日本応用数理学会論文誌
Vol. 27, No. 4, 2017, pp. 333～353

平坦折り紙の数理

松川 剛久* 三谷 純†
*筑波大学大学院システム情報工学研究科 †筑波大学システム情報系

概要．折り紙の幾何学的な性質は古くから研究の対象とされてきた．近年では「計算折り紙」という言葉も誕生し，計算機を用いた研究や工学分野への応用についても活発に議論されている．本稿では折り紙の数理に関して平坦折りの研究についてまとめるとともに，それに関係する計算量および設計手法について紹介する．また，立体折り紙と剛体折り紙という，折り紙の数理の応用において重要な分野についても概説する．

Mathematics of Flat Origami

Yoshihisa Matsukawa* Jun Mitani†
*Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba
†Information and Systems, University of Tsukuba

Abstract. The geometric aspect of origami has been attracting attention for a long time, and has been the subject of research. In recent years, studies using computers have been actively carried out, and the term "computational origami" appeared. Applications of origami related technology to the field of engineering are also actively discussed. In this paper, we summarize the researches on flat-foldability discussed so far in origami mathematics. In addition, we will introduce researches on computational complexity on origami, and origami design methods. We also outline the fields of non-flat origami and rigid origami that are important in application of origami mathematics.

1. はじめに

1 枚の紙を折ることで形を作りだす「折り紙」は，日本に古くから伝わる伝統的な遊びである一方で，紙を折る操作の幾何学的な性質は，古くから数学者の研究の対象とされてきた．また，展開と折りたたみを伴う折り紙の連続的な形状変化は，人工衛星に乗せる太陽電池パネルや自動車のエアバッグの設計などへも応用できることから，工学分野においても広く研究されてきた．特に近年では，形状記憶合金や特殊な樹脂を使うなどして，薄板状の材料が自らを折りたたむ「自己折り（Self-folding）」の研究が活発に行われている [20]．21 世紀初頭には，「計算折り紙（Computational Origami）」という，計算機を用いて折り紙に関する研究を行う分野を指す用語が誕生するなど，折り紙の研究は多分野に及ぶようになってきている．

折り紙の工学的な応用に注目が集まるようになったのは，折り紙に関する基礎理論やアルゴリズムに基づいた形状設計理論が発展し，それらが計算機上に実装されたことが背景にある．今後も折り紙の工学的応用の更なる発展が期待されるが，そのためには折り紙が持つ幾何的な性質を理解することが重要である．

ここではまず，幾何学の分野における折り紙の研究の歴史を大まかに振り返ってみることとする．「折り」に関する約 400 もの参考文献を網羅した Demaine らによる大著 [14] によると，折り紙を幾何学の分野で取り扱った最古の文献は 1840 年に出版された Lardner によるものであり [33] ，折った紙の図を用いて幾何学的概念を説明している．また，ユークリッド幾何学に代わる新たな作図法として，折り紙を利用した研究をまとめた文献が 1893 年に出版されている [47]．この文献では，コンパスと定規を用いた作図が，折り紙を用いることで代替可能であることを暗に示している．1930 年代には折り紙を用いた 3次方程式の解法の可能性についてまとめた文献が Beloch によって著された [5]．20 世紀後半には，平坦折り可能性についての研究がなされ，複数の折り線が重なる点の局所的な領域に着目した平坦折り可能性に関する定理が，複数の人物によって同時期に独立に発見された [27,28,46]．1996 年には，Bern らによって，与えられた展開図が平坦折り可能（flat foldable）かどうかを判定する問題はNP困難であると示され [7]，この研究を機に折り紙の計算複雑性に関する論文が数多く著された．

1989 年には，現在の折り紙の国際会議（OSME[1]）の第一回目に相当する The International meeting of Origami Science and Technology がイタリアで開催され，その後，およそ 4 年に一回のペースで継続的に国際会議が開催されている．次回の第7回 OSME は 2018 年にイギリスで開催されることが決まっている．

折り紙作家による造形に目を向けると，1980 ～ 1990 年代になって急速に複雑な作品が登場するようになった．その要因の一つとして，ジャバラ折りを基本とした折り紙設計や，Tree method を代表とする折り紙設計理論の確立と普及が考えられる．Tree method とは，対象とする形状の骨格構造を木構造で表現し，その構造を持つ形を作り出すために必要となる展開図を理論的に求める手法である．このような設計理論（アルゴリズム）が確立すると，それらはソフトウェア（プログラム）として実装され，計算機を用いた設計が可能となった [31]．Demaine らは 2002 年に当時の折り紙に関する研究を文献 [8] にまとめたが，このなかで「計算折り紙（computational origami）」という表現を用いている．

今日に至るまで，折り紙設計に関する様々なアルゴリズムが開発され，実装されてきた．Tree method を計算機に実装した Tree Maker [32] をはじめとする多くの折り紙設計ソフトウェアはウェブ上で公開されている．これらの成果により，従来の試行錯誤によるアプローチでは困難な，複雑な形状を作りだすことが可能となった．

折り紙の数理については，その計算量理論と設計理論が重要視されてきた．特に計算機で扱う際には，計算複雑性に関する視点が重要である．局所的な折りの可能性は簡単な問題であるが，Bern らによって，大域的に平坦に折れるかを判定することはNP困難である

[1] International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education

ことが示されているように[7]，折り線が交わる点が複数存在する場合の，紙全体の折りの可能性に関する問題は難しい問題である．

このように，折り紙の数理的な側面での研究の発展の上に，計算機を用いた折り紙の設計に関する理論が構築され，さらには，その工学的な応用の可能性が注目されるようになってきている．

本稿では，平坦折り可能性に関する基本定理を紹介し，折り紙の計算量と設計手法に関する研究を紹介する．これまでにも折り紙に関する研究をまとめた文献はいくつか発表されているが [8,14,22,23,25]，それらが取り上げていない最新の研究も紹介する．最後に，今後の研究課題について述べる．

1.1　平坦折りと展開図

ここでは，本稿の主要な用語について説明する．本稿では，折り紙は 1 枚の紙を折ることを考えるが，紙は厚さのない平面とする．折り紙では 1 枚の紙は正方形であると仮定することが多いが，本稿では特に断らない限りは，任意の平坦な多角形とする．紙を折るとき，折り目にそって紙を折り返す．そのときに紙を伸ばしたり，破ったり，自己交差したりしてはいけない．紙は折る前の広げられた状態から，最終的な折り畳まれた状態へ連続的に変化する．紙は自己交差することはできないが，重なり合うことが可能である．紙が重なり合って，最終的な折り畳まれた状態が平坦となるように折ることを「平坦折り」と呼ぶ．

折り線は紙の上の線分である．稜線がつきでるように折ることを山折りと呼び，へこむように折ることを谷折りと呼ぶ．折り線は山折りか谷折りのどちらかで折る．紙の上に描かれた折り線の集まりを展開図と呼ぶ．展開図上の折り線は端点を共有できる．折り線に山折りと谷折りの区別が与えられている展開図を「山谷付き展開図」と呼ぶ．

2.　単頂点展開図の平坦折り

紙の輪郭線上を除く展開図内部において，複数の折り線が共有する点を「頂点」と呼び，頂点が 1 つのみの展開図を「単頂点展開図」と呼ぶ．本節では，単頂点展開図を対象とした，平坦折りに関する定理を紹介する．単頂点展開図について議論する場合は，輪郭の形は重要でないため，ここでは頂点を中心とする単位円を考える．単頂点展開図の山谷の割り当てに関する必要条件は主に 2 つある．

