

消費者・時間的異質性・競争構造を
考慮した市場反応メカニズムに関する研究

筑波大学審査学位論文（博士）

2019

青柳 憲治

筑波大学大学院
ビジネス科学研究科 企業科学専攻

目次

		i
第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	マーケティング施策の高度化	4
1.3	問題意識	6
1.4	研究テーマ	8
1.5	本論文の構成	10
第 2 章	先行研究	11
2.1	市場反応のモデリングに関する先行研究	12
2.2	プロモーションの評価に関する研究	15
2.3	多変量カウントデータを対象にした研究	19
2.4	先行研究のまとめと残された課題	22
第 3 章	研究 1: 3 階層多変量状態空間モデリングによる動的市場反応形成メカニ ズムの解明	28
3.1	はじめに	28
3.2	先行研究	30
3.3	データ	32
3.4	モデル	36
3.5	解析結果	48
3.6	おわりに	61
第 4 章	研究 2: 消費者異質性を考慮した見かけ上独立なポアソン回帰モデルによ	

	る市場反応分析	63
4.1	はじめに	63
4.2	先行研究	64
4.3	提案モデル	67
4.4	データの概要	73
4.5	パラメータ推定結果	76
4.6	おわりに	89
第 5 章	研究 3 : 時間的異質性を考慮した見かけ上独立なポアソン回帰モデルによる市場反応分析	92
5.1	はじめに	92
5.2	先行研究	94
5.3	提案モデル	95
5.4	分析データの概要	99
5.5	パラメータ推定結果	101
5.6	おわりに	115
第 6 章	結論	118
6.1	各テーマの結論	118
6.2	統合的な結論とマーケティング研究への貢献	121
6.3	モデリング観点での貢献	122
6.4	実務への貢献	123
6.5	本研究の限界と今後の課題	125
付録 A	研究テーマ 1 における状態空間モデルのアルゴリズムとプログラム	126
A.1	状態空間モデルのアルゴリズム	126
A.2	提案モデルの推定プログラム	128
付録 B	研究テーマ 2 における事後分布からの推定アルゴリズムとプログラム	135
B.1	事後分布からの推定アルゴリズム	135
B.2	事後分布からの推定プログラム	137

付録 C	研究テーマ 3 における事後分布からの推定アルゴリズムとプログラム	142
C.1	事後分布からの推定アルゴリズム	142
C.2	事後分布からの推定プログラム	144
謝辞		150
参考文献		151

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

1.1.1 企業におけるマーケティング活動

米国マーケティング協会 (AMA) によると、マーケティングとは、”Marketing is the activity, set of institutions, and processes for creating, communicating, delivering, and exchanging offerings that have value for customers, clients, partners, and society at large.”と定義されている。企業は、この定義にある通り、消費者を含む社会全体にとって価値のある商品を創造し、市場に届けていくことを求められている。

また、コトラー、ケラー (2008) では、「マーケティング・マネジメント」という用語を用いて、より具体的にマーケティング活動を定義している。これは「標的市場を選び出し、優れた顧客価値を作り出し、分配し、コミュニケーションすることによって、顧客を獲得し、維持し、増やすための技術と知識である」というものである。すなわち、企業のマーケティング担当者は、マーケティング活動に関する様々なツールを用いて、ターゲットとなる市場から望ましい反応を引き出すことを求められている。その「ツール」は、「マーケティングの 4P」としてマッカーシー (E.J. McCarthy) によって整理・分類されている。この 4 つの P とは、それぞれ「製品政策 (Product)」、 「価格政策 (Price)」、 「流通政策 (Place)」、 「プロモーション政策 (Promotion)」を示す。また、これらを組み合わせることを「マーケティング・ミックス」と呼ぶ。企業のマーケティング担当者は、効果的なマーケティング・マネジメントを実現するために適切なマーケティング・ミックスを策定し、ターゲットとなる消費者にコミュニケーションしていく必要がある。

1.1.2 現代のマーケティング活動における課題

経済のグローバル化の進展による国際競争の激化，少子高齢化の進行による人口構成の変化，インターネットの普及によるeコマースの台頭など，社会・経済環境は大きく変化している。これにともなって企業を取り巻く環境も大きく変わりつつあり，マーケティング活動にも変化が求められている。本節では，マーケティング環境の変化とそれにとまなう現代のマーケティング活動における課題をあげる。

消費者のニーズの多様化。 過去，高度成長期のような，市場が右肩上がりに拡大していく時代には，消費者は人と同じものを持つことで満足していた。この時期は，供給側が需要側を規定している市場が多いことも特徴であり，これは言い換えると「作れば売れる」という状況であった。このような時代におけるマーケティング活動は，消費者は基本的に均質であるとみなしておこなう，マス・マーケティングが主流であった。あるいはまったく均質と考えなくとも，同じ特徴を持つ消費者をいくつかのグループに分ける「セグメンテーション」により市場の要請に応えることができていた。一方，現代の消費者は，当時とは異なり，他人と違うものを持つことに喜びを感じるようになっている。すなわち，現代の多くの市場においては，マス・マーケティングやセグメンテーションでは，消費者の態度変容を喚起することが難しくなっている。これは，消費者一人ひとりの異なるニーズに応える「マイクロ・マーケティング」が求められる時代になっているとも言える。

前段の変化は，AMAのマーケティングの定義にも表れている。現在のものは前述のとおりだが，1970年初頭の，AMAでのマーケティングの定義は以下の通りであった。"Marketing is the performance of business activities that direct the flow of goods and services from producer to consumer or user." これを先述した現在の定義と比較すると，1970年初頭のものは，生産者(供給側)が「生産者から消費者へ商品を届ける」ことを前提としている。一方，現在のものは，"value for customers"というフレーズが用いられており，消費者側の需要を満たすことに視点が置かれている。これは，市場において主導権を持つ存在が，供給側から需要側に移ったともいえ，現代のマーケティング活動では，供給側が消費者個々のニーズを汲み取り，それに応えていくことが必要とされている。このような状況のもと，実際の市場には，下記のような課題が存在している。

競合商品の増加。 商品間の競争は，消費者ニーズの多様化などの要因により激化してい

る。日本スーパーマーケット協会などが公表している「スーパーマーケット年次統計調査」によると、取り扱い商品を増やす店舗の増加が続いている。消費者にとって、取り扱い商品が増えることは、自身の好みにあった商品を見つけやすくなる点でメリットがある。一方、供給者としては、消費者の選択肢が増えるために、自社の商品を選択してもらうことが難しくなる。また近年は、主に流通業者が企画した商品である、プライベート・ブランド (PB) 商品の影響もその競争激化に拍車をかけている。一般に、価格は商品購入の意思決定の際の大きな要因となるが、PB 商品は価格が低く抑えられていることが多く、既存の商品に対して大きな脅威となっている。「マーケティングの 4P」で考えると、価格で優位に立てない場合は、商品の変更やプロモーションを通じたブランドイメージの形成などでそれを補わなければならない。しかし、その実現には多大な費用や時間が必要となるため、メーカーにとって非常に難しい問題だといえる。

プロモーション費用の増加。各企業は、マーケティングの 4P のなかで、プロモーション活動にも多額の費用を投じている。プロモーション活動は、消費者の商品購買意欲を喚起する一連の活動を指すが、このうち、一般にはセールスプロモーションと広告の 2 つの費用が増大傾向にある。セールスプロモーションは、購買時点 (ないしは購買に近い時点) で、消費者を刺激して売上の増大を図るプロモーション手法である。具体的には、店頭での値引きや商品を目立ちやすいところに陳列する特別陳列、商品を無料で配布し試してもらうサンプリングなどの手法がある。一方、広告は自社商品の広告をメディア (テレビ、新聞、雑誌、ウェブサイトなど) に掲載することで、商品認知率の向上や、購買の促進を図る手法である。高橋 (2013) によると、上場メーカー 20 社の対売上高プロモーション費率は、1990 年代から 2000 年台にかけて増加し、その状況は現在も継続している。セールスプロモーションが多く利用されるようになった背景として、恩蔵、守口 (1994) は、低関与下での購買行動が認識されはじめたこと、非計画購買が一定の割合で存在することが認識されはじめたこと、ブランド数が増加していることの 3 点を指摘している。1 点目と 2 点目に関しては、今回研究の対象とした、日常的にスーパーマーケットで購買されるような商材にあてはまり、消費者はそれらの購買意思決定にそれほど深く関与しない、すなわち低関与であることが明らかになっている。そのため、来店前に購買商品を決める計画購買の比率が低く、それに代わり店舗内で購買の意思決定をおこなう、非計画購買の比率が高い (恩蔵、守口、1994)。この点で、購買時点に近い店舗内で、商品の購買を促進できる、セールスプロモーションが注目されている。3 点目に関しては、前項で述べたとおり、

ブランド数の増加にともない店舗内での競争が激しくなり、その状況下で自社の商品をアピールするために、セールスプロモーションが多用された結果を反映している。

電通(2018)によると、2017年の日本の広告費は、6年連続で伸び、約6兆3000億円であった。この金額は日本のGDPに対して1.17%であり、これは農林水産業のGDP比率に匹敵する。すなわち、各企業は消費者から望ましい反応を得るため、広告に対して膨大な金額を投資している。近年はインターネット広告の台頭にともない、その費用が大きく増加している。以上述べたように、セールスプロモーションや広告などのプロモーション活動は年々重要性を増し、それにともない費用も増大しており、各企業はその効率化を求めている。

製品サイクルの短期化。最後の課題は、製品サイクルの間隔の短期化をあげる。製品ライフサイクル理論によると、製品は一般に、導入期、成長期、成熟期、衰退期の4つの段階を経るといわれている。当然、マーケティング施策も各商品のライフステージに対応しなければならない。また、自社の商品のみならず、競合商品のライフステージも同時に考慮しなければならない。中小企業研究所(2004)では、1980年代までは、売れ筋商品の約半数は5年以上販売が継続されていた。すなわち5年以上のライフサイクルがあった。一方、2000年代では、その割合が約5%まで下がっている。この理由としては、低価格商品の出現や消費者のライフスタイルの変化に伴うニーズの変化などがある。過去、製品ライフサイクルが長い時代には、時間による市場構造の変化は穏やかであった。そのため、各種マーケティング施策も自社商品や競合商品の経年によるライフステージの変化をそれほど考慮する必要がなかった。一方で、製品ライフサイクルが短くなると、自社商品、競合商品ともに、ライフステージが急速に進展し、またブランドが頻繁に入れ替わることになる。このため、企業は急激な市場環境の変化に対応した高度なマーケティング施策を必要としている。

1.2 マーケティング施策の高度化

前節で、マーケティング環境の変化とそれにとまなう現代のマーケティング活動における課題を指摘した。上述した課題を解決するには、マーケティング施策を高度化しなければならない。マーケティング施策の高度化には、データの活用が必要不可欠となっている。マーケティングのデータを取り巻く環境は大きく変化している。具体的には、情報シ

システムの高速化，データストレージの大量化やクラウド環境の進展により，消費者の行動の結果を示すデータが自動的かつ大量に蓄積されるようになってきている（ビッグデータ）．佐藤・樋口（2013）では「消費者の行動結果を示すビッグデータが，潜在的に高い価値を有する」と述べられており，施策の高度化には，データの高度解析技術が非常に重要だとわかる．

一方，マーケティング実務では，現代であっても属人的な，いわゆる「勘と経験と度胸」による意思決定が多くおこなわれている．上記のビッグデータ解析の普及によってデータ活用は多少は進展しているものの，それでも大半は KPI(Key Performance Indicator) をモニタリングし，それをもとに，担当者が施策を考えるという程度に終始している．このような手段は，まだ属人的な要素が強く，高度なデータ活用とは言い難い．また，モニタリングによる意思決定は，現在多くの企業でおこなわれており，競争優位の源泉にはなりづらい．よって，競争優位性を確保するためには，高度なデータ活用が求められる．その手段は様々考えられるが，方法のひとつに統計モデルがある．マーケティング事象を統計モデルで表現できれば，予測，シミュレーションおよび最適化などを適用することができ，結果として，新たな知見を獲得できる．実務では，PDCA(Plan-Do-Check-Action) サイクルにより施策の改善が図られることが多い．PDCA とは，施策の計画を立て (Plan)，それを実施し (Do)，結果を振り返り (Check)，次のアクションを導く (Action) という，施策の質の向上させるための手法である．統計モデルは，この PDCA サイクルとの相性がよい．具体的には，Plan の場面で，モデルに対して予測や最適化を適用することで，もっとも期待値が大きい施策を選択できる．Check の場面では，モデルの予測値と実績値を比較することで，成功・失敗の判断と，その理由の追求ができる．このような点からも，マーケティングに統計モデルを導入することは，企業にとって競争力の源泉となりうる．

マーケティング研究には，実務からのこのような要請に応えるものとして，市場反応分析がある．市場反応分析とは，大まかにいうと，マーケティング施策に対する市場反応の度合いを，データを用いて測定しようとするものである．岡太他（2001）では，「価格変更，広告，セールスプロモーションなどのマーケティング活動に対して，市場全体，ないしは個々の消費者がどのように反応するのかを分析しようとするものである」と定義されている．マーケティング施策の高度化には，市場反応分析による統計モデルの構築が一つの有効な手段となりうる．

1.3 問題意識

前段に提示したマーケティング実務における課題は、過去にも指摘されてきたものであり、目新しいものではない。各企業は、これらの課題に対処すべく努力を重ねている。一方、アカデミックでも多くの先行研究が存在する。表 1.1 には、マーケティング活動での課題と、その課題に対するアカデミックでの解決アプローチをまとめる。アカデミックでの解決アプローチが、本研究における研究の視点となっている。以下で、それぞれの視点について議論を進める。

表 1.1 マーケティング活動での課題とアカデミックでの解決アプローチ

マーケティング活動での課題	アカデミックでの解決アプローチ
消費者ニーズの多様化	階層ベイズモデルによる消費者異質性の考慮
製品ライフサイクルの高速化	状態空間モデルによる時間異質性の考慮
競合商品の増加	多変量モデルによる競争環境のモデル化
プロモーション費用の増加	プロモーション効果のモデル化

消費者異質性。 消費者のマーケティング施策に対する反応は、消費者間で共通の部分もあれば、消費者個々で異なる部分もあると考えるのが自然である。例えばセールスプロモーションに関して考えると、店頭での商品の販売価格を通常よりも下げると、多くの消費者は購入したい気持ちを喚起させられる。これは、消費者間で共通する反応といえる。しかし、その反応の度合いには個人差がある。具体的には、所得の高い人は、生活に余裕があるため、所得の低い人よりも値引きによって購買を喚起されにくい可能性がある。また、その商品へのニーズの大きさによって値引きに対する反応が変わることも容易に想像できる。このように消費者のマーケティング施策に対する反応は、消費者間で共通の部分と個別の部分とに分けて考えるべきである。上述した市場反応分析では、マーケティング施策に対する消費者ごとの異なる反応を「消費者異質性」と呼び、階層ベイズモデルなどを用いて評価できる。一方、マーケティング実務でも、「ワン・トゥ・ワン・マーケティング」が標榜されて久しい。これは、個々の消費者に最適なマーケティング施策をおこなうことで、その効果をより大きくすることを目指すものである。ワン・トゥ・ワン・マーケティングの実施には個人ごとの市場反応を測定しなければならないが、ここで述べた階

層ベイズモデルを用いることでそれが可能になる。

時間的異質性. 前項では、マーケティング施策に対する反応は消費者個々により変化すると考える「消費者異質性」について述べた。一方で、マーケティング施策に対する反応は、同じ消費者でも、時間的に変化すると考えることが自然である。佐藤，樋口 (2008b) でも、「価格戦略やプロモーション戦略の変化，また社会環境の変化などに伴って消費者の反応が時間的に変化すると仮定することは自然である」と述べられている。これは，上述した市場反応の動的な変動を考慮することとも換言できる。この「動的な変動」は，時間的異質性と呼ぶこともできる (佐藤，樋口，2013)。逆に考えると，市場や消費者の常なる変化を加味しない静的なモデルは，現実の市場を精緻にとらえるためには，不十分である可能性もある。しかし，アカデミックにおいて，時間的異質性を考慮したマーケティング研究は，消費者異質性を考慮した研究と比較すると非常に少なく，発展途上にある。

競合環境のモデル化. 本研究で対象とする最寄品の市場では，一般に一つの商品カテゴリー内に複数のメーカーの複数の商品が存在し，競争状態にある。先述したとおり，スーパーマーケットにおける商品数は増加する傾向にあり，商品間の競争は激化している。市場反応分析でこのような競争状態を扱う場合，大きく分けて2つのアプローチが存在する。

1つ目は，非集計型のモデルとして，ロジットモデルやプロビットモデルなどの離散選択モデルを用いたアプローチである。このアプローチは，市場反応分析では標準的なものとなっている。ただし，ロジットモデルでは，選択肢数が多い場合，パラメータの推定値にバイアスが生じる可能性がある。またプロビットモデルでは，計算量の観点から，あまり多くの商品を同時に扱うことは難しい。

2つ目は，商品ごとに集計したデータを用いて多変量のモデルを構築するアプローチである。これは，先述した市場反応分析のうち，集計的市場反応分析に属する。集計的市場反応分析とは，期間単位で集計された販売個数などのデータを用いて，消費者個人ではなく，市場全体の平均的反応をとらえようとするアプローチである。この手法を用いる場合，被説明変数は購買個数などのカウントデータとなることが多い。集計的アプローチに関しては，情報量が減少したり，集計した際にバイアスがかかるなどの議論もある (阿部，2013) が，近年のデータ環境の進展により，多数の競合商品を同時に扱える点にメリットがある。

プロモーション効果測定. プロモーション施策は多種にわたるが，実務で重要視され，

費用が多くかけられているのは、テレビ広告やセールスプロモーションである。セールスプロモーションは、購買時点に近い施策のため、商品の購買喚起効果が高いと考えられている。セールスプロモーションには、値引き、エンド陳列、チラシ掲載およびサンプリングなどが含まれる。これらのうち、特に値引きは実務上、購買に対する効果が大きいことが知られている。一方、値引きを繰り返した結果、消費者が値引きに慣れてしまい、値引いても購買されない現象も起こりうる。これに対し、テレビ広告は非常に多くの人の目に自社の商品が触れることになるため、商品の認知を広げられるという点で重視されている。ただし、広告は購買に対する影響が測定しにくいいため、その効果は実務とアカデミックの両面において長期間、議論の対象となっている。

プロモーションの効果を測定する際に、観測された変数だけを用いるのでは不十分なことがある。具体的には、消費者が値引きに慣れる、広告を記憶する、など一般的に起こりうるこれらの現象を、観測された変数だけで表現するのは難しい。先行研究では、潜在変数を導入したモデルにより、この現象に接近している。例えば、価格では参照価格という概念がある。これは、消費者がもっているその商品はおおよそいくらであるという価格基準で、消費者の心の中にある潜在的な量である。このような量は、データとして測定できないため、潜在変数として表現してモデルに取り込まなければならない。実際に、参照価格を対象にした研究は数多い。また、広告の記憶を表現する潜在変数は広告ストックと呼ばれる。広告に関しては、購買に対する即時効果が小さいと考えられている。一方で頭の中に記憶にその内容が蓄積され、何らかのきっかけでそれが記憶から呼び出され結果として購買に影響する。それらを表現するのが広告ストックであり、多くの研究の蓄積がある。

1.4 研究テーマ

1.1 節から 1.3 節において、実務上の課題とそれに関する問題意識を述べた。この課題や問題意識に対しては、上述したようにアカデミックでも多くの先行研究が存在する。本研究は消費者異質性、時間的異質性および競争構造を考慮し、市場反応メカニズムを明らかにすることを目的としている。本研究でも、先行研究と同様、マーケティング実務への示唆を提供し、マーケティング施策の高度化への貢献を目指す。本研究では、上述のように消費者異質性、時間的異質性、競争環境を表現できるモデルの枠組みを導入し、それに

よってプロモーション施策の効果を今まで以上に精緻に捉える。これができるば、そこから得られた知見により、マーケティング施策の高度化につながる事が期待できる。先行研究では、このような枠組みを提案したものはなく、この点で、アカデミックへの貢献もあわせて期待できる。

本研究では、上記の目的を達成するために、以下の3つのテーマで研究を構成する。表1.2には、問題意識と個々の研究テーマと関連を示す。各テーマの詳細は、先行研究をレビューした後に2章で述べるため、ここでは概要のみの説明に留める。

表 1.2 研究テーマ

実務課題	問題意識	テーマ 1	テーマ 2	テーマ 3
消費者ニーズの多様化	消費者異質性の考慮		○	○
製品ライフサイクルの高速化	時間的異質性の考慮	○		○
競合商品の増加	多変量モデル	○	○	○
プロモーション費用の増加	プロモ効果モデル	○	○	○

研究テーマ 1. 本テーマでは、テレビ広告とセールスプロモーションの同時的な効果に着目する。また、この市場反応が時間的異質性をもつと仮定し、多変量3階層状態空間モデルで表現する。状態空間モデルを用いれば、施策の動的な変動を評価できる。本研究では、店頭で実施される値引き、エンド陳列およびチラシ配布などの反応がテレビ広告量の変動などによって影響される構造を精緻にモデル化し、検証を進める。本研究でおこなった形式でセールスプロモーションの動的効果の変動メカニズムを評価した研究は確認されていない。

研究テーマ 2. 本テーマでは、セールスプロモーションの効果を、消費者異質性の仮定のもとで評価する。その際、競争状態にある17商品のカウントデータを多変量モデルで同時にあつかうモデルを提案する。このモデルにより、セールスプロモーションの効果を個人ごとに評価し、同時に商品間の競争構造(相関構造)を評価する。通常、高次元のカウントデータのモデル化は困難であるが、本テーマでは、これを簡易に実施するモデルを提案する。具体的には、ポアソン回帰のリンク関数をデータ拡大法により発生させる。これにより、既存の手法を用いて簡易にパラメータ推定が実施できる。また、リンク関数の分布として多変量正規分布を仮定するため、モデルの拡張性も高い。

研究テーマ 3. 本テーマでは、多数の商品の購買個数を被説明変数とし、消費者異質性および時間的異質性の仮定のもとでセールスプロモーション効果を評価するモデルを提案する。具体的には、階層ベイズ型状態空間モデルの枠組みで、各 SKU の販売個数を目的変数としたモデルを構築する。提案するモデルは、SKU 間の競争構造 (相関構造) を表現し、同時に消費者ごと、時点ごとのセールスプロモーション効果を評価可能な枠組みになっている。本テーマのモデルは、テーマ 2 のモデルの動的拡張になっており、より精緻なモデルとなっている。消費者、時間、競争構造の 3 点を同時に評価できるモデルの枠組みはこれまで提案されていない。

1.5 本論文の構成

1 章では、本研究の背景となる現代のマーケティングにおける課題をまとめた。そのうえで、問題意識と研究の目的を設定し、それを達成するための 3 つの研究テーマの概要を述べた。2 章では、本研究および各テーマに関する先行研究を整理し、先行研究の限界と残された課題を議論する。先行研究を整理する視点は、上述した 4 つの問題意識、すなわち消費者異質性、時間的異質性、多変量モデル、プロモーション効果である。3 章から 5 章は、それぞれ第 1 から第 3 のテーマの研究成果を示す。最後に 6 章では、各テーマの結果と、そこから導かれる本研究の結論と貢献を統合的に整理し、今後の展望を述べる。

第 2 章

先行研究

本研究の主題は、消費者の市場反応メカニズムを明らかにすることである。その課題に接近するには第 1 章に提示したように、様々な視点が存在する。本研究では、「市場反応のモデリングに関する先行研究 (2.1 節)」、「プロモーション評価に関する先行研究 (2.2 節)」および「カウントデータのモデリングに関する先行研究 (2.3 節)」に区分し、整理した。2.4 節には、それらの先行研究を総合的に整理し、残された課題を明確化する。なお、図 2.1 には、研究目的、テーマおよび先行研究の視点の関連を示した。図 2.1 の SP は、セールスプロモーションを示す。

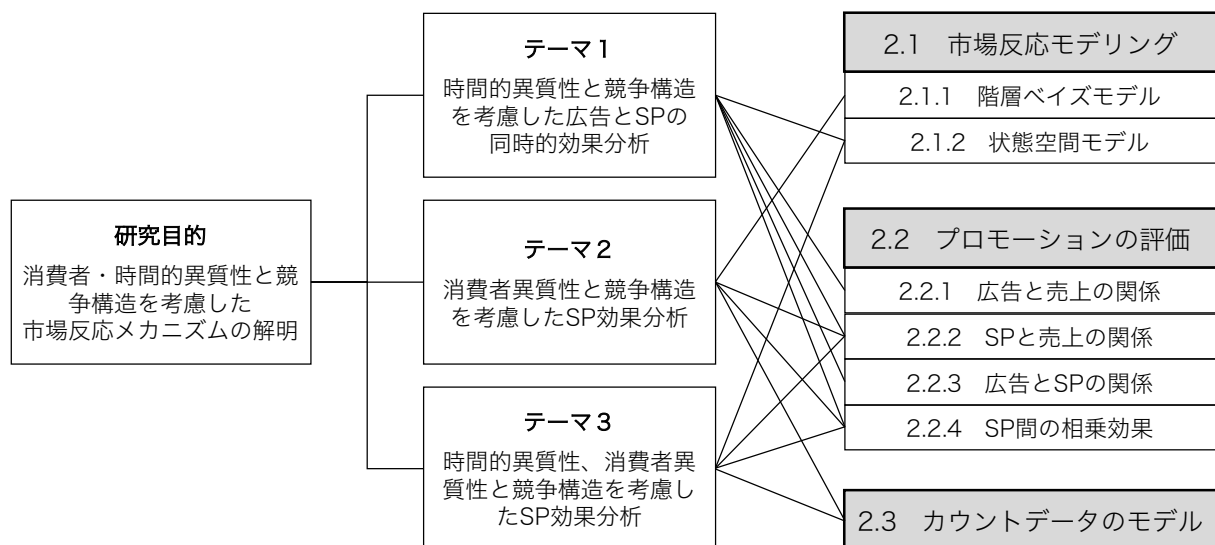


図 2.1 研究目的、テーマおよび先行研究の視点

2.1 市場反応のモデリングに関する先行研究

マーケティング分野の市場反応分析では、ベイズモデルを用いた研究が主流になっている。それらの研究の視点は、消費者異質性や時間的異質性を評価することである。逆にいえば、それらの異質性を評価するためにベイズモデルを用いているともいえる。以下の2つの項では、消費者異質性および時間的異質性に焦点を当てた先行研究を整理する。

2.1.1 階層ベイズモデルによる消費者異質性を評価した研究

Allenby and Rossi(1998)にあるとおり、計量経済学では集約効果 (aggregate effects) に関心が置かれ、消費者の異質性はバイアスであり除去するべきものであるとみなされていた。一方で、マーケティングでは、1章で述べたとおり、消費者異質性、すなわち消費者ごとの違いを知ることに強い関心がある。市場反応分析では、消費者異質性を評価する手法としてベイズモデルの一種である階層ベイズモデルを用いることが一般的となっている。階層ベイズモデルを用いれば、関心のある施策に関する個人ごとのパラメータを得ることができ、このパラメータが消費者ごとの反応を表現するものとなる。消費者の異質性を示すパラメータは、消費者ごとに最適な施策を実現するための基礎的な情報になる。実際、この考え方は、ワン・トゥー・ワン・マーケティングと呼ばれる先進的なマーケティング施策につながる。市場反応分析において階層ベイズモデルを用いた先行研究は、前段に示した研究をはじめとし、非常に多い。階層ベイズモデルの技術的側面に関しては、Rossi et al.(2005) や照井 (2008) などを参考のこと。

階層ベイズモデルのなかでも、本研究でも分析対象とする広告効果に焦点を当てた研究を整理する。Terui and Ban(2008) では、洗剤とインスタントコーヒーを対象とし、シングルソースデータに階層ベイズモデルを適用した。シングルソースデータには、各世帯での商品の購買記録に加えて、テレビ広告を見た回数が記録されている。当該研究では、このデータを用いて、テレビ広告のブランド選択に対する消費者ごとに異質な効果を抽出している。ただし、当該研究で用いたデータは、同一の形式で利用可能なものはほとんどなく、その拡張性に課題を有している。マーケティング分野では、テレビ広告には、将来にわたる持ち越し効果の存在が先行研究において示唆されている。これをストック効果と呼ぶ。当該研究では、ストック効果を含む広告の効果が表出する広告量が世帯によって異なる

ると仮定し、階層ベイズモデルを用いて世帯ごとに異なるパラメータを推定している。その結果、非集計レベルで、広告に対する反応の非線型性が確認され、また閾値効果が存在する可能性を示唆している。さらに、また世帯ごとのパラメータの分布は対称でも一様でもないことが明らかにされている。また、実務におけるテレビ広告スケジューリングへの示唆として、高い頻度で繰り返し (high-frequency pulsing) 広告を提示することも示されている。なお、照井 (1994) では、ストック効果のさまざまな表現を検討している。

