になぞらえ、これによって問題場面の見とおしをよくするのである。例えば、函数の研究に当って、そのグラフを用い、その接線のカタムキを微係数と考え、グラフが囲む図形の面積を定積分とみなす、などがそれである。実験結果をグラフにし、これにあてはまる直線や曲線を求めて、この現象を支配する函数関係を見出だそうとすることは、自然科

学に携わる人々が常に行うところである。こうした考え方は 数学の指導に於てきわめて重要な考え方とされており、そのためにはあらかじめ空間の性質が理解されていなければならない。

空間の性質が、数学の研究に於て 極めて重要な役割を演ずることは、ここに述べた程度のものではない。今日では 数学の大部分の研究を 空間の性質になぞらえて行い、これによって、抽象的な事柄に対する見通しを良くする。これは、近代数学の著しい特徴である。単なる数の組（x_1 x_2 x_3 ……… x_n）をn次元空間の点とよび、三次元空間の距離になぞらえ、$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2+\cdots\cdots+(x_n-y_n)^2}$ を、二点（x_1 x_2 x_3 …… x_n）、（y_1 y_2 y_3 …… y_n）の間の距離と考えて、この距離についても 三次元空間の場合と同様に「三角形の二辺の長さの和は 第三辺よりも常に大きい」という関係が成り立つのではないかと予想をたてる。実際 それは 証明

できる。また、$n+1$ 個の要素 a_0, a_1, a_2 ……a_n を n 次元の単体とよび、あたかも直線（一次元空間）に対する線分、平面（二次元空間）に対する三角形、三次元空間に対する四面体などの性質に対応する性質を見出だそうとする。今日、数学に於て単に空間といえば「物の集り、すなわち集合」を意味するものと考えられるのが普通である。位相空間、ヒルベルト空間、函数空間、確率空間などの言葉は、それぞれ若干の性質（公理系）を満足する要素の集り、すなわち集合を意味するのであるが、ここに空間という名が与えられるのは、数学者の単なる気まぐれでもなければ、彼らが学を衒う為のものでもない。それは、これらが何らかの意味で現象空間の性質と共通なものを持ち、現象空間からの類推が、それらの研究を容易にするからである。*1 もっとも、このようなことがあるとしても、それは教育の場に関係する初等数学からは、はるかにかけ離れた事柄

*1. 弥永昌吉：空間概念の拡張（'科学' 1957. Vol.27. No.8 ～1958. Vol.28. No.1）

であって、児童・生徒の数学学習とは何の関係もないことと考えられるかも知れない。この疑問は一見きわめて妥当なことのようにも思われる。だが、よく考えてみれば、方程式や不等式の研究にグラフを用いたり、複素数を平面上の点を以って代表せしめたりすることは、このような考え方の特殊な例とみなすことが出来る。n個の変数をもつ物理系、すなわち、n個の自由度をもつ現象の系をn次元空間の中の図形の研究に対応させることと、運動する物体の時間に対する距離の関係をグラフによって明らかにすることとは、本質的に共通なものを含んでいる。この意味に於て、空間の性質を学ぶことは、数学やその他の科学の研究の上にきわめて重要な意義をもつと言わなければならない。

一方、先に述べた、空間の性質を研究する方法を知ることの数学教育に於ける意義はどのようなものであろうか。これには少くとも次の二つを考えねばならないであろう。

まず、その一つは、すでに言い古された事ではあるが、初等幾何の「予想をたててこれを証明してゆく」という方法が、一般に演繹的な論証能力の学習にとって恰好な材料を提供するということである。すなわち、図形の性質はその観察によってたやすく見出だすことが出来る。たとえば、平行四辺形の対角線はたがいに他を二等分する、とか、長方形の対角線の長さは相等しい、とか、三角形の二辺の中点を結ぶ直線は第三辺と平行である、とかいうような性質を見出だすことは、児童生徒にとって、決してむずかしいことではない。これに反して、代数では、二次方程式の根の公式をあらかじめ予想する、などということは、生徒の到底なし得ないところである。そればかりでなく、一定の公理から定理を証明する論法に於いても、代数におけるそれは、幾何における論法とくらべて、はるかに複雑である。例えば、二次方程式の根の公式を導くのに用いられる論法と、円周角不変の定理

を証明するのに用いられる論法を比較しただけでも、前者が後者に比し、いかに複雑であるかを知る事が出来る。こゝに、初等幾何が論証を学ぶ為に最も手頃な材料としてえらばれる理由があるのではあるまいか。

次に、空間の性質を研究する方法の数学教育に於ける第二の意義として考えられるものは、やはり、初等幾何に於て用いられる分析的方法、すなわち、複雑なものをその要素に分解し、再びその要素の性質を明らかにした上で、前の、より複雑な全体に結合しなおすという方法*2である。例えば、多面体の性質を研究するのに、これを四面体に分解し、多角形を研究するには、これを三角形に分解する。多角形の相似の条件を研究するのに、まず、これを三角形に分解し、三角形の相似の条件から研究しはじめる。三角形の相似の条件が明らかになれば、四角形の相似の条件は三角形の相似の条件を適当な形で組合わせることによって得られる。すなわち、四角形

*2. G.ポリア著、柿内賢信訳：いかにして問題をとくか
(G. Polya, How to Solve It.)
第Ⅲ部 発見学の小事典、「分解と結合」の項 参照

$ABCD$と、四角形$A'B'C'D'$とが相似である為には$\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$（向きまでいれて）且つ$\triangle BCD \backsim \triangle B'C'D'$（向きもいれて）であることが、必要且つ充分な条件である。このような手続きを理解して、一般にn角形の相似の条件が得られ、また、これから「相似の位置」なる考えが生れる。そしてこれから曲線図形の相似の条件が導かれる。こうした考え方は、物質の研究を分子の研究に帰着させ、分子の研究を原子の研究に帰着させる物理学や化学の研究と共通のものを含み、遺伝の研究を遺伝子の研究に帰着せしめる遺伝学の研究に通ずるものである。分子や細胞の単位で、実際に物質や生体を取扱う事は、児童・生徒にとってほとんど不可能な事であろうが、多面体や多角形を四面体や三角形に分解する事は、彼らにとっても、決して困難なことではない。この意味に於て、空間の性質を研究することは、児童・生徒の科学的態度の養成に役立つと考えられよう。

以上をまとめると、空間の性質の指導が数学教育に於て果す役割は、次のようなものと考える事が出来る。

1. 空間の性質そのものを知る事によって問題解決の能力をのばすことが出来る。

a. 直接空間に関係する問題を解決する能力をのばすことが出来る。

b. 数学やその他の科学の研究の為に前提となる知識を得ることが出来る。

c. 抽象的な事柄を空間の性質になぞらえ、これによって問題解決の見通しをつける能力をのばすことが出来る。

2. 空間の性質を研究する方法を知ることによって、問題を研究する方法を知ることが出来る。

a. 学問の演繹的な方法を知ることが出来る。

b. 学問の分析的な方法を知ることが出来る。

では、盲児に対して空間の性質を指導する場合にも、これと同様の効果を期待することが出来るであろうか。次にこれを考えよう。

2. 盲児に空間の性質を指導することは、どのような意義をもつか。

一般に 空間の性質を指導することが、児童・生徒に与える影響は、前に述べたとおりであるが、その各々が、盲児についても同様に価値をもつかを考えていこう。

まず第一にあげた空間の性質そのものを知ることによる効果であるが、これは、ほとんど 目明きの児童・生徒の場合と同様の効果を盲児にも及ぼすと考えられる。例えば、盲児も人なみに身のまわりの道具や衣服などの形や大きさについて、それらを区別したり計画をたてたりすることが必要になる。将来は人なみの大人として、住居や宅地などについて考えたり、自己の意志を他人に正しく伝えたりすることが出来なければならない。こうした能力や態度を欠いていた為に、思わぬ不覚をとることがないように育成しなければならない。これについて思い出すことは、次の

ような事実である。

普通、盲人が用いている点字用紙には二種類ある。一つは、27.0cm × 19.2cm（縦×横）で、他は 25.6cm × 19.2cm（縦×横）である。実は、ごく最近まで広く用いられていた用紙は後者であった。それが、何故前者のようにやや長めの用紙が現われるようになったかといえば、この 27.0cm × 19.2cm は、ほぼB5判に一致し、B1判の模造紙を、4×4に裁断すれば直ちに得られることがわかったからである。何故このような簡単な事に今まで誰も気づかなかったのであろうか。その理由の一つは、短い方の紙の規格は、点字印刷の原版の規格に合わせたもので、出版物がすべて短い用紙を用いて作られていた為であろう。つまり、盲人が紙屋に用紙を注文する際、短い紙を見せ、それに合わせて裁断するように依頼してきた為と思われる。他の理由は、用紙の寸法というようなことに盲人がほとんど関心をもっていなかった為であろう。

自分達が用いている用紙が　どのようにして作られるのか、どのような規格の紙をどのように裁断して得られるものなのか、という事について注意した事がなかったからであろう。そのために、B1判一枚をこの規格に裁断すれば　いわゆる「裁ち落し」といわれるはんぱが出来、それだけは全く無駄になっていた。この損失を、用紙一枚に書きうる字数を以って現わすと、1120：1056で　B1判一枚について生ずる損失は 1024字、ほぼ一枚に当たる。この損失は、単に盲人一人一人の損失にとどまらず、某点字図書館の書庫の棚の寸法が短い規格の紙に合わせて設計されている為に長い規格の紙を用いた点訳書を作ることが出来ず、少なくとも　現在用いている書庫が一ぱいになるまでは　この図書館の点字書の規格は　依然として　短い規格にあまんじなければならない、という結果になってあらわれている。この損失を金額に換算すれば、相当の額に上るに違いない。このような事態

にたち到ったのは、さきにも述べたように、盲人自身が 自分達の用いている用紙の規格について あまりにも無関心であった為であり、物事を定量的に考える習慣を持たなかったためであろう。我々は、いつ、どこで、どのような問題に出会うか、あらかじめ予想する事がほとんど出来ない。上に述べたような失敗を再びくり返さない為には、事にあたって合理的に考えをめぐらす態度と能力とが必要である。この合理的な生活態度を育てる為にも、単に 数量的な問題解決能力の指導ばかりではなく、空間的な問題解決能力の指導がなされなければならぬことは明らかであろう。

また、盲人が出会う 空間に関係する問題の中には、このように物の大きさや形に関係するもののほかに、次のようなものもある。それは 一人で 自由に歩きまわるために出会う問題である。一般には 盲人の独り歩きの能力は、聴覚や運動感覚を通して 外界の

