

## 4 次の Strömberg ウェーブレット

福田尚広\* 木下 保†

\* 松江工業高等専門学校 数理科学科 † 筑波大学大学院数理物質系

**概要.** 連続なウェーブレットとして世界で初めて構成されたのが Strömberg ウェーブレットである. 本論文では, これまでの Strömberg ウェーブレットの導出方法を再考し, 新たな類似タイプのスプラインウェーブレットを導くことを目的とする. また, 一般に最もよく利用されるスプライン関数  $N_4(x)$  に対応する 4 次の Strömberg ウェーブレットと, その類似タイプの対称性などの性質を調べる.

## On the Strömberg Wavelet of Order 4

Naohiro Fukuda\* Tamotu Kinoshita†

\*NIT Matsue College

†University of Tsukuba

**Abstract.** The Strömberg wavelet was constructed as the first smooth orthonormal wavelet. In this paper, by reconsidering the derivation of the construction we produce an analogue type of wavelet. The Strömberg wavelet of order 4 and its analogue type correspond to the B-spline  $N_4(x)$  which is useful in industrial application. We also investigate the symmetry property.

### 1. はじめに

Strömberg ウェーブレットとは, Jan-Olov Strömberg によって 1983 年に登場したウェーブレットである. 文献 [1] 等にもあるように Strömberg ウェーブレットは, 現在のウェーブレット理論で発展した正規直交化のプロセスでは導出されていない. 一見理解しづらい定義を与えてから正規直交基底であることが示されている. それ故, それがウェーブレットであると気づかれるのにかなり遅れ, 後になってから Strömberg ウェーブレットが連続なウェーブレットとして世界で一番最初であると認定されたという経緯がある. 実際, 原著論文 [7] では,  $S_0^m, S_1^m$  を  $C^m(\mathbf{R})$  の関数でそれぞれ,  $\mathbf{Z}_+ \cup \{0\} \cup \frac{1}{2}\mathbf{Z}_-$  と  $\mathbf{Z}_+ \cup \{0, \frac{1}{2}\} \cup \frac{1}{2}\mathbf{Z}_-$  のノードで分けられた各区間において  $m+1$  次の多項式となるような関数の集合であるとし,  $\psi \perp S_0^m$  と  $\|\psi\|_{L^2} = 1$  を満たす  $\psi \in S_1^m$  が一意存在 (符号を除いて) するというのが, 今日のウェーブレット関数に相当する定義となっている.

有名な Franklin ウェーブレットは, Strömberg ウェーブレットと同じスプラインウェーブレットとして分類されるが, 各次数に 1 つのウェーブレットが対応することはその構成法から容易にわかる. 一方 Strömberg ウェーブレットの場合, 各次数にいくつのウェー

ブレットがあるのかは、オリジナルの定義の中で一意存在として既に保証していることになる。ただし、オリジナルの定義以外にも含むかもしれないより一般的な構成法を行ったとすると、複数個ある可能性が残る。論文 [3] や [6] において、Daubechies ウェーブレットのローパスフィルターに対するスペクトル因数分解の議論が、Strömberg ウェーブレットのスケーリング関数の構成に対応することが述べられており、ウェーブレット理論の正規直交化のプロセスでも Strömberg ウェーブレットが導出できることが示されている。そうすると、Daubechies ウェーブレットが複数個あったように、(本来の) Strömberg ウェーブレットを含む“Strömberg 類似タイプ”のウェーブレットが複数個あることになる。Daubechies ウェーブレットの場合、スペクトル因数分解の状況から 4 次になって初めて複数個となり、より対称性のある Symlet が登場することが知られている。本論文では、“Strömberg 類似タイプ”のウェーブレットに対しても、スペクトル因数分解の状況を見極め、その対称性等についても詳しく調べていきたい。

最も単純な 2 次の Strömberg ウェーブレットとそのスケーリング関数は、 $\lambda = 2 - \sqrt{3}$  においてそれぞれ次で与えることも可能である。

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k N_2(2x - k), \quad \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k N_2(x - k)$$

ただし、

$$b_k = \begin{cases} -4(-\lambda)^k & \text{if } k \geq 1, \\ -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{if } k = 0, \\ -\lambda^{-\frac{k}{2}} \left( \cos \frac{k\pi}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{k\pi}{2} \right) & \text{if } k \leq -1, \end{cases} \quad a_k = \begin{cases} -(3 + \sqrt{3})(-\lambda)^k & \text{if } k \geq 1, \\ 0 & \text{if } k \leq 0, \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この  $\psi$  の定義では左右反転してしまっているが、Strömberg ウェーブレットと同一視する。 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$  をノードに持つように見えるのだが、負の領域では整数値のノードを結ぶ線分の midpoint の位置もちょうどノードとなっているため、グラフ Fig. 2 を見れば整数値のノードしかないことがわかる。実際、上の定義式で  $\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}$  に注意すれば、 $m \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} & \frac{b_{-2m+1} + b_{-2m-1}}{2} \\ &= -\frac{\lambda^{m-\frac{1}{2}}}{2} \left\{ \cos \left( m - \frac{1}{2} \right) \pi - \sqrt{2} \sin \left( m - \frac{1}{2} \right) \pi \right\} - \frac{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}{2} \left\{ \cos \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi - \sqrt{2} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi \right\} \\ &= \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \lambda^m \cos m\pi = -\lambda^m \cos m\pi = -\lambda^m (\cos m\pi - \sqrt{2} \sin m\pi) = b_{-2m} \end{aligned}$$

となる。このように Strömberg ウェーブレットは正負の領域でノードが非一様で極端に非対称なので、あまり利用されてこなかった。著者はこれまでのいくつかの論文で、Strömberg ウェーブレットの有効性について述べてきたので紹介しよう。

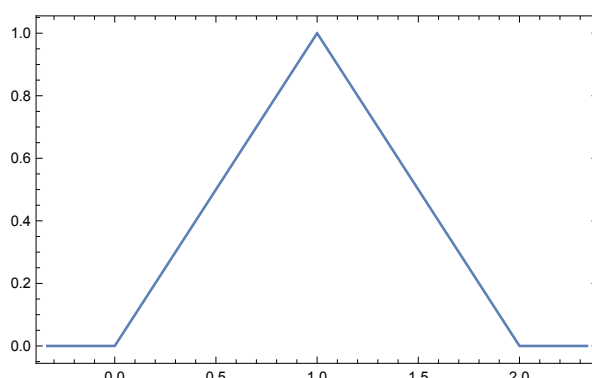
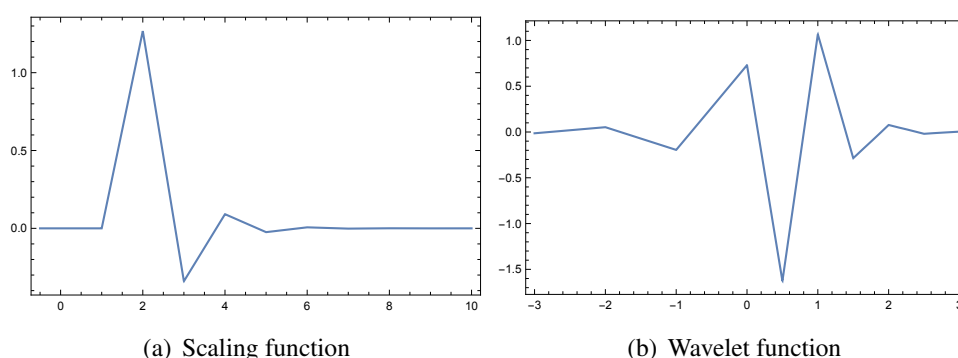
Fig. 1. Graph of the spline function  $N_2$ .

Fig. 2. Graphs of Strömberg scaling function (a) and wavelet function (b) of order 2.

長所 1) 係数  $a_k$  と  $b_k$  は無限個でありながらも,  $0 < \lambda = 2 - \sqrt{3} < 1$  の冪の形をしており, 非常にシンプルである. これにより, 指数減衰することが直ちにわかる. また実際, 具体的な計算のしやすさから

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad c_{j,k} = \begin{cases} \frac{(-1)^j}{(j+1)2^{\frac{j}{2}}} & \text{for } j \geq 0 \text{ and } k = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

という  $C^0$  関数がソボレフ空間  $W^{1,1}(\mathbf{R})$  に属さないことと, ウェーブレット展開である関数項級数が一様収束するにもかかわらず, ( $L^\infty(\mathbf{R})$  の位相では) 無条件収束をしないという事実が, 論文 [4] では示されている. なお, ソボレフ空間  $W^{1,1}(\mathbf{R})$  というのはギリギリとなる臨界的な関数空間で, フーリエ級数展開の場合には, 関数空間が  $W^{1,1}(\mathbf{R}) \cap C^\alpha(\mathbf{R})$  ( $\alpha > 0$ ) であるならば, 一様収束と同時に無条件収束もすることがよく知られている.