Terui et al.(2011) は、世帯ごとに時系列に集計したデータを対象に広告効果の解析をおこなった。提案モデルには、潜在変数として広告ストック、ブランドロイヤリティおよびディスプレイストックが取り込まれている。当該研究の示唆は、高頻度で購買される、成熟した商品では、広告は効用に直接効果を有するというより、間接的に考慮集合の形成に影響を与えるというものである。

日高・佐藤 (2016) では、広告の露出実験データに階層ベイズ順序ロジットモデルを適用し、消費者異質性を考慮した複数広告素材の相乗効果 (クロスメディア効果) の評価を試みている。消費者によって効果的な広告が異なるという結果が得られ、広告の効果が多様性をもつことが示唆されている。また、ブランド態度指標の評価が高い消費者の広告効果は、そうでない人の広告効果よりも大きいという、Ehrenberg et al.(2002) の弱い広告効果理論と整合する結果も示されている。

その他、階層ベイズモデルの枠組みでセールプロモーションの効果を対象とした研究として、Terui and Dahana(2006) がある。この研究では、インスタントコーヒーの ID 付 POS データに対して、消費者の価格反応の異質性および閾値を含むモデルの適用を提案した。すなわち、提示価格と参照価格の差が、閾値を持って効用に影響すると仮定し、さらにこの参照価格と閾値は消費者によって異なると仮定した。このモデルから、個人ごとの参照価格と価格反応の閾値が導かれ、これらの値を用いることで、個人ごとに最適な価格設定が可能になることを示した。最適価格は、個人による変化だけでなく、時間による変化の可能性もあることから、消費者異質性に加えて、時間的異質性を取り込むことが必要であると述べている

ここまで、消費者異質性を対象とした広告効果研究をあげたが、Manchanda and Chintagunta(2004), Manchanda et al.(2004), 井上 (2010) のように、消費者ではなく、処方箋薬の販売における医師の異質性に着目した研究も存在する。これらの研究では、階層ベイズモデルによって、製薬企業による医師への営業活動であるディテール数が、処方回数に

与える効果を医師別に推定した。特に最新の井上 (2010) では、ディテールの蓄積による効果を表現する、ディテール・ストックを導入し、この係数が当期のディテールと比較して大きな値になることを示した。この研究では、モデル拡張の方向性として、ディテールに対する反応の商品間の差異および時間変動を考慮することなどがあげられた。

2.1.2 状態空間モデルによる時間的異質性を評価した研究

市場反応分析に関する先行研究は膨大に存在するが、これらの先行研究の多くでは、本研究で焦点を当てる市場反応の動的変化 (時間的異質性) を考慮していない (佐藤, 樋口, 2008a)。一方, 1 章であげた製品サイクルの短期化などの要因もあり, 市場反応の動的変化を考慮可能なモデルは, 1990 年代の後半からみられるようになった。現在もその数は増え続けている。佐藤, 樋口 (2008b) でも, 「小売業やメーカーの価格戦略やプロモーション戦略の変化, また社会環境の変化などに伴って, 消費者の反応も動的に変化すると仮定することが自然である」と述べている。逆にいえば, 市場反応の動的変化を考慮しない静的モデルは, 現実の市場を精緻にとらえるためには不十分なのである。以下では, 市場反応の動的変化 (時間的異質性) を考慮した分析を, 動的市場反応分析と呼ぶ。

動的市場反応分析では, 状態空間モデルと呼ぶ, 時系列モデルのベイズモデルを用いる。Dekimpe et al.(2006) によれば, Naik et al.(1998), Xie et al.(1997) が, 市場反応分析に状態空間モデルを適用した先駆的研究であるとされている。一方, 国内では Kitagawa and Kondo(1998), 近藤 (1999) などが早期の研究である。また最近の研究としては, Dube et al.(2005), Naik et al.(2005), Sriram and Kalwani(2007), Bass et al.(2007), Bruce(2008), 佐藤, 樋口 (2008a), 佐藤, 樋口 (2008b), 佐藤, 樋口 (2009), 本橋, 樋口 (2013), Ernst et al.(2010), Bruce et al.(2012), Harvey et al.(2012) などが存在する。これらの研究は, 平滑化事前分布と呼ぶ, 反応係数が時間進展とともに滑らかに変動するという制約を課したモデルをシステムモデルとして導入し, 市場反応係数の動的変化を表現する。平滑化事前分布では, 隣り合う時点間の反応係数の差は, 微小なホワイトノイズ程度だと仮定しモデル化する。平滑化事前分布によって市場反応係数をモデル化すれば, その動的変化は近似的に表現できるが, なぜそれらが時間変動するのか, というメカニズムの理解には限界がある。そのため, 平滑化事前分布による動的市場反応のモデル化は, 先行研究において議論の対象になっている。照井 (2008) は, 「マーケティングのアカデミズムとして, 因果構造

の理解をより尊重する風土があり、この点で、滑らかに変動する前提のもとで得られた結果によって、知識を獲得したとは言えない立場の研究者は少なくない」と指摘しており、この点で平滑化事前分布を用いた動的市場反応モデルはアカデミズムにおける議論の対象になりうるものだ、と述べている。さらに「滑らかに変動するという制約で得られたパラメータは、欠落した説明変数や誤ったモデル仕様の結果として発生した残余に影響を受けた人工的な値である」(阿部, 2008), 「動的個人モデルのパラメータはランダムウォークで記述されており, どのような要因によって変化するのかを知ることができない」(里村, 2008)といった指摘もある。阿部(2008)は, さらに「平滑化事前分布の問題点を回避し, マーケティングで有用な動的知見を抽出するには, 市場反応の動的進展に影響する要因を用いて, 階層モデル化することが一つの方策だ」と述べている。これらの指摘は, 動的市場反応分析における課題であり解決すべきものである。本研究では, 研究テーマ1で, 階層的な動的市場反応モデルにより, 本課題に接近している。

2.2 プロモーションの評価に関する研究

2.2.1 テレビ広告と売上の関係

広告効果を分析する手法は様々存在するが, 代表的なアプローチとして市場実験および市場反応分析がある。市場実験は大掛かりなデータ収集の仕組みが必要であり, さらに広告主にとっては多くのコストを要するため, 日本ではほとんど行われることはなく, 市場反応分析が広告効果測定を中心となっている(阿部, 2003)。

企業での広告投資の目的は, 自社商品の売上の増大または改善である。売上は広告活動以外の多くの要素から影響を受けるため, 実務ではブランド認知率やブランド好意率などを目標指標として設定する。それらの指標を目標指標とする論拠は, 学術上の知見にある。DAGMAR理論(R.H.Colley, 1961)は, 消費者が広告を認知し, そこから最終的に当該ブランドを購入するまでのプロセスを細かく規定した。具体的には, 広告は「未知, 認知, 理解, 確信, 行為」のコミュニケーション・スペクトラムを通じて, 販売につながると主張した。また, 広告の効果測定に当たっては, その各段階において中間目標を設定し, その目標を広告効果のための指標とすればよいとした。DAGMAR理論以外にも, AIDAモデル(Strong, 1925), AIDMAモデル(Hall, 1924)などでも, 消費者の認知から行動のプロセスはいくつかの段階に分けられている。また, DAGMAR理論の未知と認知の間を

より細かく分けたものとして、ARF(Advertising Research Foundation)の媒体評価モデルがある。

広告の売上への効果を明確に提示することは困難ではあるが、1章で述べたとおり、企業の競争力を高めるためには、マーケティング施策の高度化が必要である。この点で、広告の売上への効果の有無やメカニズムを評価できれば、より競争力のあるマーケティング戦略の策定につながる。

Naik et al.(1998), Naik and Raman(2003), Naik et al.(2005), Bass et al.(2007)などが、2.1.2項に示した時間的異質性に対応した広告効果研究である。これらの研究はすべて状態空間モデルを利用している。Naik(1999)は広告効果の時間変動を状態空間モデルによって定式化し、さらにコピー効果とレピュテーション効果の摩耗を推定するために、カルマンフィルタを利用した。またNaik and Raman(2003)は、メディア間の広告の相乗効果の存在に関する研究を行っている。さらに、Naik(2005)では、競合の存在を考慮した、マーケティング・ミックス分析を行っている。またBass et.al(2006)においては、広告コピーのウェアアウト効果の一般化を試みている。一方、国内の研究としてはAndo(2006)、星野(2008)がある。Ando(2006)では、コンビニエンス・ストアの各商品の売上個数を目的変数とし、曜日、天候、広告、値引き率を説明変数とした、複数の商品のモデルを同時に推定する、非ガウス型かつ多変量の状態空間モデルを構築した。この際、パラメータの推定手法として、マルコフ連鎖モンテカルロ(Markov Chain Monte Carlo; MCMC)法を用いている。この研究では、プロモーション変数として価格、エンド、チラシ、テレビ広告を含めているが、時間的異質性に関しては、切片(ベースライン)のみの設定となっている。星野(2008)では、ビール、緑茶飲料、缶コーヒーを対象に、広告量を説明変数、広告想起率を被説明変数としたモデルを作成している。この研究の特徴としては、以下の3点があげられる。1点目として、摩耗効果、忘却効果をモデルに組み込んでいること、2点目として、ブランドレベルでの集計バイアスを除去するため、多くのブランドのデータを同時にモデル化していること、3点目として、ブランドごとの広告効果の違いを説明するために、各ブランドの「業界内地位順位」を広告効果係数の説明変数として組み込み、モデルを階層化していること、である。この研究では、売上ではなくブランド認知率を目的変数としている。

本節では、状態空間モデルを用いた研究を主に説明したが、階層ベイズモデルを用いてテレビ広告効果の異質性を評価した研究としては、2.1.1項で述べたTerui and Ban(2008)、

Terui et al.(2011), 日高, 佐藤 (2016) などがある.

2.2.2 セールスプロモーションと売上の関係

マーケティング実務では, セールスプロモーションを短期的な売上増を狙いとして実施する. 学術研究でも, セールスプロモーションの売上に対する影響を対象とした研究は, 初期の Hawkins(1957), Waugh(1959) から, 膨大な蓄積がある. 本研究での視点の一つである, 消費者異質性を考慮した研究の先駆けとして, Allenby and Rossi(1998) が, 同様に時間的異質性を対象とした研究では, 近藤 (1999), Kondo and Kitagawa(2000) などがある. また多くの研究で, セールスプロモーションは売上の向上に効果があるという示唆を得ている. しかし, その一方で, セールスプロモーションを過剰に実施すると, ブランド価値を毀損したり, セールスプロモーションを実施しないと売れなくなる, など, 企業にとってネガティブな影響が出ることも示唆されている (DelVecchio et al., 2007). この状況を回避するためには, セールスプロモーションの効果とその形成メカニズムを計量的に把握し, 適切に施策をコントロールする必要がある.

セールスプロモーションのなかでも, 値引きは短期的な売上増には最も効果があると考えられている (恩蔵, 守口, 1994). また値引き効果のメカニズムの理解を深化させることを狙いとした研究も数多くなされている. その一つが, 消費者個人の値頃感を示す, 参照価格である. 参照価格に関するレビュー論文としては, Mazumdar et al.(2005), 中村 (2001) がある. 参照価格とは, 前述の通り, 個人が有する商品に対する値頃感を示す概念であり, 先述した Terui and Dahana(2006) など, 基本的に個人レベルの概念として研究がなされている. 一方で, それらの研究とは異なり, 代表的消費者の仮定のもと, 店舗レベルの参照価格を用いた研究も存在する (Terui and Imano, 2005, 佐藤・樋口, 2008b). 佐藤, 樋口 (2008b) は, 状態空間モデルの枠組みで参照価格を説明変数として取り込んだモデルを提示している. 具体的には, 店舗レベルの商品別週別販売個数 (実際には点数 PI) に対して, 参照価格をモデル化し, 売価やエンド陳列実施の有無などのコーザルデータとあわせて動的市場反応モデルに取り込み, 動的市場反応の評価を試みている. 宮津, 佐藤 (2015) では, 消費者行動理論における心理的財布という概念を取り入れて, 購買点数生起メカニズムの解明を試みている. この研究では, 階層ベイズ閾値ポアソン回帰モデルの枠組みを用いており, 結果として, 消費者の心理的財布の状況によって値引き反応が変化する

るという結果を報告している。

2.2.3 広告とセールスプロモーション効果との関係

一般に、広告が直接的に売上に影響することを直接効果、他の施策を通じて売上に影響を与えることを同時効果(間接効果、相乗効果)とそれぞれ呼ぶ。先述のとおり、広告の売上への効果を明示することが一般的に難しいこともあり、店舗で実施されるセールスプロモーションとの同時効果を研究対象とすることで広告効果の抽出を試みた研究も存在する。広告と値引きの関係は、Harvey et al.(2012)、上田(1986)にある通り、広告量の増加によって価格感度が低下するという見解が一般的となっている。これは広告によってブランドロイヤリティが強化され、その結果として値引を実施しなくても売れるようになる、という理由にもとづいている。広告と値引きの同時効果を対象とした研究としては、古くはEskin and Baron(1977)で、この研究では値引と広告の負の同時効果の存在が示されている。最近では、Naik et al.(2005)に値引やクーポンなどの価格プロモーションとテレビ広告の負の同時効果の存在が示されている。この研究では、時系列データによってモデルを構築しているが、その際、同時効果の説明変数として価格と広告量を掛け合わせたものを用いている。Harvey et al.(2012)では、最寄品のシングルソースデータを集計し、テレビ広告は値引きと正の同時効果を持つこと、広告量の増加によって必ずしも価格感度が低下しないこと、値引以外のセールスプロモーションについても、テレビ広告と同時に実施することで、それぞれを単独で実施するよりも高い効果が得られること、などの知見を得ている。Kanetkar et al.(1992)では、ペッドフードのシングルソースデータを用い、価格変数と広告変数を掛け合わせたものを同時効果の説明変数としてモデルを構築した。その結果、ペッドフードカテゴリにおいて、広告への接触回数が増えると、価格感度が高まることを示した。

以上の先行研究は、セールスプロモーションと広告の相乗効果に焦点を当てているものの、相乗効果を集計や説明変数同士の掛算を変数とすることでとらえようとしている点で、同時効果を明示的に表現していない。一方、本研究では、階層モデルを用いて、明示的に同時効果を表現することを試みる。

2.2.4 セールスプロモーション施策間の相乗効果

1章で述べたとおり、セールスプロモーションには、店頭での値引きやエンド陳列、サンプリングなどの施策がある。これらの施策間の相乗効果に着目した先行研究も存在する。Wilkinson et al.(1982)では、石鹸、パイ生地、果実飲料、米の4つの商品を対象に、実店舗での実験をおこない、値引き、エンド陳列、広告について、それぞれの効果および相乗効果の抽出を試みた。結果として、果実飲料以外の商品で値引きとエンド陳列の相乗効果が統計的に有意であることを示し、その存在が示唆されている。Kumar and Robert(1988)では、紙おむつのPOSデータを用いた回帰分析により、値引き、エンド陳列およびチラシの相乗効果を分析した。当該研究では、相乗効果は確認されなかった。西尾他(1992)では、ニューラルネットワークを用いて、インスタントコーヒーを対象に、セールスプロモーションの効果を分析した。当該研究では、値引きのみの場合よりも、値引きと同時にエンド陳列をおこなう方が売上数量に対する効果が大きくなるという結果になっており、相乗効果の存在が示唆されている。

本項でまとめたとおり、セールスプロモーション施策間の相乗効果については、その存在も示唆され、マーケティング実務においては関心も高い。一方、本研究では、消費者異質性、時間的異質性および競争構造の解明および広告とセールスプロモーションの同時効果の分析に主眼をおいている。そのため、セールスプロモーション施策間の相乗効果を明示的にあつかうことは、今後の課題とする。

2.3 多変量カウントデータを対象にした研究

1章で述べたとおり、市場には複数商品が存在することが一般的であり、市場反応分析においても、それは当然考慮されるべきである。同じく1章で、市場反応分析には非集計型と集計型があると述べたが、非集計型市場反応分析では、個人が購入したか否かに関心があるため、解析にはロジットモデルやプロビットモデルなどの離散選択モデルが用いられる。このモデルはブランド選択モデルと呼ばれ、McFadden(1973)により経済学に導入され、その後、マーケティングでの解析においても広く用いられている。このモデルでは、消費者は与えられた選択肢の中から効用が最大となるものを選ぶことを仮定しており、多項ロジットモデルなどを用いてブランド選択モデルを構築することで、自然な形で

競争状態を表現することができる。一方で、集計的市場反応分析では、目的変数となるのは、一定期間内に購買された個数を集計した購買個数やその値から算出したマーケット・シェア、もしくは来店者数などを分母にして計算した購買率などである。こちらの分析でも、競争状態を評価することは可能である。購買個数であれば、競合商品も目的変数に含めた多変量モデルを用いればよいし、マーケット・シェアであれば、値そのものが、競争状態を反映している。

商品を構成する最小単位は「SKU」と呼ばれる。SKUは「Stock Keeping Unit」の略称であり、最小管理単位を示す。通常、商品というと、銘柄名を指すことが多いが、実際は一つの銘柄の傘の下に重量や味種が異なる多くの細かい商品が含まれている。POSデータやID付POSデータなどでは、このSKU単位でその状況が記録されている。売場で商品を選ぶ際、消費者は銘柄だけではなく、その重量や味種も考慮する必要がある。つまり、市場の競争状況を精緻に捉えるためには、商品レベルではなく、SKUレベルで分析しなければならない。一方、ある市場でSKU単位でのモデル化を考えると、その数は非常に多くなり、通常の統計技術だけではモデル化が困難になる。先に述べたプロビットモデルは、モデル化する商品数が多い場合、計算量の点でパラメータの推定が難しくなることがある。Bhat(2011)では、Maximum Approximate Composite Marginal Likelihood(MACML)を提案し、選択枝数が10以上であっても、パラメータ推定が実現できることを示した。しかし、市場を構成するSKUの数を鑑みると、そのアプローチを用いても不十分である。また、ロジットモデルでは、対象商品数(選択枝数)が多い場合には、適切な選択枝集合を作成することが難しい。このような意味で、商品数が多い場合、非集計型のモデルでの競争構造の表現が難しい。そもそも、離散選択モデルでSKU間の競争を捉えるためには、消費者の選択行動を示すID付POSデータに代表されるマイクロなデータが必要になる点も留意しなければならない。

一方で、多変量カウントデータを表現するモデルにおいても、高次元のパラメータ推定を実現しなければならず、計算量の観点から困難が生じる。King(1989)、Jung and Winkelmann(1993) および Karlis(2003) で提案された、見かけ上無相関なポアソン回帰モデル (Seemingly Unrelated Poisson Regression Model, SUPREME) および Munkin and Trivedi(1999)、Chib and Winkelmann(2001) によって提案された多変量ポアソン対数正規 (Multivariate Poisson-log Normal; MVPLN) 回帰モデルなどは、上記の問題に対するさきがけ的研究である。それらのモデルを用いれば、高次元カウントデータモデルのパラメー

タ推定は実現できるが、拡張性の観点で課題も多い。以下で、多変量カウントデータを対象にしたマーケティング研究を整理する。なお、SUPREME および MVPLN 回帰モデルの詳細は 4 章で述べる。

Brijs et al.(2004) は、SUPREME を多変量ポアソン混合モデルに拡張し、2 つの消費財カテゴリ (ケーキミックスとケーキシロップ) の購買データに適用した。当該モデルでは、同時購買の構造が多変量ポアソン分布の共分散で表現される。Wang(2007) では、MVPLN 回帰モデルを用いて、複数の消費財カテゴリの同時購買をモデル化している。この研究でも、多変量ポアソン分布の分散共分散行列で、5 つのカテゴリ間の同時購買の生起を表現している。5 変量のモデルは SUPREME では計算量の点でパラメータ推定が困難だったが、MVPLN 回帰モデルによりそれが可能となった。Terui et al.(2010) では、同カテゴリ内の複数の商品を同時にモデル化した。各商品の販売数量はそれぞれ独立なポアソン分布に従い、よってその合計数量もポアソン分布に従う。そして合計販売数量を条件付きにすると、各商品については多項分布に従うモデルになっている。多項分布なので負の相関をもつ。

パラメータ推定は、多項分布のパラメータを多変量正規分布に従うリンク関数とみなし、データ拡大で発生させている。また、このリンク関数の時間遷移を状態空間モデルで表現し、時間的異質性を評価するモデルになっている。Dippold and Hruschka(2013) では、MVPLN 回帰モデルを多数の消費財カテゴリの購買データに適用し、カテゴリ間の購買量の相関関係を分析した。モデルとしては、Wang(2007) とほぼ同じものである。補完的な商品カテゴリにおいては、一方の購買によって他方の購入確率が上昇することは先行研究の知見として得られていたが、この研究では、購買個数は増加しないという結果を得ている。続いて、多変量カウントデータに対して状態空間モデルを適用し、動的構造を表現した研究をあげる。まだその数は極めて少なく、特に消費者異質性を評価したモデルは確認できていない。Ando(2008) では、アロマ製品の販売個数を目的変数とした、多変量の状態空間モデルを構築した。カウントデータを表現するために、打ち切りのある分布 (正規分布, t 分布, コーシー分布) を用いている。この研究では、消費者異質性はモデル化していない。Aktekin et al.(2018) では、Multivariate Confluent Hyper-geometric Negative Binomial Distribution および Dynamic Multivariate Negative Binomial Distribution を用いてモデル化をおこない、パラメータ推定を粒子フィルタで実施している。Chen et al.(2015) では、目的変数の分布に多変量ポアソン対数正規分布を仮定して、Brijs et al.(2004) と同

じデータでの2変量相関をモデル化した。これら2つの研究でも、消費者異質性は評価していない。

2.4 先行研究のまとめと残された課題

表 2.1 から表 2.3 には、2.1 節から 2.3 節で提示した先行研究を総括的に示した。本章でここまで議論してきたとおり、先に述べた4つの問題意識に関する先行研究は豊富に存在する。4つの観点を再度確認すると、消費者の異質性を考慮するための階層ベイズモデルを用いた研究、時間的異質性を表現するための状態空間モデルを用いた研究、競争状態を表現するための離散選択モデルや多変量分布を用いた研究およびプロモーション効果測定モデルである。先行研究の多さを鑑みても、現代のマーケティングにおいては、これらの観点を考慮することが重要である。

一方で、このように多くの先行研究が存在するものの、まだ十分に解明されていない部分も多い。以降では、1章であげた本研究の3つの研究テーマについて、さらに詳細を述べつつ、本研究を通じて残された課題を整理する。

第1の研究テーマでは、時間的異質性を考慮し、複数の商品におけるセールスプロモーションと広告の同時効果をモデル化する。具体的なモデルとしては、通常は観測モデルとシステムモデルの2階層で表現される状態空間モデルを、3段階に拡張する。1段階目のモデルでは、セールスプロモーション(値引き、エンド陳列およびチラシ配布)が売上に影響を与える構造を表現する。2段階目のモデルでは、1段階目のセールスプロモーションの効果に対して、テレビ広告が影響する構造を表現する。3段階目のモデルには、平滑化事前分布を導入し、モデル全体が動的に変動することを表現する。この研究テーマでの新規性をあげる。1点目は、セールスプロモーションとテレビ広告の同時的な効果を、実験データでなく、観測されたデータでモデル化した事例がほとんどみられない点である。Neelamegham and Chintagunta(2004)でなされているものの、この研究は1変量のモデルであり、カテゴリ内の競争構造を考慮したものにはなっていない。

2点目は、広告とセールスプロモーションの同時効果の分析を、時間的変化を考慮しておこなった研究は存在しない点である。これらの点で、第1のテーマでは、セールスプロモーションと広告の同時効果について、新たな知見を得ることが期待される。

第2の研究テーマでは、消費者異質性を考慮し、セールスプロモーションの効果をモデ

ル化する。またモデルは **SKU** レベルでの多変量モデルとし、**SKU** 間の競争構造も同時に表現する。具体的なモデルとしては、階層ベイズモデルの枠組みで、各 **SKU** の販売個数を目的変数とした多変量カウントデータのモデルとする。ポアソン回帰におけるリンク関数をパラメータととらえてデータ拡大を用いることで、**SKU** 間の相関構造、すなわち競争構造を表現する。このようなアプローチであれば、多変量ポアソン分布の尤度を独立としてとらえても、平均構造の意味で相関構造をとりこめる。多変量カウントデータのモデルに、階層ベイズモデルや状態空間モデルなどの多層のモデルを適用することは、一般には計算量の観点から難しい。また、既存研究では、競争状態を表現するために、多項ロジットモデルや多変量プロビットモデルを用いた研究が多いが、こちらを選択肢として組み込める競合ブランド数には限界がある。しかし、本テーマで提案するモデルを用いることで、競合商品の数が多い場合でも、既存の手法を用いて容易にパラメータ推定が実現できる。なお、本テーマで提案するモデルを、見かけ上独立なポアソン回帰モデル (**Seemingly Independent Poisson Regression Model; SIPRM**) と呼ぶ。

本テーマでの新規性を以下に述べる。まず、既存研究には、消費者の異質性を考慮した多変量カウントデータでのモデルは存在しない。また、本テーマでは、**17SKU** を多変量モデルで同時にモデル化しているが、それほど多くの商品を同時にモデル化した研究は少ない。しかし、1章で述べたとおり、一つの商品カテゴリには、**SKU** レベルでみると非常に多くの商品が存在することが一般的である。この意味で、本研究で提案するモデルは、市場をより精緻にモデル化するための一つの枠組みを提案できると期待される。

第3の研究テーマでは、時間的異質性と消費者異質性を考慮し、セールスプロモーションの効果をモデル化する。またモデルは **SKU** レベルでの多変量モデルとし、**SKU** 間の競争構造も同時に表現する。

具体的なモデルとしては、状態空間モデルの枠組みで、各 **SKU** の販売個数を目的変数とした多変量カウントデータのモデルとする。またその際、多変量モデルとして、9つの **SKU** を同時にモデル化し、かつ個人ごとにパラメータを設定することで、消費者異質性も同時に表現する。これにより、セールスプロモーションの効果を時間ごと、および個人ごとに得ながら、**SKU** 間の競争構造(相関構造)も把握することができる。本テーマでは、第2のテーマで提案した、見かけ上独立なポアソン回帰モデルを用いている。

本テーマの新規性をあげる。このテーマのモデルは、多変量のカウントデータに対して、消費者異質性と時間的異質性を同時に取り込みつつ、動的な構造変化を表現するもの

になっている。先行研究をみても、このように多数のブランドの競争状態を表現しながら、個人ごとにセールスプロモーションの動的効果をとらえようとした研究は存在しない。この点で、本研究はセールスプロモーションの効果測定において新たな知見を得られることが期待される。

本研究での大きな目的は、市場を捉える3つの軸、すなわち消費者異質性、時間的異質性、競争構造を同時に表現できるモデルを導入し、それを用いてプロモーション施策の効果を今まで以上に精緻にとらえることであった。第1のテーマでは、時間的異質性のもとで、テレビ広告とセールスプロモーションの同時的な効果を評価する。第2のテーマでは、消費者異質性のもとで、競争構造とセールスプロモーションの効果を評価する。最後に、第3のテーマでは、消費者異質性および消費者異質性のもとで、競争構造とセールスプロモーションの効果を評価する。本章で議論してきたとおり、それぞれの研究テーマで、先行研究にはない知見が得られることが期待され、これはマーケティング実務でも活用できる可能性がある。また、本研究では、それぞれのテーマで、先行研究にはない新たなモデルの枠組みを提案する。これらのモデルは、本研究で適用した課題以外にも応用できるため、この点でもマーケティング研究の進展に多少なりとも貢献できることが期待される。

表 2.1 関連する研究の一覧 (1)

研究	目的変数		異質性		潜在変数	モデル	対象プロモーション
	非集計	集計	個人	時間			
	1変量	多変量					
Aktekin et al.(2018)		○		○		二変量負の二項分布	なし
Ando(2006)		○		○		一変量ポアソン	価格, 広告
Ando(2008)		○		○		多変量切断正規分布	なし
Allenby and Rossi (1998)	○		○			ロジット	価格, エンド, チラシ
Bass et al.(2007)		○		○		一変量正規	テレビ広告
Brijis(2004)		○				多変量ポアソン	なし
Bruce et al.(2017)		○		○		ゼロ過剰ポアソン	広告, ネット広告のクリック数
Bruce (2008)		○		○		一変量正規	価格, 広告
Bruce et al.(2012)		○		○		多変量正規	テレビ広告
Buck(2009)		○				多変量ポアソン	なし
Chen et al.(2015)		○		○		多変量ポアソン正規	なし
Dippold and Hruschka(2013)		○				多変量ポアソン	なし
Dube et al.(2005)	○					多項ロジット	価格, テレビ広告
Ernst et al.(2010)		○		○		一変量正規	テレビ広告
Heerde et. al(2013)		○				一変量正規	価格, 広告

表 2.2 関連する研究の一覧 (2)

