様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００７７

研究課題名（和文）有限組み合わせ論を用いた安定性理論の新展開

研究課題名（英文）A development of stability theory with finite combinatorics

研究代表者
竹内　耕太（TAKEUCHI, Kota）

筑波大学・数理物質系・助教

研究者番号：５０７２２４８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では数理論理学におけるモデル理論と有限組み合わせ理論の境界領域を研究した。近年モデル理論における重要な概念が組合せ論と密接な関係にあることが注目されている。特にNIPとVC-dimensionと呼ばれる概念が対応しており、これは組合せ論にとどまらず機械学習などでも頻繁に現れるものである。本研究ではNIPの拡張であるNIPn、そのための基本的な道具としてのグラフのRamsey propertyの研究を行い，またこれらの研究手法を応用してモデル理論における重要概念である安定性を2-安定性に拡張することを行った。さらにこれらのハイパーグラフの組合せ論や多次元機械学習への応用の具体例も与えた。

研究成果の概要（英文）：Several interactions between model theory in logic and finite combinatorics were studied in this project. It was well-known that No Independent Property defined in model theory coincides with the finiteness of VC-dimension in combinatorics. The same concept appears in Machine Learning theory. We studied NIPn, which is a generalization of No Independent Property, and the Ramsey property of infinite graphs, then we applied such results and obtained 2-order property, a generalization of order property. In addition, some applications for combinatorics on hypergraph and higher dimensional PAC-learning were found by this research.

研究分野：数理論理学

キーワード：n-dependent　2-order property　Ramsey property　indiscernible　VC-dimension

１．研究開始当初の背景

モデル論は 60 年代から 70 年代にかけて S. Shelah が導入した安定性理論によって飛躍的な発展を遂げた。安定性理論では代数構造やグラフといった数学構造の``代数的集合"(方程式や関係式の解集合全体)の複雑さを分類し、構造がある程度安定であれば元の独立性や次元といった概念が抽象的に定義できることがわかっている。そのため特に代数学や数論への応用が盛んである。例えば Pila は dependent な構造のひとつである o-minimal 構造についての研究結果を用いてモジュラー曲線についての Andre-Oort 予想を解決し、2011 年のクレイ研究賞を受賞した。しかし多数の安定性のクラスが提唱された結果、意味なく単に抽象化、一般化しているだけで他分野との関わりが存在しないものも多いのではないかという批判も起きていた。

他方、組合せ論ではよく知られている鳩の巣論法の一般化としてラムゼイの定理がある。ラムゼイの定理は（構造の入っていない）集合の色分けに関する命題だが、Nesetril はさまざまな有限構造の集合についてこの命題を一般化することを考え、ラムゼイクラスと呼ばれる概念を研究した。有限構造のクラスがラムゼイクラスであるとは、大まかにいうと任意の有限色分けに対して一色だけからなる性質の良い部分クラスを取り直せるということであり、有限全順序集合のクラスや有限順序グラフの構造が具体例として知られている。加えてラムゼイクラスは位相力学系における universal minimal flow を用いて特徴付けられることも示されていた。

申請者は 2011-2012 年に dependent 理論のひとつである局所 o-minimal 理論と、一様集合の一般化を用いた simple theory の解析を研究した。特に後者では、組合せ論の定理を用いて一様木と呼ばれる集合の存在を示し、それを用いて安定性の解析を行った。一様集合とは大雑把に言って、構造の各点をその点が持つ性質に応じて色分けしたとき、同じ色の点だけを集めて作った部分集合のことである。

同じころ、L. Scow は一様集合の一般化のひとつである一様順序ランダムグラフを用いて dependent な構造を特徴付けできることを示した。この中で彼女は有限順序グラフ全体がラムゼイクラスになることを本質的補題として用いている。（ランダムグラフは有限グラフを適切に張り合わせることによって得られる。）