注意 1.1 同じ 2 次のスプラインウェーブレットである Franklin ウェーブレットのときですら, スケーリング関数の係数を計算して正確に求めると

$$a_k = \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{n=\max\{0, -k-1\}}^{\infty} \frac{(2k+4n+1)!!}{(-8)^{k+2n+1} n! (k+n+1)!}$$

となり、とても煩雑で指数減衰することもわかりにくい（論文 [3] を見よ）。

長所 2) スペクトル因数分解のおかげで、Daubechies ウェーブレットが有限長のサポートを持つことに成功したが、これは Strömberg ウェーブレットが有限個のスケーリング関数でスプライン関数を展開できることに相当することになる。すなわち、次の関係式が得られる（[3] を見よ）。

$$N_2(x) = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \varphi(x) + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \varphi(x+1).$$

有限長のサポートを持つ  $N_2(x)$  が、無限長のサポートを持つ  $\varphi(x)$  の有限個で表わせるのはとても不思議な感じがする。この関係式の有り難いことは、スプライン関数（リース基底）の形で与えられた  $V_0$  の関数

$$(1.1) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f_k N_2(x-k) \in V_0$$

に対して、スケーリング関数（正規直交基底）を用いて、直ちに

$$(1.2) \quad f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left( \frac{3 - \sqrt{3}}{6} f_k + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} f_{k-1} \right) \varphi(x-k) \in V_0$$

と、 $V_0$  における展開へ書き換えられることである。これでウェーブレット展開する体制が整い、以後はフィルタ係数のみを用いることで、積分演算無しに計算が可能となる。ところで、(1.1) のスプライン関数の形から  $f(x)$  の積分値や  $L^1$  ノルムは容易に求まるが、(1.2) のスケーリング関数の形からは次のように  $L^2$  ノルムも直ちに求まめることが可能となる。

$$\|f\|_{L^2(\mathbf{R})}^2 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left( \frac{3 - \sqrt{3}}{6} f_k + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} f_{k-1} \right)^2$$

また、スプライン関数の形で与えた 2 つの関数に対して、相関関数の計算（平行移動させて内積をとる計算）をするのに、やはり積分演算無しに計算が可能となり、非常に役立つことが期待できる。

一般に  $p$  階のカーディナル B スプライン  $N_p(x)$  は、 $p-1$  次のスプライン関数であり、

$$\hat{N}_p(\xi) = \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^p \left( \equiv \hat{N}_1(\xi)^p \right)$$

で定義される。最もよく利用されるのは、十分滑らかな 3 次のスプライン関数  $N_4(x)$  である（番号がズレることに注意）。これに対応できるように 4 次の Strömberg ウェーブレットを、本論文では特に詳しく調べ、長所 2 のようなスプライン関数との関係式を求めることも目的とする。

## 2. スペクトル因数分解

このセクションでは、次のスペクトル因数分解に関する Riesz の補題 (Polya and Szegő) を詳しく解説する.

**補題 2.1** 実係数を持つ偶関数である  $M$  次の三角多項式

$$A(\xi) = \sum_{m=0}^M a_m e^{-im\xi}$$

が偶関数で非負である, すなわち実数値関数

$$A(\xi) = \sum_{m=0}^M a_m \cos m\xi$$

であるならば,  $|B(\xi)|^2 = A(\xi)$  を満たすような実係数を持つ  $M$  次の三角多項式

$$B(\xi) = \sum_{m=0}^M b_m e^{-im\xi}$$

が存在する.

**注意 2.2** 応用のときに合わすため,  $A(\xi), B(\xi)$  の中の項を  $e^{im\xi}$  でなく,  $e^{-im\xi}$  とした.

**証明** 文献 [2] を参考にしてより丁寧に証明しよう.  $A(\xi)$  における  $\cos m\xi$  に対して倍角公式を考えることで, あらためて  $A(\xi)$  を実係数を持つ偶関数である  $M$  次の三角多項式

$$A'(\cos \xi) = \sum_{m=0}^M a'_m \cos^m \xi \equiv \alpha \prod_{j=1}^M (\cos \xi - c_j)$$

で書き換えることができる. ここで,  $a'_m$  と  $\alpha$  は実数であり,  $c_j$  は複素数である. このとき,  $z = e^{-i\xi}$  とおくと, 次のような関係になっている.

$$A(\xi) = A'\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \alpha \prod_{j=1}^M \left(\frac{z+z^{-1}}{2} - c_j\right) = \frac{\alpha}{(2z)^M} \prod_{j=1}^M (z^2 - 2c_j z + 1).$$

$z^2 - 2c_j z + 1 = z^2 \{(z^{-1})^2 - 2c_j z^{-1} + 1\}$  なので,  $z^2 - 2c_j z + 1$  に対して  $z$  の方程式を考えたときは, 互いに逆数の関係となる根を持つことがわかる. さらに, ある  $j = J$  に固定し, 根の状況に応じて以下のように場合分けをして詳しく見ていこう.

**1.**  $c_J$  が実数でかつ  $|c_J| \geq 1$  の場合)  $r_J := c_J + \sqrt{c_J^2 - 1}$  とおくと,

$$z^2 - 2c_J z + 1 = \left(z - c_J - \sqrt{c_J^2 - 1}\right) \left(z - c_J + \sqrt{c_J^2 - 1}\right) = (z - r_J)(z - r_J^{-1})$$

となり,

$$A(\xi) = \frac{\alpha}{(2z)^M} (z - r_J)(z - r_J^{-1}) R(z)$$

の形となる.

2.  $c_J$  が実数でかつ  $|c_J| < 1$  の場合)  $z_J := c_J + i\sqrt{1 - c_J^2}$  とおくと,

$$z^2 - 2c_J z + 1 = \left(z - c_J - i\sqrt{1 - c_J^2}\right) \left(z - c_J + i\sqrt{1 - c_J^2}\right) = (z - z_J)(z - z_J^{-1})$$

となる. このとき注目すべきは,  $|z_J| = 1$  となることである. 従って,  $\theta_J = \text{Arg } z_J (\neq 0, \pi)$  とおくと, 相異なる複素数  $e^{\pm i\theta_J}$  を用いて

$$z^2 - 2c_J z + 1 = (z - e^{i\theta_J})(z - e^{-i\theta_J})$$

となる. また,  $z = e^{-i\xi}$  を代入すると

$$z^2 - 2c_J z + 1 = e^{-2i\xi} (1 - e^{i(\theta_J + \xi)})(1 - e^{-i(\theta_J - \xi)})$$

ともなるが,  $\xi = \pm\theta_J$  で 1 次の零点を持つことがわかる. 一方, 全体となる  $A(\xi)$  では  $\xi$  に関して滑らかであり, 実数値関数で偶関数非負であるから, その  $\xi$  に関する零点は必ず極小値となっているため,  $\xi = \pm\theta_J$  における多重度は両者同じ値の偶数でなければいけない. 故に, この場合は

$$A(\xi) = \frac{\alpha}{(2z)^M} (z - e^{i\theta_J})^{2q_J} (z - e^{-i\theta_J})^{2q_J} R(z)$$

の形となる.

3.  $c_J$  が実数でない複素数の場合)  $c_J \neq \overline{c_J}$  である. さて, 多項式  $A'(c)$  が  $A'(c_J) = 0$  を満たすならば, 実係数  $a'_m$  を持つので,  $A'(\overline{c_J}) = \overline{A'(c_J)} = 0$  となることがわかる. このとき,

$$A'(\cos \xi) \equiv \alpha \prod_{j=1}^M (\cos \xi - c_j) = \alpha (\cos \xi - c_J)(\cos \xi - \overline{c_J}) R'(\cos \xi)$$

であり,

$$\begin{aligned} A(\xi) &= A'\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \alpha \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - c_J\right) \left(\frac{z + z^{-1}}{2} - \overline{c_J}\right) R'\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) \\ &= \frac{\alpha}{(2z)^M} (z^2 - 2c_J z + 1) (z^2 - 2\overline{c_J} z + 1) R(z) \end{aligned}$$

の形となる. ちなみに,  $z^2 - 2c_J z + 1$  に関して

$$z^2 - 2c_J z + 1 = (z - z_J)(z - z_J^{-1}) = (z - r_J e^{i\theta_J})(z - r_J^{-1} e^{-i\theta_J})$$

と因数分解できるが、もし  $r_J = 1$  だと  $c_J$  が実数になってしまうので、 $r_J \neq 1$  である、すなわち  $|z_J| \neq 1$  である ( $z^2 - 2\overline{c_J}z + 1$  に関しても同様である)。

以上をまとめると、 $A(\xi)$  は次の形で因数分解して表せることになる。

$$\frac{\alpha}{(2z)^M} \prod_{j_1=1}^{M_1} (z - r_{j_1})(z - r_{j_1}^{-1}) \prod_{j_2=1}^{M_2} (z - e^{i\theta_{j_2}})^{2q_{j_2}} (z - e^{-i\theta_{j_2}})^{2q_{j_2}} \prod_{j_3=1}^{M_3} (z^2 - 2c_{j_3}z + 1) \left( z^2 - 2\overline{c_{j_3}}z + 1 \right).$$