定理2.1（**前川定理** [22,25]）vを単頂点とする展開図が平坦折り可能であるとき，vに接続する折り線の山折りと谷折りの数をそれぞれ M と V とすると

$$M - V = \pm 2 \tag{2.1}$$

である．

ここでは，Siwanowicz による証明 [22] を紹介する．

証明 折り線の数をnとすると，$n = M + V$ である．平坦に折りたたまれた頂点を切り落とすと，切り口は面積 0 の n 角形になる（Fig. 1）．谷折りにおける内角は 0 ，山折りにおける内角は 2π であるため，内角の和の公式から $0V + 2\pi M = (n-2)\pi = (M+V-2)\pi$ となり，$M - V = -2$ が得られる．また，山折りと谷折りを入れ替えれば，$M - V = 2$ が得られる． □

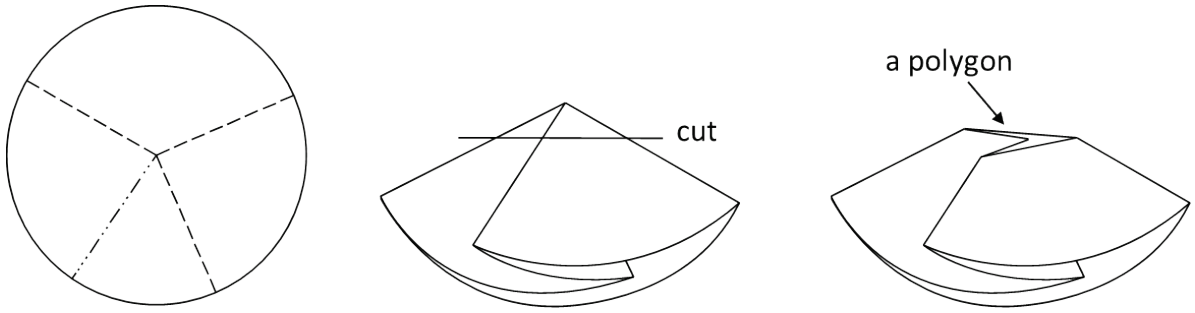

Fig. 1. Siwanowicz's proof of Maekawa's theorem. Adapted from [22].

山谷の割り当てに関するもう 1 つの必要条件は以下のものである．

定理2.2（**大小大定理** [22,25]）平坦折り可能な単頂点展開図において，隣り合う 3 つの角$\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}$が$\alpha_{i-1} > \alpha_i$及び$\alpha_i < \alpha_{i+1}$であるとき，それらの 3 つの角の間にある 2 本の折り線 l_i, l_{i+1} の山谷は異なる．

ここでは，Hull によって示された証明方法を紹介する [22].

証明 2 本の折り線 l_i, l_{i+1} はどちらも山折りもしくは谷折りであると仮定する．それを折りたたむと，α_{i-1}とα_{i+1}の両方が，α_iを紙の同じ側で覆うことになる（Fig. 2）．しかし，それでは紙の自己交差が発生してしまう．よって平坦折り可能であるためには，これら 2 本の折り線 l_i, l_{i+1} の山谷は異ならなければならない． □

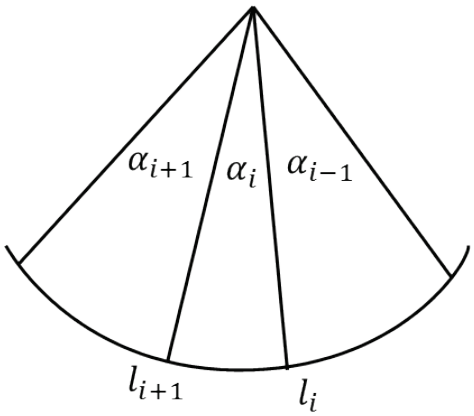

Fig. 2. Crease line l_i and l_{i+1} must have different mountain/valley parities. Adapted from [22].

定理2.3（**偶数次数定理** [22,25,27,28]） v を単頂点とする展開図が平坦折り可能であるとき，頂点 v の次数（折り線の数）は常に偶数である．

ここでは，前川定理（定理 3.1）を使った証明方法 [22] を紹介する．

証明 折り線の数をnとし，v に接続する折り線の山折りと谷折りの数をそれぞれ M と V とすると，$n = M + V = 2\mathrm{V} + \mathrm{M} - \mathrm{V} = 2\mathrm{V} \pm 2 = 2(\mathrm{V} \pm 1)$ であるため，n は常に偶数である． □

山谷が割り当てられていない単頂点展開図が平坦折り可能であるための必要十分条件は，「川崎定理」によって示されている．この定理は文献 [28] により川崎定理と呼ばれるようになったが，Justin によっても独立に発見されている [27].

定理2.4（**川崎定理** [22,25,27,28]） 次数が偶数である v を単頂点とする展開図が平坦折り可能であるとき，v 周りの 1 つ置きの角の角度の和は π である．逆もまた真である．

ここでは，Hull によって示された証明方法 [22] を紹介する．

証明 平坦折り可能な頂点 v 周りの折り線がなす角を順に $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2n}$ とする．v の周りを折りたたんで，折り線上に蟻を置いたとする．この蟻は，v の周りを歩いて 1 周する．蟻が最初に α_1 の角度を歩いたとする．折り線にぶつかると反対に α_2 だけ歩く．また折り線にぶつかると，α_1 と同じ向きに α_3 だけ歩く．蟻が 1 周したとき，蟻が動いた角度は交代和 $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots - \alpha_{2n}$ で表せる．蟻は元の位置に戻ったのだから $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots - \alpha_{2n} = 0$ となる．また，$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2n} = 2\pi$ なので，$\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2n-1} = \pi$ である．また同様に $\alpha_2 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_{2n} = \pi$ である．よって，v 周りの 1 つ置きの角の和は π になる．

逆に，$\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_{2n} = \pi$ であると仮定すると，その頂点が平坦折り可能であることを証明する．頂点 v が平坦折り可能であるためには，紙が自己交差することなく平坦に折りたためるように山折りと谷折りを割り当てればよい．

頂点 v の周りの折り線を $l_1, l_2, \cdots, l_{2n}$ とし，それらの折り線から任意に 1 本選び，選んだ折り線に沿って紙を切る．すると，2 本の切れ端ができる．そして，残りの折り線に山折りと谷折りを交互に割り当てる．これをジグザグに折れば，平坦に折りたたむことができる．$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots - \alpha_{2n} = 0$ であるため，2 本の切れ端は同じ位置にある．切れ端の間に紙が挟まっていなければ，切れ端同士を貼り合わせれば任意に選んだ折り線が山折りか谷折りになって，全体が平坦に折りたたまれた状態になる（Fig. 3）．切れ端の間に紙が挟まっている場合は，ジグザグに折ったジャバラの最も外側にある折り線の 1 本の山谷を逆にする．すると，2 本の切れ端が重なり合って，貼り合わせることができる（Fig. 4）． □

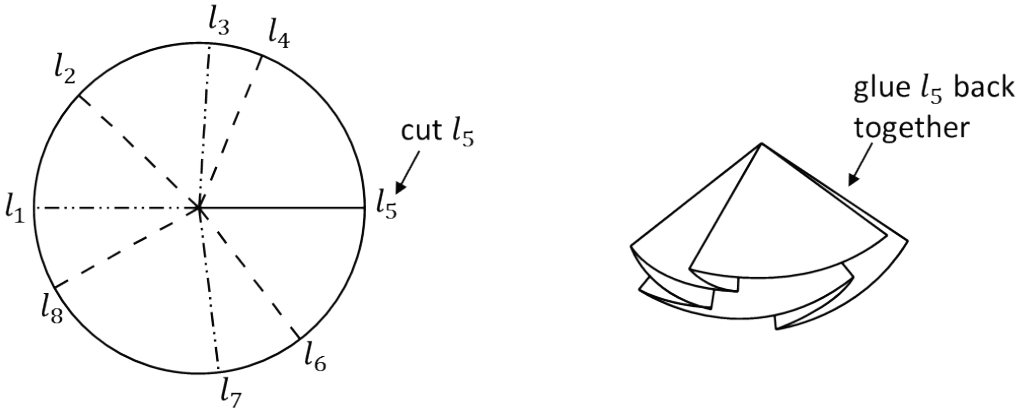

Fig. 3. Mountain/valley assignment. Adapted from [22].

