

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 20 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15H03651

研究課題名(和文) テンソルネットワーク形式による格子ゲージ理論の研究

研究課題名(英文) Lattice gauge theories with tensor network scheme

研究代表者

蔵増 嘉伸 (KURAMASHI, Yoshinobu)

筑波大学・計算科学研究センター・教授

研究者番号：30280506

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,900,000円

研究成果の概要(和文)：テンソルネットワーク(TN)スキームは、2000年代以降様々な分野で急速に注目を集めている多体問題解析のための理論・数値的手法である。数値計算上の重要な特徴として、モンテカルロ法における符号問題が存在しないという大きな優位性を有している。我々はTNスキームの素粒子物理学への応用を目指し、高次元向けアルゴリズムであるグラスマン高次テンソル繰り込み群(GHOTRG)の開発と2次元格子Schwingerモデルの詳細解析および2次元格子N=1 Wess-Zuminoモデル(超対称性理論)のテンソル表現の構成に成功した。

研究成果の概要(英文)：Tensor Network (TN) scheme is a new kind of theoretical and numerical method to analyze many body systems, which has been getting much attention in various research fields after 2000s. This scheme has a great advantage in numerical aspect: It is free from the notorious sign problem in the Monte Carlo method. Our purpose is to apply the TN scheme to the research field of elementary particle physics. We have succeeded in developing an algorithm called the Grassmann higher order tensor renormalization group (GHOTRG), which is applicable to higher dimensional systems, and the detailed analyses of two-dimensional lattice Schwinger model and the construction of a TN representation for two-dimensional lattice N=1 Wess-Zumino model (a supersymmetric theory).

研究分野：素粒子理論

キーワード：格子ゲージ理論 テンソルネットワーク テンソル繰り込み群

### 1. 研究開始当初の背景

格子 QCD 計算は、過去 30 年以上にわたって継続的なアルゴリズムの開発・改良が行われた結果、スーパーコンピュータの著しい性能向上と相俟って、現在では自然界の u,d,s クォーク質量(物理点)を用いたシミュレーションや質量数 4 以下の軽原子核の束縛エネルギー計算も可能となりつつある。このような成功の一方で、長年にわたり本質的問題として認識されながらも、効果的な解決策が見出されることなく取り残されたままの課題が存在する。その代表的かつ重要な例として、i) 負符号問題、ii) 複素作用を持つ系のシミュレーション、iii) フェルミオン系の計算コスト、があげられる。これら 3 つの問題はモンテカルル法の本質的な欠点に起因している。すなわち、現在の格子 QCD 計算が抱える重要な問題は、そのベースとなるアルゴリズムとしてモンテカルル法を採用している限り、根本的解決は難しい。

### 2. 研究の目的

他分野に目を転じてみると、物性物理(あるいは統計基礎論)分野においても分配関数を用いた数値計算が行われているが、比較的シンプルなモデルを扱っているということもあり、格子 QCD よりも多様なアルゴリズムが開発・試行されている。そのような状況のもと、2007 年 Levin と Nave により、テンソルネットワーク(TN)形式に基づいたテンソル繰り込み群という古典格子スピンモデルに対する新たな計算アルゴリズムが提案された[引用文献]。この手法では、まず分配関数を局所的(格子点)に定義されたテンソルの積で書き表した後、特異値分解に基づいた重要度の高い自由度の選択とブロック変換の一種による疎視化を組み合わせた手続きを反復することにより、分配関数の値そのものを高精度で計算する。このアルゴリズムの最大の長所は符号問題や複素作用の問題がないことである。欠点としては、モデルの高次元化に伴ってテンソルの添字が増えることによる計算コストの増大が挙げられる(注:ただし、計算コストに関しては、一辺の長さ  $L$  の  $d$  次元格子体積  $L^d$  に対して  $d \times \log L$  でしか増大しないという大変魅力的な側面もある。ちなみに、4 次元格子 QCD 計算において現在広く用いられているモンテカルル法をベースとしたアルゴリズムでは、計算コストの体積依存性は  $L^5$  である)。2014 年、研究代表者・蔵増と連携研究者・清水はテンソル繰り込み群をグラスマン数も扱えるように拡張し(グラスマンテンソル繰り込み群)、2 次元格子 Schwinger モデル(2 次元格子 QED)の解析を行った[引用文献]。これは世界で初めての TN スキームのフェルミオン入りのゲージ理論への応用であり、この研究により、グラスマンテンソル繰り込み群が、現在の格子 QCD 計算が持つ 3 つの重要問題をすべて解決していることを示すことに成功し

た。これを受けて、本研究課題では、TN スキームの高次元化と非可換ゲージ理論への応用を目指す。

### 3. 研究の方法

本研究の最終目標はグラスマンテンソル繰り込み群の 4 次元 QCD への応用である。この目標に向け、主なサブ課題として、i) 非可換ゲージ理論への拡張、ii) 高次元モデルへの応用、iii) 物理量計算のための手法開発、を設定する。また、TN スキームにはモンテカルル法における符号問題が存在しないという魅力的な特性を生かし、素粒子物理学にとって興味深い低次元超対称性モデルなどの解析にも取り組む。