ただし、 $q_{j_2} \neq 0$  であり、 $z$  の次数を考えると  $2M_1 + 4 \sum_{j_2=1}^{M_2} q_{j_2} + 4M_3 = 2M$  である。 $A(\xi)$  は非負の実数なので、次の式変形も可能となる。

$$\begin{aligned} A(\xi) &= |A(\xi)| \\ &= \frac{|\alpha|}{2^M} \prod_{j_1=1}^{M_1} |(z - r_{j_1})(z - r_{j_1}^{-1})| \prod_{j_2=1}^{M_2} |(z - e^{i\theta_{j_2}})^{2q_{j_2}} (z - e^{-i\theta_{j_2}})^{2q_{j_2}}| \\ &\quad \times \prod_{j_3=1}^{M_3} |(z^2 - 2c_{j_3}z + 1)(z^2 - 2\overline{c_{j_3}}z + 1)| \\ &= \frac{|\alpha|}{2^M} \prod_{j_1=1}^{M_1} |r_{j_1}|^{-1} |z - r_{j_1}|^2 \prod_{j_2=1}^{M_2} |(z - e^{i\theta_{j_2}})^{q_{j_2}} (z - e^{-i\theta_{j_2}})^{q_{j_2}}|^2 \prod_{j_3=1}^{M_3} |z_{j_3}|^{-2} |(z - z_{j_3})(z - \overline{z_{j_3}})|^2 \\ &= \frac{|\alpha|}{2^M \prod_{j_0=1}^{M_1} |r_{j_0}| \prod_{j_3=1}^{M_3} |z_{j_3}|^2} \\ &\quad \times \left| \prod_{j_1=1}^{M_1} (z - r_{j_1}) \prod_{j_2=1}^{M_2} (z - e^{i\theta_{j_2}})^{q_{j_2}} (z - e^{-i\theta_{j_2}})^{q_{j_2}} \prod_{j_3=1}^{M_3} (z - z_{j_3})(z - \overline{z_{j_3}}) \right|^2. \end{aligned}$$

ここで、 $z = e^{-i\xi}$  に注意して、次の 2 つの関係式を用いた。

$$\begin{aligned} |(z - r_{j_1})(z - r_{j_1}^{-1})| &= |(z - r_{j_1})(\overline{z - r_{j_1}^{-1}})| = |(z - r_{j_1})(\overline{z} - r_{j_1}^{-1})| \\ (2.1) \quad &= \left| (z - r_{j_1}) \frac{r_{j_1}^{-1}(r_{j_1} - z)}{z} \right| = |r_{j_1}|^{-1} |z - r_{j_1}|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(z^2 - 2c_{j_3}z + 1)(z^2 - 2\overline{c_{j_3}}z + 1)| &= |(z^2 - 2c_{j_3}z + 1)(\overline{z^2 - 2\overline{c_{j_3}}z + 1})| \\ &= |(z^2 - 2c_{j_3}z + 1)(\overline{z}^2 - 2c_{j_3}\overline{z} + 1)| \\ &= |(z - z_{j_3})(z - \overline{z_{j_3}})(\overline{z} - z_{j_3})(\overline{z} - \overline{z_{j_3}})| \\ &= \left| (z - z_{j_3}) \frac{z_{j_3}^{-1}(z_{j_3} - \overline{z})}{\overline{z}} (\overline{z} - z_{j_3}) \frac{z_{j_3}^{-1}(\overline{z_{j_3}} - z)}{z} \right| \\ &= |z_{j_3}|^{-2} |(z - z_{j_3})(\overline{z} - z_{j_3})|^2 \\ (2.2) \quad &= |z_{j_3}|^{-2} |(z - z_{j_3})(z - \overline{z_{j_3}})|^2 \end{aligned}$$

を用いた。従って、

$$B(\xi) = \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^M \prod_{j_1=1}^{M_1} |r_{j_1}| \prod_{j_3=1}^{M_3} |z_{j_3}|^2}} \\ \times \prod_{j_1=1}^{M_1} (z - r_{j_1}) \prod_{j_2=1}^{M_2} (z - e^{i\theta_{j_2}})^{q_{j_2}} (z - e^{-i\theta_{j_2}})^{q_{j_2}} \prod_{j_3=1}^{M_3} (z - z_{j_3})(z - \overline{z_{j_3}})$$

とすると  $|B(\xi)|^2 = A(\xi)$  が成立する。  $(z - e^{i\theta_{j_2}})(z - e^{-i\theta_{j_2}})$  と  $(z - z_{j_3})(z - \overline{z_{j_3}})$  は実係数を持つことに注意して、これらの式を全て展開して整理すれば、実係数の  $b_m$  も求まることになる。□

**注意 2.3** 上の  $B(\xi)$  は、 $z$  の最高次の係数が正となる方だけを書いたが、負となる方を考えても良い ( $B(\xi)$  を  $-1$  倍することになる)。

さて、上の補題の証明では、 $2M_1 + 4 \sum_{j_2=1}^{M_2} q_{j_2} + 4M_3 = 2M$  であった。ただし、 $q_{j_2} \neq 0$  で、 $M_2 = 0$  のときは左辺の第2項はない。さらにより具体的に見ていくことにしよう。

$M = 1$  の場合)  $M_1, M_2, M_3$  は

$$2 \sum_{j_2=1}^{M_2} q_{j_2} + 2M_3 = 1 - M_1 (\geq 0)$$

を満たさなければいけない。両辺の偶奇がそろうためには、 $M_1 = 1$  しか起こりえない。そして、 $M_2 = M_3 = 0$  となる。故に、 $B(\xi)$  は以下の1通りになる。

$$(i) B(\xi) = \sqrt{\frac{|\alpha|}{2|r_1|}} (z - r_1).$$

このとき、 $A(\xi)$  は次のような形にもなっている。

$$(i)' A(\xi) = \frac{|\alpha|}{2|r_1|} |z - r_1|^2.$$

$M = 2$  の場合)  $M_1, M_2, M_3$  は

$$2 \sum_{j_2=1}^{M_2} q_{j_2} + 2M_3 = 2 - M_1 (\geq 0)$$

を満たさなければいけない。両辺の偶奇がそろうためには、 $M_1 = 0, 2$  しか起こりえない。

- $M_1 = 0$  のとき、 $M_2(= q_1) = 1, M_3 = 0$  又は  $M_2 = 0, M_3 = 1$  となる。



- $M_1 = 2$  のとき,  $M_2 = M_3 = 0$  となる.

故に,  $B(\xi)$  は以下の 3 通りのいずれかになる.

$$\begin{aligned} (i) \quad B(\xi) &= \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2|r_1r_2|}}(z-r_1)(z-r_2), \\ (ii) \quad B(\xi) &= \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2}}(z-e^{i\theta_1})(z-e^{-i\theta_1}), \\ (iii) \quad B(\xi) &= \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2|z_1|^2}}(z-z_1)(z-\bar{z}_1). \end{aligned}$$

このとき, (iii) で  $|z_1| = 1$  のときも含めれば (ii) も同時に考えることができ,  $A(\xi)$  は次のような形にもなっている.

$$\begin{aligned} (i)' \quad A(\xi) &= \frac{|\alpha|}{2^2|r_1r_2|}|z-r_1|^2|z-r_2|^2, \\ (iii)' \quad A(\xi) &= \frac{|\alpha|}{2^2|z_1|^2}|z-z_1|^2|z-\bar{z}_1|^2. \end{aligned}$$

$M = 3$  の場合)  $M_1, M_2, M_3$  は

$$2 \sum_{j_2=1}^{M_2} q_{j_2} + 2M_3 = 3 - M_1 (\geq 0)$$

を満たさなければいけない. 両辺の偶奇が揃うためには,  $M_1 = 1, 3$  しか起こりえない.

- $M_1 = 1$  のとき,  $M_2 (= q_1) = 1, M_3 = 0$  又は  $M_2 = 0, M_3 = 1$  となる.
- $M_1 = 3$  のとき,  $M_2 = M_3 = 0$  となる.

故に,  $B(\xi)$  は以下の 3 通りのいずれかになる.

$$\begin{aligned} (i) \quad B(\xi) &= \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^3|r_1r_2r_3|}}(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3), \\ (ii) \quad B(\xi) &= \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^3|r_1|}}(z-r_1)(z-e^{i\theta_1})(z-e^{-i\theta_1}), \\ (iii) \quad B(\xi) &= \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^3|r_1||z_1|^2}}(z-r_1)(z-z_1)(z-\bar{z}_1). \end{aligned}$$

このとき, (iii) で  $|z_1| = 1$  のときも含めれば (ii) も同時に考えることができ,  $A(\xi)$  は次のような形にもなっている.

$$(i)' A(\xi) = \frac{|\alpha|}{2^3|r_1r_2r_3|}|z-r_1|^2|z-r_2|^2|z-r_3|^2,$$

$$(iii)' A(\xi) = \frac{|\alpha|}{2^3|r_1||z_1|^2}|z-r_1|^2|z-z_1|^2|z-\overline{z_1}|^2.$$

### 3. ウェーブレットの構成法

スペクトル因数分解の結果を利用して, Daubechies ウェーブレットの構成を解説し, Strömberg ウェーブレットとさらに新たな類似タイプも構成しよう.