有様を的確に捉える能力に関係するものと考えられている。これは 基本的には妥当な考えであることは確かであるが、これだけがすべてでないことも確かである。*3 聴覚や運動感覚だけで行動しているのでは 一人で新しい道を見出だして目的地へより早く行きつくというように 能率的に行動することは出来ない。今日の大都市のように、バスや電車が極端に発達している地域では、聴覚や運動感覚が歩行に際して果す役割は次第に少なくなってきている。それに代って必要になってくる能力は もっと能率よく行動できるバスや電車の系路を的確に見出だす能力である。聴覚や運動感覚が果す役割は、電車やバスの乗換えの場合とか、自宅から駅までの道路とか、停留所から目的地までの道路とかいうような場所で 自己の安全を保障することに限られてくる。歩道や交通信号が整備され、交通法規や交通道徳が守られるようになれば、いわゆるカンの悪い盲人でも安心して歩ける

*3. キノシタ・ワサブロウ：盲人の歩行論 P.41、16行目、歩行図
（点字なので字は不明のため、仮名書きにしておく。）

ようになる。だが、バスや電車の新しい系路を利用し、自分にとって未知の領域を積極的にせばめてゆくには、さきにも述べたような能力が必要になるのである。例えば、次のような場合を考えてみよう。

教育大学を出発して、牛込の第一国立病院に行き、帰りに護国寺へまわって再び教育大学に戻らなければならぬ盲人があるとしよう。この場合、まず 往きには 地下鉄でお茶の水に出るか、池袋—数寄屋橋間の都電で水道橋に出る。そこで 万世橋—新宿間の都電に乗換え、若松町まで行く。往きはこれでよいのだが、帰りが問題である。もちろん、この系路を逆に辿り、水道橋から池袋行きの都電にのれば護国寺に出られる事はわかっている。しかし、これでは時間がかかりすぎる。もっと早く目的地に出られる途はないだろうか。この時、目白から護国寺を通って新橋に抜けるバスが通っていた事を思い出したとしよう。途中 どこをまわっているか、それは知らな

い。しかし 次のようなことはわかっている。護国寺のある地域は 池袋—お茶の水間の地下鉄，お茶の水—新宿間の都電，新宿—池袋間の国電によってかこまれている。また，新橋はこの地域の外側にある。また，護国寺から新橋へ抜けるバスは，地下鉄とも，池袋—新宿間の国電とも交叉していない。これだけの条件が揃えば，このバスはお茶の水—新宿間の都電とどこかで交叉しなければならぬ筈である。それが，もし，若松町の近くであれば これで問題が解ける。そこで，誰かに この近くを目白—新橋間のバスが通っていないかどうかを問う。実際，このバスは 牛込北町で都電と交叉することがわかる。これで問題は完全に解決されたことになる。そして彼の地図には新しい路線が一つ書き加えられるのである。ここで用いられた空間の性質は何か。それは，「単一閉曲線は平面を二分する」という，ジョルダンの定理である。定理それだけをみているだけでは，あまりにも自

明で、何の役に立つのか分らないようなこの定理が　このように卑近な日常生活に利用出来るのである。もっとも、こういう考え方は何も「ジョルダンの定理」などという名前を知らなくても、また、「単一閉曲線は平面を二分する」という命題をわざわざ教わらなくともすむことではないか、という疑問も生じないではない。しかし、盲人の場合、事実上地図の利用の途がなく、また、電車やバスに乗っても、窓から外のありさまをみて、どこでどういう場所を通るか、ということが一々わかるわけではない。実際、「メビュウスの帯」や、トウラスの上では、単一閉曲線もこれらの表面を常に二分するとは限らない。従って、以上のような例と共に、一応、単一閉曲線が平面を二分するということを意識させておけば、自信を持ってこれを利用出来るであろう。おそらく　教室で　ものの15分もあれば　子供たちに理解させる事が出来るに違いない。世の中には、俗に「方向音痴」と

いわれる人があるものだが、或いは以上に述べられたような考え方がうまく利用出来ない人ではなかろうか。

なお、直線は平面を二分する、とか、単一閉曲線は平面を二分する、という性質は、函数 $f(x)$ が、区間 $[a, b]$ で連続で、$f(a) > 0$、且つ $f(b) < 0$ ならば、$f(x) = 0$ となる点が区間 $[a, b]$ の中に少くとも一つ常に存在する、という解析学の基本定理の一つと同類のものであり、ジョルダンの定理の名前を教える教えないにかかわらず、さきに述べたような考え方は、数学的にはきわめて重要なものであることはいうまでもないことである。

次に、数学の他の分野や、その他の科学の前提としての空間の性質の指導であるが、少なくとも、盲児を自らの問題を合理的に解決出来る人間に育てようとする限り、人なみの事は一応指導しておかねばならない。彼らがエンジニアになったり、自然科学の研究者

になったりする可能性がほとんどないとしても、今日の科学・技術に対する理解を深め、少しでも利用出来るものは進んでこれを生活にとり入れてゆく能力と態度を育てるにはやはり一応の空間の性質についての知識が必要になる。例えば、近々三十年間のラジオの発達は、盲人の知的な生活に貢献した事は、非常なものであった。それは、ルイ・ブライユによる点字の発明に次いで、盲人の生活に大きな変化を引き起したものと云える。しかしラジオから得られる知識は常に一方的で盲人としての側ではいつも与えられるものをうけ入れるにすぎない。いわば一方交通の通信である。もし自分の意志を自ら電波に託すことが出来たら、行動に強い制限をうけている盲人にとって、非常に多くの便宜をもたらすに違いない。つまり、盲人がアマチュア無線の免許をとることが出来るようになれば国内はもちろん、広く海外のハム仲間と交わりを結ぶことが出来るようになるはずである。

盲人が現在交わりを持ち得る範囲は、たかだか、学校友達ないし近所づき合い程度のものに限られていることが、とかく盲人の閉鎖的な性格の一つの原因となると考えられることを思い合わせれば、ハムとしての途が開けることは、点字の発明や、聾者の口話教育などと同様に、彼らにとって有意義なものとなることはまちがいない。しかし、今日、盲人はアマチュア無線の免許をとる資格を与えられていない。これは、ヨーロッパの二、三の国を除いて、世界的に普遍なことのようである。その理由は、おそらく、電波管理に関係する当局者が盲人の電波技術を信頼しない為であろう。これは一応無理からぬことである。しかし、筆者の知る範囲でも、本学雑司谷分校の学生・生徒の中に、自ら受信機を組み立て（ハンダ付けなども自ら行う）、ハムとしての技術的な能力も理論的な能力も十分具えていると思われる者も何人かおり、また、旧東京盲学校の卒業生の中に、全盲の身でラジオ

修理業を営んでいる者もある。従って、然るべき教育を施しさえすれば、「盲人にハムの資格を与えることが電波行政上甚だしい不都合をひき起すとは思われない」というのが、日本アマチュア無線連盟の見解のようである。しかし、その為には、少くとも電磁気学、特に交流理論についての常識を一通り持っていなければならない。そのためにはまた一通りの数学の知識、中でも三角函数の知識を一通り心得ていなければならない。特に最近の超短波によるFM方式の発達が著しいが、これに用いられる指向性アンテナには「パラボラ」が用いられる。これには二次曲面についての知識が役立つであろう。

また、最近の録音技術の発達も、盲人がこれを生活にとりいれるならばその精神生活を豊かにすることが出来ることは疑いないところである。盲人が自ら部品を集め、テープレコーダーを組立てる能力を得ることが出来ることは、前述の人々が事実上これを行って

いることに照らしても明らかである。ことに最近新しい型の録音機（聴読機）が誕生しかけている。*4. この組み立てには、サイクロイドについて心得ていることが役立つに違いない。ここにもまた三角函数の知識が役立つところがある。　前にも述べた通り、問題はどこにあるか予め究めつくすことは出来ないものである。どんなにすぐれた数学者でも、最初に複素数が考え出された時には、これが飛行機の翼形の決定に利用されることなど思いもよらなかったにちがいない。Riemann が「幾何学の基礎における仮説について」*5. を発表した当時、これが後に Einstein によって相対性理論に応用されると予想した人が何人あったであろうか。従って、盲児にとって今すぐ必要でないような事柄でも、数学的に価値があり、特に他の必要な事柄の学習を妨げない限り人~~なみ~~並の事は指導しておくべきである。

　第三の「空間の性質を指導する事」の効果につ

*4. 星野愷：聴読機の誕生まで（「科学朝日」1957年5月号 p.49）
「最初に試作した聴読機」の説明
この構造から録音トラックがサイクロイドの一部になる。

*5. B. Riemann : Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.
(Habilitationschrift, 1854, aus dem dreizehn Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.)

いても　これと全く同様のことがいえる。殊に　この種のごく卑近な応用である量的変化のグラフによる表現は　学術書はもちろん新聞雑誌にいたるまでしばしば用いるものであり　盲人が普通の書物によって知識を得ようとする時には　グラフに関する知識はほとんど不可欠なものである。盲人にとって　グラフによる表現が必ずしも問題の見通しをよくするとはいえないが、社会環境によく適応出来ることが盲人の生活を物質的にも精神的にも豊かにするものであることが確かである以上　この方面の指導も決しておなざりにすべきではない。殊に　ある方程式や不等式が成り立つ範囲などを考える場合　実際にグラフを書く書かないは別として　論理的な関係をグラフによって確めることは　式の上だけで考えを進めるよりも見通しよく行いうるものである。例えば　さきにあげた連続函数 $f(x)$ が $x=a$ に於て正、$x=b$ に於て負ならば　a と b の間に $f(x)=0$ となる点

があるという性質を理解するには、グラフによることが最も分りよい。もちろん、厳密な証明を考える場合には別であるが、少なくとも高校生位まではグラフによって行うことが望ましいであろう。不等式 $|x+a|<b$ を考えるのに、これを $-b<x+a<b$ と書き直し、グラフを思いうかべてみれば不等式の成立つ範囲はあきらかになる。従って第三の項目についても、その、盲児にとっての有用性は決して軽んずべきではない。

一方、空間の性質を研究する方法を理解することの、盲児に於ける効果であるが、これもたびたびくり返したように、盲児を合理的な思考力を持った人間として育ててゆこうとする限り見逃せない問題であろう。しかもこの効果は、空間の性質そのものを理解してゆく過程に於て、これと同時に得られる性質のものである以上、教師としては十分その効果をあげうるよう心がけるべきである。

以上によって、盲児に対する空間の性質の

指導は、目明きの児童生徒に対するそれと同様に有意義なものであり、空間の性質そのものを理解するためにも、数学や、その他の科学を学ぶ上にも、また、合理的な思考力を持ち、活動的な、社会的によく適応し得る盲人を育成する上にも必要なものであることが明らかになった。

従って、盲児に対する空間の性質の指導は盲児に対する数学教育上かなり重要な位置を占めるものと考えねばならない。空間の性質の指導を研究することの意義はこれで十分明らかであるとしても、研究の対象として選ぶべき問題は、「いかなる目標を持って指導を行うか」、「何を教えるか」、「どんな方法で指導するか」等々、数えあげればいくらでもある。しかし、筆者が特に指導の方法を研究の対象として選んだ理由は、次のようなものである。すなわち、指導の目標の研究は一つは、「盲人は社会に於ていかなる役割を果しうるか」、という問題に関係する。これ