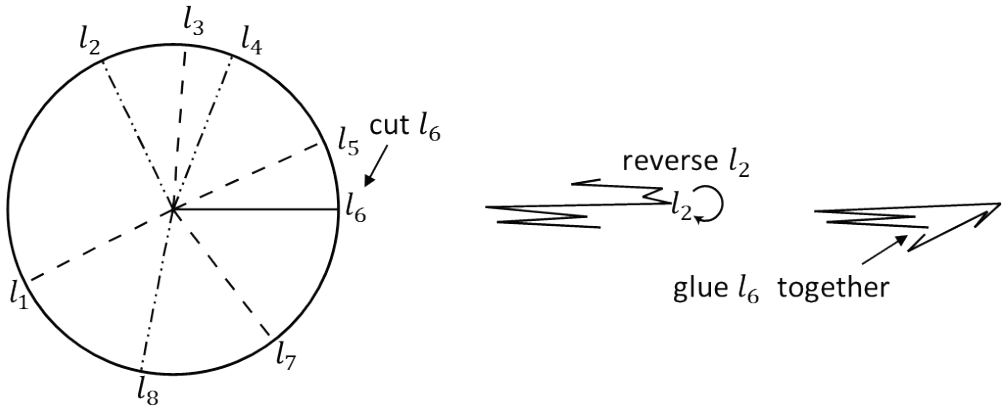

Fig. 4. Adjustment of mountain/valley assignment. Adapted from [22].

これらの定理は平坦折りに関する問題を議論する上で基本となるものである．文献 [23] では川崎定理と前川定理の証明について，平坦でない紙を折る場合にも適用できることを言及している．例えば，円錐の側面の形をした紙を，円錐の頂点から伸びる折り線を平坦に折ったときにも，前川定理と川崎定理が適用できる．

3. 複数の頂点を持つ展開図の平坦折り可能性

複数の頂点を持つ展開図については，前章で述べた単頂点展開図の性質を用いて，個々の頂点の近傍という局所的な領域について平坦折り可能性を考えることができる．山谷が割り当てられていない展開図に含まれるすべての頂点に対して，その近傍が平坦折り可能であるならば，その展開図は「局所的に平坦折り可能である（locally flat foldable）」と呼ぶ．また，このような展開図のことを，川崎は「形式的折り線図」と呼び [29]，Hull は phantom pattern と呼んでいる [18]．局所的に平坦折り可能であっても，実際に折ろうとすると紙の干渉が発生し，全体を平坦に折ることができない場合がある．このような展開図を「大域的には平坦に折れない」と表現する．与えら

れた展開図に対して，全ての頂点が局所的に平坦折り可能であるかは多項式時間で判定できるが，大域的に平坦に折れるかを判定することはNP 困難であることが Bern らによって示されている [7]．この論文で，Bernらは，大域的に平坦に折れるかではなく，すべての頂点が局所的に平坦折り可能となるような山谷の割り当てが可能であるかについても，多項式時間で判定できることを示している．

さて，ここでは，すべての頂点が局所的に平坦折り可能となるような山谷の割り当てをもつ展開図を，「局所平坦折り可能な山谷割り当て（valid mountain/valley assignments）を持つ」と表現することにする．ただし，このような山谷を割り当てたとしても，それが大域的に折れるとは限らないことに注意が必要である．

Hullは，局所平坦折り可能であるが，局所平坦折り可能な山谷割り当てを持たない展開図を示した（Fig. 5 左）[23]．Fig. 5 左の展開図に存在する中央の三角形の辺は，2 節で紹介した大小大定理により，山折りと谷折りが交互になる必要があるが，それは不可能である．よって，Fig. 5 左の展開図は平坦折り可能な山谷割り当てを持たない．

Fig. 5 右は，同じく Hull によって示されたものであり，局所平坦折り可能な山谷割り当てを持つが，実際には紙の自己交差が発生して平坦折りできない [23]．紙が自己交差するかどうかの判定方法は本質的には実際に折ってみるほかになく，山谷が割り当てられている場合もいない場合も共に，平坦折り可能性についての判定は NP 困難である [7]．

Fig. 6 に，正方形の輪郭に 2 つの対角線を追加した線図を縦に m，横に n だけ敷き詰めた例を示す．これらを，$m \times n$ の 45 度系格子パターン（the square/diagonal grid pattern）と呼ぶ．このような格子パターンは折り線を辺，頂点をそのまま頂点と考えることでグラフとみなすことができる．その部分グラフに対応する展開図についても，山谷が割り当てられている場合もいない場合も共に，平坦折り可能であるかの判定は NP 困難であることが Akitaya らによって示されている [1]．折り紙の平坦折り可能性に関する問題が難しいことの要因は紙が自己交差できないためである．5 節で詳しく述べるが，このような折り紙の計算複雑性に関する研究は数多くある．

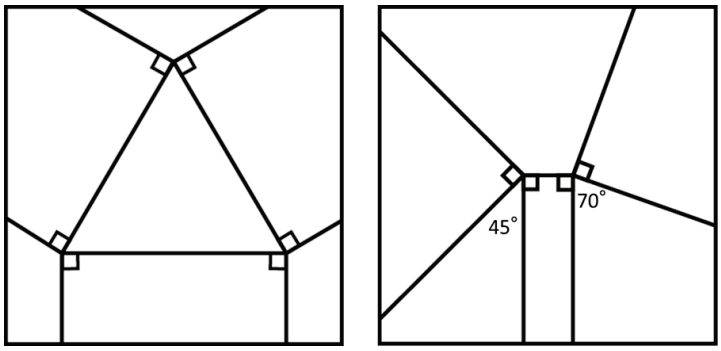

Fig. 5. Locally flat-foldable but not flat-foldable patterns, exemplified by Hull [23] .

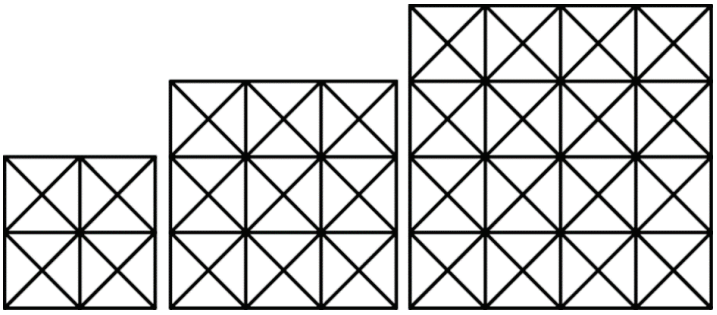

Fig. 6. 2×2, 3×3, and 4×4 square/diagonal grid patterns.

4. 平坦折りできない展開図

松川らは格子のサイズが 2×2, 3×3, 4×4 の 45 度系格子パターンに含まれる展開図（折り線が 45 度系格子パターンの線分に重なるもの）と，その展開図を折った後の形状の数を調べ，Table 1 に示す結果を得た [36]．なお，ここで言及する形状とは輪郭のみに着目したもので，Table 1 の結果は回転と反転による重複を除外している．

Table 1. Number of crease patterns and folded shapes made from the square/diagonal gird patterns.