#### 3.1 Daubechies ウェーブレットの場合

2 次の Daubechies ウェーブレットの場合は,  $M = 1$  のときが対応し明らかに 1 通りであるので, ここでは説明を省くことにする.  $|m_0(\xi)|^2$  は一般に

$$(3.1) \quad q_n(s) = \int_{-1}^s (1-t^2)^{n-1} dt$$

で定義される関数を用いて,

$$|m_0(\xi)|^2 \equiv \frac{q_n(\cos \xi)}{q_n(1)}$$

とおけばよい. 3 次の Daubechies ウェーブレットの場合,  $n = 3$  として式を整理していけば次のようになる.

$$|m_0(\xi)|^2 = \cos^6 \frac{\xi}{2} \frac{3 \cos^2 \xi - 9 \cos \xi + 8}{2}$$

**注意 3.1** もしここでスペクトル因数分解を用いず単純に平方根をとって

$$m_0(\xi) = \cos^3 \frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{3 \cos^2 \xi - 9 \cos \xi + 8}{2}}$$

としてしまうと, Daubechies ウェーブレットではなく, 無限長のサポートを持つスケーリング関数とウェーブレットの構成になってしまう.

$A'(\cos \xi) = \frac{3 \cos^2 \xi - 9 \cos \xi + 8}{2}$  として,  $M = 2$  のときの §2 の結果を用いてみよう. 方程式  $A'(c) = \frac{3c^2 - 9c + 8}{2} = 0$  の 2 つの (共役) 複素数解  $c = c_1^\pm$  は

$$c_1^\pm = \frac{9 \pm i\sqrt{15}}{6}$$

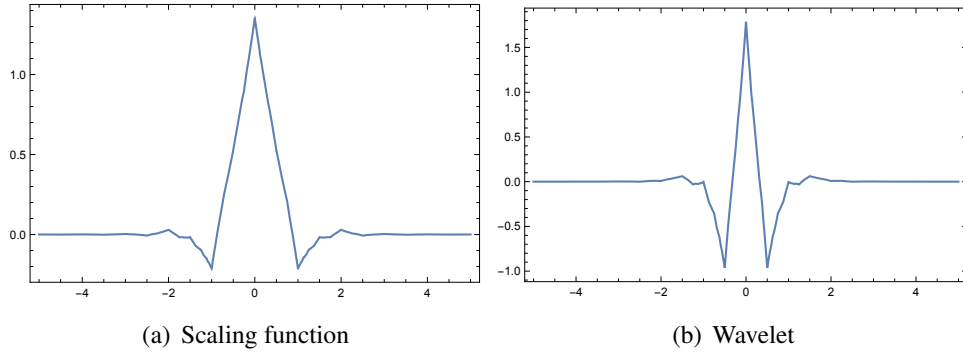


Fig. 3. Graphs of scaling function and wavelet without the spectral factorization.

となる. 従って,  $B(\xi)$  は  $\alpha = \frac{3}{2}$  として (iii) のパターンに限られる. さらに,  $(z^2 - 2c_1^\pm z + 1)(z^2 - 2\bar{c}_1^\pm z + 1) = 0$  を解くのだが,  $z^2 - 2\bar{c}_1^\pm z + 1 = z^2 - 2c_1^\mp z + 1$  なので,  $z^2 - 2c_1^\pm z + 1 = 0$  だけを解けば良い.

$$z_1^\pm = \frac{1}{6} \left( 9 + i\sqrt{15} \pm \sqrt{6(5 + 3i\sqrt{15})} \right), \quad z_2^\pm = \frac{1}{6} \left( 9 - i\sqrt{15} \pm \sqrt{6(5 - 3i\sqrt{15})} \right)$$

が求まり, (iii) の  $z_1$  としてここでの  $z_2^- = \frac{1}{6} \left( 9 - i\sqrt{15} - \sqrt{6(5 - 3i\sqrt{15})} \right)$  を選択すると

$$m_0(\xi) = \cos^3 \frac{\xi}{2} B(\xi) = \sum_{k=0}^5 h_k e^{-ik\xi}$$

となる. ただし, 近似値

$$\{h_k\}_{k=0}^5 = \{0.235234, 0.570558, 0.325183, -0.0954672, -0.0604161, 0.0249087\}$$

とする.

**注意 3.2** 単純に考えると,  $B(\xi)$  は 4 通りである. ただ,  $z_1^+$  の選択は,  $z_2^+$  と左右の反転だけで同等であろう. なぜならば,  $z_1^+ = 1/z_2^+$  のおかげで,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2|z_1^+|^2}}(z - z_1^+)(z - \bar{z}_1^+) &= \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2}} \left( \frac{z^2}{|z_1^+|} - \frac{z_1^+ + \bar{z}_1^+}{|z_1^+|} z + |z_1^+| \right) \\ &= z^2 \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2}} \left( \frac{z^{-2}}{|z_2^+|} - \frac{z_2^+ + \bar{z}_2^+}{|z_2^+|} z^{-1} + |z_2^+| \right) = z^2 \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2|z_2^+|^2}}(z^{-1} - z_2^+)(z^{-1} - \bar{z}_2^+) \end{aligned}$$

ここで, 先頭の “ $z^2$ ” は平行移動のズレを表し, “ $z^{-1}$ ” は左右の反転を意味する. 同様に  $\bar{z}_1^- = 1/\bar{z}_2^-$  のおかげで,  $\bar{z}_1^-$  は,  $\bar{z}_2^-$  も同等であろう. 区別を明確にするために番号の付け方で,  $|z_1^\pm| < 1$  (自動的に  $|z_2^\pm| > 1$ ) としておこう. そうすると,  $z_1^+$  または  $\bar{z}_1^-$  の選択の 2 通りだけになる. また,  $\bar{z}^2 - 2\bar{c}_1^\pm \bar{z} + 1 = \bar{z}^2 - 2c_1^\mp \bar{z} + 1$  なので, 共役な  $z$  と  $\bar{z}$  の解を持つこと

に注意する.  $z_1^+$  に対してはともに絶対値が 1 より小さい  $z_1^-$  が対応し,  $z_1^+ = \overline{z_1^-}$  となることになり, (iii) のもとでの  $z_1^+$  または  $z_1^-$  の選択は単なる順序の入れ替えにすぎない. そうすると, 結局のところ  $B(\xi)$  は 1 通りになる.

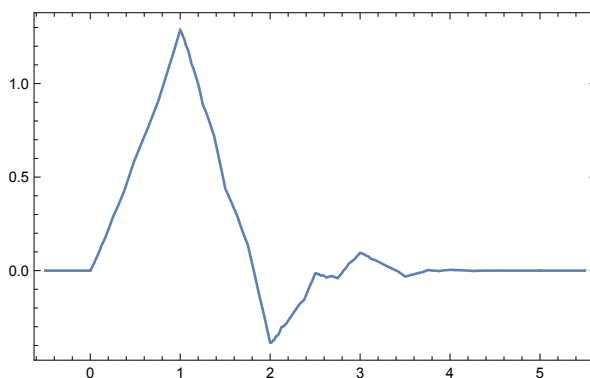


Fig. 4. Graphs of Daubechies scaling function of order 3.

また, 4 次の Daubechies ウェーブレットの場合,  $n = 4$  として式を整理していけば次のようになる.

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 &= \cos^8 \frac{\xi}{2} \frac{-5 \cos^3 \xi + 20 \cos^2 \xi - 29 \cos \xi + 16}{2} \\ &= \cos^8 \frac{\xi}{2} \frac{-5 \cos 3\xi + 40 \cos 2\xi - 131 \cos \xi + 104}{8} \end{aligned}$$

$A'(\cos \xi) = \frac{-5 \cos^3 \xi + 20 \cos^2 \xi - 29 \cos \xi + 16}{2}$  として,  $M = 3$  のときの §2 の結果を用いてみよう. 実はわざわざ求める必要はなかったのだが,  $A(\xi) = \frac{-5 \cos 3\xi + 40 \cos 2\xi - 131 \cos \xi + 104}{8}$  であり,

$$\begin{aligned} A(\xi) &= A'\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -5 \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^3 + 20 \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2 - 29 \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) + 16 \right\} \\ &= \frac{-5}{2^4 z^3} \left\{ z^6 - 8z^5 + \frac{131}{5} z^4 - \frac{208}{5} z^3 + \frac{131}{5} z^2 - 8z + 1 \right\} \end{aligned}$$

である. 従って,

$$(3.2) \quad A(\xi) = |A(\xi)| = \frac{5}{2^4} \left| z^6 - 8z^5 + \frac{131}{5} z^4 - \frac{208}{5} z^3 + \frac{131}{5} z^2 - 8z + 1 \right|$$

ただし, この  $A(\xi)$  は用いない.  $A'(\cos \xi) = \frac{-5 \cos^3 \xi + 20 \cos^2 \xi - 29 \cos \xi + 16}{2}$  の部分からなる方程式  $A'(c) = \frac{-5c^3 + 20c^2 - 29c + 16}{2} = 0$  に対する判別式は  $D = -980$  で, 1 つの実数解  $c = c_1$  と 2 つの (共役) 複素数解  $c = c_2^\pm$  は直接計算で

$$c_1 = 1.68477, \quad c_2^\pm = 1.15762 \pm 0.747861i$$

と近似値が求められる. 従って,  $B(\xi)$  は  $\alpha = -\frac{5}{2}$  として (iii) のパターンに限られる.