研究	目的変数		異質性		潜在変数	モデル	対象プロモーション
	非集計	集計	個人	時間			
日高, 佐藤 (2016)	○		○			順序ロジット	テレビ広告
Howell et al.(2015)	○		○		○	一変量正規	価格
井上 (2010)	○		○		○	一変量正規	価格, デイテール
近藤 (1999)		○		○		一変量正規	価格
Kondo and Kitagawa (1998)		○		○		一変量正規	価格
Kondo and Kitagawa (2000)		○		○		一変量正規	価格
Manchanda and Chintagunta (2004)		○	○			一変量ポアソン	処方数, デイテール
Manchanda et al. (2004)		○	○			一変量負の二項	処方数, デイテール
宮津, 佐藤 (2015)		○	○		○	一変量ポアソン	心理的財布
本橋, 樋口 (2013)		○		○		ロジット	価格
本橋他 (2012)		○		○		二項	バナー広告のクリック数予測
Naik et al.(2005)				○		一変量正規	価格, 広告 (および同時的効果)
Naik et al. (1998)		○		○	○	多変量正規	テレビ広告
Neelamegham and Chintagunta(2004)		○		○		一変量正規	価格
佐藤, 樋口 (2008a)	○			○		ロジット	チラシ

表 2.3 関連する研究の一覧 (3)

研究	目的変数		異質性		潜在変数	モデル	対象プロモーション
	非集計	集計 1変量 多変量	個人	時間			
佐藤, 樋口 (2008b)		○		○	○	一変量正規	価格, エンド
佐藤, 樋口 (2009)	○		○	○	○	ロジット	価格, エンド
Sriram et al.(2007)		○		○	○	一変量正規	価格, エンド, チラシ, テレビ広告
Terui and Ban (2008)	○		○	○	○	プロビット	価格, エンド, チラシ, テレビ広告
Terui and Dahana (2006)	○		○	○	○	プロビット	価格, エンド, チラシ
Terui et al.(2010)				○		ポアソン多項	価格, エンド, チラシ
Terui et al. (2011)	○		○		○	切斷正規	価格, エンド, テレビ広告
Wang(2007)						ポアソン対数正規分布	価格
山田, 佐藤 (2012)	○		○			ロジット	ダイレクトメール, イベント催事
山田, 佐藤 (2016)		○	○			一変量ポアソン	ダイレクトメール, イベント催事
研究テーマ 1				○	○	多変量正規	価格, エンド, チラシ, テレビ広告
研究テーマ 2			○			多変量ポアソン	価格, エンド, チラシ
研究テーマ 3			○	○		多変量ポアソン	価格, エンド, チラシ

第 3 章

研究 1: 3 階層多変量状態空間モデリングによる動的市場反応形成メカニズムの解明

3.1 はじめに

スーパーマーケットや総合スーパー (General Merchandise Store) が主な販売チャネルである最寄品市場において、企業は、販売個数、販売金額またはマーケットシェアの向上を目的として、様々なマーケティング施策を実施している。マーケティング施策は、一般的に製品 (Product)、価格 (Price)、販売促進 (Promotion)、販売チャネル (Place) のいわゆる「4つのP」に分類され、小売業や消費財メーカーはそれらの施策に、多くの費用を投下している。

企業がマーケティングを効果的に実施するには、4つのPの効果を適切に捉え、その結果に基づきマーケティング施策を動的に改善していかなければならない。このうち販売促進活動に注目すると、企業が実施する具体的な施策として、値引き、山積み陳列、チラシなどに代表されるセールスプロモーションおよびテレビCMに代表されるのマス広告活動などがある。セールスプロモーションは、購買時点(ないしは購買に近い時点)で、消費者を刺激して売上の増大を図る販売促進手法である。一方、広告は自社の商品をテレビなどのマスメディアに露出することで、商品認知率の向上や、購買の促進を図る。マーケティング実務上、これらの販売促進活動には多額の費用が投下されている。しかし、費用

対効果が明確に測定できておらず、結果的に企業は非効率な活動に終始している。

セールスプロモーションが短期的売上に対して強く影響することは、先行研究でも実務マーケティングでも明らかである。それが、実務でセールスプロモーションを多用する理由である。しかし、その結果としてブランドの価値を毀損する、値引を実施しないと売れなくなる、などの悪影響が出ている (DeiVecchio et al., 2007)。その状況を回避するためには、セールスプロモーションの動的効果とその形成メカニズムを計量的に把握し、適切に施策をコントロールしなければならない。セールスプロモーションの原資は、一般的にメーカーが拠出することが多く、販売促進活動の動的効果の検証は、メーカーの利益を確保する点でも、大きな課題となっている。

一方、テレビ広告の売上に対する効果の計量化は、学術的にも実務的にも長い間大きな課題のままである。実務では一般に、売上ではなく「リーチ・アンド・フリークエンシー」と呼ぶ、テレビ広告の露出回数や、CM 放映後の消費者調査から得られる広告認知率やブランド認知率などを目標指標として、広告効果を評価する。広告目標を売上金額や量に求めることは適切ではないという研究もある (岸他, 2000)。また、実際の売上は商品力、販売促進、流通など、他の要因からも複雑な影響を受けているため、純粋な広告効果測定は難しいともされている (阿部, 2003)。しかし営利企業である限り、施策が売上につながって初めて意味を持つため、売上に対する効果を把握したいという要請は根強い。

本研究では、上記の背景や問題意識に基づき、セールスプロモーションの売上に対する動的市場反応の形成メカニズムを評価可能にするモデルの提案およびその有用性を実データに基づき示すことを目的とする。モデリングは、以下の2点を仮定し、後述する3階層多変量状態空間モデルの枠組みで実施する。

1つ目は、「セールスプロモーションが、売上に直接的に影響する」という仮定である。この仮定の妥当性は、先行研究や実務上の知見より明らかであり、その詳細は2節で述べる。本研究では、セールスプロモーションとして、前述した値引き、エンド陳列実施の有無およびチラシへの掲載の有無をとりあげる。

2つ目は、一般的に広告ストックと呼ばれる広告の蓄積、および消費者の値頃感を表す参照価格が「セールスプロモーションの売上に対する効果」に影響を与えるという仮定である。これは、広告ストックや消費者の値頃感が、間接的に売上に影響を与えるという仮定と言いかえられる。本研究では、セールスプロモーションが販売個数に与える動的効果を、テレビ広告のストックと参照価格で階層化し、広告および参照価格の販売個数に対す

る間接効果を明らかにする。

本研究では、上述のように、市場反応が動的であるという仮定のもと、セールスプロモーションの売上に対する動的効果をテレビ広告や値頃感で階層化することで、その形成メカニズムを解明する。筆者が知る限り、市場反応の動的進展のメカニズムに焦点を当てた統計的モデリングに基づく研究は存在しない。

本稿で提示するモデルは、マーケティング研究では、市場反応モデルと呼ばれる。市場反応分析とは、前述した企業の販売促進活動が、市場や消費者個々にどのように影響するかを分析するものである(岡太他, 2001)。このうち、期間単位で集計された販売個数などのデータを用いて、消費者個人ではなく、市場全体の反応をとらえようとするアプローチを、特に集計的市場反応分析と呼ぶ。集計的市場反応分析では、集計データを対象に何らかの手法で解析を行い、マーケティング活動とそれに対する市場反応を評価しようとする。分析手法としては、クロス集計から高度な統計モデリングなどを評価したい内容に合わせて用いる。特に統計モデルを用いる場合、期間単位で集計されているというデータの性質上、回帰分析や時系列解析関連の手法が用いられることが多い。本研究では、上述した2つの仮定を表現するために、3階層多変量状態空間モデルを用いる。本手法は、通常は2階層である状態空間モデルを3階層に拡張したものであり、階層的かつ動的な市場構造を統計モデルで表現できる。詳細は3.4節に示す。

本稿の残りの部分は次のように構成する。3.2節で先行研究を整理し、3.3節では実証分析に用いるデータを詳説する。3.4節では提案モデルと比較モデルを提示し、3.5節では、3.4節に示したモデルを3節のデータに適用した結果を説明する。3.6節は本研究のまとめである。

3.2 先行研究

3.2.1 市場反応分析

市場反応分析を対象とした研究は、非常に多く存在する。しかし、これらの先行研究の多くでは、本研究で焦点を当てる市場反応の動的変化を考慮していない(佐藤, 樋口, 2008b)。一方、市場反応の動的変化を考慮可能なモデルは、1990年代の後半からみられるようになり、現在もその数は増え続けている。

小売業やメーカーの価格戦略やプロモーション戦略の変化、また社会環境の変化などに

伴って、消費者の反応も動的に変化すると仮定することが自然である(佐藤, 樋口, 2006).

動的市場反応分析では、状態空間モデルと呼ぶ、時系列モデルのベイズモデルを用いる。市場反応分析に状態空間モデルを適用した研究としては、Naik et al.(1998), Xie et al.(1997)が比較的早期の研究である。最近の研究としては、佐藤, 樋口(2008a), 佐藤, 樋口(2008b), 佐藤, 樋口(2009), 本橋, 樋口(2013), Naik et al.(2005), Dube et al.(2005), Sriram and Kalwani(2007), Bass et al.(2007), Bruce(2008), Ernst et al.(2010), Bruce et al.(2012), Harvey et al.(2012)などがある。これらの研究は、平滑化事前分布と呼ぶ、反応係数が時間進展とともに滑らかに変動するという制約を課したモデルを階層モデルとして導入し、市場反応係数の動的変化を表現する。

本研究では、セールスプロモーションの市場反応係数に回帰構造を組み込み、モデル化する。このような試みは、Neelamegham and Chintagunta(2004), Terui et al.(2010)でなされているものの、まだごくわずかにとどまっている。特に、本研究で意図しているような、セールスプロモーションの動的反応の生成メカニズムを平滑化事前分布を用いずに、動的回帰モデルの枠組みでその構造を捉えようとした研究は見当たらない。

3.2.2 セールスプロモーションと売上の関係

学術研究において、セールスプロモーションが短期的な売上に及ぼす影響を対象にした研究は非常に多い。また実務マーケティングでも、その売上に対する効果の大きさから、セールスプロモーションが小売マーケティングの主要なツールになっている。小売店頭でセールスプロモーションが高い効果を有するのは、消費者の非計画購買率の高さに理由がある。非計画購買率とは、来店前に購買計画がなく、来店後に意思決定し購入した商品の総購買個数に占める割合を示す指標である。例えば高橋(1991)には、スーパーマーケットにおける非計画購買の比率は約70%程度であることが示されている。この事実は、消費者を購買時点で刺激すること、すなわちセールスプロモーションを実施することの重要性を示唆する。セールスプロモーションを適切に履行するには、その効果と動的形成メカニズムを適切に評価しなければならないが、それらはこれまで実現できておらず、静的、単純計量評価にとどまっている。

3.2.3 参照価格とセールスプロモーション効果との関係

参照価格とは、一般的には消費者個人が持つ値頃感のことを意味する。参照価格に関する研究も数多くの蓄積があるが、レビュー論文として、Mazumdar et al.(2005), 中村(2001)がある。それらに示されるように、参照価格研究は基本的に個人レベルの概念として研究がなされている。しかし、本研究では、Terui and Imano(2005), 佐藤, 樋口(2008b)などと同じ立場に立ち、代表的消費者の仮定の下で店舗レベルの参照価格を用いる。これは、平均的な消費者が持つ特定商品に対する値頃感を意味すると考えてもらえばよい。

本研究に関連する状態空間モデリングの枠組みで、参照価格を分析の対象とした研究として佐藤, 樋口(2008b)がある。この研究では、2階層の状態空間モデルを用いて解析を行っている。具体的に言うと、店舗レベルの商品別週別販売個数(実際には、後述の点数PI)に対して、参照価格をモデル化し、売価やエンド陳列実施の有無などのコーザルデータとあわせて動的市場反応モデルに取り込み、動的市場反応の評価を試みている。

3.3 データ

本研究では、東京都内のスーパーマーケット1店舗のPOS(Point of Sales)データを用いる。POSデータには、「何が(商品)」、「いつ」、「いくらで(売価)」、「何個」売れたかが記録されている。分析対象とした商品カテゴリーはインスタントカレーカテゴリーであり、このうち実務上、サブカテゴリーを構成していると考えられている3つの商品を対象とした。

本研究においては、(3.1)式を目的変数とした。(3.1)式の y_{in} は、点数PI(Purchase Incidence)の対数を示す。添字 i は商品、 n は時点をそれぞれ示す(以降も同様とする)。

$$y_{in} = \log\left(\frac{unit_{in}}{visitor_n} \times 1000\right) \quad (3.1)$$

(3.1)式中 $unit_{in}$, $visitor_n$ は、第 n 日の商品 i の販売個数と来店客数をそれぞれ示す。なお、 y_{in} には欠測値が存在する。この原因としては、その日に購買がなかった、商品が配荷されなかった、もしくは店舗が休業日であったことがあげられる。店舗が休業日であるケースについては、データから判別できるため、当該日をデータから除外した。それ以外の2つの場合は、欠測値として取り扱ったが、状態空間モデルではそれらを自然に処理で

きる(北川, 2005).

本研究では, セールスプロモーションデータとして, 価格掛率(売価÷最大売価), エンド陳列の実施有無, およびチラシ掲載の有無を用いた. 価格掛率は, 点数PIと同様, POSデータから得られる. エンド陳列実施の有無およびチラシ掲載の有無に関しては, POSデータにあわせて取得されているデータを用いた. さらに, 本研究では, テレビ広告の出稿量データとして, 株式会社ビデオリサーチによって提供されている地上波テレビ放送の視聴率データを用いた(ビデオリサーチ, 2013). このデータは, 各テレビ局において放映されたCM1本ごとに, 放映年月日, 放映時間, 放映局名, 放映秒数, 放映企業名, 放映商品名, 放映CM素材名および視聴率が記録されているものである. 本研究では, 実務でテレビ広告の出稿計画立案の際に用いる世帯視聴率を, 商品別かつ日別に集計したものを使用した. なお, 世帯視聴率は一般的にGRP(Gross Rating Point, 延べ視聴率)と呼ばれることから, 本研究においても以後はGRPデータと呼び, GRP_{in} と表記する. 以上をまとめると, 下記が本研究で用いるデータの概要となる.

- 商品カテゴリー: インスタントカレー (3商品)
- データ期間: 2002年1月1日から2003年6月30日(日別, 543時点)
- 対象店舗: 関東地区のスーパーマーケット1店舗
- 変数: 点数PI, 売価, エンド実施の有無, チラシ掲載の有無, テレビ広告出稿量

分析対象とする3商品は, 商品AとBが先に市場に導入され, その後, 後発品として商品Cが上市された. 表3.1には, 各変数の対象商品ごとの要約統計量を示す. また, 図3.1には, 点数PI(対数化したもの), GRPおよび価格掛率の時系列の推移を示す. 期間全体では, 商品Bがもっとも大きいシェアを占めている. 商品Bは, 平均価格掛率が最小であり, エンドの実施回数も最も多い. 一方, 商品Cは, その他の商品と比較し, GRPを非常に多く投下している. 商品Aは, マーケットシェアはもっとも低く, またセールスプロモーションや広告も比較的少ない.

表 3.1 使用データの要約統計量

項目	商品 A	商品 B	商品 C
平均販売個数	3.357	8.101	5.085
平均点数 PI	1.182	1.772	2.449
販売個数欠測日数	109	106	33
最大売価 (定価)	218	198	198
平均価格掛率	0.867	0.824	0.855
エンド陳列回数	72	161	119
チラシ掲載回数	7	19	28
GRP 総和	4,809	4,915	19,457

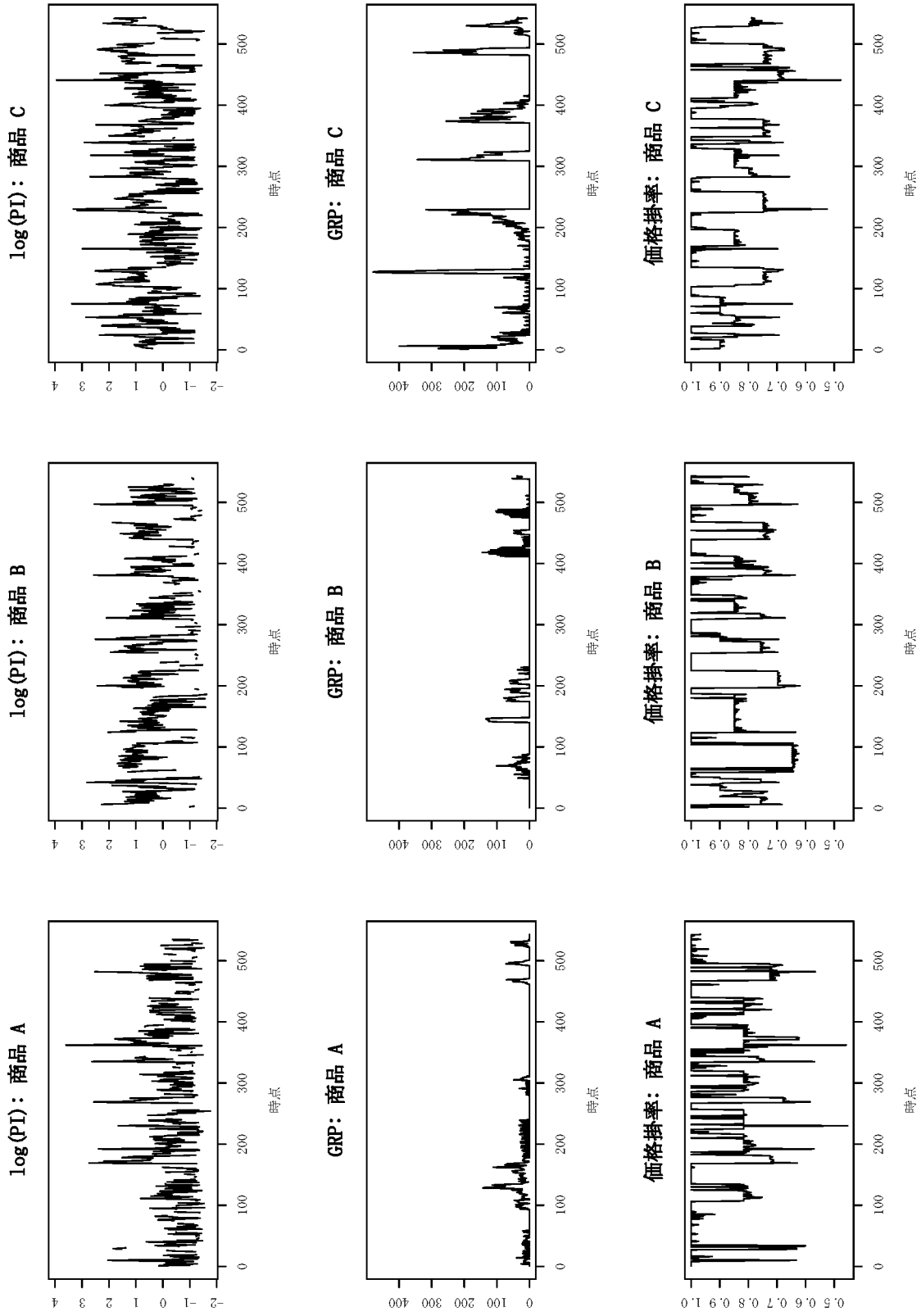


図 3.1 点数PI(上段), RP(中段)および価格掛率(下段)の時系列の推移

3.4 モデル

本節には、提案モデルとその推定法を示す。3.4.1 項では、提案モデルを提示する。3.4.2 項では、モデルの構造を整理する。3.4.3 項にはモデルの推定法を示す。最後に 3.4.4 項で比較モデルを提示する。

3.4.1 提案モデル

提案モデルは、3 階層多変量状態空間モデル (Gamerman and Migon, 1993) の枠組みで表現する。3 階層多変量状態空間モデルは、2 階層多変量状態空間モデルの自然な拡張になる。2 階層多変量状態空間モデルの推定法は北川 (2005)、もしくは付録を参照してほしい。3 階層多変量状態空間モデルは、3.4.3 項で述べるとおり、2 階層多変量状態空間モデルと同じ推定法を適用できる。

2 階層多変量状態空間モデルは、データが生じるメカニズムを示す「観測モデル」と、観測モデルの背後にあるシステムの動的変化を表現する「システムモデル」の 2 本の方程式で構成する。システムモデルは、観測モデルでの回帰係数の時間発展を示すモデルと考えてもらえばよい。観測モデルにおける回帰係数とは、本提案モデルでは、セールスプロモーションに対する市場反応係数を指す。3.2 節に示したとおり、システムモデルとして平滑化事前分布を用いれば、システムの動的変化を近似的に表現できる一方で、その動的変化がなぜ生じたかを明示的に説明できない。そのため、ことマーケティングでの活用を想定した場合、その活用には限界がある。この問題に対応するために、3 階層多変量状態空間モデルでは、「構造モデル」と呼ぶ、観測モデルの時変パラメータの時間発展メカニズムを回帰構造で記述するモデルを導入する。構造モデルは、観測モデルとシステムモデルの中間に位置し、それら 2 方程式をつなぐ役割を担う。本研究で用いるモデルは、3 本の方程式を階層的に組み合わせ、動的構造を表現することから、通常の状態空間モデルとの違いを明示する意味で 3 階層多変量状態空間モデルと呼ぶことにする。なお、構造モデルはモデル内に複数階層組み込むこともできる (Gamerman and Migon, 1993)。図 3.2 が、提案モデルの全体像になる。

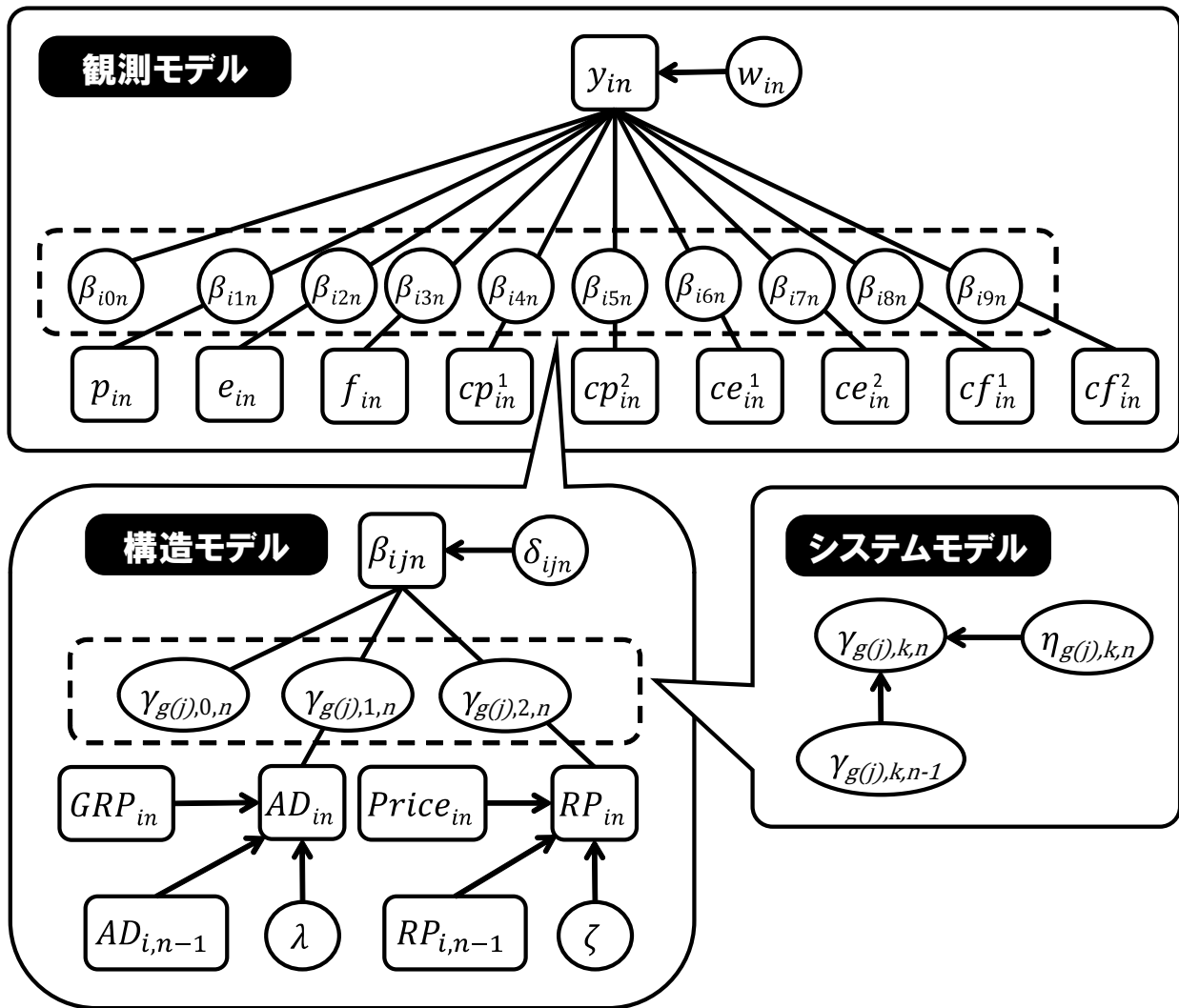


図 3.2 提案モデルの全体像

観測モデル

観測モデルは，動的市場反応を多変量回帰モデルの枠組みで表現する．(3.2) 式は商品 i ($i = 1, 2, 3$) 個々の動的市場反応モデルを示す．

$$\begin{aligned}
 y_{in} = & \beta_{i0n} + p_{in}\beta_{i1n} + e_{in}\beta_{i2n} + f_{in}\beta_{i3n} + cp_{in}^1\beta_{i4n} + cp_{in}^2\beta_{i5n} \\
 & + ce_{in}^1\beta_{i6n} + ce_{in}^2\beta_{i7n} + cf_{in}^1\beta_{i8n} + cf_{in}^2\beta_{i9n} + w_{in}, w_{in} \sim N(0, \sigma_i^2)
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

実際には (3.2) 式の 3 商品をベクトル表現し，解析に用いる．その詳細は，3.4.3 項に示す．表 3.2 には (3.2) 式に含まれる変数を，表 3.3 の 1 列目および 2 列目には， β_{ijn} の添字 j と変数の対応をそれぞれ示す．

表 3.2 観測モデルの変数一覧

記号	内容
y_{in}	点数 PI (対数)
p_{in}	自商品価格掛率 (対数)
e_{in}	自商品エンド陳列実施
f_{in}	自商品チラシ掲載
cp_{in}^1	競合商品 1 価格掛率 (対数)
cp_{in}^2	競合商品 2 価格掛率 (対数)
ce_{in}^1	競合商品 1 エンド陳列実施
ce_{in}^2	競合商品 2 エンド陳列実施
cf_{in}^1	競合商品 1 チラシ掲載
cf_{in}^2	競合商品 2 チラシ掲載
β_{ijn}	観測モデルにおける回帰係数 (市場反応係数)
w_{in}	観測ノイズ
σ_i^2	観測ノイズの分散

表 3.3 β_{ijn} の内容と $g(j)$ のグループ

j	内容	時変係数のグループ $g(j)$
0	切片	1
1	自商品価格掛率	2
2	自商品エンド陳列実施	3
3	自商品チラシ掲載	4
4	競合商品 1 価格掛率	5
5	競合商品 2 価格掛率	
6	競合商品 1 エンド陳列実施	6
7	競合商品 2 エンド陳列実施	
8	競合商品 1 チラシ掲載	7
9	競合商品 2 チラシ掲載	

構造モデル

観測モデルの回帰係数，すなわち市場反応係数の動的変動メカニズムは，構造モデルによって表現する．モデル化は表 3.3 の 3 列目に示す時変係数のグループ $g(j)$ ごとに共通性を仮定して実施する．(3.3) 式には，商品 i 変数 j の時点 n での市場反応係数の構造モデルを示す．

$$\beta_{ijn} = \log(AD_{in}^{own})\gamma_{g(j),1,n} + \log(RP_{in}^{own})\gamma_{g(j),2,n} + \log(AD_{in}^{comp})\gamma_{g(j),3,n} + \log(RP_{in}^{comp})\gamma_{g(j),4,n} + \delta_{ijn}, \delta_{ijn} \sim N(0, \tau_{ij}^2) \quad (3.3)$$

表 3.4 構造モデルの変数一覧

記号	内容
β_{ijn}	観測モデルにおける回帰係数 (市場反応係数，再掲)
AD_{in}^{own}	自商品広告ストック
RP_{in}^{own}	自商品店舗レベル参照価格
AD_{in}^{comp}	競合商品広告ストック
RP_{in}^{comp}	競合商品店舗レベル参照価格
$\gamma_{g(j),k,n}$	構造モデルにおける回帰係数
δ_{ijn}	構造ノイズ
τ_{ij}^2	構造ノイズの分散

表 3.5 k の対応表

k	内容
1	自商品広告ストック
2	自商品店舗レベル参照価格
3	競合商品広告ストック
4	競合商品店舗レベル参照価格

表 3.4 には (3.3) 式の変数を，表 3.5 には構造モデルの回帰係数 $\gamma_{g(j),k,n}$ の添字 k と変数の対応をそれぞれ示す．

構造モデルは β_{ijn} が、 AD_{in}^{own} , RP_{in}^{own} , AD_{in}^{comp} , RP_{in}^{comp} それぞれの影響を受け、時間発展する様子を表現する。上付き添字 *own* は自商品を、*comp* は競合商品をそれぞれ示す。これは、言い換えると、提案モデルではセールスプロモーションの効果 β_{ijn} が広告ストックと店舗レベル参照価格に影響され、動的に変動するということである。(3.3) 式の広告ストックと店舗レベル参照価格は、自商品分、競合商品分を区別して AD_{in}^{own} , AD_{in}^{comp} などと添え字を用いて表現しているが、本項の説明では簡単のために、これらを区別せず AD_{in} , RP_{in} と書く。