Grid size	No. of crease patterns	No. of folded shapes
2×2	116	27
3×3	58,530	366
4×4	259,650,300	13,452

Fig. 7 は平坦折り可能性に関する展開図の分類をフローチャートで表したものである．展開図がすべての頂点が局所的に平坦折り可能となるような山谷の割り当てを持つかは多項式時間で判定できるが，山谷の有無に関わらず大域的に折りたためるかの判定は NP 困難であり，効率的に判定するアルゴリズムは存在しない．

松川らは，45 度系格子パターンに含まれる展開図に対して，折り線の数が少ないものから順に，それぞれが大域的に平坦折り可能であるか評価した（4×4 については折れ線の数が増えると，組合せ爆発により計算時間が膨大になるため，折り線数が 22 までの展開図が対象となっている）．その結果，大局的には折りたためない形式的折り線図（つまり，局所的には平坦折り可能な展開図）を 2,000 以上発見した [36]．

さらに松川らは $m \times n$ の 45 度系格子パターンにおいて面積（敷き詰められた正方形 1 つを単位正方形としている）が最も小さく（smallest），なおかつ，折り線数が最も少ない（simplest），大域的に平坦折りできない形式的折り線図を示した（Fig. 8）[36]．これらの展開図は，3×3 の 45 度系格子パターンに含まれるものであった．この結果より，3×3 の場合よりも面積が小さい $m \times n$ の 45 度系格子パターンにおい

ては，平坦折りできない形式的折り線図が存在しないことがわかった．松川らは，2×1，2×2，2×3 または 2×4 に含まれるものは全て平坦折り可能であることから，任意の自然数 n に対して，2×n の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は全て平坦折り可能であると予想し，その証明の道筋を示したが，完全な証明には至っていない [35].

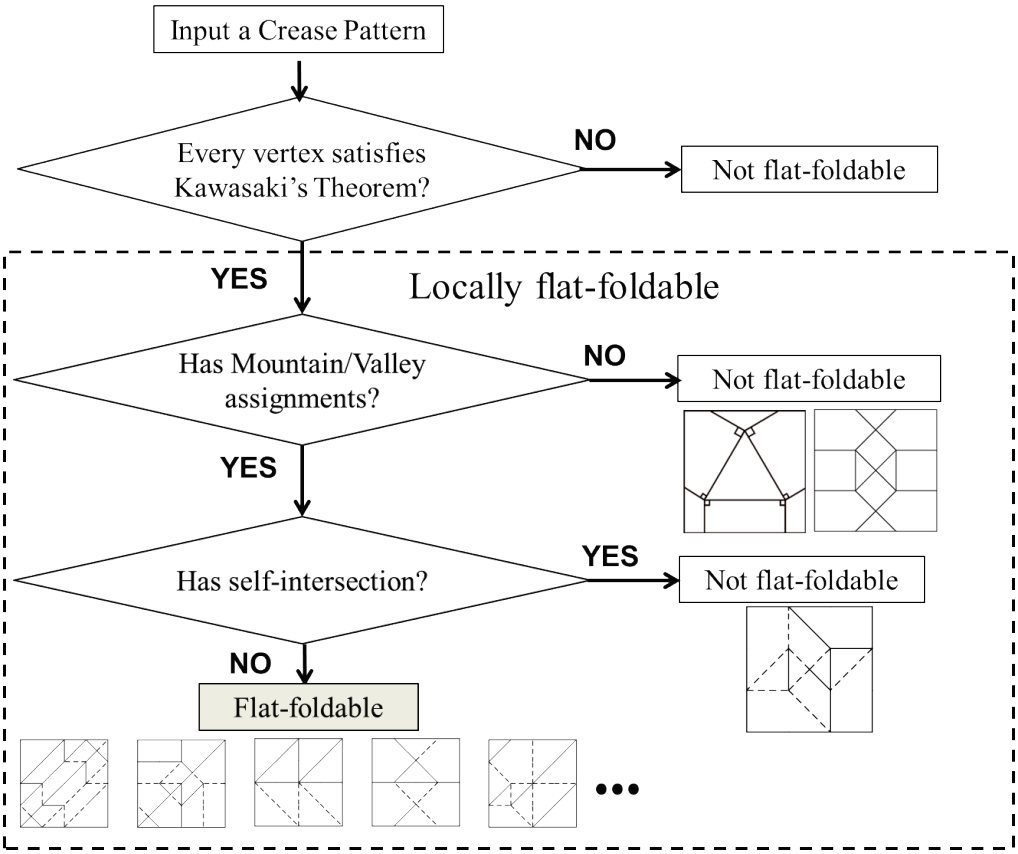

Fig. 7. Flow of crease pattern classification.

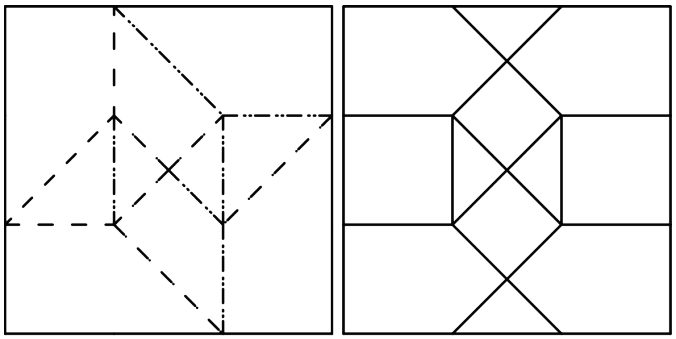

Fig. 8. The simplest and smallest locally flat foldable but not flat foldable crease patterns in the square/diagonal grid pattern (exemplified by Matsukawa et al. [36]). The left has valid mountain/valley assignments while the right does not.

5. 折り紙の計算量に関する研究

1990 年代後半から折り紙の計算複雑性に関する研究が多く発表された．折り紙の計算量に関する研究として代表的なものが，一般的な展開図の平坦折り可能性の判定が NP 困難であることを示した Bern らの研究である [7]．また，未解決問題も多く知られている．本章では，折り紙の計算量に関する研究を紹介する．

5.1 地図折り問題

数学や計算幾何学の分野では「地図折り（Map folding）問題」が良く知られている．地図折り問題は「外周を除くそれぞれの辺に山谷が指定されている $m \times n$ の単位正方形に分けられた長方形（地図）が与えられたとき，その地図は折り目に沿って 1 つの単位正方形に平坦折り可能であるか」という問題である [14]．一般的な地図折り問題の判定に要する計算量は未知であるが，すべての自然数 n に対して，格子のサイズが $1 \times n$ の地図折り問題は多項式時間で解けることが証明されており，$2 \times n$ のものについては，$O(n^9)$ 時間で解けることが Morgan らによって示されている [44]．

紙と紙の間に，紙の角を割り入れるように折ることを中割り折りと呼ぶが，この折り方は複雑な折り方の例である．なんの制限も与えない折り方を「複雑折り（complex fold）」と呼ぶ [14]．一方で，平坦折りされた紙を単一の折り線（線分）に沿って折りたたみ，また別の平坦折りされた状態にする折り操作を「単純折り（simple fold）」と呼ぶ [14]．単純折りの詳細な数学的な定義は文献 [2,14] に示されている．Arkin らは，単純折りに限定した地図折り問題について，その平坦折り可能性については多項式時間で解けることを示した（Fig. 9）[2]．平坦折りされた紙は，複数の紙が互いに重なり合って，層状になる場合がある．紙の層がどのように折られるかによって，単純折りは以下の 3 つに分類される．