注意 3.3 (3.2) と (iii)' の展開した式を係数比較をして,  $c_j$  を求めようとしてはいけないことに注意する. 両者は  $z = e^{-i\xi}$  のもとでは確かに等しい. しかしながら, 多項式の係数比較をするにあたっては全ての  $z \in \mathbf{C}$  が必要で,  $z = e^{-i\xi}$  だけでは不十分なのである.

さらに,  $z^2 - 2c_1z + 1 = 0$  と  $(z^2 - 2c_2^+z + 1)(z^2 - 2\overline{c_2^+}z + 1) = 0$  を解いて,

$$r_1^\pm = c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 1} = 3.04066, 0.328876,$$

と

$$z_1^\pm = 0.284096 \pm 0.243228i, \quad z_2^\pm = 2.03114 \pm 1.73895i$$

と近似値が求まり, (iii) の  $r_1, z_1$  としてここでの  $r_1^- = 0.328876, z_1^+ = 0.284096 + 0.243228i$  を選択すると

$$(3.3) \quad m_0(\xi) = \cos^4 \frac{\xi}{2} B(\xi) = \sum_{k=0}^7 h_k e^{-ik\xi},$$

となる. ただし, 近似値

$$\{h_k\}_{k=0}^7 = \left\{ 0.162902, 0.505473, 0.4461, -0.0197875, \right. \\ \left. -0.132254, 0.0218082, 0.0232518, -0.00749349 \right\}$$

とする.

注意 3.4 3 次の Daubechies ウェーブレットの場合と同様に,  $z_1^\pm$  と  $z_2^\pm$  に関しては, 結局のところ  $B(\xi)$  は 1 通りになる. 残る  $r_1$  から 2 通りになる. 従って, 4 次の Daubechies ウェーブレットは  $|r_1^+| < 1$  に制限することで (3.3) となり, 4 次の Symlet は  $|r_1^+| > 1$  の方で (iii) の  $r_1, z_1$  としてここでの  $r_1^+ = 3.04066, z_1^+ = 0.284096 + 0.243228i$  に制限したものが相当し

$$m_0(\xi) = \cos^4 \frac{\xi}{2} B(\xi) = \sum_{k=0}^7 h_k e^{-ik\xi},$$

となる. ただし, 近似値

$$\{h_k\}_{k=0}^7 = \left\{ -0.0535745, -0.0209555, 0.35187, 0.568329, \right. \\ \left. 0.210617, -0.0701588, -0.00891235, 0.0227852 \right\}$$

とする.

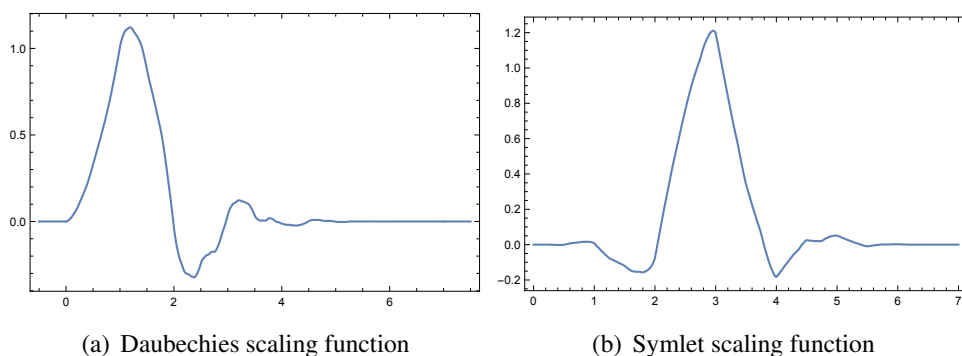


Fig. 5. Graphs of Daubechies scaling function of order 4 (a) and Symlet scaling function of order 4 (b).

### 3.2 Strömberg ウェーブレットの場合

[3] では 2 次と 3 次の Strömberg ウェーブレットを構成した. ここでは, スペクトル因数分解の結果を踏まえてより丁寧に見ていきたい. 2 次の Strömberg ウェーブレットの場合は,  $M = 1$  のときが対応し, 1 通りであるので説明を省くことにする. 3 次の Strömberg ウェーブレットの場合, 3 階のカーディナル B スプライン  $N_3(x)$  は

$$\hat{N}_3(\xi) = \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^3 \left( \equiv \hat{N}_1(\xi)^3 \right)$$

で定義されており,

$$|\hat{N}_3(\xi)| = \left| \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right|^3$$

が成り立つ. スケーリング関数  $\varphi(x)$  は

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k N_3(x - k).$$

と展開されており, この両辺をフーリエ変換すると次を得る.

$$(3.4) \quad \hat{\varphi}(\xi) = \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\xi} \right) \hat{N}_3(\xi).$$

また, 公式  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} (\xi + 2k\pi)^{-6} = \frac{1}{30} (2 \sin \frac{\xi}{2})^{-6} (\cos^2 \xi + 13 \cos \xi + 16)$  から次の等式がわかる.

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |\hat{N}_3(\xi + 2\ell\pi)|^2 &= \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \left| \frac{\sin(\xi/2 + \ell\pi)}{\xi/2 + \ell\pi} \right|^6 = \sin^6 \frac{\xi}{2} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \left( \frac{\xi}{2} + \ell\pi \right)^{-6} \\ &= \frac{1}{30} (\cos^2 \xi + 13 \cos \xi + 16). \end{aligned}$$

正規直交基底であるためには, (3.4) より次を満たさなければいけない.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\ell\pi)|^2 = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \left| \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik(\xi + 2\ell\pi)} \right) \hat{N}_3(\xi + 2\ell\pi) \right|^2 \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\xi} \right|^2 \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |\hat{N}_3(\xi + 2\ell\pi)|^2. \end{aligned}$$

故に, (3.5) より次が得られる.

$$\left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\xi} \right|^2 = \frac{30}{\cos^2 \xi + 13 \cos \xi + 16}.$$

さて,  $A'(\cos \xi) = \frac{\cos^2 \xi + 13 \cos \xi + 16}{30}$  として,  $M = 2$  のときの §2 の結果を用いてみよう. 方程式  $A'(c) = \frac{c^2 + 13c + 16}{30} = 0$  の異なる実数解は

$$c_1 = \frac{-13 + \sqrt{105}}{2}, \quad c_2 = \frac{-13 - \sqrt{105}}{2}$$

となる. 従って,  $B(\xi)$  は  $\alpha = 1/30$  として (i) のパターンに限られる. さらに,  $z^2 - 2c_j z + 1 = 0$  を解いて, (外せない 2 重根号を持つ) 負の解

$$r_1^\pm = \frac{-13 + \sqrt{105} \pm \sqrt{270 - 26\sqrt{105}}}{2}, \quad r_2^\pm = \frac{-13 - \sqrt{105} \pm \sqrt{270 + 26\sqrt{105}}}{2}$$

が求まる (3 次の Daubechies ウェーブレットの場合とは, スペクトル因数分解が同じ状況ではないし, 添字の記号  $\pm$  の使い方が異なることに注意する). (i) の  $r_1, r_2$  としてここでの

$$(I) \ r_1^- = \frac{-13 + \sqrt{105} - \sqrt{270 - 26\sqrt{105}}}{2}, \ r_2^- = \frac{-13 - \sqrt{105} - \sqrt{270 + 26\sqrt{105}}}{2}$$

を選択し, 近似的に

$$(3.6) \quad B(\xi) = 0.670139 + 0.317426e^{-i\xi} + 0.0124352e^{-2i\xi}$$

とする.