テレビ広告の広告ストックは、杉田他 (1992) などの先行研究でその存在が示唆されている。(3.4) 式には、本研究で提案するテレビ CM ストック AD_{in} を示す。

$$AD_{in} = \lambda AD_{i,n-1} + (1 - \lambda) GRP_{i,n-1} \quad (3.4)$$

λ は、その更新の程度を規定する平滑化パラメータで、0 以上 1 以下の値をとる。この値が 1 に近いほど前の時点のストックが残存し、逆に 0 に近いほど残存しないことを表現する。(3.5) 式には、本研究で提案する店舗レベルの参照価格 RP_{in} のモデルを示す (佐藤, 樋口, 2008b)。

$$RP_{in} = \zeta RP_{i,n-1} + (1 - \zeta) Price_{i,n-1} \quad (3.5)$$

$Price_{in}$ は、商品 i の時刻 n の価格掛率である。 ζ は、 λ と同様でその更新の程度を規定するパラメータであり、その解釈も同様である。なお、 λ と ζ は、3 商品共通のパラメータとする。これは、対象とした 3 商品がこれらの商品だけでサブカテゴリーを構成していることが、実務的に知られているからである。

システムモデル

(3.6) 式は、時変係数グループ $g(j)$ の、変数 k の時間進展を示すシステムモデルである。 $g(j)$ に関しては表 3.3 の 3 列目を見てほしい。そこで同じ数値になっている場合、(3.6) 式は共通のものを用いる。本研究では、システムモデルを平滑化事前分布の考え方にに基づき、滑らかさの仮定のもとでモデル化する。システムモデルに平滑化事前分布を設定した研究は、マーケティングにおいては Neelamegham and Chintagunta(2004), 佐藤, 樋口 (2008a), 佐藤, 樋口 (2008b) など、多数存在する。平滑化事前分布に関する詳細な議論は Kitagawa and Gersch(1996) を参照のこと。なお、より一般的な形として Gamerman and Migon(1993) に示されているような、自己回帰型のモデルを設定することもできる。しか

し、本研究では、システムモデルに対して積極的な経済学的解釈を与えることを考えていない。ここでは、時変係数を実現する制約としてシステムモデルをとらえている。そのため、最尤法での計算負荷の軽減も考慮し、平滑化事前分布を採用することとした。

$$\gamma_{g(j),k,n} = \gamma_{g(j),k,n-1} + \eta_{g(j),k,n}, \eta_{g(j),k,n} \sim N(0, \xi_{g(j),k}^2) \quad (3.6)$$

表 3.6 システムモデルの変数一覧

記号	内容
$\gamma_{g(j),k,n}$	構造モデルにおける回帰係数 (再掲)
$\eta_{g(j),k,n}$	構造ノイズ
$\xi_{g(j),k}^2$	構造ノイズの分散

3.4.2 提案モデルの構造の整理

観測モデルの回帰係数，すなわち市場反応係数は，商品別かつ時点別になっており，これは商品ごと，時点ごとに異質な構造を仮定することに対応する。それゆえ，提案モデルでは，観測モデルの回帰係数の数が「観測モデルの説明変数の数 (10 個) × 時点数 (543 個) × 商品数 (3 個)」となる。

上記のパラメータを推定するために，パラメータにもモデルを導入する (事前分布)。提案モデルにおいては，構造モデルとシステムモデルがそれに対応する。構造モデルでは，3.4.1 節に示したように，観測モデルの回帰係数を目的変数とし，広告ストックや参照価格を説明変数とした回帰モデルを設定し，その回帰係数は商品間で共通であることを仮定した。システムモデルにおいては，3.4.1 節に示したように，構造モデルの回帰係数が平滑化事前分布に従うことを仮定した。このように，商品間や時点間に共通性を仮定した個体間モデルを導入することで，観測モデルに含まれる，データ数よりも非常に多いパラメータの推定が可能になる。提案モデルは，その意味で階層ベイズモデル (照井 (2008)b) と同じ構造だといえる。

提案モデルの構造をマーケティングの観点から解釈する。提案モデルは，セールスプロモーションの購買に対する効果が，広告ストックや参照価格という消費者の内在的な指標の影響を受けること，さらにこの構造が緩やかに時間変動することを表現している。これ

らの仮定は、3.2 節でも述べたとおり、個別には過去から頻繁に用いられている。また、セールスプロモーションの効果に対する内在的な指標の影響が商品間で同一であることを仮定することも、同一カテゴリ内の商品であることを考慮すると、マーケティング実務の観点から妥当であると考えられる。

3.4.3 モデルの推定

本項では、提案モデルをベクトル表現し、さらに 2 階層多変量状態空間モデルで表現できることを示す。その上でモデルの推定法を説明する。

3 階層多変量状態空間モデルは、(3.7) 式から (3.9) 式の 3 本の方程式で定式化する。表 3.7 には、(3.7) 式から (3.9) 式に含まれる記号の意味と次元を示す。表 3.7 の 4 列目は、提案モデルのベクトルと行列の次元である。また、図 3.3 には、3 階層多変量状態空間モデルの構造を模式的に示した。

(観測モデル)

$$\mathbf{y}_n = H_{1,n}\mathbf{x}_{1,n} + \mathbf{w}_{1,n}, \mathbf{w}_{1,n} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, R_1) \quad (3.7)$$

(構造モデル)

$$\mathbf{x}_{1,n} = H_{2,n}\mathbf{x}_{2,n} + \mathbf{w}_{2,n}, \mathbf{w}_{2,n} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, R_2) \quad (3.8)$$

(システムモデル)

$$\mathbf{x}_{2,n} = \mathbf{x}_{2,n-1} + \mathbf{w}_{3,n}, \mathbf{w}_{3,n} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, R_3) \quad (3.9)$$

3.4.1 節に示した提案モデルと (3.7) 式から (3.9) 式との対応は以下の通りである。(3.7) 式の観測モデルは、 $\mathbf{y}_n = (y_{1n}, y_{2n}, y_{3n})^t$ が被説明変数ベクトルとなり、デザイン行列 $H_{1,n}$ は (3.10) 式で構成される。

$$H_{1,n} = \begin{pmatrix} h_{1,1,n} & 0 & 0 \\ 0 & h_{2,1,n} & 0 \\ 0 & 0 & h_{3,1,n} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

ただし、

$$h_{i,1,n} = (1, p_{in}, e_{in}, f_{in}, cp_{in}^1, cp_{in}^2, ce_{in}^1, ce_{in}^2, cf_{in}^1, cf_{in}^2).$$

表 3.7 3 階層多変量状態空間モデルの記号一覧

記号	内容	行列数	行列数
		(一般)	(提案モデル)
y_n	被説明変数ベクトル	$\ell \times 1$	3×1
$H_{1,n}$	観測モデルの説明変数行列	$\ell \times m$	3×30
$x_{1,n}$	観測モデルの状態 (回帰係数) ベクトル	$m \times 1$	30×1
$w_{1,n}$	観測ノイズベクトル	$\ell \times 1$	3×1
R_1	観測ノイズの分散共分散行列	$\ell \times \ell$	3×3
$H_{2,n}$	構造モデルの説明変数行列	$m \times n$	30×28
$x_{2,n}$	構造モデルの状態 (回帰係数) ベクトル	$p \times 1$	28×1
$w_{2,n}$	構造ノイズベクトル	$m \times 1$	30×1
R_2	構造ノイズの分散共分散行列	$m \times m$	30×30
$w_{3,n}$	システムノイズベクトル	$p \times 1$	28×1
R_3	システムノイズの分散共分散行列	$p \times p$	28×28

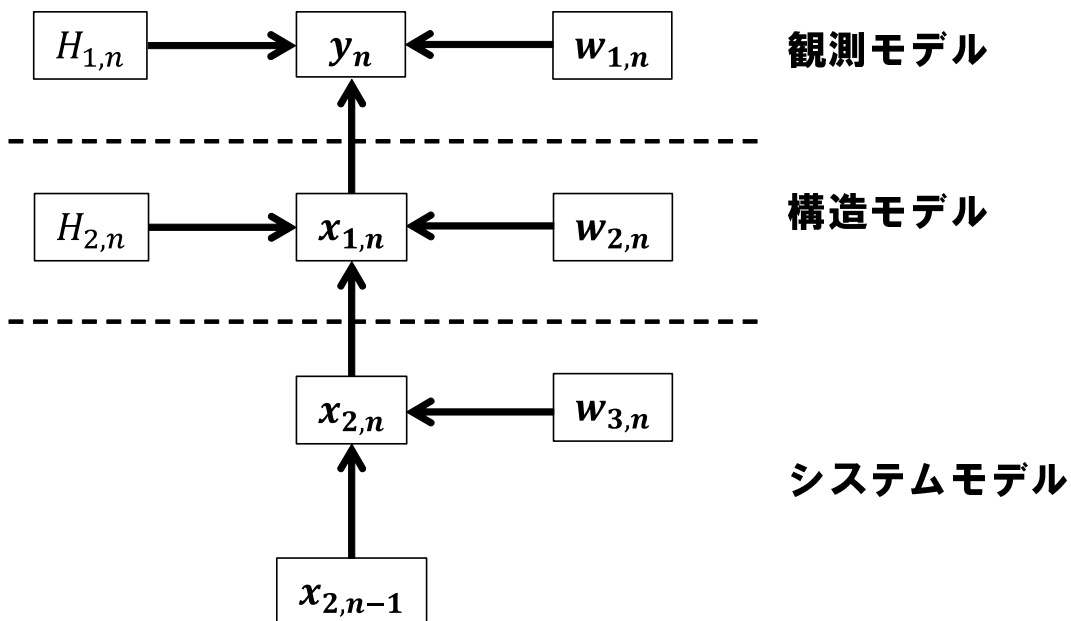


図 3.3 3 階層多変量状態空間モデルの構造

さらに、その時点の時変係数をまとめて状態ベクトル $\mathbf{x}_{1,n}$ とし、観測ノイズベクトルは $\mathbf{w}_{1,n} = (w_{1n}, w_{2n}, w_{3n})^t$ ($\mathbf{w}_{1,n} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, R_1)$) とする。なお、分散共分散行列 R_1 は対角行列を仮定した。

(3.8) 式の構造モデルは、 $\mathbf{x}_{1,n}$ が $H_{2,n}$ の影響を受けることを表現する。構造モデルのデザイン行列 $H_{2,n}$ は (3.11) 式で構成する。

$$H_{2,n} = \text{diag}(h_{1,n}, h_{1,n}, h_{1,n}, h_{1,n}, h_{2,n}, h_{2,n}, h_{2,n}) \quad (3.11)$$

ただし、

$$h_{1,n} = \begin{pmatrix} AD_{1,n} & RP_{1,n} & (AD_{2,n} + AD_{3,n}) \div 2 & (RP_{2,n} + RP_{3,n}) \div 2 \\ AD_{2,n} & RP_{2,n} & (AD_{1,n} + AD_{3,n}) \div 2 & (RP_{1,n} + RP_{3,n}) \div 2 \\ AD_{3,n} & RP_{3,n} & (AD_{1,n} + AD_{2,n}) \div 2 & (RP_{1,n} + RP_{2,n}) \div 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{2,n} = \begin{pmatrix} AD_{1,n} & RP_{1,n} & AD_{2,n} & RP_{2,n} \\ AD_{1,n} & RP_{1,n} & AD_{3,n} & RP_{3,n} \\ AD_{2,n} & RP_{2,n} & AD_{1,n} & RP_{1,n} \\ AD_{2,n} & RP_{2,n} & AD_{3,n} & RP_{3,n} \\ AD_{3,n} & RP_{3,n} & AD_{1,n} & RP_{1,n} \\ AD_{3,n} & RP_{3,n} & AD_{2,n} & RP_{2,n} \end{pmatrix}.$$

(3.11) 式の小行列 $h_{1,n}$ は、観測モデルでの切片および自商品セールスプロモーションの回帰係数 (時変係数グループ $g(j)$ での $j = 1, 2, 3, 4$ に該当) についてのデザイン行列を規定する。一方、小行列 $h_{2,n}$ は競合商品セールスプロモーションの回帰係数 ($g(j)$ の $j = 5, 6, 7$ に該当) についてのデザイン行列を規定する。このうち、競合商品の広告ストックと店舗レベル参照価格について、 $h_{1,n}$ では競合 2 商品の平均値を用いた。一方、 $h_{2,n}$ では、当該競合商品の値のみが影響を与えると仮定した (例えば、商品 A の価格掛率の回帰係数に対しては、商品 A の広告ストックが影響する、など)。マーケティング実務上、 $h_{1,n}$ では、競合 2 商品の平均値でなく、商品ごとの値が個別に影響すると考えることもできるが、モデル設定の制約上、このように設定した。

この制約について具体例をあげて説明する。観測モデルには、ブランド A の売上に対して、ブランド B とブランド C のセールスプロモーションが説明変数に含まれている。このモデルにより、競合ブランドの施策の影響を評価できる。一方、構造モデルはこの競合ブランドの施策の影響が、さらに広告ストックと参照価格から影響を受けることを表

現している．ここで，構造モデルにおいて競合ブランド B と C の広告ストックと参照価格を個別に説明変数にすると，自ブランド A の売上に対するブランド B のセールスプロモーションの影響に対して，「第三者的な」ブランド C の広告ストックと参照価格が影響を与えることを仮定することになる．このような構造は実務上考えにくく，また結果の解釈も難しい．一方で，上記であげた第三者的なブランドの影響を仮定しない構造モデルを構成するには，構造モデルをブランドごとに定義する必要があるが，本提案モデルの枠組みでは困難なため，今回は構造モデルの説明変数を，競合 2 商品の平均値とした．

次に，構造モデルの時変係数をまとめた， $\mathbf{x}_{2,n}$ を定義する．構造ノイズベクトルは $\mathbf{w}_{2,n} = (\delta_{11n}, \dots, \delta_{39n})^t$ ($\text{MVN}(\mathbf{0}, R_2)$)． R_2 は対角行列を仮定した．最後に，(3.9) 式のシステムモデルは， $\mathbf{x}_{2,n}$ の時間変動を示す．システムノイズは $\mathbf{w}_{3,n} = (\xi_{11}^2, \dots, \xi_{74}^2)^t$ ($\text{MVN}(\mathbf{0}, R_3)$) とし， R_3 は対角行列を仮定した．ノイズの分散は，すべてを個別に設定するのではなく，表 3.8，表 3.9，表 3.10 の通り，一部を同一のものと仮定した．

表 3.8 観測モデル分散対応表

i	1	2	3
変数	商品 A	商品 B	商品 C
観測ノイズの分散	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2

(3.7) 式から (3.9) 式で表現した，3 階層多変量状態空間モデルは，2 階層多変量状態空間モデルで表現できる．具体的には，(3.8) 式の構造モデルを (3.7) 式の観測モデルに代入して整理すると (3.12) 式が得られる．(3.12) 式では，被説明変数ベクトル \mathbf{y}_n が $\mathbf{x}_{1,n}$ ではなく $\mathbf{x}_{2,n}$ で表現されている．

$$\mathbf{y}_n = H_{1,n}H_{2,n}\mathbf{x}_{2,n} + \mathbf{w}_{1,n}^* \quad (3.12)$$

以上より，3 階層多変量状態空間モデルは，(3.12) 式を観測モデル，(3.9) 式をシステムモデルと考えれば，2 階層多変量状態空間モデルで表現できることになる．ただし， $\mathbf{w}_{1,n}^* = \mathbf{w}_{1,n} + H_{1,n}\mathbf{w}_{2,n}$ かつ， $\mathbf{w}_{1,n}^* \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, H_{1,n}R_2H_{1,n}^t + R_1)$ となる．モデルを識別性を担保するために， $\mathbf{w}_{1,n}, \mathbf{w}_{2,n}, \mathbf{w}_{3,n}$ は互いに独立とし， R_1, R_2, R_3 は対角行列を仮定する．さらに， $m(\mathbf{x}_{1,n} \text{の次元}) > p(\mathbf{x}_{2,n} \text{の次元})$ が制約として必要となる (Gamerman and Migon, 1993)．

前段に示したように，提案モデルは，2 階層多変量状態空間モデルの枠組みで表現でき

表 3.9 構造モデル分散対応表

i		1	2	3
j (表 3.3)	変数	商品 A	商品 B	商品 C
0	切片	τ_1^2	τ_2^2	τ_3^2
1	自商品価格掛率	τ_4^2		
2	自商品エンド	τ_5^2		
3	自商品チラシ	τ_6^2		
4	競合商品 1 価格掛率	τ_7^2		
5	競合商品 2 価格掛率			
6	競合エンド 1 価格掛率	τ_8^2		
7	競合エンド 2 価格掛率			
8	競合チラシ 1 価格掛率	τ_9^2		
9	競合チラシ 2 価格掛率			

表 3.10 システムモデル分散対応表

k		1	2	3	4
$g(j)$ (表 3.3)	変数	自商品	自商品	競合商品	競合商品
		広告ストック	参照価格	広告ストック	参照価格
1	切片				
2	自商品価格掛率				
3	自商品エンド				
4	自商品チラシ	ξ_1^2	ξ_2^2	ξ_3^2	ξ_4^2
5	競合商品価格掛率				
6	競合商品エンド				
7	競合商品チラシ				

るため、構造モデルの回帰係数ベクトル $\mathbf{x}_{2,n}$ の推定にはカルマンフィルタ／固定区間平滑化を、他の静的パラメータの推定には最尤法を用いればよい。観測モデルの回帰係数ベクトル $\mathbf{x}_{1,n}$ が従う分布の平均ベクトルは、 $\mathbf{x}_{2,n}$ を推定したのち、(3.8) 式で $H_{2,n}\mathbf{x}_{2,n}$ を計算すればよい。また、3 節で述べたとおり、 \mathbf{y}_n には欠測値が存在するが、これはカルマンフィルタ適用時に、フィルタリングのステップを実行しないだけで自然な形で処理できる (北川, 2005)。

本モデルにおいて推定すべき静的パラメータは、表 3.8 から表 3.10 で設定した観測ノイズ、構造ノイズ、およびシステムノイズのそれぞれの分散と、広告ストック変数のストック係数 λ 、店舗レベル参照価格変数のストック係数 ζ である。これらの静的パラメータは条件付き最尤法を用いて推定した。具体的には、観測ノイズ、ストックパラメータ λ および ζ をグリッドとして設定し、各グリッドごとにその他の静的パラメータを通常的最尤法で推定した。グリッドの区間および幅は、観測ノイズでは事前の推定結果を参考に 0.2 から 0.6 の間で 0.05 刻みとし、 λ および ζ は 0 から 0.95 の間で 0.05 刻みとした。計算量を抑えるため、グリッドサーチは 2 段階に分けて実施した。1 段階目は観測ノイズ、ストックパラメータともに 0.2 刻みとして最適なグリッドを探索し、2 段階目にそのグリッドを中心に、0.05 刻みで最適なグリッドを探索した。最尤法での最適化手法は、佐藤、樋口 (2008) と同様に、Nelder-Mead 法 (Nelder and Mead, 1965) を用いた。

3.4.4 比較モデル

本研究では、比較モデルとして、2 階層多変量状態空間モデルを設定した。比較モデルは、セールスプロモーションに加えて、広告ストック、店舗レベル参照価格が直接売上に影響を与えると仮定したモデルである。モデル表現を (3.13) 式および (3.14) 式に示す。これらの表記は、基本的には提案モデルに準ずるが、例外があるので以下に示す。まず、 RP と AD の上付き添字の $comp1$, $comp2$ である。本モデルでは、競合 2 商品の RP と AD を個別の説明変数としており、この添字は、何番目の競合商品であることを示している。次いで w_{in} は観測ノイズ、 $\eta_{i,k,n}$ はシステムノイズをそれぞれ示す。

(観測モデル)

$$\begin{aligned}
y_{in} = & \beta_{i0n} + p_{in}\beta_{i1n} + e_{in}\beta_{i2n} + f_{in}\beta_{i3n} + cp_{in}^1\beta_{i4n} + cp_{in}^2\beta_{i5n} + ce_{in}^1\beta_{i6n} \\
& + ce_{in}^2\beta_{i7n} + cf_{in}^1\beta_{i8n} + cf_{in}^2\beta_{i9n} + \log(AD_{in}^{own})\beta_{i10n} + \log(RP_{in}^{own})\beta_{i11n} \\
& + \log(AD_{in}^{comp1})\beta_{i12n} + \log(RP_{in}^{comp1})\beta_{i13n} + \log(AD_{in}^{comp2})\beta_{i14n} \\
& + \log(RP_{in}^{comp2})\beta_{i15n} + w_{in}, \quad w_{in} \sim N(0, \sigma_i^2)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(システムモデル)

$$\beta_{i,k,n} = \beta_{i,k,n-1} + \eta_{i,k,n}, \quad \eta_{i,k,n} \sim N(0, \xi_{ik}^2) \tag{3.14}$$

(3.13) 式および (3.14) 式をベクトル表現すると, (3.15) 式, (3.16) 式の通りとなる. (3.15) 式の表記は提案モデルに準ずる. (3.16) 式の $w_{2,n}$ はシステムノイズを, R_2 はシステムノイズの分散共分散行列をそれぞれ示す. R_1, R_2 は対角行列を仮定した.

(観測モデル)

$$\mathbf{y}_n = H_{1,n}\mathbf{x}_{1,n} + \mathbf{w}_{1,n}, \quad \mathbf{w}_{1,n} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, R_1) \tag{3.15}$$

(システムモデル)

$$\mathbf{x}_{1,n} = \mathbf{x}_{1,n-1} + \mathbf{w}_{2,n}, \quad \mathbf{w}_{2,n} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, R_2) \tag{3.16}$$

観測ノイズの分散は, 商品ごとに設定した. これは, 提案モデルでの観測モデルと同様である. 一方, システムモデルでは, 切片のみ商品別とし, それ以外の説明変数では, すべての商品で同一と設定した. こちらは, セールスプロモーションを説明変数とした, 提案モデルでの構造モデルに対応している. これらに広告ストック変数のストック係数 λ , 店舗レベル参照価格変数のストック係数 ζ を加えた 23 個が, 比較モデルで推定すべき静的パラメータとなる. 比較モデルは, 2 階層線形ガウス型状態空間モデルであるので, 静的パラメータは, 最尤法で推定した.

3.5 解析結果

3.5.1 モデル比較と超パラメータ推定結果

表 3.11 には, 提案モデルと比較モデルの最大対数尤度, パラメータ数および AIC をそれぞれ示す. 2 つのモデルの AIC を比較すると, 提案モデルがサポートされる結果であ

る。よって、以後は提案モデルの推定結果に基づき議論する。

表 3.11 モデル推定結果

モデル名称	最大対数尤度	パラメータ数	AIC
提案モデル	-1023.584	18	2083.168
比較モデル	-1095.640	23	2237.280

なお、参考までに表 3.12, 表 3.13, 表 3.14 には、観測ノイズの分散、構造ノイズの分散、システムノイズの分散の推定結果を示した。システムノイズの分散が他のモデルの値と比較して小さくなっているが、これはシステムモデルが他の層と異なり、時間変動のみを表現するモデルであるためだと考えられる。本研究と同じく、点数 PI を被説明変数とした佐藤 (2008b) でも、システムノイズの分散は、観測モデルと比較して小さく、また提案モデルの推定値と同水準の値になっている。

表 3.12 観測ノイズ分散推定値 (グリッドサーチ)

観測ノイズ分散	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2
推定値	0.30	0.25	0.25

表 3.13 構造ノイズ分散推定値

構造ノイズ分散	τ_1^2	τ_2^2	τ_3^2	τ_4^2	τ_5^2	τ_6^2	τ_7^2	τ_8^2	τ_9^2
推定値	0.031	0.032	0.148	1.395	0.012	0.142	0.054	0.003	0.079

表 3.14 システムノイズ分散推定値

システムノイズ分散	ξ_1^2	ξ_2^2	ξ_3^2	ξ_4^2
推定値	6.6E-05	5.3E-02	1.1E-04	2.5E-03

3.5.2 観測モデル回帰係数(市場反応係数)の推定結果

図 3.4 と図 3.5 には、観測モデルの回帰係数 $\beta_{ijn}(\mathbf{x}_{1n} = (\beta_{10n}, \dots, \beta_{39n})')$ の推定結果を示す。図 3.4 は、トレンドと自商品のセールスプロモーションの、図 3.5 は、競合商品のセールスプロモーションの結果である。図 3.4 によると、3つの商品のトレンド (β_{i0n}) は連動している部分もあり、その推移にはカテゴリ全体の季節性なども含まれる。いずれの商品もデータ期間前半のレベルが高く(時点 100 まで)、中盤(時点 200 前後)に大きく低下し、データ期間後半に向けて上昇傾向である。トレンドの変動は、商品のベースの商品力の代理指標と考えられ、それが上昇傾向であれば悪くない状況であり、低下傾向であれば状況が悪いと考える(佐藤, 樋口, 2014)を参照のこと)。自商品のセールスプロモーションについては、実施により売上が伸びるという結果であり、多くの先行研究や実務上の知見と一致する。例えば、価格弾力性 (β_{i1n}) については、-3 程度を中心に推移しており、平均的に見れば最寄品としては妥当な値である(恩蔵, 守口, 1994)。ただし、時点ごとに見ると、いずれの商品でも自身のセールスプロモーションの効果が大きく変動している。この結果は、セールスプロモーションの効果を静的に捉えるだけでは不十分であることを示唆する。 \mathbf{x}_{1n} が動的に変動する理由は、3.5.3 項で詳述する。

一方で、競合商品のセールスプロモーションは、実施により売上が低下するのが自然である。図 3.5 に示す通り、競合の価格掛率については、推定値がおおむね正の領域内で推移しており、この想定に合致する。平滑化推定量は 0 から 0.5 程度で推移しており、これは Montgomery and Rossi(1999) と同水準である。他方、競合商品のエンド陳列実施およびチラシ掲載については、0 を何度も横切る形で変動しているが、その影響度は大きいとはいえない。

3.5.3 市場反応係数 $\mathbf{x}_{1,n}$ の形成メカニズムに関する検証

広告ストック、店舗レベル参照価格の推定結果

広告ストックの平滑化パラメータ λ の推定値は 0.95 であった。広告ストックのモデルとして同様の形式の Bass et al.(2007) では 0.97, Bruce(2008) では 0.93 であり、本研究の推定結果と近い。一方、店舗レベル参照価格の平滑化パラメータ ζ は 0.95 であり、これは佐藤, 樋口 (2008b) と同様の結果である。佐藤, 樋口 (2008b) は店舗レベル参照価格が

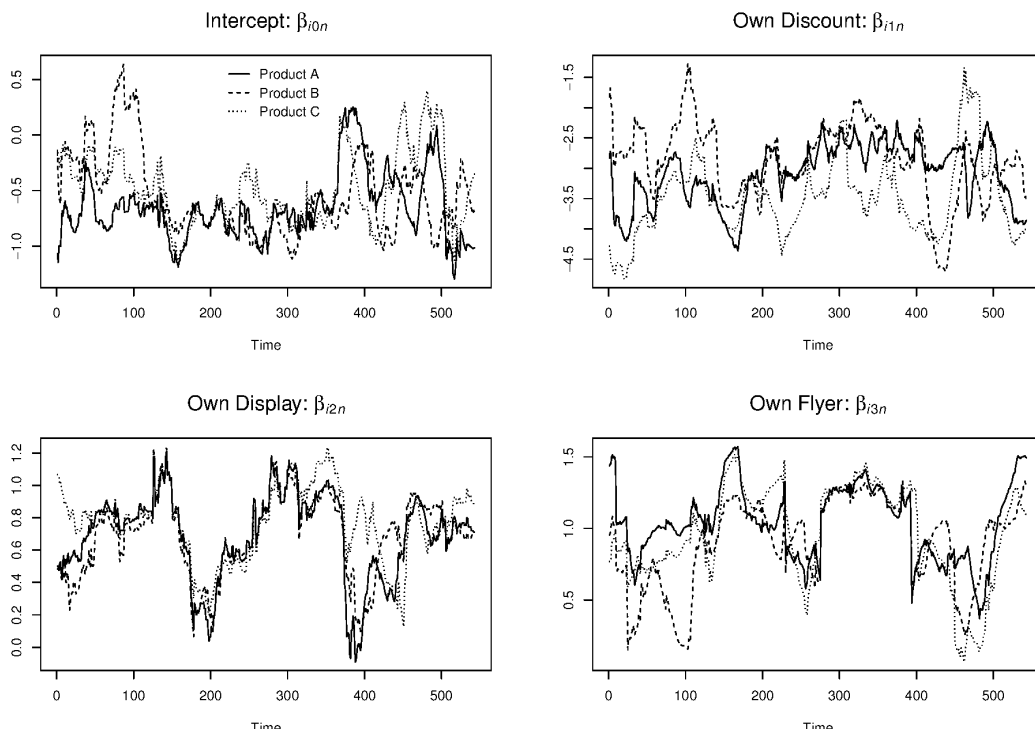


図 3.4 時変係数の推移 1(トレンド・自商品セールスプロモーション)