- 1 層単純折り（one-layer simple fold）：紙の一番上の層のみを折る．
- 全層単純折り（all-layers simple fold）：折り線の下の全ての紙の層を同時に折る．
- 部分層単純折り（some-layers simple fold）：折り線のすぐ下のいくつかの層を折る．折り線の異なる部分で，折られる紙の層の深さが違ってもよい．

これらのモデルはすべて異なることが文献 [2] で示されている．つまり，あるモデルでは平坦折り可能で，他のモデルでは平坦折り不可能である展開図が存在する．全層単純折りの場合は最悪 $O(n\log n)$ 時間，それ以外は $O(n)$ 時間で平坦折り可能であるか判定できる [2]．

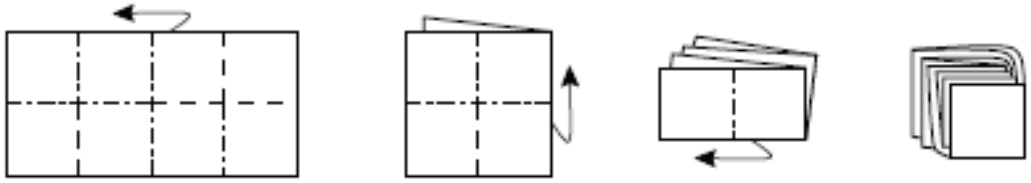

Fig. 9. Folding a 2 × 4 map via a sequence of 3 simple folds. Adapted from [2].

5.2 切手折り問題

リボン状の紙に，短軸に対して平行な山谷の列を配置し，何通りの折りたたまれた状態が存在するかを問う，「切手折り（stamp folding）問題」がある．この場合，紙は 1 次元の線分で折り目はその上の点と考えることができる．文献 [55] では，折りたたみ状態の個数ついて，現時点で最もよい理論的な上界と下界，そして実験的な数値を示している．Uehara らは，ある折り目の伸び（crease width）をその折り目に挟まった他の紙の枚数と定義し，crease width を最小化する折りたたみに関する研究を行った [12,56]（Fig. 10）．文献 [56] では，折り線の列が等間隔となる場合のみを対象としているが， 文献 [12] では等間隔ではない場合についても考察している．

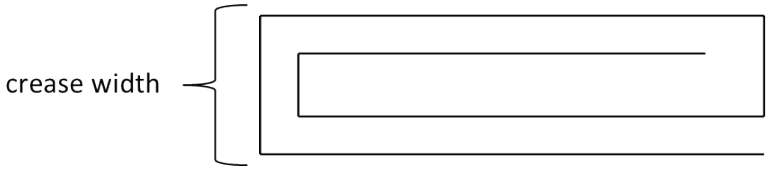

Fig. 10. Folding of a 1D paper. Adapted from [56].

5.3 重なり順序

与えられた展開図から，平坦に折りたたまれた状態の輪郭を決定できるが，構成面（折り線で区切られた多角形）の重なり方を決定することは困難である．互いに重なる 2 つの構成面のどちらが上になるかを記述したものを重なり順序という．Bern らは大域的な平坦折り可能性を判定する困難性はこの重なり順序を決定することにあると示した [7]．また，三谷はスタックを用いたデータ構造により，構成面の重なり順を計算機のメモリに保持し，深さ優先探索によって取りうる重なり順を全列挙するシステムを実装した [39,40].

5.4 山谷割り当ての数え上げ

平坦折り紙の問題に「与えられた展開図に平坦折り可能な山谷の割り当ては何通り存在するか」というものがある．頂点が1つだけの展開図であれば，山谷の割り当ての数を正確に求める漸化式が存在する [24]．頂点 v 周りの n 個の角度を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とし，山谷の割り当ての個数を $\mathrm{C}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ とすると，以下の式で再帰的に与えることができる．$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ のときは，

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 2\binom{n}{n/2-1} \tag{4.1}$$

である．それ以外の場合は，k 個の同じ角度

$$\alpha_{i-1} > \alpha_i = \alpha_{i+1} = \alpha_{i+2} = \cdots = \alpha_{i+k-1} < \alpha_{i+k} \tag{4.2}$$

を考える．k が奇数のとき，

$$C(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\binom{k+1}{(k+1)/2}C(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-2},(\alpha_{i-1}-\alpha_i+\alpha_{i+k}),\alpha_{i+k+1},\cdots,\alpha_n) \tag{4.3}$$

である．k が偶数のとき，

$$C(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\binom{k+1}{k/2}C(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-2},\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+k},\alpha_{i+k+1},\cdots,\alpha_n) \tag{4.4}$$

である．証明は文献 [14,24] に示されている．Hull は山谷の割り当ての数え上げ問題をグラフ理論へ抽象化している [22,24,26]．折り線を頂点とみなし，頂点塗り分け問題に当てはめ，その塗り分け方の数が山谷の割り当ての数に対応する．しかし，この手法は特定の折り線のパターンしか解を求めることができない．文献 [26] では頂点の次数（その頂点周りに存在する折り線の数）が 4 を超えると特に難しいことを示している．

山谷の割り当ての数え上げは物理学や物理化学の分野にも関連する．特に高分子膜の折れ曲がりに関する研究で同じ性質の問題が取り上げられている．天然の高分子膜は格子の構造を持ち，格子を作る分子結合は折り線のように折れ曲がる．力学的な解析のために，その折り方の数え上げが研究されている [17].

5.5 形状列挙

鶴田らは「点と点を通る直線で折る」「点と点を重ねるように折る」「辺と辺を重ねるように折る」という操作のみを使用し，折り回数を 4 回以下に限定した，平坦折り後の形状の列挙を行った [52,53]．さらに鶴田らは，ユーザが目的の形状の輪郭を入力することで，その形状に類似したものを検索するシステムを開発した．列挙をベースとした，折り紙創作を支援する試みは，近年の計算機性能の向上によって実現可能となった取り組みといえる．しかし，折り回数が増えると組合せ爆発により，高性能な計算機であっても列挙が困難になるという問題があるため，鶴田らは，ランダムに折りたたみを行い，その結果を提示するシステムの開発も行った（Fig. 11） [54].

山本らは4×4 の45度系格子パターンから作りだされる形状の全列挙を行った [36,57]．まず，局所的に平坦折り可能な展開図とそれらを平坦折りして得られる形状について，回転と反転による重複を除外した上で，それぞれ 259,650,300 通りと 13,452 通りの全列挙を行った．展開図の列挙は，45 度系格子の各頂点に，川崎定理を満たすパターンを組合せることで実現している．折った後の形状は ORIPA [37,41] を改変したものを用いて算出している．さらに山本らは，入力として形状を与えると，その形状を輪郭とするように折りたたまれる展開図を検索するシステムを実装した．このシステムを用いて，アルファベットと数字の形を折り出すための展開図を見出した（Fig. 12）．文献 [57] の手法では紙の自己交差が考慮されていないため，全列挙された 13,452 通りの形状は実際に作りだされるか明らかでなかったが，松川らによって，すべての形状が実際に作り出せることが示された [36].