申請者は、同様の特徴付けが dependent の一般化である n-dependent な構造についても行えるのではないかと予想した。この予想に基づいて研究を行い、ハイパーランダムグラフを用いて n-dependent と対応する一様集合やラムゼイクラスが構成できると考えた。また n-dependent に関するいくつかの既知の議論をこれらを用いてより簡潔にできることを発見した。そこでこれらの研究をさらに発展させること、また類似の発見をモデル理論における他の安定性のクラスでも行えるのではないかと考えた。

２．研究の目的

① 知られている安定性の各クラスについて、対応する有限構造のクラスをみつけ、ラムゼイ性を持つことを示す。
② ラムゼイ性をもちいた特徴づけから安定性理論の一般論を展開し、個別の安定性のクラスに依存しないような理論（再）構築を行う。また、とくに近年導入されまだ未解決の問題が多い n-dependent について、Shelah の問題群に答えを与える。
③ １で調べた対応関係を元に、すでに組合せ論で発見されているラムゼイ性をもつ有限構造のクラスを用いて新しい安定性のクラスを発見する。

これらによって安定性理論の新しい研究手法と方針を示し、組合せ論との対応関係を明らかにできる。

３．研究の方法

本研究は研究代表者の専門とするモデル理論のみならず、組合せ論との境界領域に関する深い知見が必要である。このため、モデル理論を専門とする連携研究者１名ならびに組合せ論とモデル理論ともに明るい研究協力者 2 名と連絡を取りながら研究を行う体制を構築する。

研究にあたっては国内の小規模研究集会・大規模学会、並びに国際学会の三種類の学会を利用し情報収集を行い、また自身の研究について発信しフィードバックを得る。

研究を行い得られた成果は学術雑誌ならびに主要学会にて発表を行い、評価を受ける。

４．研究成果

研究目的は 3 つあり、それぞれについて一定の成果が得られた。また当初予想していなかった応用研究成果も得られた。

1 つ目と２つ目の研究目的に関しては、継続して研究していた n-dependent と呼ばれるクラスに関して、n 部 n ハイパーグラフのクラスがラムゼイクラスになること、またｎハイパーランダムグラフ一様集合が n-dependent の特徴づけを与えることの証明を与えた。さらにこれを用い Shelah の問題群の中のタイプの個数を計算する問題に対する解答を与え、既知の定理の別証明を簡単に導けることも示した。（論文①、⑦など）

3 つ目の研究目標に関しては、研究代表者の n-dependent に関する研究を仔細に検討しその特徴を一般化することによって、モデル理論における order property の一般化にあたる 2-order property を新たに提唱し、この安定性のクラスに対応するラムゼイクラス、並びに一様集合の存在を示した。またこのク

ラスがdependent propertyやorder propertyと同様に論理式のBoolean combinationで保存されることや本質的に１変数の論理式によって支配されることを示した。（学会①、③、④など）
また dependent property が機械学習における PAC-learnability と対応することに着目し、その対応を n-dependent property でもある程度再現できることを示し、新しい機械学習であるPACn-learningを提唱することにも成功した（論文③、⑥など）

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① Artem Chernikov, Dniel Palacin and Kota Takeuchi, On n-dependence, Notre Dame Journal of Formal Logic, 査読有, 印刷中.
② Kota Takeuchi, The partite construction with forbidden structures, RIMS Kokyuroku, 査読なし, No. 2002, 2016, pp.1-3.
③ Munehiro Kobayashi, Takayuki Kuriyama and Kota Takeuchi, Higher dimensional PAC_n-learning, Congressus Numerantium, 査読有, Vol. 223, 2015, pp. 227-236.
④ Kota Takeuchi, Yu-ichi Tanaka and Akito Tsuboi, Model companions of theories of graphs, Mathematical Logic Quarterly, 査読有, Vol. 61, Issue 3, 2015, pp. 236-246 .
⑤ Kota Takeuchi and Akito Tsuboi, Infinitary method for finite structures, RIMS Kokyuroku, 査読なし, No.1938, 2015, pp59-64.
⑥ Takayuki Kuriyama and Kota Takeuchi, On the PACn-learning, RIMS Kokyuroku, 査読なし, No.1938, 2015, pp.54-58.
⑦ Kota Takeuchi, A characterization of n-dependent theories, RIMS Kokyuroku, 査読なし, No. 1888, 2014, pp.59-66.