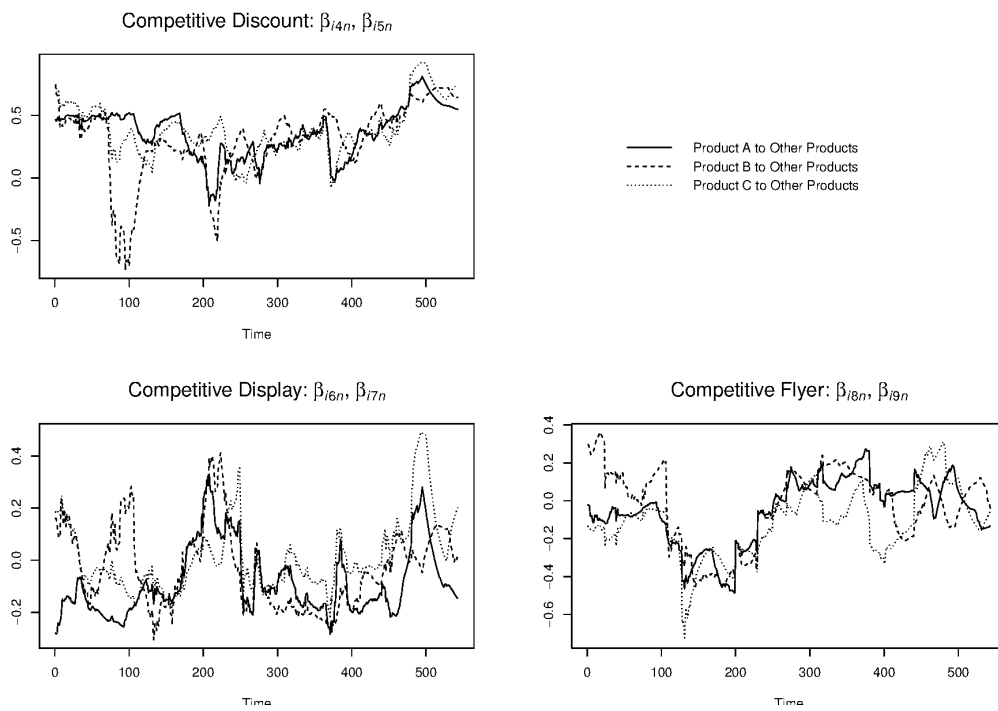


図 3.5 時変係数の推移 2(競合商品セールスプロモーション)

直接点数 PI に影響する構造であり、商品カテゴリーとしてもインスタント・コーヒー、醤油を対象にした研究であるため、厳密な意味で比較できるわけではないが、参考までに示しておく。図 3.6 には、3 商品の広告ストックの推定結果 (上段) および店舗レベル参照価格の推定結果 (下段) を示す。平滑化パラメータは商品間で共通であるが、商品ごとに GRP や価格掛率が異なることから、その推移には差が生じる。

3.5.2 項に示した市場反応係数の時間変化は、前段に示した広告ストック (自商品および競合商品) と店舗レベル参照価格 (同) で説明できる。ここでは自商品の価格弾力性を取り上げ、広告ストックおよび店舗レベル参照価格との関係性を確認する。弾力性とは、関連がある 2 つの変数について、一方が変化したときに他方がどの程度変化するかを示す値である。例えばここであげた価格弾力性とは、価格が 1% 変化したときに売上が何 % 変化するかを表現する。

図 3.7 には、商品 A ($i = 1$) の自商品価格弾力性 β_{11n} と、自商品広告ストック AD_{1n}^{own} 、自商品店舗レベル参照価格 RP_{1n}^{own} 、競合商品広告ストック AD_{1n}^{comp} および競合商品店舗レベル参照価格 RP_{1n}^{comp} 、それぞれとの散布図を示す。この図から、自商品の広告ストックが多いほど、また自商品の店舗レベル参照価格が高いほど、絶対値の意味で価格弾力性が大きくなっていることが読み取れる。一方で、競合の広告ストックについては、対数で 3 程度までの投下量では自商品の価格弾力性が大きくなるものの、それ以上になると、自商品の価格弾力性が絶対値の意味で低下する傾向があることが読み取れる。競合の店舗レベル参照価格については、明確な関係性は確認できないものの、競合の参照価格が高いほど、自商品の価格弾力性が大きくなる傾向がある。実務において、値引きをしても販売数が増加しない場合に、このような情報があればその状況に対処することが可能になる。このような議論は、他の市場反応係数に関しても同様に行うことができるが、本稿では、紙幅の都合により割愛する。

弾力性の算出

本提案モデルの特徴は、点数 PI に対するセールスプロモーションの効果 $x_{1,n}$ が広告ストックと店舗レベル参照価格で構造化されている点である。 $x_{1,n}$ に対する広告ストックや店舗レベル参照価格の影響度の動的変化をより精緻に評価するためには、これらの弾力性を算定し、メカニズムを計量的に示す必要がある。

これを、自商品広告ストック AD_{in}^{own} を例にとって説明する。広告ストック弾力性は、

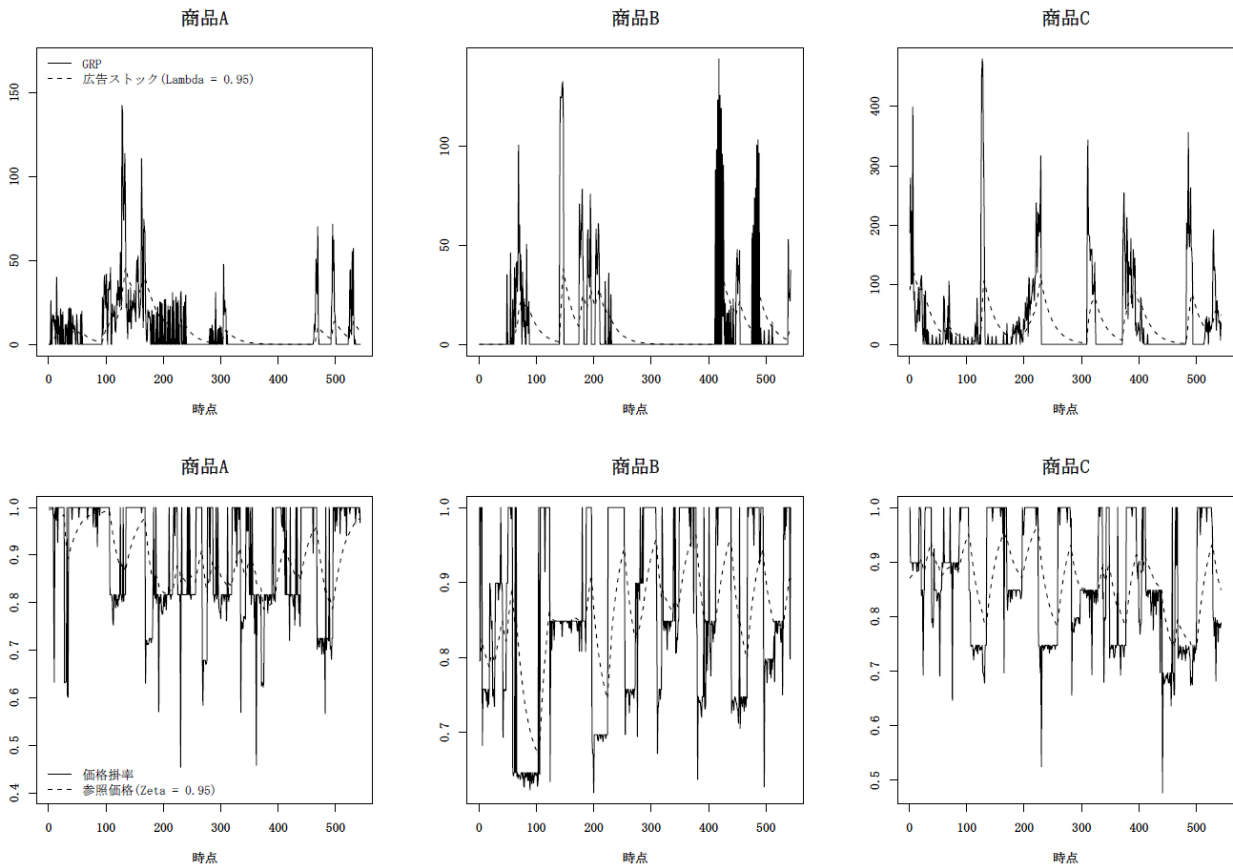


図 3.6 広告ストックの推定結果 (上段), 店舗レベル参照価格の推定結果 (下段)

(3.17) 式に示すように算定できる。この弾力性は、広告ストック 1% の変化によってセールスプロモーションの反応が何 % 変化するかを示す指標になる。当然、弾力性は商品ごと、セールスプロモーションごと、および時点ごとに算定できる。また、店舗レベル参照価格についても同様に算定である。

$$\frac{\partial \beta_{ijn} / \beta_{ijn}}{\partial AD_{in}^{own} / AD_{in}^{own}} = \frac{\partial \beta_{ijn}}{\partial AD_{in}^{own}} \frac{AD_{in}^{own}}{\beta_{ijn}} = \frac{\partial \beta_{ijn}}{\partial \log AD_{in}^{own}} \frac{\partial \log AD_{in}^{own}}{\partial AD_{in}^{own}} \frac{AD_{in}^{own}}{\beta_{ijn}} = \frac{\gamma_{g(j),1,n}}{\beta_{ijn}} \quad (3.17)$$

3.4.2 項に示した通り、モデルの制約上、構造方程式に含まれる回帰係数はすべての商品において共通であることを仮定している。一方、観測モデルの回帰係数は商品別に得られているため、上記の計算により、商品ごとに種々の弾力性を評価できる。今回、弾力性の算出対象としたセールスプロモーションは、自商品の価格掛率、エンド陳列、チラシ実

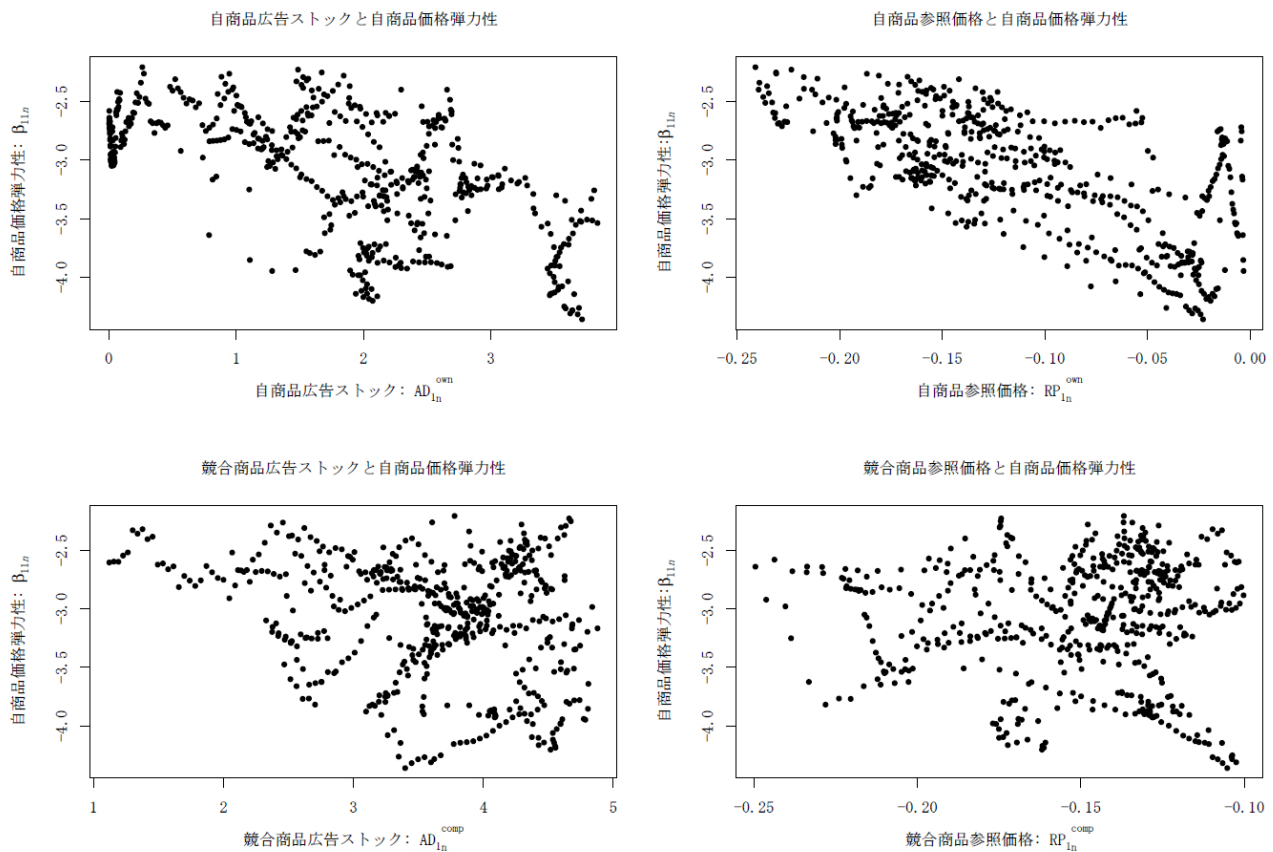


図 3.7 自商品価格弾力性の、広告ストックおよび店舗レベル参照価格との散布図 (商品 A)

施および競合商品の価格掛率の 4 つとした。競合商品のエンド陳列、チラシ実施については、観測モデルにおいて点数 PI に対する明確な効果が確認できなかったため、算出の対象から外した。

図 3.8 から図 3.11 には、自商品広告ストック弾力性、自商品店舗レベル参照価格弾力性、競合商品広告ストック弾力性、競合商品店舗レベル参照価格弾力性の算定結果をそれぞれ示した。さらに、表 3.15 には、これらの符号をまとめたものを示す。網掛けをした部分は、実務上想定される符号と一致していることを示す。

表 3.16 には、商品 $A(i = 1)$ の 50 時点 ($n = 50$) における弾力性値を示す。試算は、広告ストックの 100% 増加のケースと、店舗レベル参照価格の 5% 上昇のケースで実施した。このような状況は、マーケティング実務では頻繁に起こりうるものであり、特段奇異

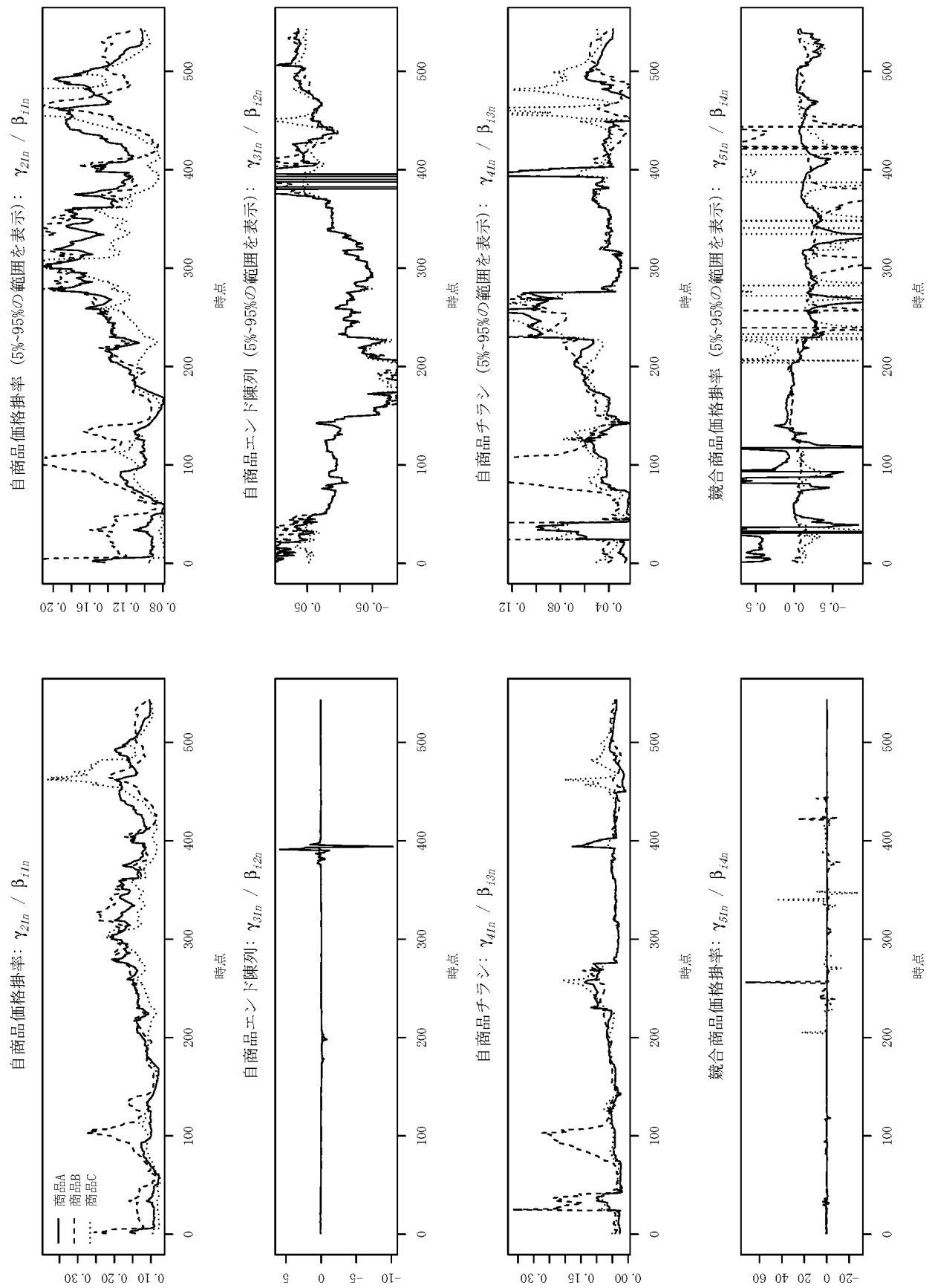


図 3.8 自商品広告ストック弾力性

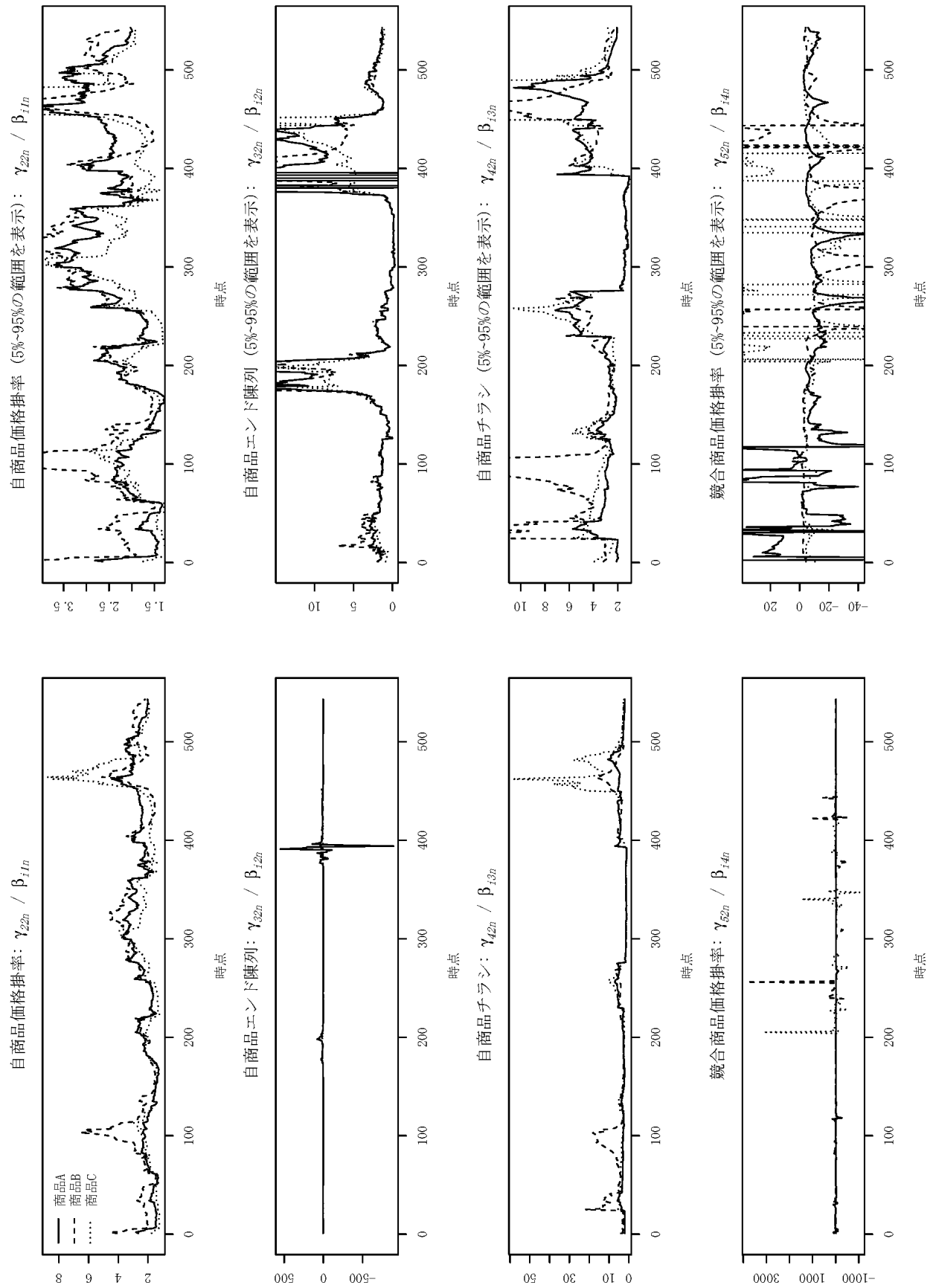


図 3.9 自商品店舗レベル参照価格弾力性

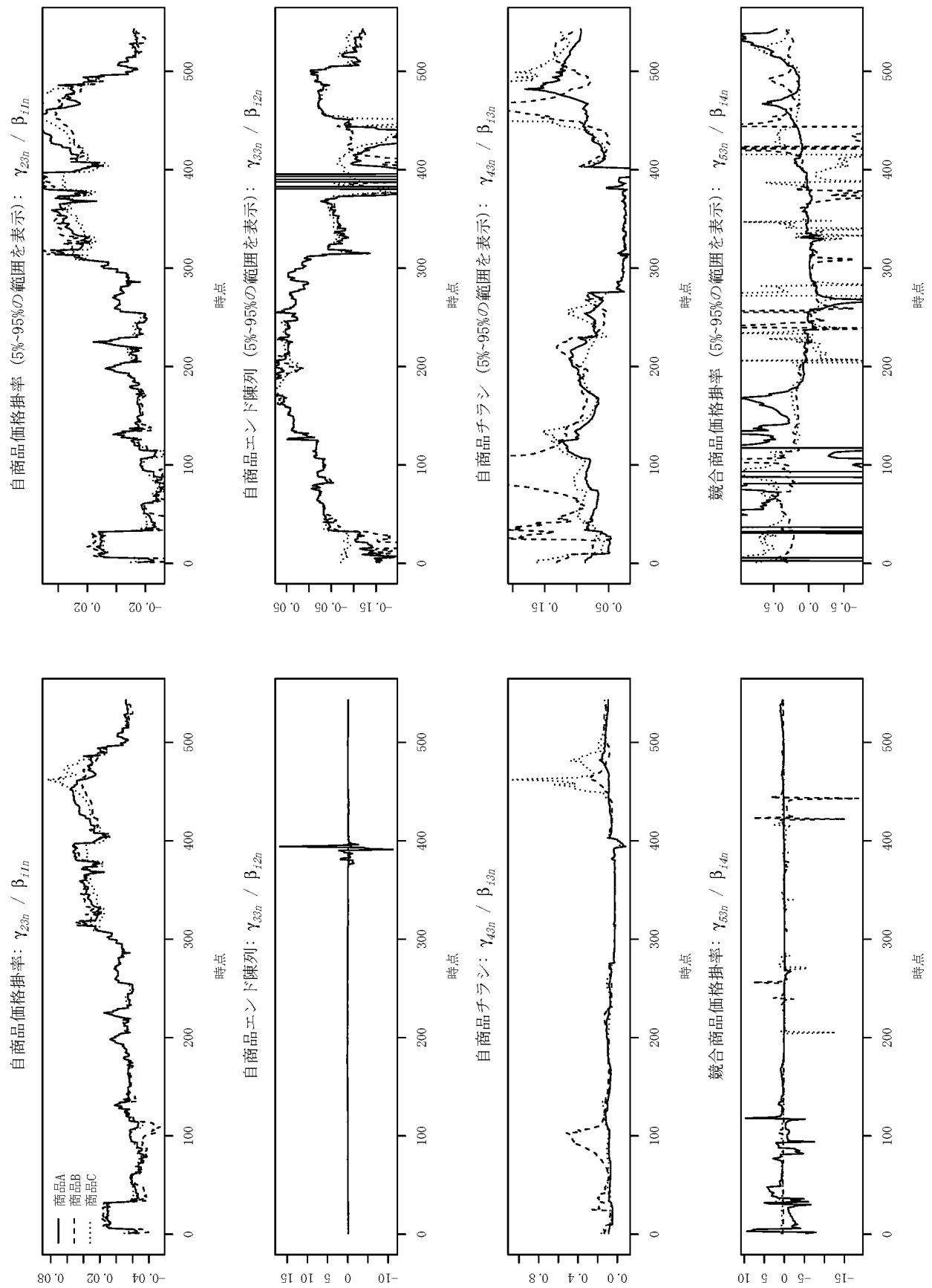


図 3.10 競合商品広告ストック弾力性

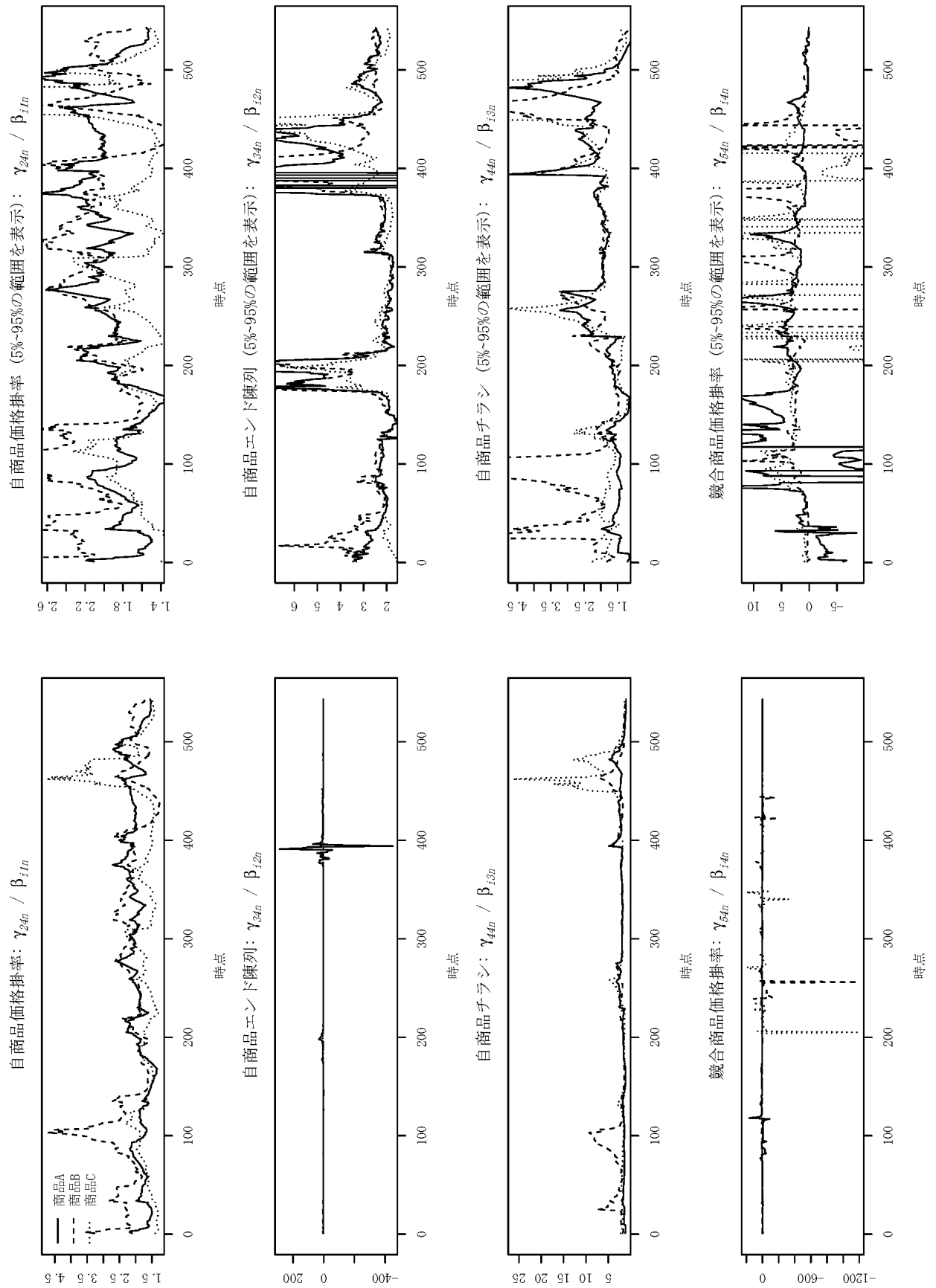


図 3.11 競合商品店舗レベル参照価格弾力性

表 3.15 弾力性算定結果符号サマリ

弾力性対象	自商品	自商品	競合商品	競合商品
	広告ストック	参照価格	広告ストック	参照価格
自商品価格掛率	+	+	混在	+
自商品エンド	混在	+	混在	+
自商品チラシ	+	+	+	+
競合商品価格掛率	ほぼ -	-	混在	ほぼ +