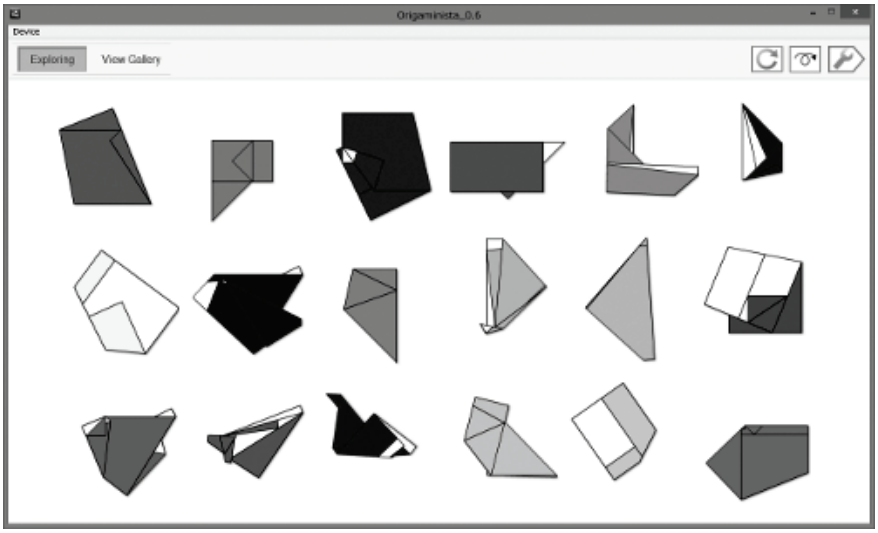

Fig. 11. Interface of Tsuruta's system [54].

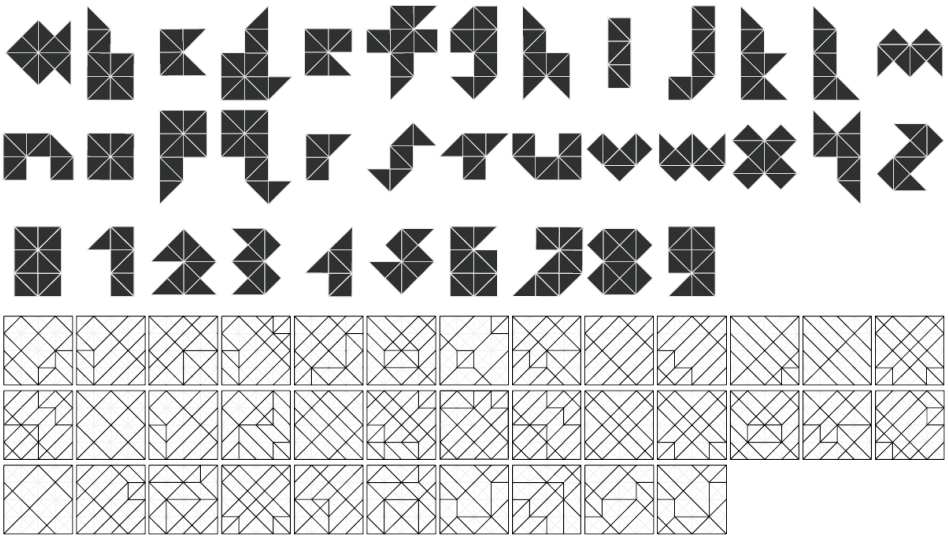

Fig. 12. The alphabet and numbers (top) are created by folding 4×4 grid crease patterns (bottom). They were found by Yamamoto et al. [57].

6. 折り紙の設計

折り紙が数学の一分野として研究され，各種の形状設計手法が考案されたことにより，それまで行われていた作家による試行錯誤を伴う発見的アプローチ（「見立て」とも呼ばれる）ではなく，数学的な手続きで作品の創作を支援することが可能になった．ここでは，折り紙の設計手法とそれらが実装されているソフトウェアについて紹介する．特に本項でも述べられている剛体折り紙に関する研究は，折り紙の工学的な応用に大きく貢献している．

6.1 平坦折り紙

動物や昆虫などの細部まで作りこんだ折り紙作品を設計する場合，その細部の作りこみは折り手の調整に委ね，最終的な形状に至る前の「基本形」をアルゴリズムによる設計の対象とすることが多い．目的とする形状の骨格構造（長さを持ったグラフ構造）と等しい骨格構造を持つ基本形を作り出すためのアルゴリズムが文献 [14,30] で紹介されている．このアルゴリズムで得られる基本形は，「単軸基本形（Uniaxial base)」と呼ばれ，骨格構造に対応する稜線を共通の平面に乗せることができ，そのときに全ての面がその平面に垂直となる，という特徴がある（Fig. 13）．

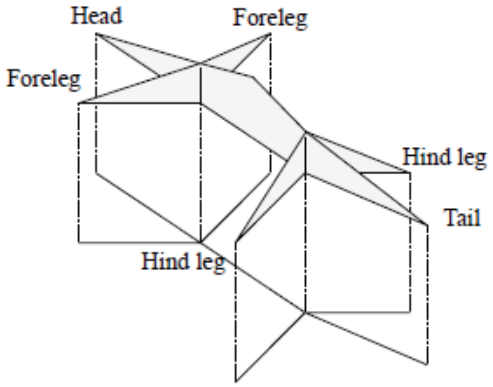

Fig. 13. Uniaxial base for an animal with four legs, a head, body, and tail. The bottom of the base placed on a plane becomes the projection of the structure. Adapted from [32].

このような性質を持つ基本形を作り出すアルゴリズムは tree method と呼ばれ，その際に用いられる折り線の配置には，ノードの長さを半径とする円を敷き詰めるアルゴリズム（circle packing）が必要となる．このようなアルゴリズムを実装した Tree Maker と呼ばれる折り紙設計ソフトウェア [31] では，目的とする形状の木構造を入力すると，単軸基本形となる展開図が出力される．circle packing は NP 困難であることが証明されており [13]，TreeMaker で折り紙設計をするとき，膨大な計算時間がかかる場合がある．

対称性を持つ幾何学的なパターンが繰り返し現れる模様を，紙を折って作り出す技法を「折り紙テッセレーション（Tessellation)」または「平織り」と呼ぶ [19]．折り紙テッセレーションの多くは，ねじり折りと呼ばれる折り方を要素とする．Tess [4] は，基本的な多角形を敷き詰めたパターンと，中心となる図形の大きさ，傾きの角度を入力として，折り紙テッセレーション用の展開図を生成するソフトウェアである．

ORIPA は折り紙の展開図を効率的に作図できる専用エディタである [37,41]．角の二等分線や，鏡映反転など，折り紙の展開図によく現れる幾何的な性質をもった折り線を入力するためのコマンドが用意されている．入力された展開図に対して，前川定理および川崎定理を満たすか否かの判定ができ，平坦折り後の形状を出力するとともに，可能な紙の重なり順を全列挙する機能も備えている．しかし，重なる紙の枚数が

増えると，組合せ爆発により列挙ができない場合もあり，折り紙が計算量理論的な困難性を含んでいることがわかる．

6.2 立体折り紙設計

1枚の紙から立体的な形を作り出すための研究も多い．Tachi は三角形の集合で表現された円板と同相の多面体モデルに対し，その形状を 1 枚の紙を折るだけで隙間なく作り上げる展開図を生成するアルゴリズムを考案し，それをソフトウェア Origamizer に実装した [49]．Origamizer は，入力した立体形状に含まれる各三角形を平面に配置し，隙間にひだ（tuck）を割り当てた展開図を出力する．展開図を折る際に，ひだは立体の内部に折り込まれる．しかしながら，Origamizer に実装されたアルゴリズムは，三角形とひだの配置を反復計算で求めるものであり，必ず解が得られるという保証はなかった．近年になり，文献 [15] によって，ひだを配置するという同様のアプローチによって展開図を生成する別のアルゴリズムが提案され，また同時に，そのアルゴリズムでは必ず展開図が得られることも証明された．