〔学会発表〕（計２０件）

① Kota Takeuchi, Ramsey property and 2-order property, Caltech-UCLA logic seminar, UCLA, California, USA, October 13, 2017.
② Kota Takeuchi, Continuous Logic I, II, モデル理論夏の学校, 大学セミナーハウス, 9月19－21日, 2017.
③ Kota Takeuchi, Recent interactions between model theory and finite combinatorics, 日本数学会特別講演, 山形大学, 9月11-14日, 2017.
④ Kota Takeuchi, On 2-order property, Asian Logic Conference 2017, Daejon, Korea, July 10-14, 2017.
⑤ Kota Takeuchi and Akito Tsuboi, On the number of independent strict orders, 日本数学会, 首都大学東京, 3月24 - 27日, 2017.
⑥ Kota Takeuchi, A simple proof of Terry's result on hereditary L-property, Kagoshima Model Theory Workshop, The International University of Kagoshima, March 9 - 11, 2017.
⑦ Kota Takeuchi, On the infinite Ramsey property for random graph, RIMS workshop, Research Institute for Mathematical Sciences, December 12 - 14, 2016.
⑧ Munehiro Kobayashi, Kota Takeuchi and Hiroki Yoda, Atomless Probability Algebra の理論における量化子消去アルゴリズム, RIMS workshop, December 7 - 9, 2016.
⑨ Kota Takeuchi, Properties characterized by generalized indiscernible, RIMS workshop: Mathematical Logic and It's Applications, September 26 - 29, 2016.
⑩ Kota Takeuchi, The partite construction with forbidden structures, RIMS Model Theory Workshop, Research Institute for Mathematical Sciences, December 14 - 16 , 2015.
⑪ Kota Takeuchi, Ramsey property of free amalgamation classes, 日本数学会, 京都産業大学, 9月14-16日, 2015.
⑫ Kota Takecuhi, Ramsey property of the Random graph, モデル理論夏の学校, 法政大学, 8月22-24日, 2015.
⑬ Kota Takeuchi, n-dependent theories, 日本数学会, 明治大学, 3月21-24日, 2015.
⑭ Munehiro Kobayashi, Takayuki Kuriyama and Kota Takeuchi, VC dimension and PAC learnability for higher dimensional spaces, 日本数学会, 明治大学, 3月21-24日, 2015.
⑮ Munehiro Kobayashi, Takayuki Kuriyama and Kota Takeuchi, Higher dimensional PAC learning and VC dimension, Forty Sixth Southeastern International Conference oCombinatorics, Graph Theory and Computing, Florida Atlantic University, March 2-6, 2015.
⑯ Kota Takeuchi, On the existence of epsilon-nets, RIMS Workshop, Research Institute for Mathematical Sciences, November 26, 2014.
⑰ Kota Takeuchi, Model theory, graph theory and computational learning theory, 数学基礎論若手の会, 鳥取市

サイクリングターミナル砂丘の家，11月20日，2014.

⑱ Kota Takeuchi, Generalized VC-dimension and Zarankiewicz number, モデル理論夏の学校 2014, 筑波大学，9月16日，2014.

⑲ Kota Takeuchi, Generalized VC dimension and Sauer lemma for classes of subsets of product sets, The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications, Tsukuba Center for Institutes, August 29, 2014.

⑳ Kota Takeuchi, Model theory and finite combinatorics, 東北大学純粋・応用数学研究センター組み合わせ論セミナー，東北大学，6月6日，2014.

〔図書〕（計　0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0件）

○取得状況（計　0件）

〔その他〕
ホームページ等
https://sites.google.com/site/kota3takeuchi/
http://www.math.tsukuba.ac.jp/~kota/

６．研究組織
(1)研究代表者
竹内耕太（TAKEUCHI, Kota）
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号：50722485

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
坪井明人（TSUBOI, Akito）
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：30180045

(4)研究協力者
CHERNIKOV, Artem
University of California Los Angeles, Mathematics, Assistant Professor