様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００３１

研究課題名（和文）ハンドル図式を用いた低次元多様体の研究

研究課題名（英文）Research on low-dimensional manifold with handle diagram

研究代表者
丹下　基生（TANGE, Motoo）
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号：７０４５２４２２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、微分構造の局所化(プラグやコルク)によるツイストによってどのように微分構造が変化するかについての研究を行なった。結果、結び目手術によって得られるプラグとその応用を得た。また有限位数Steinコルクの構成も行なった。またのちの研究で、このコルクは既約な性質ももっていることがわかった。また、無限位数コルクが改変する微分構造にはある制約があることがわかった。また、スライスリボン予想に関する研究では、スライスリボン予想とハンドル図式の間に深い関係性が存在することが明確になり、当予想の困難な部分をあるハンドルの操作の困難さとして言い換えることに成功した。

研究成果の概要（英文）：In this research, I studied localization of exotic differential structures in 4-dimensional manifold. This phenomenon is due to the interesting existence of plug or cork. As a result, I obtained concrete construction of plug for Fintushel-Stern knot-surgery and its applications. I also constructed finite order Stein corks for the first time. In the later research, these corks have irreducible condition. Gompf constructed infinite order corks, I focus on some finite property for OS-invariants and generalized to the property which any infinite cork satisfies. In contrast to order two cork, this property is a remarkable nature. In the research of the Slice-Ribbon conjecture we found a close relationship between the slice-ribbon conjecture and handle theory. From the point of view, we give a sufficient condition for slice knot to be a ribbon by using a handle diagram with respect to the slice knot. The difficulty of slice-ribbon conjecture can rephrase the one of handle theory.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：エキゾチック微分構造　コルク　ホモロジー球面　スライスリボン予想　レンズ空間手術

１．研究開始当初の背景

(1)４次元のエキゾチックな微分構造を多様体の切り貼りによって得るための研究を始めた。特に、Fintushel-Stern による結び目手術は、ゲージ理論不変量にその結び目の不変量が現れるという著しい性質を持ち、その微分位相構造について多くのことを理解したいと考えていた。例えば、コルクを使って結び目手術を再現することができるか？そのようなコルクはどのような位相構造を持つか？である。

(2)ホモロジー球面やその位相不変量を用いてそのホモロジー球面が bound する４次元多様体の存在やその交差形式の性質などを制限することは４次元多様体論の古くから研究されている内容である。それらについてまだ知られていることは少ない。報告者による研究で、Σ(2,3,6n+5)タイプのブリースコーン球面は、$-E_8$ の交差形式をもつ単連結な４次元多様体を与えた。そのような４次元多様体の存在を示すのは実際難しく、その方法はそれほど研究されている内容ではなかった。

(3)スライスリボン予想とは、４次元球体の中の円盤が、境界を固定したとき、いつリボン(境界の３次元球面にフラットな円盤)を持つか？という問題である。この予想は、４次元球体という多様体のハンドル分解と深く関わることが分かっていた。しかし、その詳細について深くは知られておらず、その予想が成り立つ広いクラスやその制限などがこれまで得られていなかった。

２．研究の目的

(1) 結び目手術とその周辺の４次元微分構造を調べ、エキゾチックな４次元多様体一般に対して調べられる手法を開発すること。

(2) Ozsvath-Szabo らの不変量を用いてホモロジー球面が bound する４次元多様体の情報を抜き出し、これまでの理論を深化させること。

(3)スライス結び目に対して作られるハンドル図式を用いてどのような条件の場合にそれがリボン結び目になるか調べること。

３．研究の方法

(1)結び目手術で得られるエキゾチックな変換をプラグやコルクによって局所化することで、そのプラグやコルクがどのような性質をもつか？またその局所化がどのようにして微分構造を変えているのかを Seiberg-Witten 不変量、Ozsvath-Szabo 不変量などを用いて調べる。コルクの例を増やすことで、エキゾチック構造を判定する方法を広げる。

(2)負定値偶形式を交差形式にもつ４次元多様体をもつホモロジー球面がどのようなものか？またあるホモロジー球面がある負定値交差形式を持つかどうか判定する。例えば、どのようなホモロジー球面が$-E_8$の交差形式をもつ４次元多様体で bound するかなどである。

(3)スライス円盤とその上のスライスグラフとその変形を追うことで、それがどれほどリボングラフと異なるのかについて研究をする。この差について調べることで、この予想に貢献できるではないかと目論んでいる。

４．研究成果

(1-1)結び目手術を、あるプラグの変換を用いて表すことができた。また同じプラグを用いれば、2-bridge knot 手術を得るようなプラグ変換も得ることができることを示した。これは無限位数のプラグの例であるが、境界のホモロジークラスを固定しているという性質をもち、さらに、このプラグを２乗したものは（非可縮な）コルクも構成していることがわかった。

古典的な Akbulut コルクの境界の n 重分岐被覆は可縮な 4 次元多様体を bound し、そのようなコルクは、位数が高い Stein コルクを構成していることが分かった。これは、位数が 2 ではない、初めてのコルクの例となる。また、Auckly-Kim-Melvin-Ruberman ら独立に任意位数のコルクを構成している。また、系として、任意の自然数 n に対して、n 個の Stein fillable で、お互いに isotopic でないような同型な接触構造が存在するようなホモロジー球面が存在することを示すことができた。

(1-2)Gompf はこれらの位数有限のコルクの研究に触発され、無限位数コルクを構成した。本研究はその Gompf の研究に触発され、以下の成果をあげた。

1. 無限位数コルクで得られるエキゾチック構造全体のなす制限を与えた。
2. 任意の自然数 n に対して Z^n-コルクを作り、そのコルクはある結び目による手術で実現できることを示した。
3. 上で構成した有限位数コルクは境界和として分けられないことを示した。特に、境界は双曲構造をもつ多様体であることを示した。