### 4. 研究成果

(1) 引用文献 で用いた方法を改良し、より高度な解析手法を用いて 1 フレーバー Wilson フェルミオンを持つ 2 次元格子 Schwinger モデルの詳細な相構造解析を行った[雑誌論文]。図 1 は、強結合極限( $g \rightarrow \infty$ )における  $\langle P_{\text{odd}} \rangle$  (パリティ奇の部分空間への射影演算子の期待値)とセントラルチャージのフェルミオン質量依存性を表す。 $\langle P_{\text{odd}} \rangle$  の振る舞いから、 $-1.8 \leq m \leq -0.7$  の領域にパリティ対称性が破れている相が存在することがわかる。また、セントラルチャージの振る舞いから、 $m \approx -0.7$  で相転移が存在し、 $m \leq -1.8$  で BKT (Berezinskii-Kosterlitz-Thouless) 転移が存在することがわかる。なお、引用文献 ではカイラル感受率を用いた相構造解析を行っていたため、 $m \leq -1.8$  での BKT 転移を検知することはできなかった。図 2 は、強結合極限( $g \rightarrow \infty$ )と有限の結合定数  $g$  における解析結果と統合的に考察し得られた相図である。

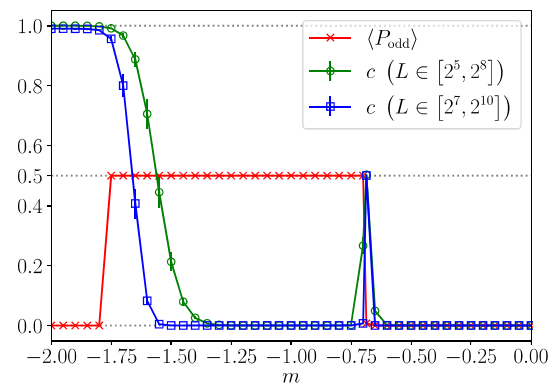


図 1: 強結合極限における  $\langle P_{\text{odd}} \rangle$  とセントラルチャージのフェルミオン質量依存性。

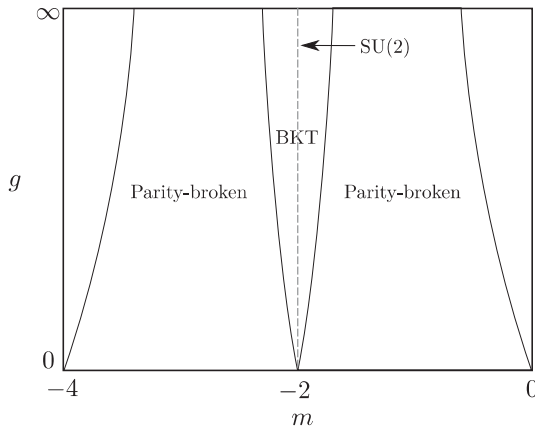


図 2 : 解析結果に基づく相図. BKT は Berezinskii-Kosterlitz-Thouless 転移を表す.

(2)高次テンソル繰り込み群は、高次元(3次元以上)モデルに適用可能なアルゴリズムとして考案された方法であるが(テンソル繰り込み群は2次元モデル限定), これまでその対象はボゾン系のみに限られていた. しかしながら, 素粒子物理において興味深いモデルはフェルミオンを含んでおり, グラスマン数を扱えるようにすることは必須要件である. 我々は, 高次テンソル繰り込み群をグラスマン数も扱えるように拡張し, アルゴリズムの正しさと数値精度を確かめるために, 3次元自由 Wilson フェルミオン系の自由エネルギー計算を行った[雑誌論文, ]. 図3は,  $128^3$ 格子サイズにおける自由エネルギーの解析解との相対誤差の絶対値を Wilson フェルミオンの質量パラメータの関数  $m$  に対してプロットしたものである.  $D_{cut}$  はグラスマン高次テンソル繰り込み群において計算精度をコントロールするパラメータであり, 原理的に  $D_{cut}$  が大きいほど数値精度が向上する. 図3では,  $D_{cut}=14\sim 22$ の結果が示してあるが, いずれも現在の標準的なクラスター計算機(演算加速機構なし)において1ノード・日程度で計算可能なレベルの計算コストである.  $m=0$ の範囲において相対誤差1%未満の精度を達成できており, アルゴリズムの正しさと高精度計算の可能性を確認することができた. また, 雑誌論文 では, グラスマン高次テンソル繰り込み群を用いてフェルミオンを含む物理システムでのグリーン関数の計算手法開発に成功し, 実際に3次元自由 Wilson フェルミオン系での1点および2点グリーン関数の計算に応用し, 解析解を再現することを実証した.