な設定ではない。また、同表の最右列には、同商品同時点での観測モデルの回帰係数(市場反応係数)を示した。この結果から具体的な計算例を示すと、以下となる。自商品広告ストック ($AD_{1,50}^{own}$) が 100% 増加したとき、自商品の値引き効果(価格弾力性)は-3.515 から絶対値の意味で 8.798% 増加して、-3.824 になる。また、自商品店舗レベル参照価格 ($RP_{1,50}^{own}$) が 5% 上昇したときは、-3.515 から絶対値の意味で 7.735% 増加して、-3.786 となる。

表 3.16 商品 A($i = 1$) の 50 時点 ($n = 50$) における弾力性計算結果

施策	$AD_{1,50}^{own}$	$RP_{1,50}^{own}$	$AD_{1,50}^{comp}$	$RP_{1,50}^{comp}$	観測モデル
	100% 増加時	5 % 増加時	100% 増加時	5 % 増加時	回帰係数
自商品価格掛率	8.798 %	7.735 %	-2.139 %	8.809 %	-3.515
自商品エンド	2.709 %	9.365 %	-3.251 %	10.532 %	.799
自商品チラシ	2.430 %	16.700 %	7.529 %	7.874 %	.909
競合価格掛率	-1.202 %	-22.585 %	94.823 %	3.550 %	.838/.254

店舗レベル参照価格の結果をまとめる。表 3.15 によると、自商品のもの、競合商品のもの、どちらであっても、想定される符号と一致している。これは、消費者の値頃感が高まると、セールスプロモーションの効果が強まると解釈できる。この結果は、先行研究や実務上の知見と一致し、自然な解釈が可能である。セールスプロモーションの効果に対する影響の大きさを表 3.16 でみると、参照価格が 5% 変動するとセールスプロモーション

の効果が3%から22%程度変動する。実務上、セールスプロモーションの効果がこの水準で変化することはインパクトがあり、この点で、参照価格のコントロールは重要であることが示唆される。なお、表 3.16 は $n = 50$ 時点のものだが、図 3.9 および図 3.11 によると、この時点が極端な値ということはなく、この弾力性は全時点を通じて一般的な水準である。

続いて広告ストックについて述べる。表 3.15 によると、自商品の広告ストック弾力性は、自商品のエンド陳列を除き、想定される符号とおおよそ一致している。このうち価格掛率感度に関しては、3.2 節で述べたとおり、広告量の増加は価格感度を低下させるといふ見解が一般的であり、これは本研究の結果とは逆である。一方、上田 (1986) にもあるとおり、本研究で対象とした低関与商品においては、広告によって当該の商品を知覚しやすくなり、その結果として選択候補の一つに加わることもありうることから、この結果は一定の妥当性をもつと考える。自商品広告ストックに対するエンド陳列に関しては、図 3.10 にあるとおり、弾力性値は極めて小さく、0 付近を変動している。この結果から、広告はエンド陳列との交互作用をもたないことが示唆される。先行研究であげた Wilkinson et al. (1982) でも、広告とエンド陳列の相乗効果は統計的に有意になっておらず、この結果との類似性を指摘できる。

競合商品の広告ストックは、想定される符号とは異なる時点が多く、また弾力性値としては非常に小さい。この結果から、競合商品の広告ストックは、セールスプロモーションに影響を与える可能性は低いと考えられる。広告実務には、シェア・オブ・ボイスという指標があり、ある製品カテゴリ全体の広告量に対する、自社商品の広告量のシェアを示す。この指標は広告プランニング実務でよく用いられるが、これは、十分なシェア・オブ・ボイスを確保することで、消費者の認知集合や想起集合に自社商品を入れてもらうことを期待しているためである。シェア・オブ・ボイスは一般には広告量で計算されるが、広告ストックで置き換えることもできる。

以上の議論にもとづくと、競合の広告ストックは、直接セールスプロモーションの効果に影響するのではなく、今回想定していなかった、自社商品の広告ストック量との比較においてセールスプロモーションの効果に影響を与えるという仮説も成り立つ。

続いて、セールスプロモーション間の相乗効果について考察する。図 3.8 の右側最上段の図は、自商品広告ストックの自商品価格掛率の効果に対する弾力性を示している。このグラフの時点 120 から 180 付近で、ブランド B のみ値が大きくなっている。ブランド B

では、この期間、長期的なエンド陳列をおこなっていた。この部分には、先行研究でもその存在が示唆されていた、値引きとエンド陳列の相乗効果があらわれている可能性がある。交互作用の存在に関しては、提案モデルを拡張にその構造を適切にモデルに取り込む必要がある。今後の課題とする。

本項の最後に、エンド陳列やチラシ配布について言及しておきたい。今回のデータの範囲では、エンド陳列やチラシ配布が実施されていた期間には、価格プロモーションも同時におこなわれていた。そのため、エンドやチラシの効果やそれらが受ける弾力性は、価格掛率の影響を受けている可能性も考えられる。この影響を排除するには、値引きがおこなわれていない期間に実施されたエンド陳列やチラシ配布のデータを用いて分析することが必要となるが、この点は今後の課題としたい。

以上、本項では弾力性の算定結果からの考察と示唆をまとめたが、構造モデルを用いれば、その副産物として、広告ストックや参照価格の市場反応係数に対する弾力性を評価でき、シミュレーションを行える。この点は、3階層多変量状態空間モデルを用いた利点の一つでもあるため、ここで強調しておくことにする。

3.6 おわりに

本研究では、3階層多変量状態空間モデルにより、セールスプロモーションの動的変動メカニズムを平滑化事前分布によらずモデル化し、実データにより検証した。セールスプロモーションの動的効果は、広告ストックや店舗レベル参照価格に動的に影響されて生じ、また広告ストックや参照価格が間接的にセールスプロモーションを通じて、売上に影響を与えることを示唆した。マーケティング的観点では、セールスプロモーション効果の動的変動メカニズムの一端を明らかにできたという意味で、貢献がある。

マーケティング実務では、広告とセールスプロモーションは別個に扱われることが多い。この理由はいくつかあるが、そのひとつとして、それぞれの目標指標の違いを指摘できる。広告では認知率などの消費者態度指標が、セールスプロモーションでは売上が目的指標になることが多い。目標指標が異なれば、非効率な施策につながることは明らかである。本研究は、こういった課題に対して示唆を提供でき、これら2つの施策を売上が指標にして制御できる。その際、広告量や価格を直接コントロールするのではなく、これらの施策の結果として得られる、広告ストックや、参照価格をコントロールすることで、市場

反応自体を制御し、結果的に売上の制御に結び付ける。当該アプローチは、これらの点で、今までにない新たなアプローチだといえる。

本研究は、岸他 (2000) で指摘されている「広告のアカウントビリティ」すなわち、「なぜ、その広告を出稿しなければならないのか」という問い対しても、売上に対する広告の効果を提示することで、今まで以上に明快な答えをステークホルダーに提示できる。また、本研究の枠組みは、アカデミック、実務の両面で最近よく用いられている、シングルソース・データを活用した場合と比較して、データ取得コスト、計算コストの2つの観点から有意性がある。本研究で提案したモデルは、最低限、POS データと視聴率データがあれば分析できる。また、これらのデータは日々自動で取得・蓄積されている二次データであり、シングルソースデータのような一次データと比較して、入手費用を低く抑えられる。また、集計データによる解析のため、シングルソース・データの解析で用いるような個人モデルと比較して、パラメータ推定のための計算コストが低く抑えられる。この利点を生かせば、企業の広告出稿計画の立案を高度化できるのは明らかである。

最後に残された課題を簡単に整理する。課題の1つは、モデル推定法にある。本研究では、静的パラメータ推定に条件付き最尤法を用いた。この理由としては、通常最尤法では、観測ノイズと構造ノイズの同時識別が困難であることと、広告ストックおよび店舗レベル参照価格の平滑化パラメータの推定が難しいことであった。この課題に対しては、MCMC 法 (マルコフ連鎖モンテカルロ法) を用いれば対応できる。2つ目は、集計レベルの提案モデルを個人モデルに拡張することがあげられる。本モデルは、店舗レベルでの集計的モデルであった。そのため、店舗レベルといった集計レベルのマーケティング意思決定には、十分に活用できる。一方で、ワン・トゥ・ワンマーケティングなどの個を対象としたマーケティング活動に、本研究成果を活用することは現実的に困難である。そういった課題に対応するには、当然個人レベルのモデル化が必須といえる。以上を今後の課題とする。

第4章

研究2: 消費者異質性を考慮した見 かけ上独立なポアソン回帰モデルに よる市場反応分析

4.1 はじめに

カウントデータを用いた解析は、さまざまな分野の研究で頻繁に登場する。本研究で対象とするマーケティング領域でも、商品の購買個数や店舗への来店人数、サービスの申し込み数など、多種のカウントデータが存在し、解析対象となっている。カウントデータの解析には、確率分布としてポアソン分布や負の二項分布がよく用いられる。単変量であればこれらの分布を用いたモデリングに困難はない一方で、多変量の場合はパラメータ推定で問題が生じる。その状況は、モデルの尤度関数が複雑になるために生じる。そのため、実際はカウントデータであるにも関わらず、対数変換等の何らかの変換を施すことにより連続型の確率変数とみなし、正規分布などの連続分布を仮定した解析がおこなわれることが多い。しかし、データの振舞いを考慮しないモデリングは、誤った知見を導く恐れがある。

上述した多変量カウントデータの確率分布としては、多変量ポアソン分布や多変量負の二項分布などが提案されている。しかし、これらの確率分布は複雑な密度関数をもつため、前述のとおり確率計算が難しく、よってパラメータの推定が簡単にできないという問題がある。この問題には、2つのアプローチが提案されている。一つ目は、見かけ上無相

関なポアソン回帰モデル (Seemingly Unrelated Poisson Regression Model; SUPREME) であり, もう一つは多変量ポアソン対数正規 (Multivariate Poisson-log Normal; MVPLN) モデルである. SUPREME は, モデルの柔軟性がきわめて低く, その適用には限界がある. MVPLN モデルは SUPREME の課題を克服し, 昨今, 多変量カウントデータを扱う際によく用いられている. ただし, MVPLN モデルでも, 階層ベイズモデルのような多層のモデルへの拡張が難しい. そこで本研究では, 消費者異質性の表現に適うモデルの多層化に対応した, 多変量カウントデータの新たなモデル化の枠組みを提案する. 提案モデルでは, MVPLN モデルのメリットは保持しつつも, 拡張性を高める. なお, 本章で提案するモデルは, 5 章で動的なモデルへ拡張する. 本研究の残りの構成は以下の通りである. 4.2 節で先行研究について述べる. 4.3 節で提案モデルを提示し, 4.4 節は提案モデルを適用するデータについて説明する. 4.5 節でパラメータの推定結果とマーケティング実務への示唆を整理する. 4.6 節は本研究のまとめと今後の課題である.

4.2 先行研究

本節には, 先行研究のレビュー結果を提示する. 2 章に既に先行研究のレビュー結果を提示しているが, 本節では本研究に特に関連する研究に限定し詳細に示す. レビューの視点は, 多変量カウントデータのためのモデル, マーケティング分野で多変量カウントデータを扱った研究, 市場反応に関する研究の 3 点である.

4.2.1 多変量カウントデータを扱うモデル

本項には, 前節で述べた, 多変量カウントデータを扱うために提案されているモデルを整理する. King(1989), Jung and Winkelmann(1993) および Karlis(2003) は Seemingly Unrelated Poisson Regression Model(SUPREME) を提案している. SUPREME という名前は King(1989) で用いられており, 本論文でもこの名称を用いる. (4.1) 式が SUPREME の定式化になる.

$$\begin{aligned}y_k &= x_k + \Delta \\x_k &\sim \text{Poisson}(\lambda_k) \\ \Delta &\sim \text{Poisson}(\theta)\end{aligned}\tag{4.1}$$

(4.1) 式で、 y_k は被説明変数となるカウントデータを示す。また $k = 1, \dots, K$ 。このモデルは、すべての系列にポアソン分布にしたがう共通の確率変数 Δ を足し、系列間の相関を表現する。この Δ は、他の系列と相関を有して生じる量を示している。すなわち、 x_k には他の系列から影響を受けずに生じる量、 Δ は他の系列から影響を受けて生じる量である。この結果として、 y_k は相関を受けている量になる。また、ポアソン分布の再生性により、 $y_k \sim \text{Poisson}(\lambda_k + \theta)$ が成立する。このように、SUPREME では、多変量ポアソン分布を用いることなく、系列間の相関を考慮しながらも、パラメータ推定における計算量の緩和を実現した。上述した King(1989) では、米国の大統領の拒否権行使のデータに対して、2変量の SUPREME を適用した。Karlis(2003) では、EM アルゴリズムを用いて SUPREME のパラメータを推定する方法を提案した。また、提案手法をスポーツの試合の得点、犯罪発生数 (犯罪の種類を変数とした 5 変量カウントデータ)、および交通事故数 (年を変数とした 5 変量カウントデータ) にそれぞれ適用した。

しかし、このモデルには欠点も多く存在する。SUPREME では、 Δ に対して $\Delta \leq \min(\mathbf{y})$ という制約を課す。このため、例えば \mathbf{y} のなかに 0 が存在した場合、 Δ が 0 より大きい値をとることができず、このモデルは実質的に機能しない。また 0 でなくとも、0 に近い自然数を多く含むデータでは、 Δ を導入しても、相関構造の表現が難しくなる。これに加えて、負の相関を表現できないことや過分散 (Overdispersion) の問題に対処できないこと、計算量の問題から高次元のカウントデータには対応できないことなども、応用における欠点といえる。

Munkin and Trivedi(1999)、Chib and Winkelmann(2001) は、多変量ポアソン対数正規 (Multivariate Poisson-log Normal; MVPLN) モデルを提案した。(4.2) 式が MVPLN モデルの定式化になる。

$$\begin{aligned}
 P(y_k) &= \frac{\exp(-\mu_k)\mu_k^{y_k}}{y_k!} \\
 \mu_k &= \exp(\mathbf{X}'_k\boldsymbol{\beta} + b_k) \\
 \mathbf{b}(b_1, \dots, b_k) &\sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \Sigma)
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

ここで y_k は観測変数、 \mathbf{X}_k は説明変数ベクトル、 $\boldsymbol{\beta}$ は回帰係数ベクトル、 μ_k は系列 k のポアソン分布のパラメータである。また $k = 1, \dots, K$ 。当該モデルでは、 $\boldsymbol{\mu}$ は多変量対数正規分布に、 \mathbf{y} は多変量ポアソン対数正規分布にそれぞれ従う。

MVPLN モデルは、上記であげた SUPREME の欠点を克服した。すなわち、観測値に関わらず、系列間の正負の共分散構造を表現でき、過分散にも対処できる。また、高次元のカウントデータでも適用できる。上述した Chib and Winkelmann(2001) は、MVPLN モデルと、そのパラメータの推定を MCMC 法を用いておこなうことを提案した。またこのデータを、米国の医療データおよび航空会社の事故データに適用した。Munkin and Trivedi(1999) は、MVPLN モデルを 2 変量ではあるものの混合効果モデルに拡張し、このモデルを Chib and Winkelmann(2001) と同じ、米国の医療データに適用した。これにより、個人ごとのパラメータを得ている。一方で、MVPLN モデルは、モデルが複雑になったときに、パラメータの推定が困難になるという問題がある。本研究では、データ拡大を用いることで、この問題を解消できるモデルの枠組みを提案する。この詳細は 4.3 節で述べる。

4.2.2 マーケティング領域で多変量カウントデータを対象にした研究

本項には、多変量カウントデータを対象にしたマーケティング研究を整理する。Brijs(2004) では、SUPREME を多変量ポアソン混合モデルに拡張し、2 つの消費財カテゴリ(ケーキミックスとケーキシロップ)の購買データに適用した。当該モデルでは、同時購買の構造が多変量ポアソン分布の共分散で表現される。Wang(2007) では、MVPLN 回帰モデルを用いて、複数の消費財カテゴリの同時購買をモデル化している。この研究でも、多変量ポアソン分布の分散共分散行列で、5 つのカテゴリ間の同時購買の生起を表現している。5 変量のモデルは SUPREME では計算量の点で困難だったが、MVPLN 回帰モデルにより解析が可能となった。Terui et al.(2010) では、同カテゴリ内の複数の商品を同時にモデル化した。各商品の販売数量はそれぞれ独立なポアソン分布に従うと仮定すると、その合計数量もポアソン分布に従う。そして合計販売数量を条件付きにすると、各商品については多項分布に従うモデルになる。多項分布なので負の相関を表現することが可能になる。Dippold and Hruschka(2013) では、MVPLN 回帰モデルを多数の消費財カテゴリの購買データに適用し、カテゴリ間の購買量の相関関係を分析した。モデルとしては、Wang(2007) とほぼ同じモデルである。補完的な商品カテゴリにおいては、一方の購買によって他方の購入確率が上昇することは過去の研究から分かっていたが、この研究では、購買個数は増加しないという結果が得られた。以上、マーケティング研究にお

いて多変量カウントデータを扱った研究をあげたが、これらの研究は、個人の異質性が考慮されていないものがほとんどである。そこで本研究では、多変量カウントデータに対して、個人の異質性を考慮した階層ベイズモデルを提案する。このような枠組みのマーケティング研究は存在していない。先述のとおり、マーケティング領域には多種の多変量カウントデータが存在するため、提案モデルは今後のマーケティング研究に幅広く応用できる可能性がある。

4.3 提案モデル

本節では、提案モデルとそのパラメータ推定の枠組みを提示する。はじめに、表 4.1 には提案モデルで用いる変数を示す。太字体はベクトルを示し、ベクトルはすべて縦ベクトルとする。また、表 4.2 には添字を示す。表 4.1 中の **SP** はセールスプロモーションを示し、マーケティングにおける販売促進活動のことを示す。表 4.2 中の **SKU**(Stock Keeping Unit) とは、商品の単位を示す。これらの詳細は 4 節で説明する。

本研究では多変量カウントデータ (個人ごとの購買個数) を目的変数ベクトルとした非集計タイプの市場反応モデルを提案する。提案モデルは、階層ベイズモデルの枠組みで表現する。そのため、以降では個体内モデル (観測モデル)、個体間モデル、事前分布の順に説明する。

4.3.1 個体内モデル

個体内モデルは、購買個数の生起メカニズムを規定する。本研究では、 $\mathbf{y}_{it} = (y_{it1}, \dots, y_{itM})$ を目的変数ベクトルとした多変量のモデリングを実施するが、見かけ上観測変数 $y_{iim}, y_{iim'}$ 間には独立性を仮定し、モデリングを進める。(4.3) 式には、個人 i の時点 t における **SKU** m の購買個数 y_{iim} の生起メカニズムを表現するモデルを示す。本研究では、目的変数となる y_{iim} は単変量ポアソン分布に従うとする。 $\exp(\eta_{iim})$ がその分布のパラメータである。本研究では、上述のように **SKU** m に関して独立性を仮定するが、一方で分布のパラメータであるリンク関数 η_{iim} には相関構造を仮定する。(4.4) 式がその仮定を定式化したものであり、多変量回帰モデルにより表現する。この仮定により、複雑な多変量ポアソン尤度の評価を緩和し、一方で平均構造に対して相関構造を仮定

表 4.1 変数一覧

表記	内容 (一般)	内容 (提案モデル)	次元
y_{itm}	観測変数	購買個数	スカラ
η_{itm}	リンク関数	同左	スカラ
Z_{it}	個体内モデル説明変数	SP 変数	$M \times BM$ 行列
γ_i	個体内モデル回帰係数	SP 変数の回帰係数	BM 次元ベクトル
ζ_{it}	個体内モデル誤差項	同左	M 次元ベクトル
d_i	個体間モデル説明変数	世帯変数	C 次元ベクトル
Θ	個体間モデル回帰係数	世帯変数の回帰係数	$C \times BM$ 行列
w_i	個体間モデル誤差項	同左	BM 次元ベクトル
Ω	個体内モデルの分散共分散行列	同左	$M \times M$ 行列
Σ	個体間モデルの分散共分散行列	同左	$BM \times BM$ 行列

表 4.2 添字一覧

記号	内容
i	世帯数 $(1, \dots, I)$
t	時点数 $(1, \dots, T)$
m	SKU 数 $(1, \dots, M)$
b	SP 変数の数 $(1, \dots, B)$
c	世帯変数の数 $(1, \dots, C)$

したモデリングが実現できる.

$$\begin{aligned}
 f(y_{itm} | \exp(\eta_{itm})) &= \frac{\exp(-\exp(\eta_{itm})) (\exp(\eta_{itm}))^{y_{itm}}}{y_{itm}!} \\
 &= \frac{\exp(y_{itm}\eta_{itm} - \exp(\eta_{itm}))}{y_{itm}!}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\eta_{it} = Z_{it}\gamma_i + \zeta_{it}, \quad \zeta_{it} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, \Omega) \tag{4.4}$$

(4.4) 式中, $\boldsymbol{\eta}_{it}$ はリンク関数のベクトルであり, (4.5) 式で定義する. また $\boldsymbol{\zeta}_{it}$ は誤差項のベクトルであり, (4.6) 式で定義する. $\boldsymbol{\eta}_{it}$, $\boldsymbol{\zeta}_{it}$ ともに M 次元ベクトルである.

$$\boldsymbol{\eta}_{it} = \begin{pmatrix} \eta_{it1} & \eta_{it2} & \dots & \eta_{itM} \end{pmatrix}^T \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{it} = \begin{pmatrix} \zeta_{it1} & \zeta_{it2} & \dots & \zeta_{itM} \end{pmatrix}^T \quad (4.6)$$

$\boldsymbol{\zeta}_{it}$ は, 平均は $\mathbf{0}$ ベクトル (M 次元), 分散共分散行列 $\boldsymbol{\Omega}(M \times M)$ 行列の多変量正規分布に従う確率変数である. デザイン行列 Z_{it} は (4.7) 式のように表現する.

$$Z_{it} = \begin{pmatrix} z_{it1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{it2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_{itM} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

(4.8) 式が, Z_{it} の成分である z_{itm} の定義である (B 次元ベクトル)

$$z_{itm} = (z_{itm}^1, z_{itm}^2, \dots, z_{itm}^B) \quad (4.8)$$

(4.9) 式には, 個人 i のセールスプロモーションの効果を示す $\boldsymbol{\gamma}_i$ を定義する.

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \left(\gamma_{i1}^1 \quad \gamma_{i1}^2 \quad \dots \quad \gamma_{i1}^B \mid \gamma_{i2}^1 \quad \gamma_{i2}^2 \quad \dots \quad \gamma_{i2}^B \mid \dots \mid \gamma_{iM}^1 \quad \gamma_{iM}^2 \quad \dots \quad \gamma_{iM}^B \right)^T \quad (4.9)$$

$\boldsymbol{\Omega}$ はフルランクの分散共分散行列を仮定する. この部分が提案モデルの特徴的な部分である. 前述のとおり観測データ y_{itm} には独立性を仮定するかわりに, $\boldsymbol{\eta}_{itm}$ 間には相関構造を仮定するのである. その意味で当該モデルを見かけ上独立なポアソン回帰モデル (Seemingly Independent Poisson Regression Model; SIPRM) と呼ぶ. いずれにしても, 商品間の購買傾向の類似性は, $\boldsymbol{\Omega}$ を用いて評価できる.

4.3.2 個人間モデル

個人間モデルは, 消費者ごとのパラメータの生起メカニズムを記述するモデルである.

(4.10) 式が個人間モデルになる.

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{d}_i + \mathbf{w}_i, \quad \mathbf{w}_i \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (4.10)$$

当該モデルは, セールスプロモーションの効果 $\boldsymbol{\gamma}_i$ が, 世帯のデモグラフィック情報 \mathbf{d}_i によって説明されることを表現する. $\boldsymbol{\gamma}_i$ は前節で示したとおり, BM 次元の縦ベクトルであ

る。(4.11) 式で定義される Θ は、個体間モデルの回帰係数の行列であり、 $C \times BM$ 行列である。

$$\Theta = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \theta_{111} & \cdots & \theta_{11B} & \theta_{121} & \cdots & \theta_{12B} & \cdots & \theta_{1M1} & \cdots & \theta_{1MB} \\ \theta_{211} & \cdots & \theta_{21B} & \theta_{221} & \cdots & \theta_{22B} & \cdots & \theta_{2M1} & \cdots & \theta_{2MB} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{C11} & \cdots & \theta_{C1B} & \theta_{C21} & \cdots & \theta_{C2B} & \cdots & \theta_{CM1} & \cdots & \theta_{CMB} \end{array} \right) \quad (4.11)$$

\mathbf{d}_i は、世帯 i の説明変数の C 次元縦ベクトル $(d_{i1}, d_{i1}, \dots, d_{iC})^t$ である。 \mathbf{w}_i は BM 次元縦ベクトルを示し、 Σ は誤差の分散共分散行列 ($BM \times BM$ 行列) を示している。本項に示したモデルは複雑に見えるが、階層ベイズモデルにおける標準的なモデルであり、多変量回帰モデルとなる。

4.3.3 事前分布

Ω^{-1} , Σ^{-1} , Θ には、(5.9) 式で示す事前分布を設定する。本節以降、 I_B など I に下付き添字があるものは、この次元の単位行列を示す。

$$\begin{aligned} \Omega^{-1} &\sim \text{Wishart}(\nu_{0\Omega}, V_0); \nu_{0\Omega} = M + 4, V_{0\Omega} = \nu_{0\Omega} I_M \\ \Sigma^{-1} &\sim \text{Wishart}(\nu_{0\Sigma}, V_{0\Sigma}); \nu_{0\Sigma} = BM + 4, V_{0\Sigma} = \nu_{0\Sigma} I_{BM} \\ \Theta = \text{vec}(\Theta) &\sim \text{N}(\bar{\mathbf{d}}, \Sigma \otimes A_C^{-1}); \bar{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}, A_C = 0.01 I_C \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.3.4 事後分布と推定アルゴリズム

図 4.1 には、4.3.1 項から 4.3.3 項に示したモデルを統合した DAG(Direct acyclic graph; 有向非巡回グラフ) を示す。

$\mathbf{y}_{it} = (y_{it1}, \dots, y_{itM})^t$ であり、観測変数 y_{itm} は、リンク関数 η_{itm} をパラメータとし、それぞれ独立な単変量ポアソン分布に従う。また、 $\boldsymbol{\eta}_{it}$ は平均ベクトル $\mathbf{Z}_{it}\boldsymbol{\gamma}_i$ 、分散共分散行列 Ω の M 次元の多変量正規分布に従うものと仮定する。

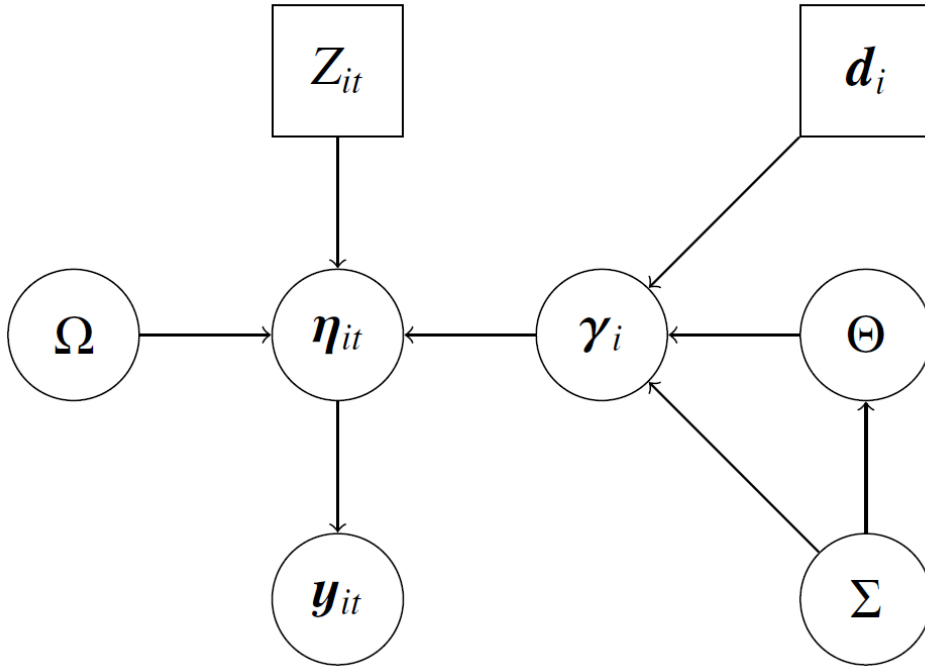


図 4.1 提案モデルの DAG

4.3.5 事後分布

図 4.1 に基づけばパラメータの同時事後分布が導出できる．(4.13) 式が同時事後分布の分解になる．

$$\begin{aligned}
& p(\{\gamma_i\}, \{\eta_{it}\}, \Theta, \Sigma, \Omega | \{y_{it}\}, \{Z_{it}\}, \{d_i\}) \\
& \propto p(\Theta|\Sigma)p(\Sigma)p(\Omega) \prod_{i=1}^I p(\gamma_i|\Theta, \Sigma, \mathbf{d}_i) \prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^T p(y_{it}|\eta_{it}) p(\eta_{it}|\gamma_i, Z_{it}, \Omega) \\
& = p(\Theta|\Sigma)p(\Sigma)p(\Omega) \prod_{i=1}^I p(\gamma_i|\Theta, \Sigma, \mathbf{d}_i) \prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^T p(\eta_{it}|\gamma_i, Z_{it}, \Omega) \prod_{m=1}^M p(y_{im}|\eta_{im}) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