は盲教育にとっての最も基本的な問題であって、そうたやすくは解決出来る問題とは思われない。「指導の内容」の研究は、指導の目標に従属する。従って、指導の目標についての問題がある程度明らかにならなければこの解決は出来ない。一方、指導の方法は、「何を教えるか」によって多少影響されることがあるとしても、数学が系統的な学問である以上、小学部から高等部までの全課程を通して眺めた指導内容が多少変ることがあるとしても、基礎的な事実についての指導はそう変るものとは思われない。また、指導の方法を変えることによって、今まで困難であると思われていた指導の内容が、盲児にとって、さほど難解なものでないようになり、盲人の能力が拡げられることになれば、この面から逆に指導の内容を改め、指導の目標を拡げてゆくことが出来るとも考えられる。そこで現在目明きの学校に於て行われている範囲の内容について、その指導の方法を研究する

ことにした。

そこで、この章の終りにあたって、この研究の目的とするところをもう一度考えておく。さきにこの研究の目的として「盲児に(1)空間の性質を理解させ、また、(2)空間の性質を取扱う能力を与える為の必要な最も基本的な指導の方法を明らかにすること」と述べた。そこで、「空間の性質を理解させる」ということがらには一応問題はないとしても、空間の性質を取扱う能力という概念をもう少しはっきりさせておかねばならない。この中には、広く解釈すれば、論証の能力や、物事を分析的に考える能力も含まれるかも知れない。しかし、論証の能力や分析の能力は、なにも空間の性質の指導が狙うべき個有の能力ではなく、数学教育全体が狙うべき能力である。また、抽象的な事柄を空間の性質になぞらえ、問題の見通しをよくするという考え方も、空間の性質の指導が狙うべき事柄というよりも、むしろ、他の領域についての指導が狙う

べき事柄であるといって差支えなかろう。
従って、この研究では、空間の性質の応用として、グラフ等の作り方に簡単にふれる程度にとどめる。　以上を要するに、この研究に於いて取上げる指導の方法は、空間概念を把握し、或いは、数学の他の分野ないしは他の自然科学の前提として必要な空間の性質を理解させ、もしくは、直接空間に関係する問題を解く能力を与えるに必要な基本的方法を明らかにすることに限ることとする。

第二章　これまでの研究の状態

先ず、戦前の状態であるが、当時はまだ盲教育は義務制にすらなっていなかった。従って、全国的な盲教育の研究会などが行われた模様がない。盲教育の為の団体としては、「帝国盲教育会」があり、機関紙を発行した時代もあったが、その内容は大部分一般的な盲人問題を取扱ったものや、海外の盲教育制度の紹介、盲人福祉事業の展望などを扱ったものである。教科教育に関係する研究はこれといって見当るものがない。従って、当時のもようを資料にもとずいて正確に知ることはほとんど不可能である。もっとも、盲学校で数学を教えなかったわけではないから、この頃用いられた教科書によってそのもようを推論することにしよう。

当時、盲学校初等部では、いわゆる「緑表紙（小学算術）」を点訳したものを用いていた。が、それには図形についての問題は一字一句原本通り点訳されているにもかかわらず、

その指導に関係する図やグラフの大部分が~~は~~ぶかれており、これに代る何らの処置もとられていなかった。これによって推論するならば、例えば「三角形の内角の和は180°である」とか「円の面積は半径×半径×3.14」とかいう事実だけを機械的に記憶させる、という指導がとられたこともあったのではないかと思われる。中等部の幾何はどの学校でも行わないのが一般的な傾向であったが、旧東京盲学校師範部（現東京教育大学特設教員養成部）の入学試験科目には幾何が入っており、「三角形の内角の和は二直角なる事を証明せよ」という問題が出た事がある*1のをみれば、同校では、この程度までの幾何の指導を中等部に於て行なっていたこともあるようである。現在、本学雑司ヶ谷分校の図書館には、イギリスに於て出版されたH. M. Taylorの「The Text of Euclid element for the use of schools」という点字教科書が保存されており、これによって幾何の指導を研究した事

*1. 当時受験した人々の語るところによれば、証明に当って図を書く必要はなかったとの事である。

もあったのであろう。また、我国に於て点訳された幾何の教科書としては「幾何学精義」*2が出版され、地方の盲学校の生徒で、東京盲学校師範部を受験しようとするものは、この第一巻を独習するなり、課外として特に教師の指導をうけるなりしたものである。今日でも戦災を免れた学校では、その図書室にこの教科書を見出だすことがしばしばある。

~~もちろん~~勿論、当時にも、空間の性質の指導に心を用いた教師があったこととは思うが、今日それを~~資~~史料によって~~たし~~確かめることは出来ない。従って、戦前の状態を考察することはこの程度にとどめる。

戦後、学制が改められ(昭和22年)、それに伴って、盲教育の義務制が実施されるに及んで(昭和23年)ようやく盲教育の研究が活発となり、研究報告を収めた雑誌が発行されたり、全国的な研究大会が行われたりするようになった。従って、ここでは、これらの雑誌や研究大会の発表要項によって、空間の

*2 山内茂夫著・中沢伊与吉点訳:幾何学精義 大正11年
大日本国民中学会盲人教育部発行

性質の指導についての研究がどのようになされてきたかを見ることにしよう。

そこで、雑誌としては、東京教育大学雑司谷分校の前身である旧東京盲学校によって編集された「雑司谷論叢」、研究発表要項としては、毎年全国的な規模で開かれている全国盲教育研究大会研究発表要項をとり上げる事にする。

先ず、「雑司谷論叢」*3 であるが、これに載せられた数学教育に関する論文は、長嶺安信氏の「数学教育と実存主義」、「中等部数学教案」の二篇にすぎない。しかも、この二つの論文の論題が示すように、その内容も、空間の性質の指導とは全く無関係なものである。

一方、全国盲教育研究大会研究発表要項（昭和28年～昭和32年）を見るのに、数学教育に関する報告は

水野紀よ之「小学部低学年算数教科書のあり方」（昭和28年度）

渡辺博「珠算指導の一方法」（昭和28年度）

*3. 第一巻第一号 昭和23.11.5 発行 第一巻第二号 昭和24.1.25 発行 第一巻第三号 昭和24.3.25 発行 第二巻第一号 昭和24.7.18 発行 第二巻第二号 昭和24.10.30 発行 第二巻第三号 昭和25.3.13 発行 第二巻第四号 昭和25.7.30 発行 以後廃刊

長瀬安信（長嶺の誤りと思われる）
「盲学校中等部カリキュラム」
（昭和28年度）
松平菊美「本校に於て考察工夫した盲学校用具について」（昭和29年度）
(1)佐野桂二「小学部算数科指導に於ける表グラフについての考察」（昭和29年度）
(2)今村敦子「函数グラフ盤」（昭和29年度）
内藤昌平「数学点字記号について」（昭和30年度）
(3)石田友松（石田友信の誤植である）
「盲学校小学部算数科の触察方法と基礎図形の指導について」（昭和32年度）
(4)佐藤栄「幾何図形の実践的指導」（昭和32年度）
(5)藤井克道「数学教育における問題点とその対策」（昭和32年度）
(6)山田一朗「副尺つき盲人用物さし」（昭和

32年度）
山本金之助「式を立てるときの障害の二、三について――特に文字使用上の障害について――」（昭和32年度）
(7)丹羽石見「描画点字板および三角函数指導板の考案について」（昭和32年度）
(8)長嶺安信「盲学校高等部「幾何」の指導について」（昭和32年度）
がある。*4 その中、空間の性質の指導に関係ある発表は、(1)から(8)までの番号を附したものである。従って、しばらくこれらの内容を見ることにしよう。

この八つの発表の中、石田氏のもの(3)を除いて他の七つの報告の内容は、教具の改良、考案に関係するものである。ただし、(1)佐野氏の報告内容は、発表要項にのせられたところがあまりに簡単にすぎるため、どの様な研究をなされたのか理解できない。

まず、(2)、(5)、(7)について、その内容を考察

*4 31年度には、数学教育については一つも報告が行われていない。

する。

今村せ史（昭和29年度研究発表要項56頁）の発表の内容は、およそ次の通りである。その研究の目的は、盲児が任意の座標を持つ点をグラフ板上に取ることが出来るようグラフ板を改良すること、及び学習結果がグラフ用紙に記録され、それによって学習出来ると共に、記録して残ることである。この目的を達するためにとられた方法は、板（30cm×30cm）の上に0.5mmの針金を方眼（1.5cm×1.5cm）に張り、点を示す針を比較的自由に板にさし込めるようにしたグラフ板を考案されている。また、学習結果をそのまま保存するためには方眼の金網と作図板（板上にネルを張ったもの）の間に、網の目と全く一致するグラフ用紙をはさんで学習する方法を考案された。

藤井宏道氏*5は、「盲学校理科学習は多大の困難を伴うには違いないが、適当な補助具を発明工夫すれば、問題点をある程度解決出来る。」と、数学科に於ける教具の役割の重

*5 昭和32年度 全国盲教育研究大会 研究発表要項 p.21

要性をのべ、この考えのもとに、次のグラフ板を考案されている。すなわち、「盤本体は3ないし5分位、1尺角程度の杉板に1糎間隔にドリル孔をあけておき、点表示にはこまを挿入する。こまの頭部には、みぞ切り又は横穴があって、針金をつぎつぎに渡しこんでいけば、直線曲線が出来上る。(中略)。糸を利用したものはたるみ、こまのみのものでは完全に図形を描くことが出来ない。」というのが、同氏のグラフ盤の大要である。

丹羽氏*6は次のようにのべておられる。まず、描画点字板について、「教具とその購入価格、持ち運びの難易および使用度の多少から考えて、指導用教具に大別すると、数学教育上特に不便を感じているのは、自習用としての作図用教具の問題である。点字板では図がかけないから、簡単な図形の説明にも特別な準備と方法で指導しなければならない。

これが、晴眼者のようにノートの上に定規とコンパスを使って鉛筆で書ければ簡単で

*6 昭和32年度全国盲教育研究大会発表要項 p.27

しかも能率が大いに上がるが、と常に思う。生徒はよく忘れ物をする。いや、面倒だからなるだけ持物を少くするのだ。そこで常に学習の場に持って来ている点字板に描画面の工夫をして見たのである。

また一つこの作図はやはり晴眼者と同じく小学生の始めから指導訓練されるのが望ましい。そのためにも、点字板に描画面があれば簡単で大いに活用出来る。この点字板さえ持っておれば字も画も何時でもどこでも生徒自らが書くことが出来るということを期待してこの描画点字板を考案したのである。」

この考えのもとに、同氏が工夫された描画点字板は、次のようなものである。すなわち、点字板の表面に点字を書くときにじゃまにならないように、5番線程度の金網を張りつけたものである。