**注意 3.5** 単純に考えると,  $B(\xi)$  は  $2^2$  通りである. ただ,  $r_1^+$  と  $r_2^+$  の組み合わせは,  $r_1^-$  と  $r_2^-$  の組み合わせと左右の反転だけで同等であろう. なぜならば,  $r_1^+$  と  $r_2^+$  が全て同じ (負の) 符号だったことに注意し,  $r_1^+ = 1/r_1^-$  と  $r_2^+ = 1/r_2^-$  のおかげで,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2|r_1^+r_2^+|}}(z - r_1^+)(z - r_2^+) &= \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2}} \left( \frac{z^2}{\sqrt{r_1^+r_2^+}} - \frac{r_1^+ + r_2^+}{\sqrt{r_1^+r_2^+}}z + \sqrt{r_1^+r_2^+} \right) \\ &= z^2 \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2}} \left( \frac{z^{-2}}{\sqrt{r_1^-r_2^-}} - \frac{r_1^- + r_2^-}{\sqrt{r_1^-r_2^-}}z^{-1} + \sqrt{r_1^-r_2^-} \right) = z^2 \sqrt{\frac{|\alpha|}{2^2|r_1^-r_2^-|}}(z^{-1} - r_1^-)(z^{-1} - r_2^-) \end{aligned}$$

ここで、先頭の“ $z^2$ ”は平行移動のズレを表し、“ $z^{-1}$ ”は左右の反転を意味する．同様に、 $r_1^+$  と  $r_2^-$  の組み合わせは、 $r_1^-$  と  $r_2^+$  の組み合わせも同等であろう．そうすると、結局のところ 2 通りになる．

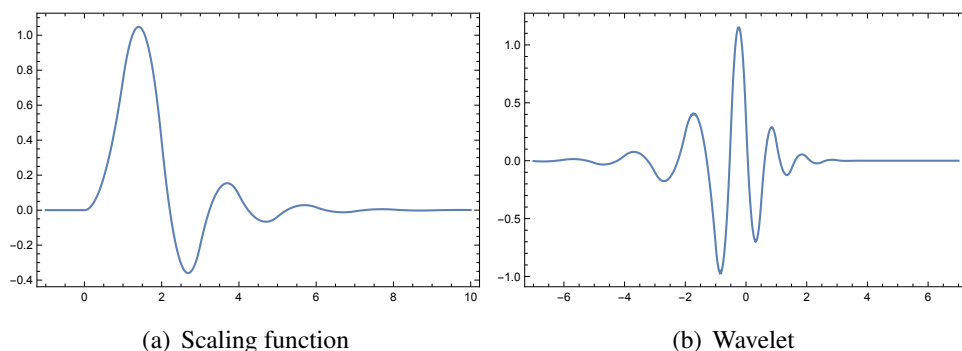


Fig. 6. Graphs of Strömberg scaling function of order 3 (a) obtained by (3.6) and Strömberg wavelets of order 3 (b) obtained by (3.6).

“通り”は形の種類である．左右の反転だけでなく、上下の反転もあるが、ここではそれもカウントしないことにする（上下の反転は Remark 2.3 の負の方が与えることになり、 $-1$  倍されることになる）．[6] による Strömberg ウェーブレットの考察では、 $|r_1| < 1, |r_2| < 1$  に制限されており、 $|r_1| < 1, |r_2| > 1$  は扱われていない．そうすると、 $r_1^+$  と  $r_2^-$  の組み合わせは考えずに、 $r_1^+$  と  $r_2^+$  の組み合わせだけを考えていることになり、正式な Strömberg ウェーブレットは 1 通りになる．そこで本論文では、新たに (i) の  $r_1, r_2$  としてここでの

$$(II) \ r_1^- = \frac{-13 + \sqrt{105} - \sqrt{270 - 26\sqrt{105}}}{2}, \ r_2^+ = \frac{-13 - \sqrt{105} + \sqrt{270 + 26\sqrt{105}}}{2}$$

を選択し、3 次の Strömberg ウェーブレットと類似タイプのスプラインウェーブレットを提案する．近似的に

$$(3.7) \quad B(\xi) = 0.0288805 + 0.682574e^{-i\xi} + 0.288545e^{-2i\xi}$$

としておこう．

故に、次の形となることがわかる．

$$(3.8) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi} = e^{i\theta} \frac{1}{B(\xi)}.$$

(3.4) に (3.8) を代入すると、次のようになる．

$$\hat{\varphi}(\xi) \equiv e^{i\theta} \frac{1}{B(\xi)} \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^3$$



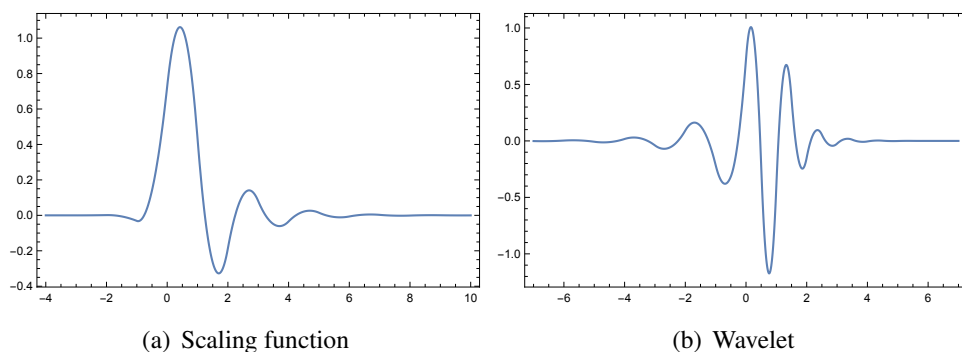


Fig. 7. Graphs of Strömberg scaling function of order 3 (a) obtained by (3.7) and Strömberg wavelets of order 3 (b) obtained by (3.7). Types (I) and (II) look almost same up to translations and multiplications by  $\pm$ , but are different a little bit.

$\theta = 3\xi/2$  を選択すると,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{B(\xi)} \left( \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^3$$

となり, これは実数値関数である. この  $\hat{\varphi}(\xi)$  をフーリエ逆変換したものが, 求めるスケーリング関数  $\varphi(x)$  となる. また,  $N_3(x)$  とスケーリング関数  $\varphi$  の関係式を得るには,

$$\hat{N}_3(\xi) = \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^3 = e^{-i\theta} B(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = e^{-3i\xi/2} B(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$$

を考えればよい.

まとめると, 次のようになる.

**定理 3.6**  $B(\xi)$  を (3.6), (3.7) とする.  $L^2(\mathbf{R})$  の部分空間として, 区間  $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$  で 2 次関数であるような  $\mathbf{R}$  上の  $C^1$  関数全体を  $V_j$  とする. このとき,  $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$  は,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{B(\xi)} \left( \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^3$$

で定義されるスケーリング関数  $\varphi$  を用いて MRA となる. また, 次のようなスプライン関数  $N_3(x)$  との近似的な関係式が得られる.

$$\begin{aligned} (I) \quad N_3(x) &= 0.670139\varphi(x) + 0.317426\varphi(x-1) + 0.0124352\varphi(x-2), \\ (II) \quad N_3(x) &= 0.0288805\varphi(x) + 0.682574\varphi(x-1) + 0.288545\varphi(x-2). \end{aligned}$$

4 次の Strömberg ウェーブレットの場合, 4 階のカーディナル B スプライン  $N_4(x)$  は

$$\hat{N}_4(\xi) = \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^4 \left( \equiv \hat{N}_1(\xi)^4 \right)$$

で定義されており,

$$|\hat{N}_4(\xi)| = \left| \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right|^4$$

が成り立つ。スケーリング関数  $\varphi(x)$  は

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k N_2(x - k).$$

と展開されており、この両辺をフーリエ変換すると次を得る.

$$(3.9) \quad \hat{\varphi}(\xi) = \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\xi} \right) \hat{N}_4(\xi).$$

また、公式  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} (\xi + 2k\pi)^{-6} = \frac{1}{30} (2 \sin \frac{\xi}{2})^{-6} (\cos^2 \xi + 13 \cos \xi + 16)$  を 2 階微分して次の公式も得られる.

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} (\xi + 2k\pi)^{-8} = \frac{1}{630} \left( 2 \sin \frac{\xi}{2} \right)^{-8} (\cos^3 \xi + 60 \cos^2 \xi + 297 \cos \xi + 272).$$

これより、次の等式がわかる.