(4.13) 式の右辺にある $p(y_{im}|\eta_{im})$ は単変量ポアソン分布， $p(\eta_{it}|\gamma_i, Z_{it}, \Omega)$ は多変量正規分布の確率密度関数である．(4.13) 式において， $\prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^T \prod_{m=1}^M p(y_{im}|\eta_{im})$ の部分がモデルの尤度関数になる．本枠組みの特徴は，リンク関数をパラメータとしている点である． η_{it} をパラメータとしてとりこむことにより，多変量ポアソン分布の尤度を独立としてとらえて

も、平均構造の意味で相関構造をとりこめる。すなわち、 η_{it} を発生させてしまえば、 γ_i , Ω は共役の関係を使えるようになり、その発生は既存の手法で容易に実現できる。(4.13) 式において、上記の意味で $p(\eta_{it}|\gamma_i, Z_{it}, \Omega)$ は η_{it} の事前分布の役割を担う。

(4.13) 式に基づくと、MCMC のアルゴリズムは下記の 5 つのステップで構成される。第 1 ステップのみランダムウォーク M-H 法になり、他の 4 つのステップはギブスサンプラーを用いることになる。

1. $\eta_{it}|Z_{it}, \gamma_i, \Omega, \mathbf{y}_{it}$ のサンプリング
2. $\gamma_i|\mathbf{d}_i, \Theta, \Sigma, \eta_{it}$ のサンプリング
3. $\Theta|\mathbf{d}_i, \Sigma, \gamma_i$ のサンプリング
4. $\Sigma|\gamma_i, \Theta, \mathbf{d}_i$ のサンプリング
5. $\Omega|\eta_{it}, Z_{it}, \gamma_i$ のサンプリング

本項では、アルゴリズムの要である η_{it} のサンプリングについて説明する。その他のパラメータのアルゴリズムは標準的なものであるため付録を参照してほしい。

η_{it} は、データ拡大によってサンプリングを行う。(4.14) 式が、 η_{it} の条件付き分布である。尤度がポアソン尤度であり、事前分布が正規分布であるため共役にはならず、メトロポリス・ヘイスティングス法を用いて推定を行う。

$$(\eta_{it}|-) \propto p(\eta_{it}|Z_{it}, \gamma_i, \Omega) p(\mathbf{y}_{it}|\exp(\eta_{it})) \quad (4.14)$$

まず、ランダムウォークサンプラーで候補粒子を発生させる。

$$\eta_{it}^{(*)} = \eta_{it}^{(r-1)} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, 0.1I_M) \quad (4.15)$$

この採択確率は以下の式で表現できる。

$$\alpha(\eta_{it}^{(*)}, \eta_{it}^{(r-1)}) = \min \left\{ \frac{p(\eta_{it}^{(*)}|-)q(\eta_{it}^{(r-1)}|\eta_{it}^{(*)})}{p(\eta_{it}^{(r-1)}|-)q(\eta_{it}^{(*)}|\eta_{it}^{(r-1)})}, 1 \right\} \quad (4.16)$$

採択確率と一様乱数 u を用いて確率的選択を行う。

$$\begin{cases} \eta_{it}^{(r)} = \eta_{it}^{(*)}, & \text{if } u \leq \alpha(\eta_{it}^{(*)}, \eta_{it}^{(r-1)}) \\ \eta_{it}^{(r)} = \eta_{it}^{(r-1)}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.17)$$

4.3.6 比較モデル

本研究では、マーケティングの観点で提案モデルの妥当性を確認するために、比較モデルを2つ設定した。比較モデル1は提案モデルでSKU別、世帯別、施策別である γ_i を γ とする。これは、消費者異質性を仮定しないモデルである。提案モデルを比較モデル1を比較することで、セールスプロモーション効果を世帯別に評価する妥当性を議論できる。比較モデル2は、提案モデルの Ω を対角行列に制約するモデルである。提案モデルの Ω はフルランクの分散共分散行列を仮定している。一方、比較モデル2では、対称成分以外をゼロに固定し、SKU間の販売個数が相関関係をもたないことを仮定する。提案モデルと比較モデル2を比較することで、ブランド間の販売個数の平均構造に相関構造を仮定する妥当性を議論できる。

4.4 データの概要

本研究では、提案モデルをスーパーマーケットでの、カレールーの消費者購買データ(ID付POSデータ)に適用する。ID付POSデータには「誰が(世帯)」、「何を(商品)」、「いつ」、「いくらで」、購入したかが記録されている。本研究では、商品の単位として、SKUを用いる。SKUとは、”Stock Keeping Unit(最小管理単位)”の略であり、商品をもっとも細かく分ける単位である。SKUは、一般的にID(JANコード)により識別される。カレールーに関していえば、同じ商品名であってもその重量や味種が異なる場合は、それぞれ別のSKUとして扱われる。味種とは、カレールーでは、甘口、辛口、中辛などの辛さの区分を示す。SKUの具体的な例としては、「商品名、甘口、250グラム」などとなる。

本研究では、販売を促進するための施策である、エンド陳列とチラシ掲載の実施情報も利用する。エンド陳列とは、スーパーマーケットの通路の端の部分に商品を山積みし、目立せる販促手法である。エンド陳列の実施により、通常の棚よりも来店客の目にとまりやすくなり、売上の向上が見込める。チラシ掲載は、新聞に折り込まれるスーパーのチラシに、商品を掲載することを示す。この手法も、商品を多くの消費者の目に触れさせることで、購買の促進を促すものである。

使用したデータの概要は次のとおりである。分析対象としたSKU数は17であり、分析対象期間は2001年4月1日から2003年3月31日の月別、24時点のデータを使用し

た。また対象人数は 110 人である。

本モデルで目的変数となる購買データは、月別、世帯別、SKU 別に集計する。これは、「ある世帯が、ある SKU を、1 か月に何個購入したか」を示すデータである。カレールーは、調理される際、各世帯の嗜好に応じて、複数ブランドのカレールーが同時に用いられることがある。それゆえ、世帯ごとに複数の SKU を購入の対象としていることが多い。よって、SKU 間の関係性を表現できる本モデルを適用するのに適したカテゴリである。解析の対象とした世帯は、期間内のすべての月で、対象 SKU のいずれかを購入しているものとし、対象の SKU はカレールーカテゴリでシェアの大きいものを選択した。表 4.3 には、分析対象 SKU の基本統計量を示す。

本研究で用いるコーザルデータは、エンド陳列実施有無、チラシ掲載有無、価格掛率の 3 つである。エンド陳列実施有無、チラシ掲載有無は、実施された日は 1、実施されない日は 0 の日別の二値データである。価格掛率は、POS データから、「売価 ÷ 最大売価」と計算する。

本研究の目的変数の粒度は月としているため、前段のコーザルデータを加工し、月別に説明変数を作成する。表 4.4 には、説明変数の一覧を示す。価格掛率からは 2 つの変数を作成した。第一は、SKU ごとかつ月ごとの、最小の価格掛率である (自 SKU 最小価格掛率)。これは、ある月のある SKU での最大の値引き幅と言い換えられる。第二は、SKU ごとかつ月ごとに、最小の価格掛率で販売された日数をカウントしたものである (自 SKU 最小掛率日数)。この値は、最小の値引き幅で何日間販売されたかを示す。これらの変数は、世帯ごとに来店した日のみを集計対象とした。すなわち、月別、SKU 別、世帯別に算定されることになる。以降では、世帯ごとに来店した日のみを集計対象にすることを「来店日ベース」と呼ぶことにする。

エンド陳列変数は、来店日ベースでエンド陳列が実施されていた日数をカウントした (自 SKU エンド陳列実施日数)。一方、競合 SKU について、この値をすべて足し上げたものも変数とする (他 SKU エンド陳列実施日数)。

チラシは自宅で閲覧できるので、来店日ベースでのカウントはおこなわず、その月内の実施日数をすべてカウントした (自 SKU チラシ掲載実施日数)。ただし、どの世帯にチラシが配布されたかはわからないため、同じ月、同じ SKU であれば、すべての世帯で同じ値をとる。こちらもエンド陳列と同様に、競合 SKU をすべて足し上げたものも変数とする (他 SKU チラシ掲載実施日数)。

表 4.3 分析対象 SKU

メーカー名	ブランド名	味種名	重量 (グラム)	最大 売価	平均 売価	エンド 日数	チラシ 日数	購買 個数
メーカー A	ブランド A	甘口	240	268	176	123	8	175
メーカー A	ブランド A	中辛	240	268	168	88	14	267
メーカー A	ブランド A	辛口	240	268	176	60	13	108
メーカー A	ブランド B	甘口	200	198	165	156	8	170
メーカー A	ブランド B	中辛	200	198	168	101	11	263
メーカー A	ブランド B	辛口	200	198	168	91	8	136
メーカー B	ブランド C	甘口	200	218	180	21	2	84
メーカー B	ブランド C	中辛	200	218	174	29	2	127
メーカー B	ブランド C	辛口	200	218	174	18	2	30
メーカー C	ブランド D	甘口	200	198	161	39	9	150
メーカー C	ブランド D	中辛	200	198	169	83	16	330
メーカー C	ブランド D	辛口	200	198	170	73	15	126
メーカー C	ブランド E	甘口	250	252	172	110	16	365
メーカー C	ブランド E	中辛	250	252	168	176	16	547
メーカー C	ブランド E	辛口	220	252	168	161	15	214
メーカー C	ブランド F	中辛	220	257	237	9	0	49
メーカー C	ブランド F	辛口	220	257	247	0	0	102

最後に、世帯変数について説明する。世帯変数は、上記で述べたセールスプロモーションの効果を説明するために用いる。世帯変数は3変数用意した。第一は、1購買あたりの購買金額である。これは、カレールーに限らず、当該の店舗に来店した際の1来店あたりの購買金額の平均値である。これは、各世帯が来店した際に、平均でいくら購買しているかを示す(客単価)。第二は、平均来店間隔である。各世帯が、平均で何日おきに来店しているかを示す。第三は、カレールーの購入間隔である。これは、対象SKUのいずれかを購買した間隔日数の平均値であり、各世帯が、平均で何日おきにカレールーを購入してい

るかを示す。図 4.2 には、購買間隔日数のもととなる、世帯ごとの日別購入個数を 2 世帯分示す。

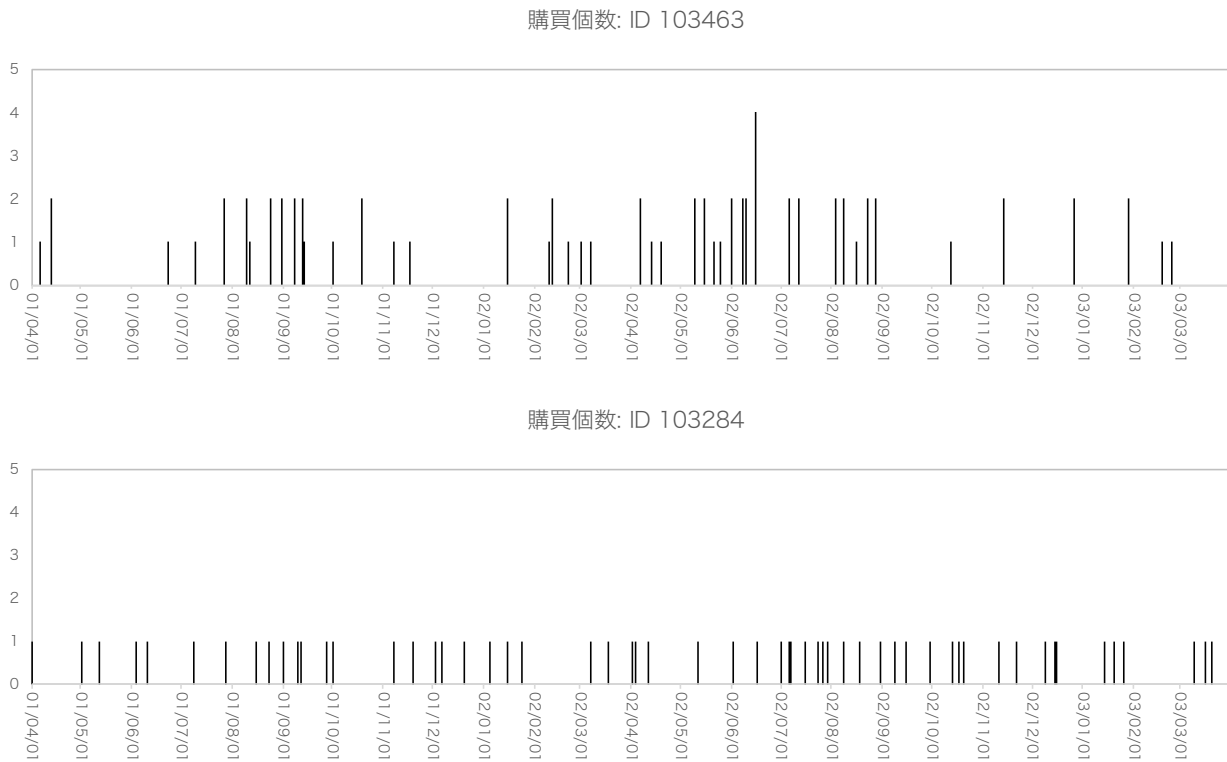


図 4.2 世帯別日別購買個数

4.5 パラメータ推定結果

パラメータは付録に示したアルゴリズムにより推定した。試行回数は 100,000 回で、最初の 90,000 回はバーンインとして棄却し、最後の 10,000 回を事後分布からのサンプルとして採用した。

4.5.1 モデル比較

モデル比較は DIC(Deviance Information Criterion) を指標として用いる。DIC は Spiegelhalter(2002) で提案された、ベイズモデルを評価するための情報量規準である。(4.18) 式に DIC の算出式を示した。DIC は、他の情報量規準と同様に、値が小さいほど良いモデルであると解釈する。

$$DIC = \bar{D}(\theta) + p_D \quad (4.18)$$

表 4.4 モデルの説明変数

変数カテゴリ	内容	名称
セールスプロモーション変数	自 SKU 最大価格掛率	自価格掛率
	自 SKU 最大掛率日数	自価格日数
	自 SKU エンド陳列実施日数	自エンド
	他 SKU エンド陳列実施日数	競エンド
	自 SKU チラシ掲載実施日数	自チラシ
	他 SKU チラシ掲載実施日数	競チラシ
世帯変数	1 購買あたりの購買金額	平均購買金額
	平均来店間隔日数	平均来店間隔
	カレールーの購入間隔	カレー購入間隔

ここで、 $\bar{D}(\theta)$ はモデルの対数尤度である。また p_D はモデルの複雑度を示す指標である。表 4.5 には、各モデルの DIC を示した。結果として、提案モデルの DIC が最小であり、仮定したモデルでは提案モデルが採択された。以降の議論は、提案モデルの結果に基づき整理する。

表 4.5 各モデルの DIC

モデル名称	DIC
提案モデル	17065.99
比較モデル 1	17495.95
比較モデル 2	20578.79

4.5.2 セールスプロモーション効果 (γ_i)

γ_i の事後平均は、セールスプロモーション変数別、SKU 別、世帯別に得られている。表 4.6 には、セールスプロモーション変数別、SKU 別の平均値を示す。また、サンプリングした系列から擬似的に t 値を算出し、各パラメータの有意性を確認した。同じく表 4.6

で、擬似 t 値において 95% 有意であった世帯の割合が半数を超えない区分には網掛けを施した。半数とした点に特に意味はない。参考までに、表 4.7 には、表 4.6 と同様の区分で、擬似 t 値において 95% 有意であった世帯の割合を示す。「自価格掛率」で示される、自身の最大の値引き率は負の係数である SKU が多かった。また、有意な世帯も比較的多かった。これは、値引くほど売上が向上することを示し、実務上の知見と一致する。一方で「自価格日数」で示されている、最大値引きを実施した日数は、正の係数が期待されたものの、多くの SKU で負の値をとった。また有意な世帯も少なかった。データ上、SKU ごとの購買頻度は月に 1 回に満たない世帯が多い。また、消費者は各 SKU のもっとも安い売値(最安値)をおおよそ把握していると想定される。これらより、消費者は月をまたいで最安値を目にした機会に購買している可能性がある。こう考えれば、最安値で販売された日数よりも、毎月の最大価格掛率の方が有意な世帯が多いことも不自然ではない。ただし、世帯によっては後者が有意である世帯も存在する。これは、個人の異質性を考慮することで得られる知見の一つである。また、この状況とは逆に、もし数日に一度は購買される商品カテゴリであれば、最大値引きの日数の方がより有意な世帯が多くなる可能性がある。他方、エンド陳列やチラシ実施では、自 SKU で実施したときの効果より、競合 SKU から受ける売上毀損の影響が明確に示された。前者は正の係数が期待されるが、負の値をとる世帯も多かった。一方、後者ではすべての SKU が期待される負の係数となり、また有意な世帯も前者と比較して多かった。この理由としては、以下が考えられる。各 SKU とも、エンドの実施回数は 2 年間で 0 回から 176 回の間に取りまり、11 の SKU で、100 回に満たない。そのため、特に実施回数が少ない SKU を中心に、消費者がエンド陳列を目にする機会が少なく、解析上、十分なデータが得られなかった可能性がある。これを裏付ける結果として、エンドの実施回数が 100 回以上の SKU では、すべて正の係数が得られていたことがあげられる。以上の結果を踏まえ、以降では自価格掛率、競合エンド実施および競合チラシ掲載を対象として推定結果をまとめ、実務への示唆を提示する。

上述した 3 つのセールスプロモーションの回帰係数 γ_i のヒストグラムを図 4.3 から図 4.5 に示す。それ以外の係数は、紙幅の都合で割愛する。自価格掛率(図 4.3)を見ると、SKU や世帯によって価格掛率の係数は大きく異なる。しかし、多くの SKU および世帯で係数が負であり、これは前項で述べたとおりである。一方で、価格の係数が 0 以上の値をとる世帯もあった。このような世帯は、値引きにより購入が促進されない世帯であると解釈できる。図 4.4、図 4.5 で示した競合エンドおよび競合チラシでも、多くの世帯では負

表 4.6 SP 変数の回帰係数の事後平均

ブランド名	味種	自価格 掛率	自価格 日数	自 エンド	競 エンド	自 チラシ	競 チラシ	定数項
ブランド A	甘口	-2.28	-0.18	0.13	-0.14	-0.22	-0.19	-8.48
ブランド A	中辛	-9.55	-0.29	-0.04	-0.07	0.41	-0.23	-11.71
ブランド A	辛口	-10.58	-0.23	0.07	-0.16	-0.19	-0.19	-12.86
ブランド B	甘口	-6.40	-1.65	0.10	-0.12	0.05	-0.08	-11.19
ブランド B	中辛	-4.73	-0.78	0.08	-0.11	-0.47	-0.11	-7.60
ブランド B	辛口	-5.54	-1.11	-0.03	-0.11	0.09	-0.24	-10.89
ブランド C	甘口	-6.59	0.02	-0.16	-0.17	0.19	-0.34	-10.31
ブランド C	中辛	-3.52	-0.28	0.01	-0.10	2.95	-0.18	-10.41
ブランド C	辛口	3.28	-0.36	0.27	-0.22	1.09	-0.21	-10.76
ブランド D	甘口	-7.65	0.25	-0.24	-0.11	0.3	-0.17	-10.38
ブランド D	中辛	-4.75	-1.20	-0.23	-0.06	0.19	-0.14	-6.73
ブランド D	辛口	-8.73	-1.61	-0.36	-0.06	-0.04	-0.34	-10.1
ブランド E	甘口	-2.85	-0.15	0.04	-0.09	-0.14	-0.19	-6.44
ブランド E	中辛	-2.42	-0.06	0.07	-0.06	-0.29	-0.15	-6.13
ブランド E	辛口	-8.03	-0.40	0.26	-0.11	-0.28	-0.16	-12.37
ブランド F	中辛	-6.12	-0.14	-0.95	-0.10	1.30	-0.39	-7.42
ブランド F	辛口	-15.02	-0.95	-0.62	-0.11	1.05	-0.32	-8.10
全 SKU 平均		-5.97	-0.54	-0.09	-0.11	0.35	-0.21	-9.52

の値であった。これは、前項で述べたとおり、競合の施策実施により、大半の世帯では購買されにくくなることを示唆する。一方で、値引きと同様に、施策に効果がないと解釈できる世帯も存在した。このような世帯による効果の違いは、 Θ を確認することで、その理由が確認できる。これは 5.3 項に示す。

表 4.8, 表 4.9 には、ブランド別、味種別に γ_i の平均をとったものを示す。ブランドで A, D, F で値引きの効果が比較的高い様子がうかがえる。特に F で値が大きいのが、表 4.3 にあるとおり、このブランドは他の商品と比較して価格が高い。このため、値引きにより

表 4.7 SP 変数の回帰係数の有意な世帯の割合

ブランド名	味種	自価格 掛率	自価格 日数	自 エンド	競 エンド	自 チラシ	競 チラシ	定数項
ブランド A	甘口	33.64%	43.64%	46.36%	49.09%	11.82%	49.09%	98.18%
ブランド A	中辛	97.27%	29.09%	36.36%	43.64%	18.18%	41.82%	100.00%
ブランド A	辛口	95.45%	31.82%	44.55%	51.82%	13.64%	54.55%	100.00%
ブランド B	甘口	79.09%	31.82%	47.27%	53.64%	3.64%	43.64%	100.00%
ブランド B	中辛	80.00%	13.64%	35.45%	49.09%	16.36%	41.82%	100.00%
ブランド B	辛口	66.36%	14.55%	40.91%	43.64%	21.82%	41.82%	100.00%
ブランド C	甘口	92.73%	34.55%	30.91%	51.82%	26.36%	42.73%	100.00%
ブランド C	中辛	53.64%	30.91%	44.55%	46.36%	53.64%	47.27%	100.00%
ブランド C	辛口	28.18%	30.91%	17.27%	64.55%	30.91%	51.82%	100.00%
ブランド D	甘口	80.00%	11.82%	24.55%	43.64%	22.73%	42.73%	100.00%
ブランド D	中辛	73.64%	7.27%	29.09%	34.55%	19.09%	35.45%	98.18%
ブランド D	辛口	96.36%	31.82%	29.09%	44.55%	23.64%	43.64%	100.00%
ブランド E	甘口	17.27%	10.91%	35.45%	38.18%	12.73%	28.18%	99.09%
ブランド E	中辛	16.36%	18.18%	30.91%	29.09%	18.18%	20.91%	100.00%
ブランド E	辛口	95.45%	31.82%	38.18%	40.91%	14.55%	36.36%	100.00%
ブランド F	中辛	54.55%	20.91%	26.36%	57.27%	29.09%	56.36%	100.00%
ブランド F	辛口	100.00%	17.27%	25.45%	39.09%	21.82%	53.64%	100.00%
全 SKU 平均		68.24%	24.17%	34.28%	45.94%	21.07%	43.05%	99.73%

購入が促進されやすい。一方で、競合エンド、競合チラシについて、ブランド間での大きな違いはみられなかった。また味種でも大きな違いはみられなかった。

本項の最後に、セールスプロモーションが購買にどの程度影響しているかを確認した。これは、 $Z_{it}\gamma_i$ について、定数項とそれ以外の部分との絶対値を比較することで実施できる。簡単のため、 Z_{it} は世帯・時間での平均値、 γ_i は世帯での平均値を用いて計算した結果、定数項は-9.52(絶対値は 9.52)、それ以外の部分は-7.56(絶対値は 7.56)であった。こ

れより，セールスポモーションは購買時の意思決定に対して一定の影響を与えている可能性が示唆された．逆にいうと，セールスポモーションによらず購入される割合もある程度，存在するという事もできる．