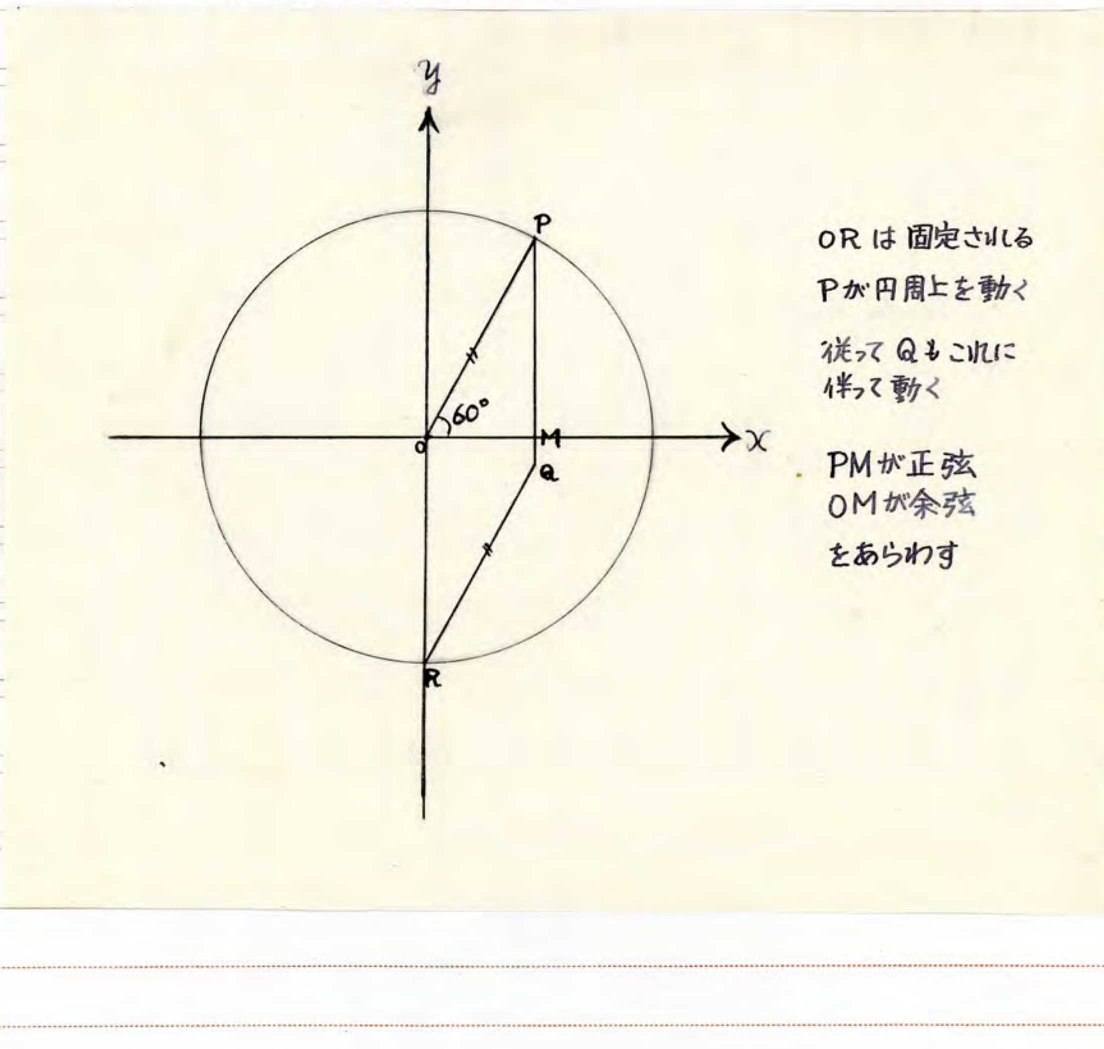
この器具の用い方は、金網の上に点字用紙を固定し、点筆、ルレット或いは釘をとりつけたコンパス等で、適度の力を加えながら

紙に線をひくのである。この~~さい~~際、図は紙の裏側に現われる。

　三角函数指導板については、「盲学校に於ける三角函数の導入説明に当っては、図形は絶~~体~~対に必要~~か~~欠くべからざるものであるが、これまた図示することの~~はん~~煩雑さと理解の困難さと、~~さら~~更に動径の移動、つまり角度を変数とする正弦、余弦、正接等、直角三角形の形の変化を理解させることに苦心していたので、これを説明するために考慮してみたのである。」という考えのもとに、次のような構造の器具を造られたことを報告された。すなわち、同氏の述べられるところによれば、形は50cmの方形の金属板とその裏打としてベニヤ板を使い、その間に長さ20cmの変角平行四辺形を1cm巾の金属板で作り取付け、動径と垂線の二つには、触知出来るよう5mm置きに凸点を出し、また、上面の金属板は半円を切り抜き、動径の動きにつれて、垂線の変化する様子を見ることが出来るようにしてある。

動径の端の周りには、5度おきに角度を目盛った動径は固定のままでは0度から180度までしか回転しないので、動端を抜き差し可能にして全回転の説明も出来るようにした。

丹羽氏の発表要項には、図が添えてないので、この説明では器具の構造の確かな事は分らないが、恐らく次の図のようなものであろうと思われる。



さて、今村・藤井・丹羽三氏の考え方は、結局、「出来るだけ目明きの児童生徒が用いる図や方眼紙と同様の教具を盲児に与えるべきである。これなくしては盲児に対して空間の性質を解析的に指導することは出来ず、また、函数をグラフによって研究させる事も出来ない」、ということである。従って今村、藤井両氏は、これまでの格子点だけしかとることが出来なかったグラフ板では連続的なグラフの性質を理解させる事は出来ないと考え、このようなグラフ板を考案されたのであろう。また、丹羽氏は　この器具を用いる事によってはじめて「動径」「正弦」「余弦」などの概念を理解させることが出来ると考えたものと思われる。更に、盲児の理解の程度を行動を通して評価するためには、盲児も図を描くことが出来なければならず、また、これを後に残すことが出来なければならないと考えられ、描画点字板などの工夫をされたものと思う。

次に、佐藤・長嶺両氏の考えをみよう。

まず、佐藤氏の研究であるが、発表要項にのせられたところは極めて簡単であり、これによってはどのような研究をなされたのか、ほとんど理解出来ない。しかし、筆者が研究会に於て直接同氏の発表を聞いたメモがあるので、これによって同氏の考えをみることにする。同氏の研究の中核をなすものは、「図形学習盤」による指導である。佐藤氏が工夫された図形学習盤は、厚紙から各種の図形を切抜き、図形を切り取られて穴のあいたこの厚紙を他の厚紙の上にはりつけたものである。これによる指導としては、低学年に於いてはさきに切取った厚紙のカードを、これにちょうど一致する学習盤のくぼみにはめこむ操作を通して、各種の基礎的な図形を区別する能力を指導するものである。学年が進むに及んで、図形の面積などを求める場合には、例えば、長方形や正方形の面積を求める時など大きな正方形、又は長方形のくぼみに、小さ

な正方形をはめこんでゆき、ちょうどいっぱいになる所までこれを続けさせ、後にこの数を数えさせて面積の公式を導かせる、といった指導をする。小学部の高学年から中学部の低学年にかけては、三角形、平行四辺形等の面積や、三角形の内角の和についての指導を行うが、この時には、たとえば、三角形の面積の公式を説明するのに、あらかじめ合同な二枚の三角形のカードを用意し、一枚をその高さにそって二分しておく。残る一枚のカードを、これと等底等高の長方形のくぼみにはめ込み、さきほど二分しておいた三角形をそのすきまにさらにはめこんで、長方形のくぼみを完全にみたすことが出来る事から、三角形の面積は、底辺×高さ÷2であることを理解させようとするものである。三角形の内角の和を求めるには、一枚の三角形のカードの三頂点を切離せるようにしておき、これを組合わせて、直線のへりをもつくぼみのへりにすきまなく接触させることが出来ることに

よって、これを行おうとするのである。ここにも見られるように図形の性質を明らかにする為の手続き（「重ね合せ」「組み合せ」「接触」など）を、盲児にも容易に行うことが出来るように工夫した点であって、学ぶべきものが多い。

長嶺氏*7は、幾何の指導の意義を、「前略人間は何人も、数の世界と同様、図形の世界に住んで居り、図形を物にし、これを使いこなせるようにしないといけないと思います。特に盲人は生活上のさまざまな行動において自分の身を守るためにも、あるいは衣食住に対しても特に必要であると思います。」

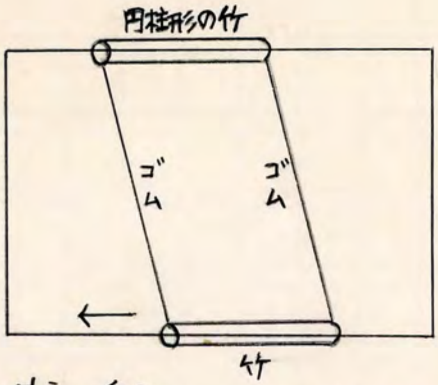
また、指導の困難性については、代数はよく出来るが幾何は困難であると前おきされ、「例えば、二つの相似の三角形を同じ方向におけば、相似であることが認識できるが、これをちがった方向におけば、相似であることが判別しにくくなります。これは図形がないから理解し難いのであります。また立体的な