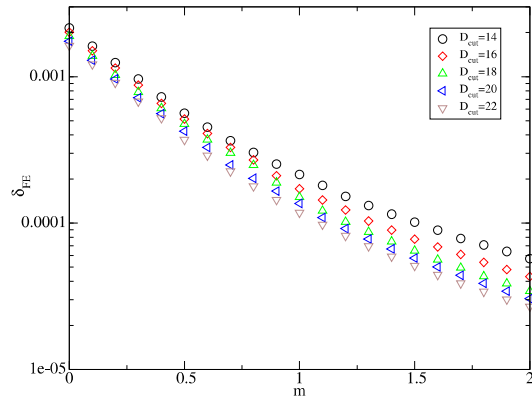


図 3 :  $128^3$ 格子サイズにおける3次元自由 Wilson フェルミオン系の自由エネルギー計算. 縦軸は解析解との相対誤差の絶対値. 横軸は Wilson フェルミオンの質量パラメータ  $m$ .

(3)素粒子標準理論を超える有力な候補の一つとして超対称性理論があるが, その最も簡単なモデルとして2次元格子  $N=1$  Wess-Zumino モデルがある. この非摂動的な性質を調べることによって, 超対称性理論について多くの知見が得られることが期待されており, これまでモンテカルロ法をベースとしたアルゴリズムによるシミュレーションが試みられてきた. しかしながら, このモデルは符号問題を含んでおり, モンテカルロ法によるアプローチは困難を伴う. 我々は, TNスキームにはモンテカルロ法における符号問題が存在しないという特性を生かし, 2次元格子  $N=1$  Wess-Zumino モデルの TN 表現を完成させ, 相互作用がない場合の数値計算結果と解析解を比較することによって, TN 表現の正しさを実証した[雑誌論文]. これにより, TNスキームに基づく数値計算による超対称性理論の非摂動的効果の研究への道が拓かれた.

#### <引用文献>

- M. Levin and C. P. Nave, Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 120601.
- Y. Shimizu and Y. Kuramashi, Phys. Rev. D90 (2014) 014508.
- Y. Shimizu and Y. Kuramashi, Phys. Rev. D90 (2014) 074503.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

Daisuke Kadoh, Yoshinobu Kuramashi, Yoshifumi Nakamura, Ryo Sakai, Shinji Takeda, and Yusuke Yoshimura, "Tensor network formulation for two-dimensional lattice  $N=1$  Wess-Zumino model", Journal of High Energy Physics 1803 (2018) 141, 査読有.

DOI:10.1007/JHEP03(2018)141.

Yusuke Yoshimura, Yoshinobu Kuramashi, Yoshifumi Nakamura, Shinji Takeda, and Ryo Sakai, “Calculation of fermionic Green functions with Grassmann higher-order tensor renormalization group”, Physical Review D97 (2018) 054511, 査読有.  
DOI: 10.1103/PhysRevD.97.054511.

Yuya Shimizu and Yoshinobu Kuramashi, “Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in lattice Schwinger model with one flavor of Wilson fermion”, Physical Review D97 (2018) 034502, 査読有.  
DOI: 10.1103/PhysRevD.97.034502.

Ryo Sakai, Shinji Takeda, and Yusuke Yoshimura, “Higher order tensor renormalization group for relativistic fermion systems”, Progress of Theoretical and Experimental Physics 2017 (2017) 063B07, 査読有.  
DOI: 10.1093/ptep/ptx080.

〔学会発表〕(計5件)

吉村 友佑, “Grassmann テンソルくりこみ群による Green 関数の計算”, 日本物理学会 2017 年秋季大会, 2017 年 9 月 12 日-15 日, 宇都宮, 栃木.

Yusuke Yoshimura, “Development of Grassmann higher order tensor renormalization group”, The 35<sup>th</sup> International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2017), June 19-24, Granada Conference and Exhibition Centre, Granada, Spain.

Yoshinobu Kuramashi, “Tensor network scheme for lattice gauge theories” [招待講演], Phase structure of lattice field theories - Japanese-German Seminar 2016 -, Sep. 26-28, 2016, Niigata University, Niigata, Japan.

Yoshinobu Kuramashi, “Tensor network scheme for lattice gauge theories” [招待講演], XXVII IUPAP Conference on Computational Physics (CCP2015), Dec. 2-5, 2015, IIT Guwahati, Assam, India.

Yuya Shimizu, “Study of the continuum limit of the Schwinger model using Wilson’s lattice formulation”, The 33<sup>rd</sup> International Symposium on Lattice Field Theory (Lattice 2015), July 14-18, 2015, Kobe International Conference Center, Kobe, Japan.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕  
該当なし。

出願状況 (計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況 (計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等  
該当なし。

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

藏増 嘉伸 (KURAMASHI, Yoshinobu)  
筑波大学・計算科学研究センター・教授  
研究者番号：30280506

### (2) 連携研究者

武田 真滋 (TAKEDA, Shinji)  
金沢大学・数物科学系・助教  
研究者番号：60577881

### (3) 連携研究者

清水 裕也 (SHIMIZU, Yuya)  
理化学研究所・計算科学研究機構・特別研究員  
研究者番号：50710191

### (4) 連携研究者

吉村 友佑 (YOSHIMURA, Yusuke)  
筑波大学・計算科学研究センター・研究員  
研究者番号：10756844