

氏名	齋藤 隆大
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博甲第 8931 号
学位授与年月日	平成 31年 3月 25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理解物質科学研究科
学位論文題目	

A study of singularities with the theory of mixed Hodge modules
(混合ホッジ加群の理論を用いた特異点の研究)

主査	筑波大学 教授	竹内潔	博士(数理科学)
副査	筑波大学 教授	笈知之	博士(理学)
副査	筑波大学 准教授	竹山美宏	博士(理学)
副査	筑波大学 講師	木村健一郎	博士(数理科学)

論 文 の 要 旨

本博士論文では、複素超曲面の(族)のモノドロミーや混合ホッジ構造を混合ホッジ加群の理論を用いて研究し、様々な研究結果が得られている。ここで混合ホッジ加群とは、現在数学における最先端の研究対象であり、代数多様体の幾何学に数多くの革新的な応用がある。論文の著者である齋藤隆大氏は、混合ホッジ加群の理論を用いて以下のような研究を行っている。

まず3章においては、孤立特異点を持つ複素超曲面の交叉コホモロジー複体を扱い、その茎のコホモロジー群に定義される混合ホッジ構造のウェイトフィルトレーションの次数付き商の次元が、その複素超曲面のミルナーモノドロミーのジョルダン標準形における固有値1にたいするジョルダン細胞の個数で記述できることが示されている。これは Kazhdan-Lusztig らによる斉次複素超曲面の場合の古典的な結果を大きく拡張するものである。

論文の4章においては、複素平面の原点の近傍上の複素超曲面の族を扱い、その一般ファイバーの極限混合ホッジ構造やモノドロミーをある種のニュートン多面体を用いて記述する公式が与えられている。これは Stapledon による先行研究を改良するもので、特に一般ファイバーのモノドロミーのジョルダン標準型や、その完全交叉代数多様体の族への一般化などの新しい結果も得られている。ジョルダン標準型を調べるためには、一般ファイバーのコホモロジーについてのある種の消滅定理が必要であり、その証明

には混合ホッジ加群についての深い性質が用いられている。さらに4章では、Stapledon の得たモチヴィック近接ファイバーの公式にたいして、トロピカル幾何学の理論を用いない、新しいより簡明な証明が与えられている。

博士論文の最終章である5章においては、非孤立特異点を持つ複素超曲面のミルナーモノドロミーを扱っている。ミルナーの定理により、複素超曲面の孤立特異点におけるミルナーファイバーは(いくつかの)球面のブーケとホモトピー同値であり、特にその簡約コホモロジー群は中間次元に集中する。これまでの複素超曲面のミルナーファイバーやそのモノドロミーについての研究の多くは、この事実に立脚している。しかしながら、複素超曲面の非孤立特異点においては、このようなミルナーファイバーのコホモロジー群の集中は期待できない。そこで本博士論文において齋藤氏は、原点を非孤立特異点を持つ非退化な複素超曲面にたいして、まずそのニュートン多面体を用いて悪い固有値の集合を定義した。そしてその集合に入らない(良い)固有値にたいするミルナーモノドロミーの広義固有空間については、孤立特異点の場合と同様の中間次元への集中が成り立つことを示している。この結果と Varchenko によるモノドロミーゼータ関数の公式より、そのような(良い)固有値のミルナーモノドロミーにおける重複度の公式が直ちに得られる。さらに松井-竹内の最近の結果と組み合わせることで、そのジョルダン標準型やミルナーファイバーのホッジスペクトラムのニュートン多面体を用いた明示的な公式を得ることに成功している。これらの結果の証明には、4章のコホモロジー消滅定理を得るときに開発された混合ホッジ加群の性質を用いる方法だけでなく、モチヴィックミルナーファイバーやトーリック多様体などについてのじつに様々な現代数学の理論が縦横に駆使されている。

審 査 の 要 旨

[批評]

本博士論文においては、複素超曲面の(族の)幾何学的な性質について、多くの新しい重要な知見が得られている。まず3章の複素超曲面の交叉コホモロジー複体の茎の混合ホッジ構造については、Kazhdan-Lusztig らによる斉次複素超曲面の場合の結果以外に先行研究がなく、ミルナーモノドロミーとウェイトフィルトレーションの関係を示したのはまったく予期されなかった美しい結果である。つまり論文の著者である齋藤隆大氏は、新しい研究領域を切り開いたといえる。この結果をさらに改良することで将来、孤立特異点を持つ複素超曲面の交叉コホモロジー群の研究が大いに進むことが期待される。また4章で研究された複素代数多様体の族は、代数幾何や複素幾何における基本的な対象であり、そのモノドロミーのジョルダン標準型について一般的な公式が得られたことは数学的に重要である。論文の最終章である5章で扱っている複素超曲面の非孤立特異点におけるミルナーモノドロミーについては、これまでの研究では(ごく特別な複素超曲面のクラスを除いては)一般理論のようなものは得られていなかった。齋藤隆大氏は、非退化という(弱い)仮定の下で、さらに(悪い固有値を避けた)良い固有値の部分のみについてではあるが、非孤立特異点におけるミルナーモノドロミーやホッジスペクトラムの一般的な公式を与えた。これは特異点理論における画期的な進展であり、Varchenko によるモノドロミーゼータ関数の公式

(Invent. Math., 1976) に約 40 年ぶりに明確な意義を与えたことになる。またこれらの結果を得る過程では、混合ホッジ加群やモチヴィックミルナーファイバーなどの現代数学の最先端の理論が総動員されている。齋藤隆大氏の本博士論文は、その結果の斬新さや美しさ、技術的な深さにおいて卓越している。

〔最終試験結果〕

平成 31 年 2 月 8 日、数理物質科学研究科学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと、著者に論文について説明を求め、関連事項につき質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。