*7 昭和32年度 全国盲教育研究大会研究発表要項 p.27

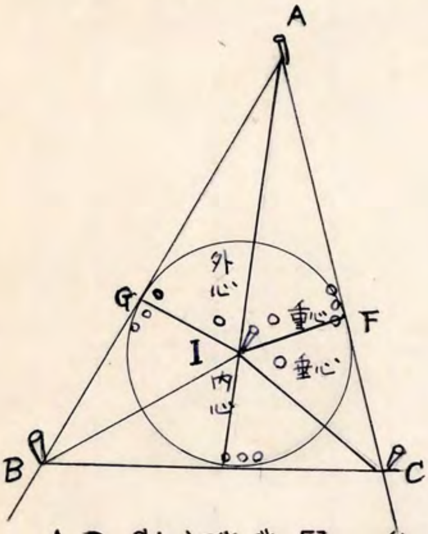
長嶺氏考案の教具の図

No. 48

(イ) 平行四辺形の面積

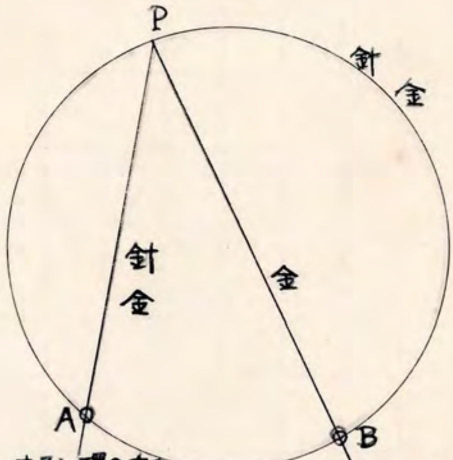


(ロ) 三角の内心, 傍心, 外心, 垂心, 重心の説明が一度に出来る模型



A, B, Cからゴムで針「I」に結んである。針Iを外心, 内心, 重心, 垂心に指すだけでそれ等の説明ができる。

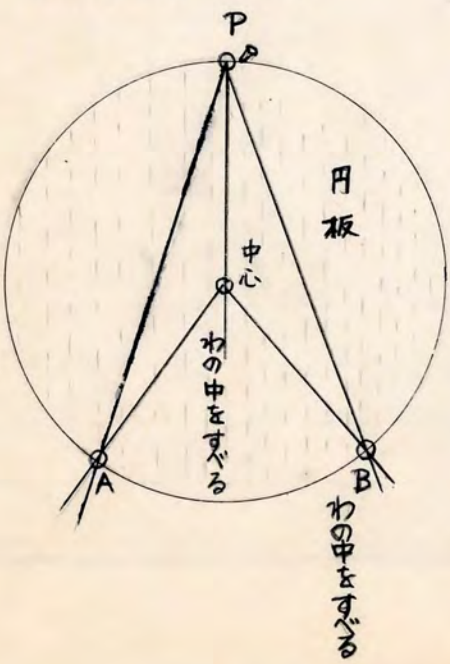
(ハ) 円周角の説明器



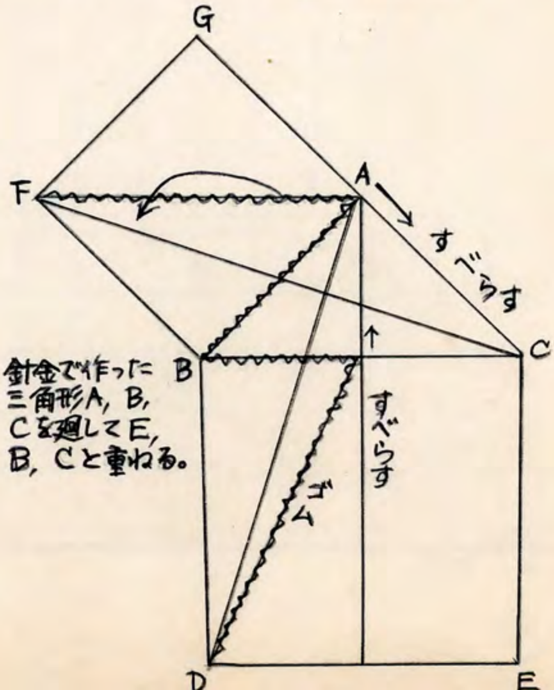
まるい環の中を針金がすべるようにする。

針金の角のP点を移動すると円周上を動く。

(ニ) 円周角と中心角



(ホ)「ピタゴラスの定理」の説明器



針金で作った三角形A, B, Cを廻してE, B, Cと重ねる。

ものを平面的な紙の上に書くから理解し難いのでありますから、教師が図形を立体化した模型を作って与えればよく理解できます。」と述べられておる。

指導の内容としては、多角形の性質、円の性質、作図問題、解析幾何等をあげておられる。特に注意すべきことは、作図問題の中から「相似形、軌跡は省略すべきである。」とのべておられることである。

更に教具を整備することにふれ、「教科書の中にある図形はみな教師が立体化して作って指導すべきである。」と、述べて居られる。実際同氏は以上の考えにもとずいて考案された教具を多数紹介された。その大要を、発表要項にのせられたところにより示せば次の図の通りである。（前頁参照）

ここに示されたような器具があれば確かに初等幾何に於ける様々な概念（例えば、三角形の垂心、内心、傍心など）を理解させたり、論証の手続きを説明したりするのに便利な事

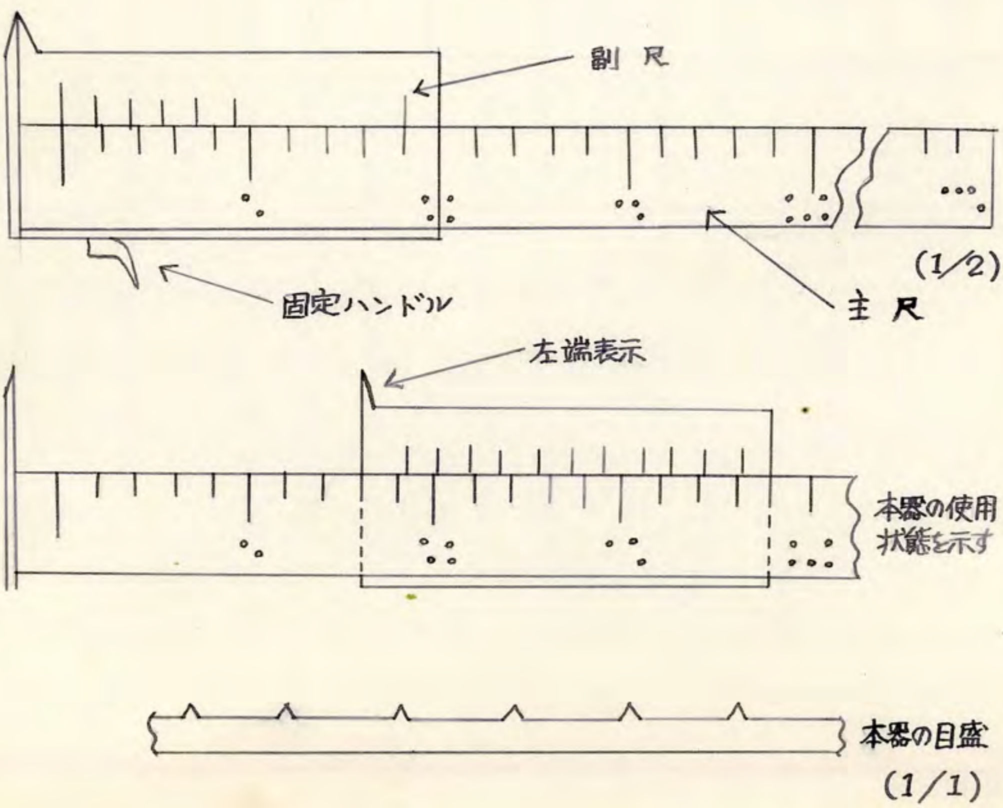
と思う。

山田氏の研究は、「『たて8.2センチメートル、よこ6.8センチメートルの長方形の面積を求めよ。』これは現在点字毎日社が点訳出版している、中学一年の数学教科書にある問題である。一般の学校に学ぶ生徒は、この長方形を各自の物差を使って、すぐに描いてみることが可能であり、図があればその縦横の長さを測ることも出来るから、かれらは身近なものとしてこの問題を考えるであろう。しかし、盲生徒にあっては必ずしもそうであるとは言えない。かれらはただセンチメートルの10分の1がミリメートルであると教わった通りに信じ込んでいるにすぎないのであって、板でこの大きさのものを作り与えても、辺の長さを測ることが出来ないのである。私はこれまで5ミリ間隔の盲人用物差を使用させてきたが、そのたびごとに教科書との隔たりを感じ、これをどう解決したらよいか迷った。生徒は日常使用している点字板の縦と横

の正確な長さを測ることなく成長し、高等数学を学習するようになる。これではますます数学が日常生活から遠く離れたものになってしまう。

　以上の点から私は、ミリの測定が可能な盲人用の物差の必要を痛感し、その試作を行った（30年12月）。」　という動機からなされたものである。

　以上の考えのもとに、山田氏は、ミリメートル単位で測定できる盲人用物差を考案されたのである。



この物差の構造は、発表要項によれば図のようなもので、これを盲児が自由に用いる事が出来れば、三角形のどの辺を底辺に選んでも、底辺×高さが一定になる事や、円周の長さが、直径の約3.14倍になる事を実測によって確かめる事が出来るようになるだろう。これまで実測による図形の性質の学習を甚だしく制限されていた盲児にとって、この教具の果す役割は大きいにちがいない。

石田友松*8氏（3）の発表は前記七氏のものとは異り、盲児が図形を観察*9する方法を細かく分析し、これによって盲児の図形観察を指導する原理を明らかにしようと試みられたものであり、盲児に対する空間の性質の指導に一歩を進めたものということが出来よう。なんとなれば、いかに立派な教具が工夫されても、これを見る盲児がその見方を知らず教具が何を示そうとしているか理解出来ない限り、教具を工夫する意味がないからである。

石田代は、盲児の触察原理として十五の原

*8. 石田友信代の誤植.

*9. 同代は触察という言葉を用いて居られる。これは観察の「観」という文字を本来の意味に忠実に従って解釈されたためにあえて「触察」なる言葉でおきかえられたものと思う。しかし、筆者としては、観の字には「つまびらかにみる」という意味もあり、いちいち言葉の使いわけをする必要を感じないので、盲児に対しても観察なる言葉を用いることにする。

理を数えておられる。ここに石田氏の発表事項を全文引用する。

1. 研究の方法．本校生徒晴眼児への実験と Psychology and art of the blind とを中心として行った。

2. 盲児の触察原理と触察方法

体を知る。

(2) 感受的態度と目的的態度　触る目的により触察態度が異る。分析を要する場合と物名を知ればよい場合とである。

(3) タイプを確立する原理　盲児は対象物を単純，または標準的な形に簡素化しては握する。

(4) 転移する原理　訓練された盲児ではさわった連続運動にそって触察体験を平面図にするものもある。

(5) 構造分析の原理　触察分野では視覚と異り全体の形を構造分析でとらえる。

(6) 構造総合の原理　構造分析の後には構造総合があり全体を総合する。

(7) 連続触察の原理　物体の触察はとびとびで

はなく連続的に閉鎖的にするのがよく再現にも役立つ。

(8) 運動触察の原理　物体のは握は運動によってであり手，指の動きは立体的印象，形態を明確につかむ。

(9) 純粋触覚による原理　筋肉運動をともなわず．静触察により物体をは握出来ることもある。

(10) 長さの原理　親指の太さ，指の長さ．親指と小指，または人指指との間の距離等手の長さを利用すべきである。

(11) 特徴は握の原理　特徴ある部分は念入りに触察し基礎図形に照して記憶するとよい。

(12) 定点固定の原理　定点の定め方により図形のは握は比較的容易となる。

(13) 触察のポーズ　触察を写真で判定すると線の変化する部分でいちじるしい停止がみられる。これは物体は握上きわめて好ましい。

(14) 両手触察の原理

(15) 対称化尖鋭化の原理

3. 基礎図形指導段階（原理の応用）

要約

段階	図形	指導目標	学習活動	触察指導
低学年	ながしかく ましかく さんかく まる	(1) 図形の性質にはふれない。 (2) 遊び作業を通じて直観力を養う。	(1) 身のまわりからさがす。 (2) 粘土で工作する。	(1) 基本的には触り方の指導は無理にせず触った感じを自由に発表する。 (2) 日常の具体物で相似形をえらび沢山触察し洞察力を養う
中学年	長方形 正方形 直角三角形 正三角形	(1) 具体物を離れ図形という概念に移行する。 (2) 測る描く作業を行い基本性質を学習する。	(1) 作図板に各図形を描く。 (2) 用具の使用を理解する。	(1) 左指先で一周閉鎖的に触察し漸次両手で原理にあったようなさわり方を指導する。 (2) 作図の作業を通じて描きながらその理解を深める。
高学年	直方体 立方体 円柱 角柱	(1) 図形知識を増大させ数量面に発展する。 (2) 立体物の平面化をはかる。	(1) 見取図展開図の基礎を学習する。	(1) 異る図形を触り相互に比較出来るようにする。 (2) 触覚の視覚化は困難ではあるが方法として大切であるので基礎につき指導する。