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |\hat{N}_4(\xi + 2\ell\pi)|^2 &= \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \left| \frac{\sin(\xi/2 + \ell\pi)}{\xi/2 + \ell\pi} \right|^8 = \sin^8 \frac{\xi}{2} \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \left( \frac{\xi}{2} + \ell\pi \right)^{-8} \\ &= \frac{1}{630} (\cos^3 \xi + 60 \cos^2 \xi + 297 \cos \xi + 272). \end{aligned}$$

正規直交基底であるためには、(3.9) より次を満たさなければいけない.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\ell\pi)|^2 = \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} \left| \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik(\xi + 2\ell\pi)} \right) \hat{N}_4(\xi + 2\ell\pi) \right|^2 \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\xi} \right|^2 \sum_{\ell \in \mathbf{Z}} |\hat{N}_4(\xi + 2\ell\pi)|^2. \end{aligned}$$

故に、(3.10) より次が得られる.

$$\left| \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\xi} \right|^2 = \frac{630}{\cos^3 \xi + 60 \cos^2 \xi + 297 \cos \xi + 272}.$$

さて、 $A'(\cos \xi) = \frac{\cos^3 \xi + 60 \cos^2 \xi + 297 \cos \xi + 272}{630}$  として、 $M = 3$  のときの §2 の結果を用いてみよう. 方程式  $A'(c) = \frac{c^3 + 60c^2 + 297c + 272}{630} = 0$  に対する判別式は  $D = \frac{2381}{5953500}$  で、3 つの異なる実数解  $c = c_j$  は直接計算で

$$c_1 = -4.14109, \quad c_2 = -1.20173, \quad c_3 = -54.6572$$

と求められる. 従って、 $B(\xi)$  は  $\alpha = 1$  として (i) のパターンに限られる. さらに、 $z^2 - 2c_j z + 1 = 0$  を解いて、近似的に

$$r_1^\pm = -8.15963, -0.122555, \quad r_2^\pm = -1.86818, -0.53528, \quad r_3^\pm = -109.305, -0.00914869$$

が求まる (前者を  $r_j^+$ , 後者を  $r_j^-$  とする). (i) の  $r_1, r_2, r_3$  としてここでの

$$(I) \quad r_1^+ = -8.15963, r_2^+ = -1.86818, r_3^+ = -109.305$$

を選択し, 近似的に

$$(3.11) \quad (I) \quad B(\xi) = 0.574976 + 0.3835e^{-i\xi} + 0.0411794e^{-2i\xi} + 0.00034508e^{-3i\xi}$$

とする. 単純に考えると,  $B(\xi)$  は  $2^3$  通りであるが, 左右の反転だけで考慮すると 4 通りになる. そこで本論文では, 新たに (i) の  $r_1, r_2, r_3$  としてここでの

$$(II) \quad r_1^+ = -8.15963, r_2^+ = -1.86818, r_3^- = -0.00914869,$$

$$(III) \quad r_1^- = -0.122555, r_2^+ = -1.86818, r_3^+ = -109.305,$$

$$(IV) \quad r_1^- = -0.122555, r_2^+ = -1.86818, r_3^- = -0.00914869,$$

を選択し, 4 次の Strömberg ウェーブレットと類似タイプのスプラインウェーブレットを提案する. 近似的にそれぞれ

$$(3.12) \quad (II) \quad B(\xi) = 0.0052603 + 0.57844e^{-i\xi} + 0.37858e^{-2i\xi} + 0.03772e^{-3i\xi},$$

$$(3.13) \quad (III) \quad B(\xi) = 0.07047 + 0.61334e^{-i\xi} + 0.31338e^{-2i\xi} + 0.0028157e^{-3i\xi},$$

$$(3.14) \quad (IV) \quad B(\xi) = 0.00064467 + 0.076071e^{-i\xi} + 0.61551e^{-2i\xi} + 0.30777e^{-3i\xi},$$

としておこう.

故に, 次の形となることがわかる.

$$(3.15) \quad \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{-ik\xi} = e^{i\theta} \frac{1}{B(\xi)}.$$

(3.9) に (3.15) を代入すると, 次のようになる.

$$\hat{\varphi}(\xi) \equiv e^{i\theta} \frac{1}{B(\xi)} \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^4$$

$\theta = 2\xi$  を選択すると,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{B(\xi)} \left( \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^4$$

となり, これは実数値関数である. この  $\hat{\varphi}(\xi)$  をフーリエ逆変換したものが, 求めるスケーリング関数  $\varphi(x)$  となる. また,  $N_4(x)$  とスケーリング関数  $\varphi$  の関係式を得るには,

$$\hat{N}_4(\xi) = \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^4 = e^{-i\theta} B(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = e^{-2i\xi} B(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$$

を考えればよい.

(I) の  $B(\xi)$  は (II) の  $B(\xi) \times e^{i\xi}$  に近いから, (I) と (II) は平行移動を除いてよく似ている. また, (III) と (IV) も同様に平行移動を除いてよく似ている. 実際, グラフは Fig. 8 のようになる. まとめると, 次のようになる.

定理 3.7  $B(\xi)$  を (3.11)-(3.14) とする.  $L^2(\mathbf{R})$  の部分空間として, 区間  $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$  で 3 次関数であるような  $\mathbf{R}$  上の  $C^2$  関数全体を  $V_j$  とする. このとき,  $\{V_j : j \in \mathbf{Z}\}$  は,

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{B(\xi)} \left( \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^4$$

で定義されるスケーリング関数  $\varphi$  を用いて MRA となる. また, 次のようなスプライン関数  $N_4(x)$  との近似的な関係式が得られる.

$$\begin{aligned} (I) \quad N_4(x) &= 0.574976\varphi(x) + 0.3835\varphi(x-1) \\ &\quad + 0.0411794\varphi(x-2) + 0.00034508\varphi(x-3), \\ (II) \quad N_4(x) &= 0.0052603\varphi(x) + 0.57844\varphi(x-1) \\ &\quad + 0.37858\varphi(x-2) + 0.03772\varphi(x-3), \\ (III) \quad N_4(x) &= 0.07047\varphi(x) + 0.61334\varphi(x-1) \\ &\quad + 0.31338\varphi(x-2) + 0.0028157\varphi(x-3), \\ (IV) \quad N_4(x) &= 0.00064467\varphi(x) + 0.076071\varphi(x-1) \\ &\quad + 0.61551\varphi(x-2) + 0.30777\varphi(x-3). \end{aligned}$$

ウェーブレット 10 講 [2] を参考にして対称性についても考察してみよう. フィルタが線形位相であるとする,  $e^{-i\ell\xi}$  を因子に持つことになる (スケーリング関数  $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$  も  $e^{-i\ell\xi}$  を因子に持つことに注意する). このとき, フィルタが対称だと, そのフーリエ級数であるフィルタ係数  $a_n$  は  $\ell$  のまわりで対称 ( $a_{\ell+(n-\ell)} = a_{\ell-(n-\ell)}$ ) となる. そこで, (I)-(IV) の場合のローパスフィルタが線形位相からどれくらい離れているかを見ていきたい.  $z = e^{-i\xi}$  としていることに注意して, ローパスフィルタ

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \frac{B(2\xi)}{B(\xi)} \cos^4(\xi/2) = \frac{(e^{-2i\xi} - r_1)(e^{-2i\xi} - r_2)(e^{-2i\xi} - r_3)}{(e^{-i\xi} - r_1)(e^{-i\xi} - r_2)(e^{-i\xi} - r_3)} \cos^4(\xi/2) \\ &=: e^{-i3\xi/2} M(\xi) \cos^4(\xi/2) \end{aligned}$$

の形を得る. ここで,

$$M(\xi) = \frac{(e^{-i\xi} - r_1 e^{i\xi})(e^{-i\xi} - r_2 e^{i\xi})(e^{-i\xi} - r_3 e^{i\xi})}{(e^{-i\xi/2} - r_1 e^{i\xi/2})(e^{-i\xi/2} - r_2 e^{i\xi/2})(e^{-i\xi/2} - r_3 e^{i\xi/2})}$$

である. このとき,  $m_0(\xi)$  の偏角部分

$$\arg\left(e^{-i3\xi/2} M(\xi) \cos^4(\xi/2)\right) = \arg\left(e^{-i3\xi/2}\right) + \arg\left(M(\xi) \cos^4(\xi/2)\right)$$