Zhao らは展開図の一部を入力することで，三角形から構成される軸対称な立体折り紙を設計する手法を提案した [58]．Demaine らは直交格子上に迷路を作成するために必要な部品すべてを折り紙で作り出せることを示し，それらの展開図を組合せることで任意の迷路を作り出せることを示した [10]．また，Demaine らは，このアルゴリズムを用いて文字を作成する Web アプリケーションを公開している [11]．Benbernou らは 45 度系格子パターンから任意のポリキューブ（複数の立方体を面で接合した多面体）を設計する手法を提案した [6]．

これまでに紹介した手法はいずれも紙を直線で折ることを前提としているが，紙はしなやかに曲げることが可能であり，曲線で折ることもできる．ハフマン符号で有名な David Huffman は曲線折りを持つ折り紙作品を多数制作したことでも知られている [21]．Mitani は断面となる折れ線を入力することで，軸対称な多面体の外側に突起を配置した形状を設計できるソフトウェアを開発した [38]．このソフトウェアでは，入力を近似曲線とすることで，柱面から構成される立体を作り出すことができる．また，Mitani らは可展面の任意の点を選択して移動させることで，平面での折り返しを対話的に行うことが可能なソフトウェアも開発した [42]．

6.3 剛体折り紙

折り紙を，曲がるなどの変形をしない硬いパネルを折り線に沿って切って，ヒンジで連結させたモデルに置き換えたものを「剛体折り紙」と呼ぶ．剛体折り紙に関する研究の 1 つに，平坦に折りたたまれるようにデザインされた一般的なデパートの紙袋は面を曲げることなく折りたたむことはできないという結果を示したものがある [3]．また，山折りと谷折りを交互に繰り返す正方形の入れ子状の展開図を折ると，双曲放物面を近似することができる（Fig. 14）．しかし，Fig. 14 の双曲放物面の形状に

は数学的にはならないことが証明された [9].

Tachi は，剛体折り紙の折りたたみをシミュレーションするソフトウェア Rigid Origami Simulator を開発した [48,50]. Rigid Origami Simulator は与えられた展開図を剛体折りする様子をアニメーションで表示するため，視覚的に剛体折り紙の変形を確認できる．また，Tachi は Rigid Origami Simulator を発展させた Freeform Origami も開発した [51]. Freeform Origami は平坦折り可能であり，なおかつ，剛体折り可能という条件を満たしながら，展開図と折った後の形を同時に編集できる特徴がある．

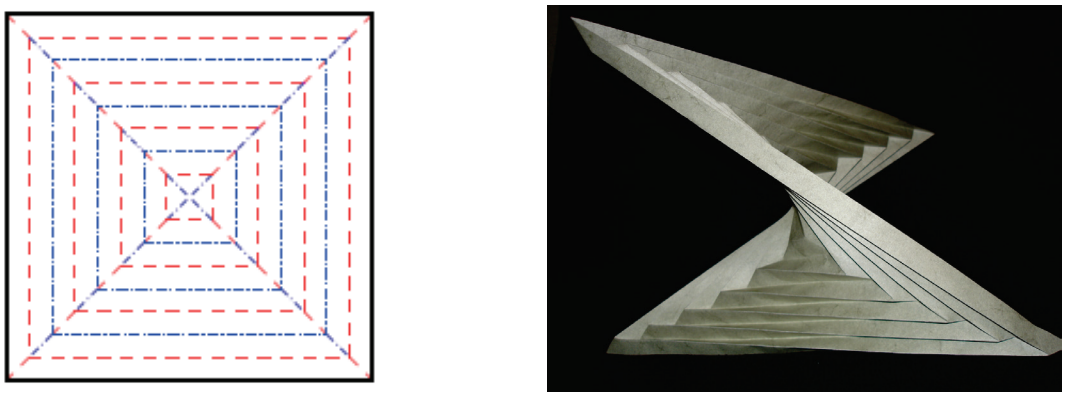

Fig. 14. The crease pattern is concentric squares and their diagonals (left) and the pleated hyperbolic paraboloid (right) made from it. Adapted from [9].

7. 今後の研究課題

折り紙の計算量に関する研究としては，平坦折り可能性や山谷割り当ての数え上げなどに課題が残されている．展開図に含まれる頂点が複数存在する場合の，山谷割り当ての数え上げに関しては，まだ限られたタイプの展開図についてしか研究されていない．鶴田ら [52,53] と山本ら [36,57] は折り紙の形状列挙に関する研究を行い，少ない折り回数で作り出される意味のある形について，これまで見つかっていなかったものを多数見出した．さらに，局所的に平坦折り可能であるが平坦折りできない展開図を多数発見した [57]. 折り紙の形状列挙の研究はまだ少ないため，埋没している形状の更なる発見等の進展が期待される．

近年の折り紙に関する研究では，折り紙の技術を工学分野に応用しようとするものが主流であり，特に「自己折り（Self-Folding)」関するものが活発である [20]. 設計理論においては，circle packing に基づく設計手法以降は目立った発展はないが，折り紙を工学的に応用する範囲を広げていくためには，折り紙の基礎理論の研究が必要不可欠である．

参考文献

[1] Akitaya, H. A., Cheung, K. C., Demaine, E. D., Horiyama, T., Hull, T. C., Ku, J. S., Tachi, T. and Uehara, R., Box pleating is hard, In Revised Papers from the 18th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCGG 2015), Lecture Notes in Computer Science, **9943**(2015), 167–179.

[2] Arkin, E. M., Bender, M. A., Demaine, E. D., Demaine, M. L., J. S. B. Mitchell, S. S. and Skiena, S. S., When can you fold a map?, Comput. Geom. Theory. Appl., **29**(1) (2004), 166-195.

[3] Balkcom, D. J., Demaine, E. D. and Demaine, M. L., Folding paper shopping bags, In Proceedings of 14th Annual Fall Workshop Computational Geometry, Cambridge, Massachusetts, (2004), 14-15.

[4] Bateman, A., Tess: origami tessellation software, http://www.papermosaics.co.uk/software.html

[5] Beloch, M. P., Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col metodo del ripiegamento della carta, Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, (1936), 93-96.

[6] Benbernou, N. M., Demaine, E. D., Demaine, M. L. and Ovadya, A., Universal hinge patterns to fold orthogonal shapes, In Origami5: Proceedings of the 5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education, (2010), 405-420.

[7] Bern, M. and Hayes, B., The Complexity of Flat Origami. In Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, (1996), 175-183.

[8] Demaine, E. D. and Demaine, M. L., Resent results in computational origami. In Origami3: The Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education , A K Peters, (2002), 3-16.

[9] Demaine, E. D., Demaine, M. L., Hart, V., Price, G. N. and Tachi, T., (Non)existence of Pleated Folds: How Paper Folds Between Creases, Graphs and Combinatorics, 3(**27**)(2011), 377-397.

[10] Demaine, E. D., Demaine, M. L. and Ku, J., Folding Any Orthogonal Maze, In Origami5: Proceedings of the 5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education, (2010), 449-454.

[11] Demaine, E. D., Demaine, M. L. and Ku, J., Origami Maze Puzzle Font, In Exchange Book of the 9th Gathering for Gardner. Atlanta, Georgia, 2010.

[12] Demaine, E. D., Eppstein, D., Hesterberg, A., Ito, H., Lubiw, A., Uehara, R. and Uno, Y., Folding a paper strip to minimize thickness, Journal of Discrete Algorithms, **36**,(2016), 18-26.

[13] Demaine, E. D., Fekete, S. P. and Lang, R. J., Circle packing for origami design is hard, in

Origami5: Proceedings of the 5th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, (2010), 609-626.

[14] Demaine, E. D. and O'Rourke, J., Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra, cambridge University Press, 2007.