以上要約し概説した。

さて、石田氏の数えられた原理の中で、特に数学的に重要であると思われるものは、

(3)　(5)　(6)　(7)　(8)　(10)　(12)　(13)

である。すなわち、(3)タイプを確立する原理(7)連続触察の原理、(8)運動触察の原理は、対象物の位相をつまびらかにする上に必要なものであり、ことに、(7)連続触察の原理と、(8)運動触察の原理については、J. Piaget も子供の空間概念形成の最初の段階は空間の位相についての認識が確立されることであり、これにあずかって力あるものは触運動的知覚である事を指摘している。*10 また、(5)と(6)と(13)とは、多面体の要素を明かにする上に有用なものである。Piaget も、直線図形と曲線図形の区別は頂点に於ける運動の不連続を認めることにはじまる、と指摘した。(10)と(12)は、観察対象のユークリッド的な表象、すなわち計測的な性質を指導するのに役立つと思う。特に(10)は目明きの児童生徒に於ける目測に代るべきものとして指導上注意すべき原理である

*10. Jean Piaget and Bärbel Inhelder : The Child's Conception of Space.
F. J. Langdon & J. L. Lunzer 訳　p.31 — 43.
(La Representation de l'Espace chez l'Enfant)

う。

以上が今日までに~~あらわ~~現れた盲児に対する空間の指導についての考え方である。これをまとめると、

1、目明きの児童・生徒に対して図を与えるのと同様に、盲児に対しても指でふれて分るような図や模型を与えるべきである。

2、盲児に対して図や模型等を観察する方法を指導すべきである。

ということになる。

第三章　過去の研究に対する批判

さて　以上でこれまでの研究をひととおり見渡すことが出来たが、ここで　もう一度これらを考えなおしてみることにしよう。

長嶺氏はじめ大部分の人々の考え方は、「空間の性質の指導には、目あきの児童　生徒に図を与え、あるいは図を画かせることが必要であるのと同様に、盲児に対しては、指で触れてみてわかるような模型を与え、あるいは然るべき作図器を用意しなければならない。これによってはじめて盲児に空間の概念を理解させることが出来る。」ということであった。これは、かつてD. Diderot が「生れながらの盲人は如何にして図形の観念を造り上げるのだろうか？という点です。私の考えるところでは、盲人自身の身体の運動、彼の手が次々と数ヶ所に置かれること、その指の間を通る物体の絶えざる感触などから盲人は方向の概念を得るのにちがいありません。ぴんと張った絲の上で指を滑らすと直線

の観念が得られ、弛んだ線の曲線を辿れば曲線の観念が得られます。更に一般的にいえば、盲人は触覚による反復的経験によって、相異る箇所で感じ取った感覚を記憶するにいたるのです。盲人はこれらの感覚、或いは点を結び合わせ、そこから自由自在に図形を作り上げ得るわけです。」*1 と述べた考えに通ずるものである。

たしかに 今村 藤井 丹羽の諸氏が考案されたようなグラフ板や三角函数指導板があれば、グラフや三角函数の概念を指導するのに便利であるに違いない。「座標」「座標軸」「与えられた函数関係を満足させる点」等という言葉の意味を正しく理解させるには、グラフ板は大いに役に立つであろう。 $y = ax$ を満足させる点をとっていけば、それらが原点を通りカタムキ a の直線の上に並ぶことがよく分る。また「座標 $(\frac{3}{2}, \frac{4}{7})$ の点を取れ」という問題を与え、生徒が正しくこの点をグラフ板上に~~現~~表わすことが出来れば、教師とし

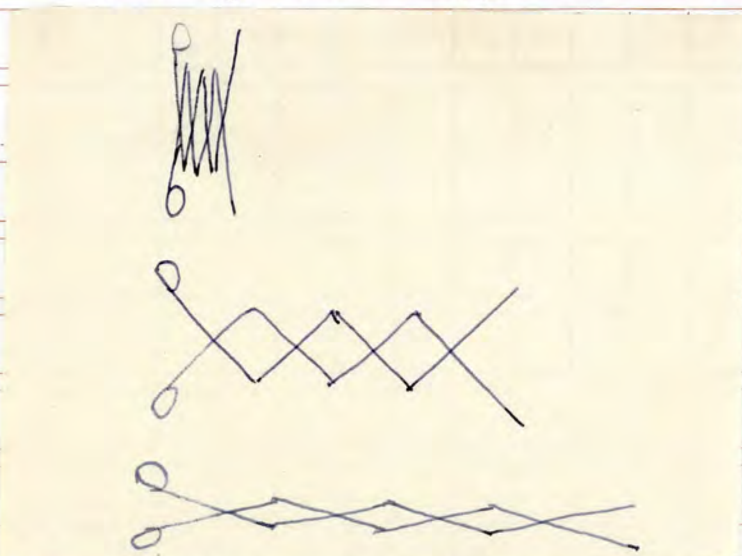
*1 D. Diderot 著 吉村道夫 加藤美雄 譯『盲人書簡』 P.26～P.27

ては生徒がどの程度座標の意味を理解したか評価することが出来る。三角函数指導板についても、動径、正弦、余弦 等の定義を理解させるのに大変便利であろう。こゝに盲児は目あきの児童、生徒のように、直接感覚を通して教師の画く図を無批判にまねることは出来ないから、これらの器具を与えておき、教師が言葉によって行なう説明に従って正しく点をとり、グラフを作り上げるのには「座標」「座標軸」「与えられた函数関係を満足させる点」等という言葉は、いやでも正しく理解しなければならない。

しかし、これらの器具を正しく使えるようになるには、いくらかの基本的な幾何学の知識がどうしても必要になる。たとえば
函数 $y=ax$ を満足させる点は、原点を通るカタムキ a の直線の上にあることはグラフ盤で分るとしても、その逆すなわち原点を通るカタムキ a の直線の上にある点はすべて $y=ax$ を満足させるということを確かめる

には「三角形の三辺の比は互いに相似な三角形の間では一定に保たれる。」という相似三角形の性質があらかじめ理解されていなければならない。「二点からの距離の和が一定であるような点の集まり」が方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を満足させる点の集まりであることを確かめるためには、ピタゴラスの定理を繰返し用いなければならない。丹羽氏の三角函数指導板の意味を理解するためには、菱形の枠が「辺の長さと対辺の平行性を保ったまゝ角を変じ得る。」ということを理解していなければならない。また正弦や余弦が、直角三角形の角のみに関係する価であって、動径の長さには無関係なことを理解するには、再び、相似三角形の性質が~~ひきあい~~引合いに出てくる。しかも、ピタゴラスの定理や、三角形の相似の条件を理解するためには、三角形の合同の定理が理解されていなければならない。グラフ板や三角函数指導板は、それ自身では決してこれらのことがらを生徒に教えはしない。もともと座

幾何は三角形の合同の定理や相似の定理，或はピタゴラスの定理の上に成り立つものなのであるから，グラフ板や三角函数指導板など一連の解析的な教具を使いこなせる為には初等幾何の基本的な定理はひととおり心得ていなければならない。実際，J. Piaget によれば「11，2才頃」までの子供は，与えられた三角形の一辺をある長さだけ延ばしたとき，他の辺もこれと同じ長さだけのばせば「形の同じ三角形」が出来ると考えることがあるとのことである。*2 また同じ位の年の子供に下の図のような道具を用いて 菱形の枠を子供の目の前で少しづゝ動かしてみせ，菱形



*2 J. Pia[illegible] Chapter XII Similarities and Proportions §3. Inscribed Triangles. Substage III A. (P. 332)

標幾何は三角形の合同の定理や相似の定理，或いはピタゴラスの定理の上に成り立つものなのであるから，グラフ板や三角函数指導板など一連の解析的な教具を使いこなせる為には初等幾何の基本的な定理はひととおり心得ていなければならない。実際 J. Piaget によれば「11,2 才頃」までの子供は，与えられた三角形の一辺をある長さだけ延ばしたとき，他の辺もこれと同じ長さだけのばせば「形の同じ三角形」が出来ると考えることがあるとのことである。*2 また同じ位の年の子供に下の図のような道具を用いて 菱形の枠を子供の目の前で少しづゝ動かしてみせ，菱形

*2 J. Piaget : The Child's Conception of Space. Chapter XII Similarities and Proportions §3. Inscribed Triangles. Substage III A. (P. 332)

がどのように変化していくか予測させたところ、子供は菱形の辺の長さと対辺の平行性は常に保たれているということには少しも気付かなかった※3ということを報告している。図を目の当り見ている目あきの子供でも、このとおり三角形の相似や菱形の変化についての性質は理解しにくいものであることが、心理学上明らかにされている限り、我々は、グラフの指導に先だって初等幾何の基本的な事柄を理解させておかねばならぬという考えを一層強くする。そこで幾何図形の指導に就いて述べられた佐藤氏と長嶺氏の考えをみることにしよう。

　佐藤氏の研究は主として小学部から中学部までの盲児を対象としたものである。従って演繹的な論証を助けるためのものではない。それはたとえば三角形の面積の公式を求めるとき、合同な二枚の三角形のカードをとり、一枚をその高さに沿って切りはなし、その各各を他の三角形に付け加えて最初の三角形と

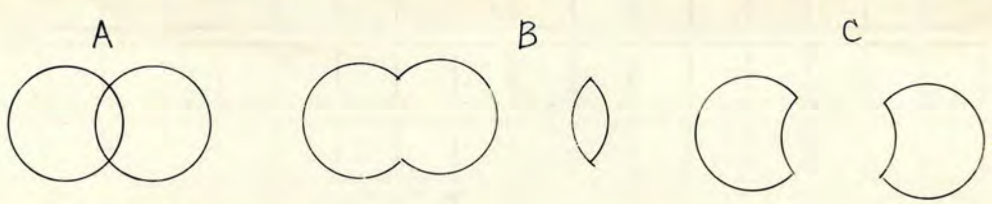
※3 J. Piaget : The Child's Consception of Space. Chapter XI. Affinitive Transformations of the Rhombus and the Conservation of Parallels. §5 Substage III B and Stage IV. Explicit formation of the relationships (P.315)