(1．について) これは Akbulut-Matveyev らが 90 年代に行なった、2-コルクの存在定理と照らし合わせると、全く対照的な結果であり、興味深い。また本研究に触発され、大阪大学の安井弘一氏は、さらに一般化された無限位数コルクのもつ制限について研究をした。

(2．について)Gompf による Z-コルクを拡張して Z^n-コルクの構成をしたが、このコルクをさらに非可換への拡張を試みることができる。非可換群とコルクの関係性について研究を展開する予定である。

国内外の研究を含め、これらの一連のコルクの研究により、コルクの研究が大幅に進展した。

(2) 私は、ホモロジー３球面が、どれほど複雑な負定値偶形式をもつ４次元多様体の境

界となりうるかを測る指標 E_8 種数を定義し、この指標が４次元多様体の 11/8 予想と深く関わることを証明した。
E_8 の交差形式にもつ４次元多様体の境界となるホモロジー球面の新しい構成を行なった。その結果、2,5,9 を重複度にもつブリースコーン球面を境界にもつ４次元多様体の交差形式を決定(Christopher Scaduto の仕事)に協力することができた。

(3)スライス結び目のあるスライス円盤は、あるハンドル図式とその図式にはめ込まれたある円盤のペア(Perforated ribbon diagram)として表現できる。この図式にあるリボン性が要請されている。つまり、このリボン性を崩さず、Perforated ribbon diagram を変形して単純化することができれば、そのスライス結び目は、リボン結び目であるということがいえる。ここで、スライスグラフ(特異点の円盤での逆像)に着目する。Perforated ribbon diagram のハンドル変形と結び目のイソトピーがどのようにスライスグラフに影響を与えるか見た結果、ある４球体のハンドル分解を自明変形をするときにある３ハンドルを２ハンドルにスライドすることがなければ、そのスライス結び目はリボン結び目であることを証明することができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　8　件）

① Motoo Tange, Yuichi Yamada, Four dimensional manifolds constructed by lens space surgeries of distinct types, Journal of knot theory and ramifications, vol. 26(2017) no.11, 1750069
② Motoo Tange, Heegaard Floer homology of Matsumoto's manifolds, Adv. Math., 32, (2017), 475-499
③ Motoo Tange, Finite order cork, Internat. J. Math. 28(2017) issue 06, pp.26
④ Motoo Tange, The E8-boundings on homology spheres and negative sphere classes in E(1), Topology and its applications, vol. 202(2016), 160-182
⑤ Tetsuya Abe and Motoo Tange, A construction of slice knots via annulus twist, Mich. Math. Journal, vol.65, (2016) issue 3, 573-597
⑥ Kouki, Sato, and Motoo Tange, Non-orientable genus of a knot in punctured CP2, Tokyo Journal of mathematics, vol. 38(2015), 561-574
⑦ Motoo Tange, A plug with infinite order and some exotic 4-manifolds, Journal of Gokova Geometry/Topology, vol.9(2015), 1-17
⑧ Motoo Tange, The link surgery S2xS2 and Scharlemann's manifolds, Hiroshima Math Journal, vol. 44(2014), no.1, 35-62

〔学会発表〕（計　17　件）

① 丹下 基生, Introduction to Heegaard Floer homology, 微分トポロジー17 (2017)電気通信大学丹下 基生, スライスリボン予想とハンドルスライド, 年会 (2017), 首都大学
② Motoo Tange, Cork twistings and exotic 4-manifolds, 24th Gokova Geometry and Topology, (2017) Gokova in Turkey
③ 安部 哲哉, 丹下 基生, Ribbon disks via handle decomposition s of B4, 年会(2016) 関西大学
④ 丹下 基生, 有限位数コルク, 年会, (2016) 関西大学
⑤ 丹下 基生, ある結び目の Whitehead doubleの二重分岐被覆を境界とする有理４球体 (2016) 関西大学
⑥ Motoo Tange, Cork twist and infinite exotic families, Conference on 4-manifolds and knot concordance, (2016), Max Plunck Institute for Mathematics
⑦ 丹下 基生, 無限位数コルク, 秋季総合分科会 (2016) 関西大学
⑧ 丹下 基生, Infinite order corks, 4次元トポロジー, (2016)大阪市立大学
⑨ 丹下 基生, Upsilon-invariants and Alexander polynomials of torus knots, 結び目の数学 IX (2016) 日本大学
⑩ 丹下 基生, Introduction to Heegaard Floer homology, Intelligence of low-dimensional topology, (2016)数理解析研究所
⑪ 丹下 基生, Double branched covers and rational homology balls, 4次元トポロジー (2015)大阪市立大学
⑫ 丹下 基生, L-空間ホモロジー球面内のレンズ空間手術の分類, 微分トポロジー15 (2015)京都大学
⑬ 丹下 基生, Double branched covers and rational homology balls, 瀬戸内結び目セミナー (2015)大島商船高専
⑭ 丹下基生, レンズ空間結び目の Alexander 多項式の係数に関する横断性定理, 年会(2015) 明治大学
⑮ 丹下 基生, 不定値偶形式をもつ４次元多様体とその境界, 4 次元トポロジー (2014)大阪市立大学
⑯ 丹下 基生, レンズ空間結び目のアレクサンダー多項式, 結び目の数学 VII (2014) 東京女子大学

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jn
dex.html

６．研究組織
(1)研究代表者
丹下　基生　（TANGE Motoo）
　筑波大学・数理物質系・助教
　研究者番号：70452422

(2)研究協力者

安部　哲哉　(ABE Tetsuya)
　立命館大学・数理科学科・数学嘱託講師
　研究者番号：00614009