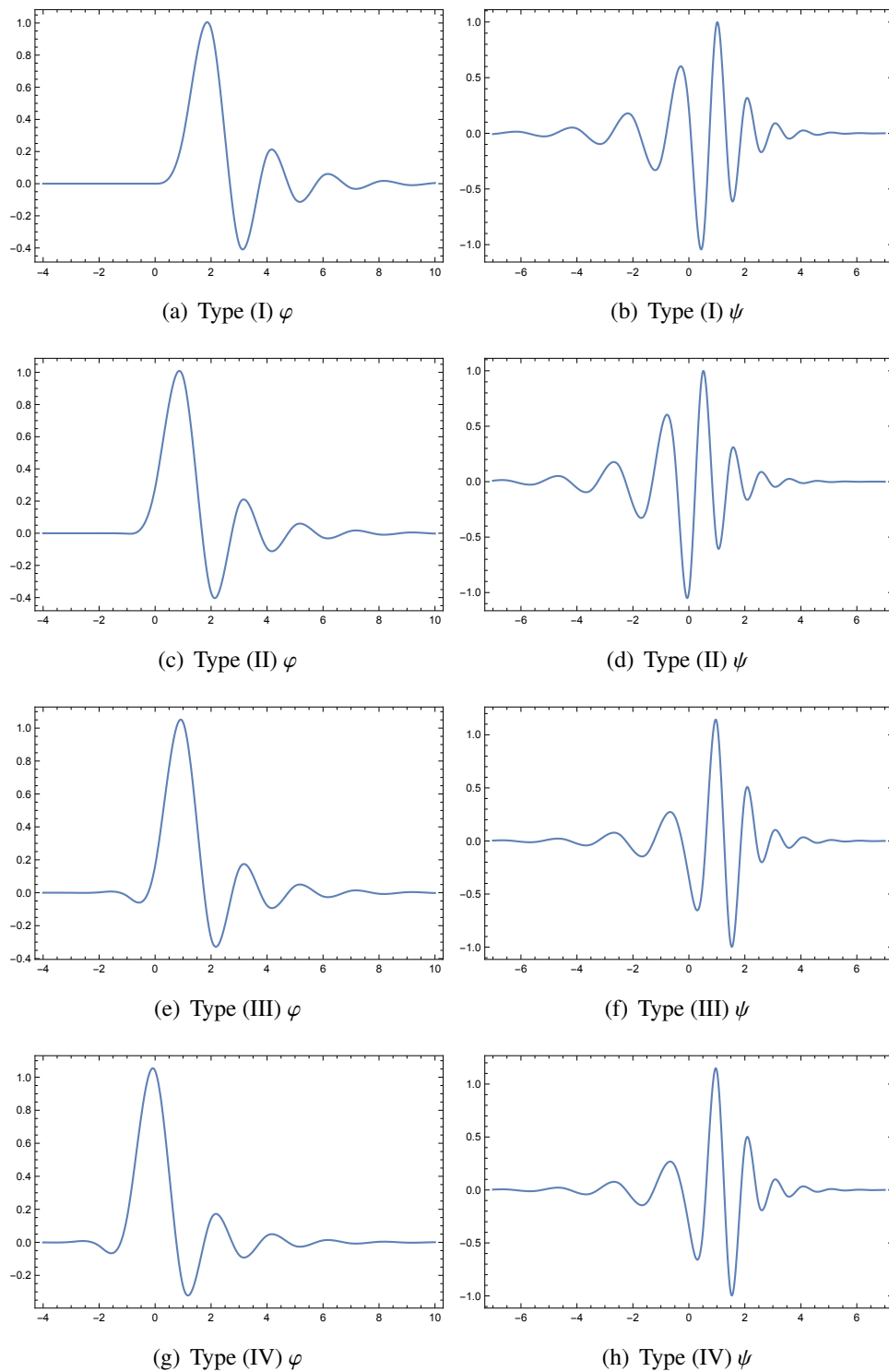


Fig. 8. Graphs of Strömberg scaling functions of order 4 (a, c, e, g) and Strömberg wavelets of order 4 (b, d, f, h). Types (I) and (II), types (III) and (IV) look almost same up to translations, but are different a little bit.

に注目しよう．そして，定数  $\pm\pi$  のズレを除いた ( $\pi$  を法とした)

$$\Phi(\xi) := -\frac{3\xi}{2} + \arctan \frac{\Im\{M(\xi) \cos^4(\xi/2)\}}{\Re\{M(\xi) \cos^4(\xi/2)\}} = -\frac{3\xi}{2} + \arctan \frac{\Im M(\xi)}{\Re M(\xi)}$$

という量を考えよう (ただし，真ん中の式では  $\cos^4(\xi/2) \neq 0$  とするため， $\xi \neq \pi$  とする)．これは線形位相のときの因子  $e^{-il\xi}$  の偏角  $-\ell\xi$  に相当するが， $\xi$  に関して非線形関数となっている． $\Phi(0) = 0$  に注意して， $\Phi(\xi)$  を線形近似すると  $\frac{\xi}{2\pi}\Phi(2\pi)$  となるので，線形位相からの誤差を表す量は

$$\Psi(\xi) := \Phi(\xi) - \frac{\xi}{2\pi}\Phi(2\pi) = \arctan \frac{\Im M(\xi)}{\Re M(\xi)}$$

となる．この  $\Psi(\xi)$  が 0 (関数) に近いほど，線形位相に近く，対称性があるとみなせる．

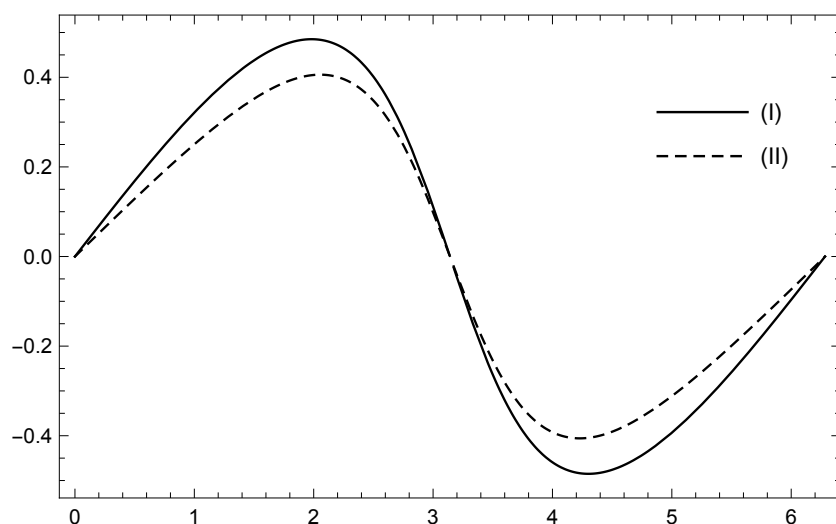


Fig. 9. Graphs of  $\Psi$  for the Strömberg wavelet of order 3. The flattest curve (II) means the Symlet type in Strömberg wavelets.

## 4. むすびに

3 次も 4 次も (I) の場合が通常の Strömberg ウェーブレットであるが，Figure 9 と Figure 10 の結果から類似タイプの方が対称性の高い Strömberg 版の Symlet タイプだということになる．実際，Figure 7 と Figure 8 を見る限り，原点に近い部分に小さい窪みがあり，それが対称性を若干向上させていると思われる．特に，一般に最もよく利用されるスプライン関数  $N_4(x)$  を考える際は，4 次の通常の Strömberg ウェーブレットよりも，類似タイプの (IV) の Strömberg 版の Symlet を用いる方が対称性が少しだけ期待できるといえる．

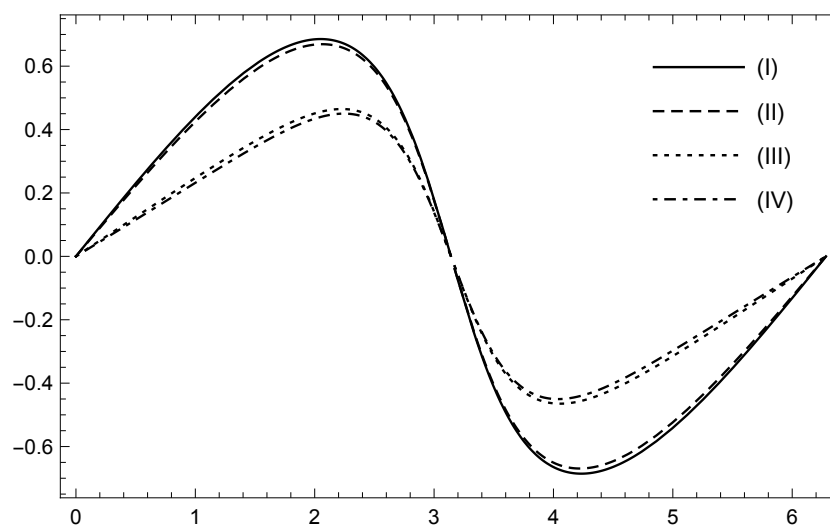


Fig. 10. Graphs of  $\Psi$  for the Strömberg wavelet of order 4. The flattest (IV) means the Symlet type in Strömberg wavelets.

### 参考文献

- [1] C. K. Chui, Wavelets: a mathematical tool for signal processing, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- [2] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 61, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [3] N. Fukuda and T. Kinoshita, On non-symmetric orthogonal spline wavelets, Southeast Asian Bull. Math., **36**, No. 3 (2012), 319–341.
- [4] N. Fukuda, T. Kinoshita and T. Suzuki, On the unconditional convergence of wavelet expansions for continuous functions, Intl. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, **14** (2016), 1650007.
- [5] E. Hernández and G. Weiss, A first course on wavelets, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [6] Y. Meyer, Constructions de bases orthonormées d'ondelettes, Rev. Mat. Iberoamericana, **4**, No. 1 (1988), 31–39.
- [7] J.O. Strömberg, Ondelettes à localisation exponentielles, Proc. Conference in Harmonic Analysis in honor of Antoni Zygmund (1983), 475–493.

福田 尚広 (正会員) 〒690-8518 島根県松江市西生馬町 14-4

2014 年筑波大学大学院数学研究科博士課程修了，理学博士．現在，松江工業高等専門学校助教，日本応用数理学会，ウェーブレット解析の理論と応用の研究に従事．

木下 保 (正会員) 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1

1997 年筑波大学大学院数学研究科博士課程退学，理学博士．現在，筑波大学准教授，日本応用数理学会，日本数学会会員．調和解析，偏微分方程式論の理論の研究に従事．

(受付日 2016 年 8 月 5 日)

(受理日 2017 年 2 月 17 日)