等底等高の長方形を切り抜いた穴を埋めることから、三角形の面積は 底辺×高さ÷2 であることを理解させようとするようなものである。また、三角形の内角の和が180°であることを説明するのに、一枚の三角形のカードの三頂点を切りはなし、これを一点に合わせて直線と一致することを示す、というように用いるものである。これによってみれば、同氏は 幾何図形の性質を帰納的に理解させることを狙ったものと思う。しかしこの方法では教師が用意した一つか二つの事例によって一般的な判断を下すことになるので帰納的な推論に必要な「条件を変えて実験する」という態度を伸ばすのには望ましい方法とはいわれない。この為には 丹羽氏の描画点字板のような教具が役立つことが分る。また佐藤氏の方法では三角形の高さを示す線が底辺の延長上に落ちる場合にも、その面積の公式がなりたつことを理解させることはむつかしい。

一方、長嶺氏の研究は高等部の生徒の為のものであり論証を行なうことを仮定したものと思われるが　これらの教具から果して論証に先立ってあらかじめ図形の性質を予想することが出来るであろうか。これについて思い出されるのは山根請道氏の「触運動的図形知覚に就ての実験的研究」*4である。

同氏の研究によれば　触運動的図形知覚では、視覚的図形知覚とは異なり、一連の直線もその途中で他の直線や曲線に交わることによって幾つかの線分のつながりとして知覚される。この為に与えられた図形と合同な図形を複雑な図形の中から見出すことが一般に困難になると報告している。

また　榊原請教授も　相交わる二つの円を盲児に見せると図のような二つの曲線の組合



*4 心理学研究第十巻(1935). P.327～P390

せとして知覚されることが多い[*5]と述べられている。このような事実があるとすれば、たとえばピタゴラスの定理の証明に用いられる下の図に於て、三角形ABHと三角形DBCとが合同になることをこの図から予想することは、余程論理的な思考の裏付けがなければ~~むつか~~難しいと考えねばならない。

また　永井昌彦氏の研究によれば、二つのカードが相似であるかどうかを触運動的に弁別させるとき、そう多くはないにしても三日月形と半円、正方形と長方形、平行四辺形と正三角形等の間に混同が起きることが知られた。[*6]

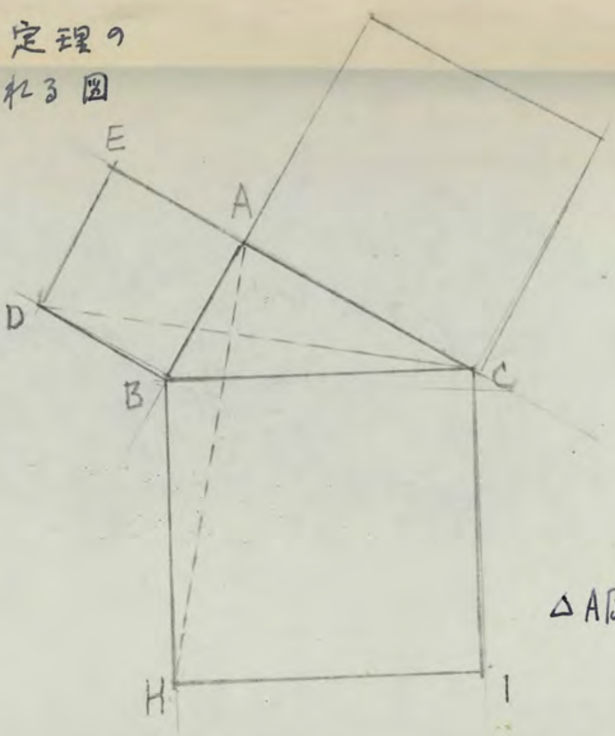
従って　佐藤・長嶺両氏の研究では、教師の言葉による説明は証明の手続きを理解させ

従って 佐藤・長嶺両氏の研究では、教師の言葉による説明や証明の手続きを理解させることが出来るとしても、盲児が自ら図形の性質について予想をたて、これを証明していくという態度や能力をのばすためには十分ではない。殊に触運動的な図形の知覚に一連の直線を一連のものとして見ることを妨げ、

*5 榊原清：盲児の心理と教育 P.143

*6 永井昌彦：盲人の触運動的形態知覚に関する研究。盲心理論文集 第三巻 P17

ピタゴラスの定理の証明に用いられる図



△ABH＝△DBC

一つの円弧を一連の円弧として認めることを~~はまた~~妨げる性質があるとすれば、盲児に対して触運動的に図形を観察させるための指導が必要になると考えねばならない。また正確な実測の手段を与えることも考えねばならない。

この意味で山田氏が考案された~~複~~副尺付物指の果す役割は大きい。前にも述べたように、これによって三角形や平行四辺形の底辺と高さの積は底辺の選び方に関係しないとか、円周の長さは直径の約3.14倍になることを自から見出すことが出来るであろう。三つの角がそれぞれ相等しい二つの三角形の辺を実測することによって、互いに相似な三角形の辺の比は一定であることを見出すことも出来るであろう。また盲児にも取扱いの出来る精度の高い分度器を工夫することが出来れば、三角形の内角の和が180度になることなども見出しうるに違いない。盲人用のカーゼメーターやプラニメーターを作ることが出来れば、曲線図形の直線図形による近似が実用上

有効だと理解させることも出来よう。

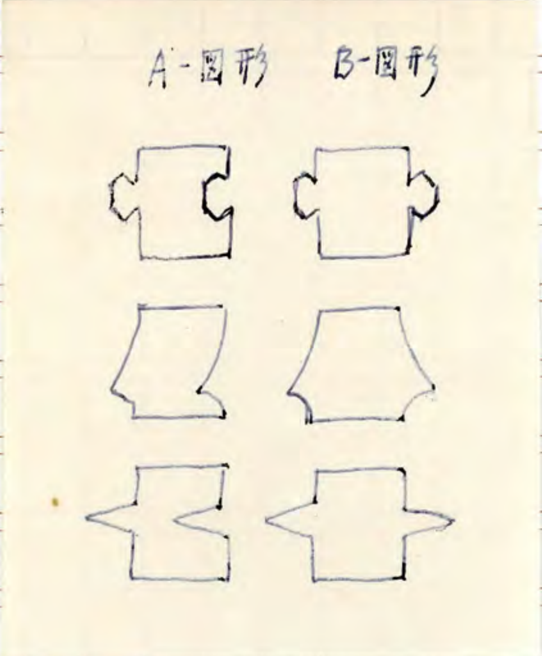
しかし、如何に実測の手段が改良されても「相異なる図形の面積は如何なる時に等しいと考えたらよいか？」「相異なる立体の体積は如何なるとき等しいと考えるべきか？」ということは実測の経験からは生まれてこない。むしろ以上のようなことが前提となって実測の手段が考えられるのであるから、この点をぬきにした実測による指導は問題の核心にふれたものとは云えない。単に各種の図形の面積の公式を記憶させ、実測によってこれを計算することを繰返しただけでは一般の図形の面積はどのようにして求めたらよいか理解されないことは明らかである。これについて、Wertheimerは次のように述べている。*7

「そこで私は子供たちについて実験を行ってみた。補助線をひいて平行四辺形の面積をどうして見出すかを示した後に、次のAとBとの図形の片方または一対を彼らの前に提示した。これらの図形の対において、そ

*7 M. Wertheimer: Productive Thinking. 矢田部達郎訳 生産的思考 P.24〜P.25

の一方のB-図形ではA-解決をもちえないが、A-図形ではA-解決が可能である。或る子供たちにとってはAとBとの図形の間に少しの相異もない。皆目新しいのであって、"どうして僕たちにわかるものか"というのが彼らの態度である。彼らはなんの反応も示さないし、もし示しても決してA-図形とB-図形との区別をしないで、いくらかの補助線をひいてでたらめの解答を与える。

例：



結局、長さや面積や体積を測定する基本的な考え方の指導は、単なる実測からは生まれ

てこないことが分る。従って長さ，角度，面積，体積などの測定の原理を指導しなければならない。

　たとえば，長さの場合が最も簡単である。互に重ね合わすことの出来る線分の長さは相等しいと考える。折線の長さはこれを形作る線分を直線上に並べかえて、出来る線分の長さと考える。線分の長さは，単位の線分がこれから幾つ取れるかによって定める。端（はした）が出れば単位の長さの線分を互いに合同なｎ個の線分に分解したものを単位にとって，この何倍ということで求める。勿論，単位の長さの有理数倍で表わされない線分の存在には，いずれ出会わねばならないことは云うまでもないが，小学校や中学校の課程では上に述べた考え方を身につけることが大切なことである。

　長さの場合は，まずまず大丈夫としても，面積になると大分趣きが変ってくる。それは、面積は特殊な場合を除いて、単位の図形をもって

No. 71

を測定しようとする図形の内部を埋めつくすことが出来ないからである。Hirbertの面積測度の理論によれば「二つの單一多角形が、それぞれ有限個の三角形に分たれ、これらの細分三角形がそれぞれ二つづつ互いに合同なるとき」この二つの多角形は等しい面積をもつと考える。また「二つの單一多角形P，Qにそれぞれ二つづつ面積の等しい有限個の多角形P', Q'；P'', Q''；……$P^{(n)} Q^{(n)}$を附加して多角形$P+P'+P''+\cdots\cdots+P^{(n)}$と$Q+Q'+Q''+\cdots\cdots+Q^{(n)}$を互いに面積を等しくならしめ得る時」最初の二つの多角形は面積が等しいと考えるのである。*8

このような考え方によって、二つの多角形の面積が相等しいとは如何なることかを理解することからはじめて、ある図形の面積が他の図形の面積の何倍であるとはどんなことかを理解しなければ、一辺が1mである正方形を面積の單位にとることや、三角形や平行四辺形の面積を求める時に用いた考え方などは

*8 Hirbertの幾何学基礎論；中村幸四郎譯　P120～140

違

理解されないにちがいない。実際、辺の長さをn倍に拡張した多角形の面積は、最初の多角形の面積のn倍であると考える人が大人の中にもある。また子供では互いに合同な図形を結合して作った図形でも、その形が異なる時には面積が等しいことが理解できないことがある。そればかりかPiagetによれば、六才以前の子供では、図形はその位置を変えることによって、長さや容積を変えるものであると考える傾向があるということである。また二つの点の間の間隔は、その中央に第三の点を入れることによって、広くなったり狭くなったりすると考えられるとのことである。※9 知覚に関する心理学の研究によれば、「視空間、触運動的空間或いは時間知覚等に於て、分割された距離或いは時間は、分割されない距離或いは時間に比して一般に過大視される傾向がある」※10 といわれているが、Piagetが報告した事実は子供の思考がこのような錯視に支配され、二点の距離を変えない操作を行ったにもかかわ

※9 松本金寿：児童の心理（Piagetの児童心理学の紹介書）P.19～P.20.

※10 横山松三郎：触空間に於ける距離の知覚。心理学研究第十巻．P.805.