[15] Demaine, E. D. and Tachi, T., Origamizer: A Practical Algorithm for Folding Any Polyhedron, in Proceedings of the 33rd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2017), 34:1-34:15.

[16] Felton, S., Tolley, M., Demaine, E. D., Rus, D. and Wood, R., A method for building self-folding machines, Science, **345**(6197) (2014), 644-646.

[17] Francesco, P. D., Folding and coloring problems in mathematics and physics, Bulletin of the American Mathematical Society, **37**(3) (2000), 251-307.

[18] Ginepro, J. and Hull, T. C., Counting Miura-ori Phantom Foldings, In Program and Abstracts of The 6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education , (2014), 41.

[19] Gjerde, E., ORIGAMI TESSELLATIONS Awe-inspiring Geometric designs, A K Peters, Ltd, 2009.

[20] Hawkes, E., An, B., Benbernou, N. M., Tanaka, H., Kim, S., Demaine, E. D., Rus, D. and Wood, R. J., Programmable matter by folding, Proceedings of the National Academy of Sciences, DOI: 10.1073/pnas.0914069107, 2010.

[21] Huffman, D. A., Curvature and creases: a primer on paper, IEEE Transactions on Computers, **C-25**(10) (1976), 1010-1019.

[22] Hull, T. C., On the Mathematics of Flat Origamis, Congressus Numerantium, **100**(1994), 215-224.

[23] Hull, T. C., The Combinatorics of Flat Folds: A Survey, In Origami3: The Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education, (2002), 29-38.

[24] Hull, T. C., Counting Mountain-Valley Assignments for Flat Folds, Ars Combinatoria, **67**(2003), 175-188.

[25] Hull, T. C., project Origami. CRC Press, 2013.

[26] Hull, T. C., Coloring connections with counting mountain-valley assignments, In Origami6: Proceedings of the 6th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education, (2016), 3-10.

[27] Justin, J., Towards a Mathematical Theory of Origami, In Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami, (1997), 15-29.

[28] Kawasaki, T., On the Relation Between Mountain-creases and Valley-creases of a Flat Origami, In Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology, (1989), 229-237.

[29] 川崎敏和, バラと折り紙と数学と, 森北出版株式会社, 1998.

[30] Lang, R. J., Origami Design Secrets, A K Peters, LTD., 2003.
[31] Lang, R. J., TreeMaker 4.0: A Program for Origami Design, http://www.langorigami.com/article/treemaker
[32] Lang, R. J., TreeMaker 4.0 Manual, http://www.langorigami.com/files/articles/TreeMkr40.pdf
[33] Lardner, R. D., A treatise on geometry and its application in the arts, London, Printed for Longman, Orme, Brown, Green, & Longmans, and John Taylor, 1840.
[34] Liu, Y., Boyles, J. K., Genzer, J. and Dickey, M. D., Self-folding of polymer sheets using local light absorption, Soft Matter, **8**(6) (2012), 1764-1769.
[35] 松川剛久, 45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図とその平坦折り可能性に関する研究, 修士論文, 筑波大学, 2017
[36] Matsukawa, Y., Yamamoto, Y. and Mitani, J., Enumeration of Flat-foldable Crease Patterns in the Square/Diagonal Grid and Their Folded Shapes, In Proc. of 17th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG2016), Article #033, Beijing, China, 2016.
[37] Mitani, J., Development of origami pattern editor (ORIPA) and a method for estimating a folded configuration of origami from the crease pattern, Journal of Information Processing Society of Japan, **48**(9) (2007), 3309-3317.
[38] Mitani, J., Recognition, modeling and rendering method for origami using 2d bar codes, In Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education, (2009), 251-258.
[39] 三谷純, 展開図から推定される折りたたみ形態の数え上げ手法, 日本図学会, 図学研究, **40**(2) (2006), 39-44.
[40] 三谷純, 平坦折り折紙から再現される形態数の数え上げ手法, 日本図学会, 図学研究, **41**(1) (2007), 27-33.
[41] 三谷純, ORIPA: Origami Pattern Editor 折紙展開図エディタ, http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/oripa/
[42] Mitani, J. and Igarashi, T., Interactive design of planar curved folding by reflection, In Proceedings of the Pacific Conference on Computer Graphics and Applications - Short Papers (2011), 77–81.
[43] Miyashita, S., Guitron, S., Ludersdorfer, M., Sung, C. and Rus, D., An Untethered Miniature Origami Robot that Self-folds, Walks, Swims, and Degrades, In IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), (2015), 1490-1496.
[44] Morgan, T., Map Folding, Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology Univ., 2012.
[45] Na, J.-H., Evans, A. A., Bae, J., Chiappelli, M. C., Santangelo, C. D., Lang, R. J., Hull, T. C. and Hayward, R. C., Programming reversibly self-folding origami with micro-

patterned photo-crosslinkable polymer trilayers, Advanced Materials, **27** (2015), 79-85.

[46] Robertson, S. A., Isometric folding of Riemannian manifolids, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **79**(3-4) (1977-78), 275-284.

[47] Row, T. S., Geometric Exercises in Paper folding, Dover, 1966（1893 年の書籍の復刻）.

[48] Tachi, T., Simulation of Rigid Origami, In Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education, (2009), 175-187.

[49] Tachi, T., Origamizing Polyhedral Surfaces, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, **16**(2) (2010), 298-311.

[50] Tachi, T., Rigid Origami Simulator, http://www.tsg.ne.jp/TT/software/index.html#rigid_origami

[51] Tachi, T., Freeform Origami, http://www.tsg.ne.jp/TT/software/index.html#ffo

[52] 鶴田直也，三谷純，金森由博，福井幸男，幼児向け折り紙作品の創作支援システム，情報処理学会シンポジウム論文集, **2011**(3) (2011), 49-56.

[53] 鶴田直也，三谷純，金森由博，福井幸男，形状列挙に基づく幼児向け折り紙作品の創作支援システム，折り紙の科学, **2**(1) (2012), 33-44.

[54] Tsuruta, N., Mitani, J., Kanamori, Y. and Fukui, Y., Simple Flat Origami Exploration, In Origami6: Proceedings of the 6th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education, (2016), 513-521.

[55] Uehara, R., Stamp foldings with a given mountain-valley assignment, In Origami5: Proceedings of the 5th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, (2011), 585-597.

[56] Umesato, T., Saitoh, T., Uehara, R., Ito, H. and Okamoto, Y., The complexity of the stamp folding problem, Theoretical Computer Science, **497**(2013), 13-19.

[57] 山本陽平，三谷純, 45°系格子パターンから作りだされる平坦折り形状の列挙, 折り紙の科学, **4**(1) (2015), 23-33.

[58] Zhao, Y., Kanamori, Y. and Mitani, J., Geometry of axisymmetric 3D origami consisting of triangle facets, In Proc. of the 17th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG2016), Article #011. Beijing, China, 2016.

松川 剛久（非会員）〒289-1145 千葉県八街市みどり台2-10-5

1990年 千葉県生まれ．2013 年 立命館大学情報理工学部卒業．2017年 筑波大学システム情報工学研究科博士前期課程修了．同年 株式会社リコー入社．現在は，同社にてソフトウェア開発業務に従事.

三谷 純（正会員）〒305-8577 茨城県つくば市天王台1丁目1-1
筑波大学システム情報系 教授． 2004年 東京大学大学院工学系研究科博士課程修了．博士(工学)．理化学研究所研究員を経て2005年より筑波大学に勤務．2015年より現職．

（受付日 2017 年 3 月 21 日）
（受理日 2017 年 11 月 10 日）