らずこの操作によって二点の間が変ったかのように考えるということを示すものであろう。つまり子供は感じられるままに外界が存在すると考え、外界は外界自身の法則に従って存在することが理解出来ないのであろう。これは子供の自己中心的な傾向によるものと思われる。こうした傾向から、外界を客観的に理解出来るように教育しなければならないのであるから、測定についての基本的な考え方の指導なしに、単に精密な測定器具を与えても、これを問題解決に有効に利用出来るとは考えられない。これが長さのように直接~~推~~測定出来るものならばまだしも、面積や体積のように直接測定できないものや、直接比較することの困難なものではなおさらその測定の原理を徹底させる必要があるといえる。指導上注意しなければならぬこととしては次のような事実もある。それはSiemsenによって明らかにされたことであって、触運動的に直線と感じられるものと、客観的な直線との間にずれ

があるということである。その為に、客観的な直線を触運動的に観察するときは、観察者に対して、やや凸な曲線と感じられる。この傾向は観察の対象と観察者との距離が小さくなればなるほど著しくなる。※11 従って盲児に観察の仕方を如何に丹念に指導したとしても、錯覚が、感覚機能本来の性質から生ずるものであると考えられる以上、これだけで空間の性質を十分認識することが出来るとはいえない。観察に当って、その結果を常に合理的に反省する態度がなければ、観察結果から観察対象の性質を導き出すことは難しい。例えば「正方形を対角線で折返して出来る形は何か」という問に対して「正三角形」と答える盲児がよくある。彼等は折紙をして、何度もこうした経験を持っており、出来上がる形に触れたことは何度もある筈である。また正三角形は三つの角が皆等しい三角形であるということも知っている。それにも拘わらず、このような誤った結論を下すのは何故か。これについて

※11 心理学研究 第十巻 P.141～P.142.

今直ちに答を得ることは困難であるが、このような答をした盲児に、「それならこの三角形の角はみな同じかな」と問返してやると大抵の場合その誤りに気付くものである。また、辺の長さが10cm, 9cm, 8cmの三つ正三角形の高さを計っていた盲児が次のようなことを云い出したことがある。「正三角形の高さは辺の長さより1cm短かい。」実際、辺の長さが10cmの場合8.660cm, 9cmの場合7.794cm, 8cmの場合6.928cmであるから、正三角形を切抜く時の誤差や測定の誤差を考えると、盲児がこのような誤まりをおかすことは無理もないことである。そこで「それなら辺の長さが1mになったらどうかな」と問返してみると「今のは違っていました。10cmの時9cmだから1mの時は90cmでなきゃいけない」と誤まりを認めた※12 このように観察の結果を合理的に反省する態度の指導については、過去の研究は全く触れていない。ただ単に目あきの児童生徒に図を与えるように盲児にも模型を与え

※12 昭和32年2月、本学附属盲学校小学部4年生の授業より。

目あきの児童生徒が図を描くことに対応して盲児にも容易に作図出来るような方法を求めてきたに過ぎない。

しかし、数学にとって大切なのは、物自体ではなくて物と物との関係である。「紙の上に描いた幾何学的な図形は、それが推理を見易くするという便宜的な効用以上に本質的には不必要なものとなっているのを注意しなければならない。」※13という近代数学の、ものの考え方を我々も忘れてはならない。盲児に与える模型や図は、推論の見通しをよくする限りに於て取上げるべきである。触運動的知覚の特殊性や、錯視によって、推論の見通しが妨げられるとしたならば、図を用いることは却って有害である。模型の構造の複雑さに心を奪われ、数学的な本質を見落すことのないように指導しなければならない。図形の性質の中で、論理的な作用を営まないものについては指導すべきではない。たとえば「点とは大きさのないものである」とか「直線とは、

※13 中村幸四郎：幾何学基礎論．P.2～P.3.

長さのみありて巾なきものである」とかいう~~ことがら~~事柄が、盲児にも理解出来るとか出来ないとかいうことにこだわる必要はない。
必要なことは、普通、点、直線、平面などと呼ばれるものを、盲児もこれに触れたとき、点、直線、平面であると認めることが出来、これと同時に「二点を通る直線は常に一つあり且つ一つに限る」とか「二つの平面の交わりは直線である」とかいうことを認めることが出来るように指導することである。左右対称な図形の美しさとか、安定感とかいう論理的な作用とは無関係な図形の感覚的性質にこだわる必要はない。長方形や正方形を盲児が観察してどう受け取ろうと、数学にとって大切なことは「長方形も正方形も、対辺の中点を結ぶ線で折りかえせば完全に重ね合わすことが出来るが、対角線で折返した時には、正方形は重なり長方形では重ならない」ということが正しく推論出来るようにすることである。この意味で、立体の見取図を透視画法の考

えを抜きにして、教えようとすることは無駄なことである。また、山田氏が「1cmの分が1mmであるとただ信じているだけである」と盲児について述べておられるが、筆者はこれで十分だと信ずる。1mや1cmの長さを推測できることは意味のあることには違いないがこれらの基準となる長さがほぼ理解出来ているならば、1mmを感覚的に捉え得るとか得ないとかいうことを論ずるのは無益なことである。目あきの場合でも1ミクロンとか1オングストロームとかいう長さは1mmの1/1000とか、10^{-8}cmとか理解していてそれで一向差支えない。大体日常生活に必要な長さの単位といえば、km、m、cmなどであって、mmを問題にすることは殆どない。しかも、これらは互いに独立な単位として定められたのではなく1mを基準にして定められたのである以上、1mmは1mの1/1000と理解して一向に差支えない。必要なことは、空間の感覚的な内容ではなく、空間の論理的関係

である。この注意は、作図に当っても守らるべきである。現在盲児が用いるコンパスと称するものは金属又はプラスチックの細長い板に等間隔に穴をあけたもので、確かにある半径の円を描くことは出来るがコンパスの重要な役割である「任意の長さを移すこと」には役立たない。また長さの大小を比較するのにも役立たない。このような点が見落されていることは、現在の盲学校に於ける空間の性質の指導の最も大きな欠陥と云わねばならない。この点、丹羽氏が普通のコンパスを作図に用いられていることは望ましい事である。

以上考察してきたところにより、今日行われている盲児に対する空間の性質の指導の欠陥は次のように考えることが出来よう。即ち盲児が空間の性質を理解しようとする時、その中で論理的な作用を営む基本的な概念を、如何に指導するかが研究されていないことである。筆者はこの点に着目し、この研究を進めることにする。

第四章　この研究に於いて立証すべき仮説について

これまでの考察によって明らかになった事は、次のような事であった。すなわち、「空間の性質を明らかにするとき、論理的な作用を営む基本的な概念を如何に指導するか」という事が研究されていなかったことである。もっとも、石田氏の研究は、盲児が空間の位相的性質を理解する上に有用な観察の方法を明らかにしては居るが、これだけでは、空間のユークリッド的な性質を理解するためには充分でない。従って、筆者の研究は、この空間のユークリッド的な性質を如何に指導するかを明らかにする事を主として取扱うことにする。では、空間のユークリッド的な性質を理解させる為には、如何なる指導の方法が選ばれなければならぬであろうか。その為には先ず、空間のユークリッド的な性質を明らかにする時、論理的な作用を果す概念を、如何に指導するか、という問題に答えなければ

ならない。また、児童や生徒が観察によって得た知識を、矛盾のない体系の下に整理する能力を、如何にして育てるか、という問題を解かなければならない。そして、この後の問題は、やがて論証につながるべきものである。従って、この研究に於いては、前者のみを研究の対象とすることにする。

では、盲児が空間のユークリッド的な性質を理解するとき、論理的作用を果す基本的な概念は、如何なる指導によって発達せしめ得るか。この問題を解く為に、筆者は次の仮説を立て、研究を進めることにした。すなわち、「盲児が空間のユークリッド的性質を理解するとき、論理的作用を果す概念は、『平行移動』『廻転』『折返し』等、『合同変換とみなし得る運動』及び『図形の分解と結合』等の操作によって形成される。」というのが、この研究に於て立証すべき仮説である。

筆者がこのような仮説を立てた理由は、お

よそ次の様なものである．すなわち，盲人が様々な形の区別を要求される場合，しばしばその対象を重ね合わせてみる。これによって，単に触れてみるだけではっきりと区別のつかない二つの物を，あやまりなく区別する事が出来る。例えば，百円札と五百円札の区別は，単に触れただけでこれを直ちに区別できる盲人は，決して多くはない。しかし，日常盲人がこの区別にさほど不便を感じないのは必要に応じて重ね合わせ，その大小を区別することが出来るからである。従って，直線の概念を理解させるためには，二枚の直線定規を用意し，そのへりを相接し，また，互いに重ね合わせ，両者の間に，すきまも，くいちがいも生じない事を見出ださせるならば，これから「二つの点を通り，常に，ただ一つの直線を引くことが出来る。」という，直線の最も基本的な性質を理解させることが出来るに違いない。この際行った「相接し，また，重ね合わせる」事は，合同変換に於ける

誤

折返しに対応する操作である。直角を理解させるには、互いに重ね合わせる事の出来る角を二つ取り、これを隣り合わせて共通でない辺が直線をなすものを直角であると理解させれば、三角定規によって、身のまわりに容易に直角を見出だすことが出来るようになるであろう。この場合に用いた操作は、図形の結合でもあり、また、折返しでもある。与えられた曲線図形が円であるか否かを見定める為には、これと重ね合せる事の出来る図形を選び、或いは、これを紙に画き、如何なる向きに廻転しても常にその周が一致することを見ればよい。これによって、「円とは、一平面内にあって、一点から等距離にある点の全体である」ということが理解されるに違いない。従って、これから、円を画く為の道具であるコンパスが、また、一定の長さの線分を写す為の道具でもあることが理解されるであろう。このとき、関係した操作は廻転であった。

　四枚の合同な三角形を組合わせて、辺の長

さがこれらの三角形の二倍の三角形をつくり出す操作によって、相似三角形の性質や、辺の長さがすべて二倍であるような三角形の内部の広さが四倍となることも理解できるであろう。このようにすれば、二つの多角形を、各々一対ずつ互いに合同な三角形の集りに分解することが出来れば、はじめの二つの多角形の面積は相等しい、と考えるべきである、という事も、理解されるであろう。

以上のような予想によって、上述の仮説を立てたのである。なお、合同変換とみなす事の出来る操作によって、概念を定義する事は、数学的にも全く妥当な事である。では、この仮説を立証するには、如何なる実験がなされねばならぬであろうか。

筆者は、これを次のように考えた。それは、

先ず、この仮説が真であるならば、「ある程度、日常、この様な操作を行っている盲児は、多少のユークリッド的な空間表象を、自然状態でも、もっていなければならない。」

もちろん、その発達段階に於いて、多少の違いがあるとしても、この様な事実を確かめることが、この仮説を裏書きする上に必要である。

次に、「折返しや重ね合わせが出来るような状態で問題を解かせるならば、盲児も、目明きの子供たちと同様に、空間に関する問題を解決することが出来る。」ということを確かめなければならない。

この二つの方針によって、以下の研究を進めることにする。