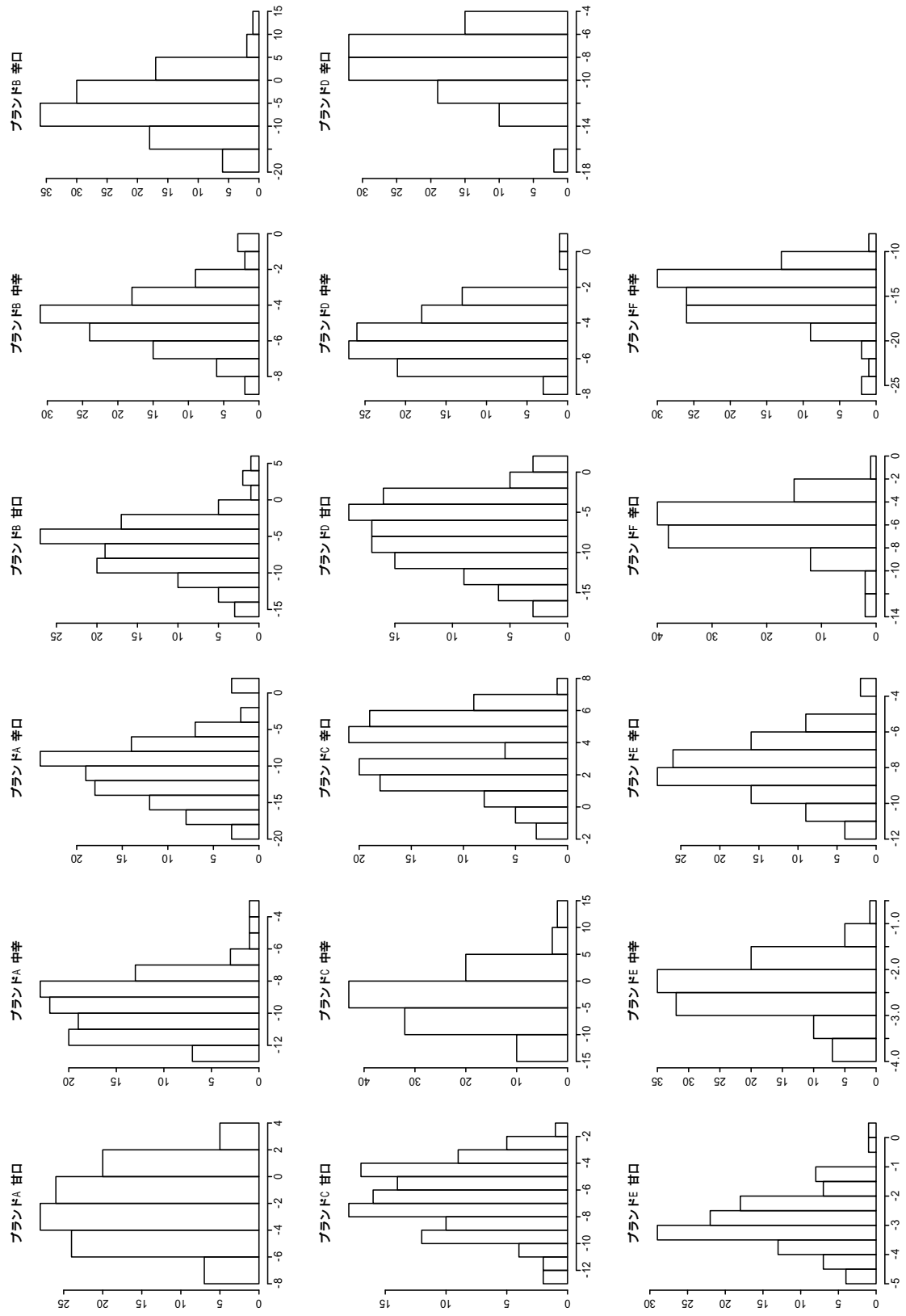


図 4.3 自価格掛率の回帰係数

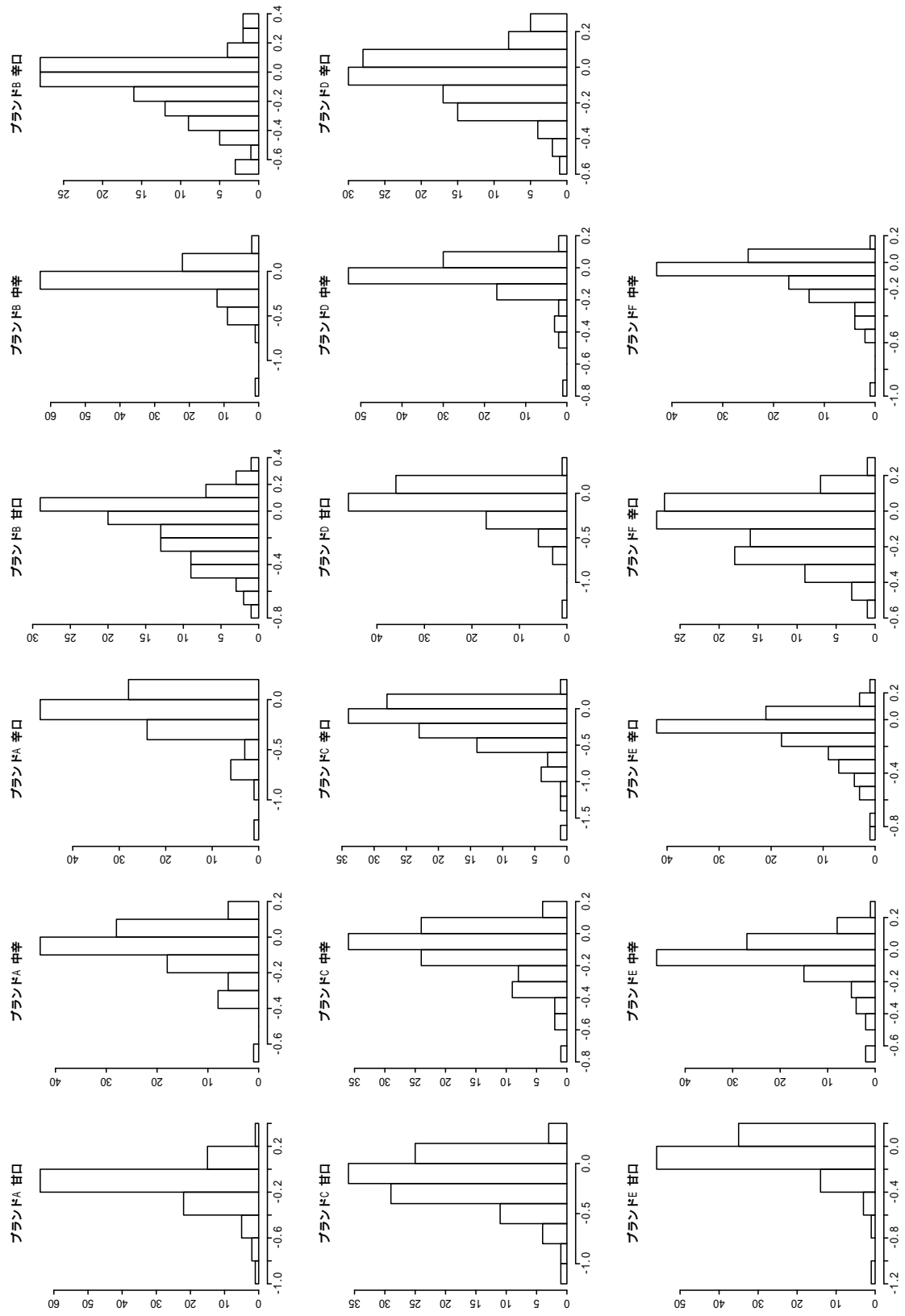


図 4.4 競合エントの回帰係数

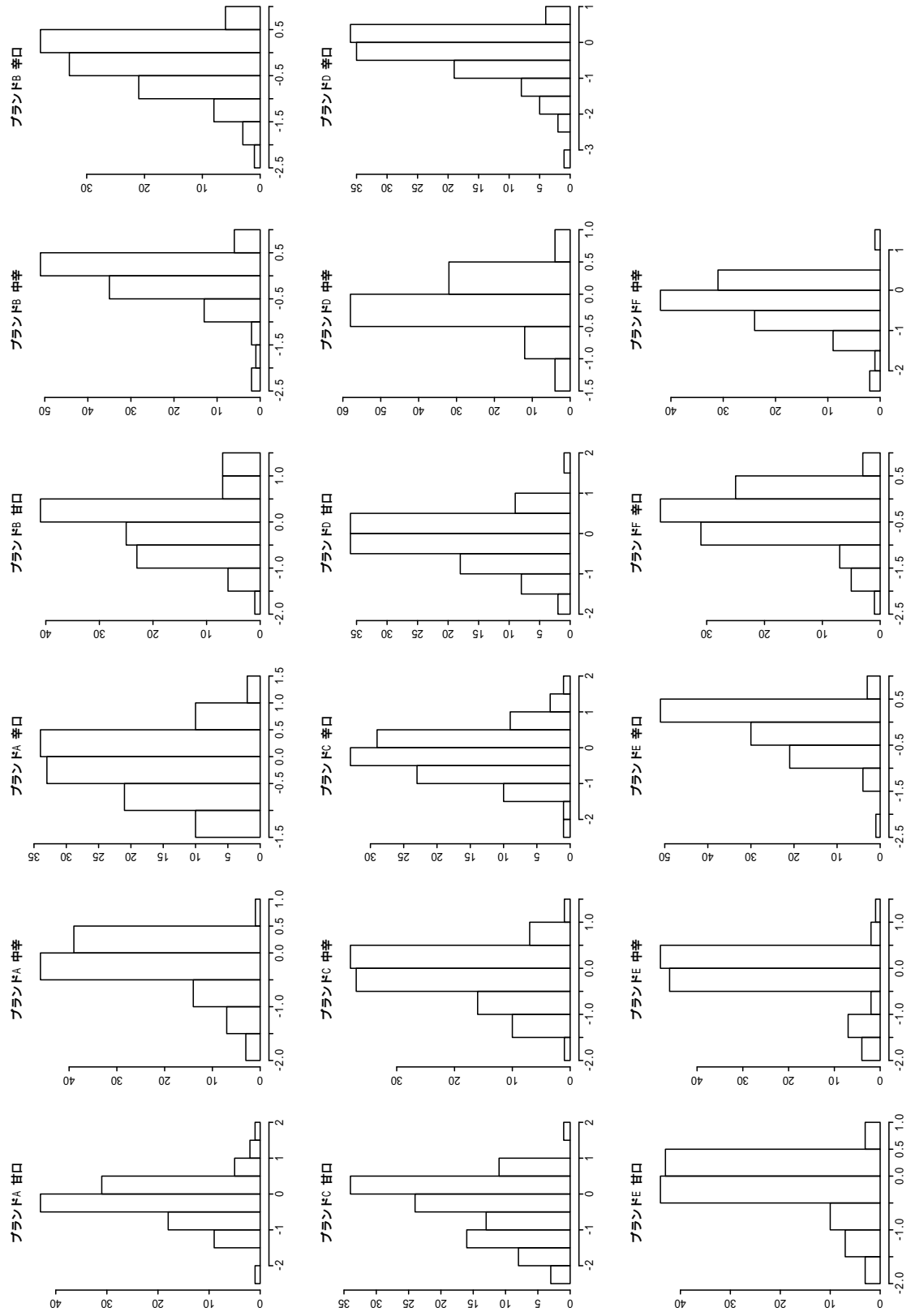


図 4.5 競合チャラシの回帰係数

表 4.8 ブランド別プロモーション効果

ブランド名	自価格掛率	競エンド	競チラシ
A	-7.47	-0.12	-0.20
B	-5.56	-0.11	-0.14
C	-2.27	-0.16	-0.24
D	-7.04	-0.08	-0.22
E	-4.43	-0.09	-0.17
F	-10.57	-0.10	-0.35

表 4.9 味種別プロモーション効果

味種	自価格掛率	競エンド	競チラシ
甘口	-5.16	-0.13	-0.19
辛口	-5.95	-0.13	-0.26
中辛	-6.66	-0.09	-0.19

4.5.3 世帯変数効果 (Θ)

前項でセールスプロモーションの効果が世帯で異なることを確認したが、本項ではそのパラメータである Θ の推定結果を整理し考察する。4 節のとおり、 Θ は SKU およびセールスプロモーション変数ごとに得られているが、その推定結果を表 4.10 から表 4.12 に示す。表中、疑似 t 値で 95% 有意でないパラメータは網掛けをした。結果として有意でないものが多かったが、カレー購買頻度の、自 SKU 価格係数に対する効果では有意なケースが比較的多くみられた。

表 4.13 には、全 SKU 分の平均をとったものを示す。価格掛率の係数に対するカレー購買頻度の係数が負の値になっている。価格掛率の係数は負の値であるから、カレーの購買頻度が上がると、価格掛率の係数は負の方向に大きくなる。競合のチラシやエンド陳列についても同様の傾向がある。これは、カレーを頻繁に購入する消費者ほどプロモーションに強く反応すると解釈できる。カレーを頻繁に購入する世帯は、その商品カテゴリに対す

る関心も大きいと想定される。この点で、この結果は不自然なものではないと言える。次に客単価では、この値が大きいほど、価格の効果は小さくなる。客単価が高い消費者は、一般に来店頻度が低く、一度の来店で大量に購入する傾向がある。そのため、値引きを狙って購入することが難しく、結果として値引きの影響を受けにくくなっている。最後に来店頻度では、この値が高いほど、価格の効果は大きくなる。これは客単価の逆で、頻度高く来店する消費者は値引きを狙って購入できるので、値引きの影響を受けやすい。

表 4.10 世帯変数効果：カレー購買頻度

ブランド名	味種	自価格掛率	自価格日数	自エンド	自エンド	自チラシ	競チラシ	定数項
ブランド A	甘口	6.08	0.39	0.11	-0.11	-1.10	-0.13	5.68
ブランド A	中辛	3.72	-0.18	0.02	-0.10	1.92	-0.09	4.37
ブランド A	辛口	3.77	1.01	-0.46	-0.19	-1.70	-0.06	2.71
ブランド B	甘口	1.31	-0.58	0.18	-0.07	0.39	-0.27	2.43
ブランド B	中辛	0.87	0.72	0.30	-0.07	-0.80	-0.16	4.01
ブランド B	辛口	-6.26	-2.63	-0.24	0.04	-1.11	-0.06	0.19
ブランド C	甘口	-5.50	0.47	0.70	-0.06	-5.38	-0.31	0.23
ブランド C	中辛	7.44	-0.09	1.11	-0.11	-2.17	0.24	1.25
ブランド C	辛口	-5.49	0.91	0.31	-0.18	-4.67	0.15	2.17
ブランド D	甘口	-10.21	3.73	0.45	-0.10	-0.05	-0.19	0.47
ブランド D	中辛	3.72	0.93	-0.46	-0.05	0.81	-0.13	2.79
ブランド D	辛口	-5.63	6.32	-0.18	-0.02	0.52	0.06	0.63
ブランド E	甘口	2.09	0.04	0.28	-0.11	-0.71	-0.03	2.35
ブランド E	中辛	0.78	0.23	0.09	0.02	-0.60	-0.14	1.45
ブランド E	辛口	-0.37	-0.53	0.02	-0.04	0.19	0.09	-1.54
ブランド F	中辛	-2.49	3.08	1.98	0.02	-7.54	-0.14	1.40
ブランド F	辛口	-2.63	-0.40	-0.20	-0.10	-3.33	0.15	-0.07

4.5.4 相関係数行列 (Ω)

推定の結果得られた分散共分散行列 Ω から、SKU 間の距離を計算した。具体的には、まず、分散共分散から相関係数を算出し、その値から 1 を引いたものを距離とした。この距離の行列から、最遠隣法によって階層的クラスタリングを行った。その結果を図 4.6 に示す。図 4.6 において、濃淡のある部分では、色が黒に近い組み合わせほど、SKU 間の距離が近いことを表す。また、左部、上部の線は、階層的クラスタリングの結果をデンドログラム (Dendrogram) で示したものである。この距離は、SKU ごとの残差、すなわちセー

表 4.11 世帯変数効果：客単価

ブランド名	味種	自価格掛率	自価格日数	自エンド	自エンド	自チラン	競チラン	定数項
ブランド A	甘口	-2.12	-0.11	0.05	0.01	0.05	-0.10	-0.93
ブランド A	中辛	-0.26	0.02	-0.01	0.02	0.06	-0.10	-1.15
ブランド A	辛口	2.84	0.37	-0.35	-0.04	-0.11	0.13	0.16
ブランド B	甘口	3.40	0.85	0.07	0.01	-0.06	-0.04	0.98
ブランド B	中辛	1.12	0.73	0.22	-0.05	0.13	0.02	-0.49
ブランド B	辛口	5.99	0.71	-0.02	0.02	0.30	-0.10	0.94
ブランド C	甘口	0.73	-0.08	-0.45	0.01	1.01	0.05	-0.17
ブランド C	中辛	3.41	-0.39	0.45	0.03	0.46	-0.02	-1.17
ブランド C	辛口	1.18	-0.05	-0.67	-0.07	2.70	0.20	-0.53
ブランド D	甘口	1.72	1.67	-0.13	0.04	0.28	-0.10	0.40
ブランド D	中辛	-0.47	0.80	0.04	0.03	-0.06	-0.02	-0.25
ブランド D	辛口	-0.87	-0.31	-0.09	-0.01	-0.20	-0.07	-0.99
ブランド E	甘口	-0.20	0.09	0.00	0.03	0.03	0.05	-0.41
ブランド E	中辛	-0.02	-0.02	0.00	-0.01	0.32	0.11	-0.65
ブランド E	辛口	1.02	0.23	0.16	0.00	0.07	-0.15	0.53
ブランド F	中辛	-2.06	-2.85	0.12	0.01	0.03	-0.13	0.04
ブランド F	辛口	-3.81	-0.51	-0.09	-0.02	1.44	0.05	-0.96

ルスプロモーションの影響を差し引いた、消費者の嗜好性やインスタントカレーの使用方法を反映した SKU 間の「近さ」を表現している。この近さは、それら嗜好性・使用方法などを反映したブランド間の期間併買のされやすさを表現していると解釈できる。カレーは各世帯の好みに応じて複数の種類を混合して調理されることがよくあり、こういった解釈は自然である。

図 4.6 をみると、対象 SKU は大きく 3 つのグループに分けられた。左下部の濃い色の正方形に該当するブランド A とブランド D のグループ、同じく中心部のブランド B とブランド C のグループ、最後に右上部のブランド E とブランド F のグループである。この結果を解釈すると、まず、同じブランドの異なる味種が期間併買されやすい傾向にあることがわかる。また、ブランド A と D、ブランド B と C、ブランド E と F がそれぞれ期間併買されやすい傾向にある。

なお、4.5.2 項の最後で述べたとおり、セールスプロモーションによらず購入される割合も一定数存在することが示唆された。このような購入には、本項で述べた、カレーに関する好みに影響している可能性もあるため、好みの構造を知っておくことはマーケ

表 4.12 世帯変数効果：来店頻度

ブランド名	味種	自価格掛率	自価格日数	自エンド	自エンド	自チラシ	競チラシ	定数項
ブランド A	甘口	3.24	0.13	-0.10	-0.05	0.04	0.22	-1.52
ブランド A	中辛	-3.10	-0.09	0.00	-0.04	-0.42	0.19	-1.71
ブランド A	辛口	-11.06	-1.18	0.99	0.08	0.58	-0.35	-4.94
ブランド B	甘口	-10.62	-2.47	-0.17	-0.04	0.07	0.13	-6.38
ブランド B	中辛	-4.40	-2.18	-0.58	0.09	-0.30	-0.05	-1.98
ブランド B	辛口	-15.13	-1.53	0.09	-0.09	-0.47	0.19	-5.73
ブランド C	甘口	-2.69	0.10	0.91	-0.08	-1.30	-0.16	-2.81
ブランド C	中辛	-11.03	0.90	-1.33	-0.09	0.23	-0.05	-0.60
ブランド C	辛口	-0.75	-0.19	1.66	0.14	-5.32	-0.58	-2.49
ブランド D	甘口	-4.46	-4.82	0.16	-0.12	-0.59	0.24	-4.29
ブランド D	中辛	-1.08	-2.53	-0.06	-0.08	0.04	0.04	-2.04
ブランド D	辛口	0.62	-1.05	0.15	0.00	0.36	0.05	-0.81
ブランド E	甘口	-0.82	-0.29	-0.04	-0.08	0.02	-0.18	-1.48
ブランド E	中辛	-0.85	-0.01	0.01	-0.01	-0.75	-0.30	-0.61
ブランド E	辛口	-4.91	-0.59	-0.31	-0.03	-0.31	0.31	-4.80
ブランド F	中辛	3.69	6.32	-1.00	-0.06	1.90	0.24	-2.68
ブランド F	辛口	5.26	1.04	0.07	0.04	-2.53	-0.24	-0.13

表 4.13 世帯変数効果

プロモーション	カレー購買頻度	客単価	来店頻度
自価格掛率	-0.52	0.68	-3.42
競エンド	-0.07	0.00	-0.02
競チラシ	-0.06	-0.01	-0.02

ティング戦略上、有利になることも考えられる。

以降には、本研究で得られたセールスプロモーションに関する知見と嗜好性に関するまとめを提示する。まず、セールスプロモーションは購買に一定の影響を与えていることが示された。特に自 SKU の価格掛率、競合 SKU のエンド実施、チラシ掲載は、購買に対する明確な影響が示唆される結果となった。ただし、その影響は世帯によって異なっていた。この要因は、カレールーの購入間隔、来店頻度および 1 購買あたりの購入金額など、購買に関する行動があげられた。また、自 SKU の価格掛率では、SKU によって結果に差

異がみられた。具体的には、定価が高い SKU は購買に対する影響が大きいという結果であった。一方で、競合エンドおよび競合チラシでは、SKU による結果の差異はみられなかった。なお、今回の分析は月次データでおこなっているが、これを日次などより細かい粒度のデータで実施することで、セールスプロモーションへの示唆を高度化できる可能性もある。その点に関しては今後の課題とする。

嗜好性に関して述べる。本研究での分析の結果、対象 SKU は 3 つのグループに分けられ、これは嗜好性による期間併買を示すものと考えられた。それぞれのグループには、複数のブランドおよび同じブランドの異なる味種が含まれていた。前者からは、複数のブランドを期間併買し混合して使用することで、好みに応じた味に調整していることがうかがえる。一方、後者では同じブランドの異なる味種を混ぜることで、辛味を調整していることがうかがえる。本研究は 1 ヶ月ごとの集計データを使用した。このような期間集計データを用いることで、本節で提示したような嗜好性に関する知見が得られる。

4.6 おわりに

本研究では、多変量カウントデータを目的変数とした階層ベイズモデルとその推定の枠組みを提案した。また、提案モデルを実際のマーケティングデータに適用した結果、既存のモデルよりも DIC の点で優れていることが確認された。この点に加えて、提案モデルからは、いくつかのマーケティング上の知見を得ることができた。具体的には、セールスプロモーションの効果が SKU や世帯ごとに得られた点や、SKU 間の期間併買の傾向を把握できた点である。これらの知見は、マーケティング実務においてワン・トゥー・ワン・マーケティングへの活用が期待できる。さらに提案モデルは、既存の多変量データを扱うモデルと比較してモデリング上の制約が少なく、推定も容易であり、かつ拡張性が高い。この点で、今後のマーケティング研究やそれ以外の分野でも応用が可能と考えている。

本研究の限界と発展の方向性について述べる。1 点目は、提案モデルは時間的異質性を表現していない。2 節でも述べたとおり、マーケティングでは時間的異質性を考慮した動的なモデルが求められている。このモデルにより、セールスプロモーションの効果や商品の同時購買傾向が動的に得られることが期待できる。2 点目は、本研究は月別データを用いており、このために構造が適切にとらえられていない可能性がある。この問題に対処するには、データの集計スパンを週別や日別にすることが考えられるが、この場合、集計

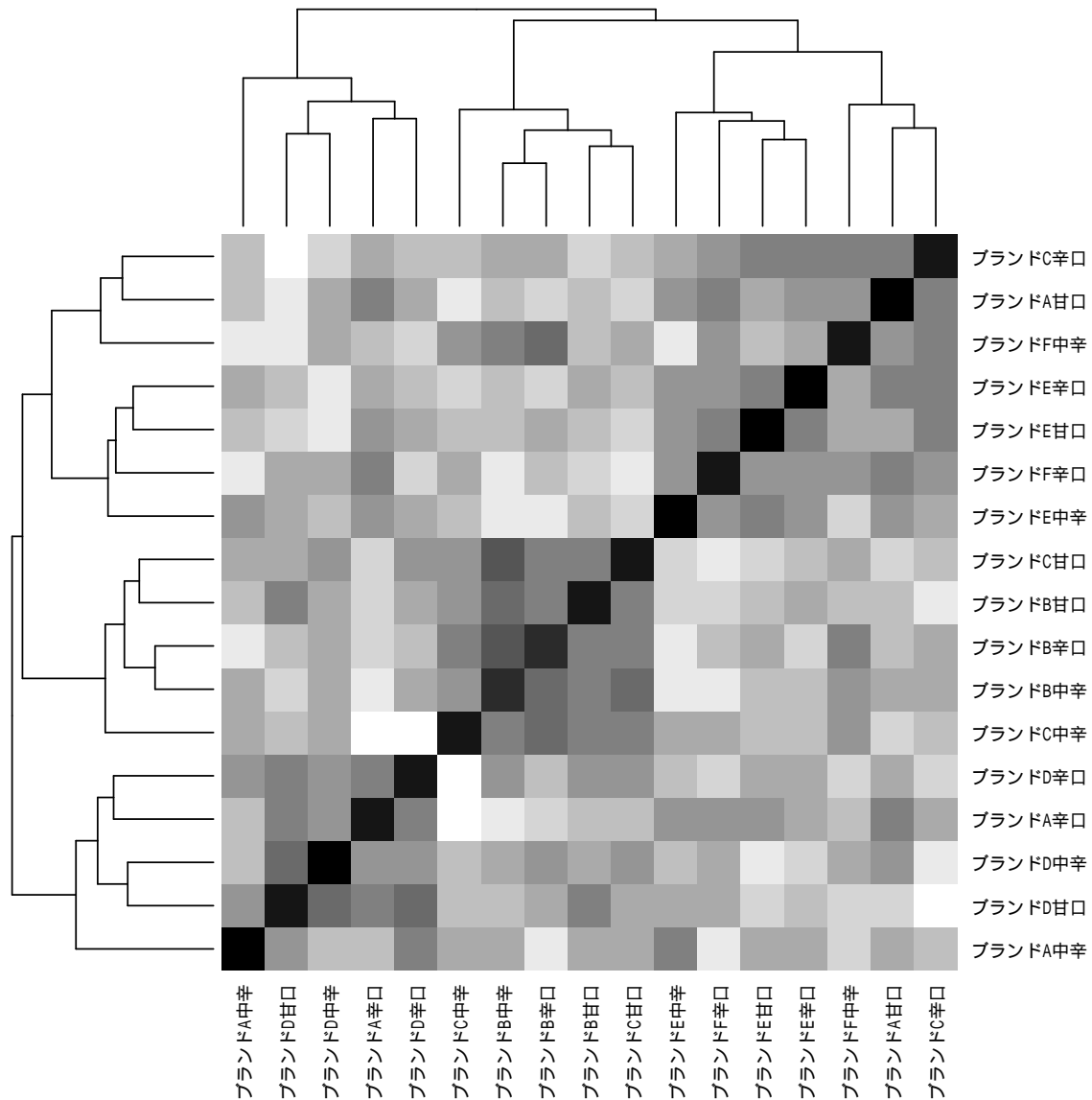


図 4.6 距離行列

データがゼロ過剰になることが想定される。ゼロ過剰データに対しては、負の二項回帰などの確率分布の導入が必要になる。3点目は、SKU間の類似性をより精緻に表現するモデルを導入することである。提案モデルでは、リンク関数の誤差項の共分散として、SKU間の期間併買の傾向を表現した。一方で、長谷川・照井(2011)のように、消費者ごとの因子構造を導入することが考えられる。これにより、商品の期間併買傾向を消費者ごとに確認でき、かつその構造が解釈可能なかたちで表現できる。

以上あげた点を提案モデルに含めることで、マーケティング研究において今までにない知見が得られることが期待できる。特に時間の異質性に関しては、マーケティング以外の

領域でも活用できる可能性が高く，その導入は急務と考えている．

第 5 章

研究 3：時間的異質性を考慮した見 かけ上独立なポアソン回帰モデルに よる市場反応分析

5.1 はじめに

多変量のカウントデータは、本研究で対象とするマーケティング領域に限らず、社会科学、自然科学の様々な分野で得られる。一変量のカウントデータに限定すれば、多くの有用なモデル/アプローチが提案されてきている。一方で、多変量カウントデータは頻繁に研究対象になるが、一般に多変量カウントデータのモデル化は難しく、特にパラメータ推定の難易度が高い。カウントデータは 0 以上の整数の値をとる。この特徴を有するデータのモデル化は、例えば正規分布は不適切で、当然その状況は一変量でも多変量でも同一である。特に、多変量のカウントデータを扱った先行研究では、データをそのまま用いて多変量ポアソン分布、多変量負の二項分布によってモデル化するものや、何らかの変換を施し、多変量切断正規分布、多変量ポアソン対数正規分布によってモデル化するなどの様々なアプローチが提案されている。しかし、カウントデータに何らかの変換を施し、擬似的に連続データ化するアプローチは、カウントデータの特性を消失させるため、適当ではない。とすると、多変量のカウントデータに対応可能な分布を用いることになるが、こちらは尤度関数の評価が難しく、一般にデータの次元が高くなると計算不能になる。そのため、市場反応分析で現在よく用いられている、階層ベイズモデルや状態空間モデルの枠

組みでのモデル化が難しい。この課題に対して、第2の研究テーマでは、見かけ上独立なポアソン回帰モデル (Seemingly Independent Poisson Regression Model; SIPRM) を提案した。このモデルでは、多変量カウントデータベクトルに含まれる個々の観測変数は一変量のポアソン分布に従うと仮定し、個々の変数の分布パラメータ (具体的には平均パラメータの対数、リンク関数と呼ぶ) 間に多変量回帰構造を仮定する。この多変量回帰モデルがリンク関数の事前分布の役割を担う。さらにこのリンク関数をパラメータととらえてデータ拡大によって発生させることで、多変量カウントデータのパラメータ推定が、既存の手法により実施できる。SIPRM の利点は大きく2点ある。第1は、観測変数の次元が高くなっても計算量の面でパラメータ推定が容易な点である。観測変数個々の分布は、常に単変量の分布を仮定するため、その部分の尤度関数は目的変数ベクトルの次元が高くなっても容易に構成できる。また個々の分布のリンク関数のベクトルには多変量回帰モデルを仮定するため、目的変数の次元に応じてこの分布の次元も高くなるが、多変量カウントデータの分布と比較すると、その扱いは容易である。第2は、ベイズモデルへの拡張が容易な点である。これも、リンク関数をパラメータととらえて正規分布を仮定していることによる。まず階層ベイズモデルに適用する場合、リンク関数はベクトルと多変量を仮定すると、共役の関係を利用できるようになるため、パラメータが効率的に実現できる。状態空間モデルを適用する場合でもモデルが正規分布であればカルマンフィルタを利用できる。カルマンフィルタ自体は行列計算のみで完結する。

以上の背景に基づき、本研究では、多変量カウントデータである、店舗の購買個数データに対して SIPRM を動的に拡張したモデルを適用し、多変量カウントデータに対する動的市場反応モデルを構築する。当該モデルを、動的な見かけ上独立なポアソン回帰モデル (Dynamic Seemingly Independent Poisson Regression Model; DSIPRM) と呼ぶ。このモデルでは、テーマ2と同様に、多数のSKUを同時にモデル化するため、競争構造に関する知見が得られる。さらに、本モデルでは、時間的異質性のみならず消費者異質性も同時に評価可能な枠組みとなる。先行研究には、状態空間モデルの枠組みで多変量カウントデータをモデル化したケースは多少はあるが、消費者異質性を同時に評価した研究は見当たらない。この点で、本研究は新規性をもつ。

本論文の残りの構成は以下の通りである。5.2節で先行研究について述べる。5.3節で提案モデルを提示し、5.4節は提案モデルを適用するデータについて説明する。5.5節でパラメータの推定結果とマーケティング実務への示唆を整理する。5.6節では本研究のま

とめと今後の課題を述べる。

5.2 先行研究

5.2.1 状態空間モデルを適用したマーケティング研究

市場反応分析において、市場反応の動的変化(時間的異質性)を対象とした研究は、消費者異質性を対象とした研究と比べて非常に少ないが、1990年代の後半からみられるようになった。小売業やメーカーの価格戦略やプロモーション戦略の変化、また社会環境の変化などに伴って、消費者の反応も動的に変化すると仮定することが自然である(佐藤, 樋口 2008b)という考えに基づけば、市場反応の動的変化を表現できるモデルの活用は自然な流れである。逆に言えば、市場反応の動的変化を考慮しない静的モデルでは、現実の市場を精緻にとらえるためには、不十分であるともいえる。

状態空間モデルの枠組みで集計データを用いた研究としては、Naik et al.(2005), Sriram and Kalwani(2007), Bass et al.(2007), Bruce(2008), 佐藤, 樋口 (2008b), Ernst et al.(2010), Bruce et al.(2012) などがある。一方、非集計データを用いた研究は、Dube et al.(2005), 佐藤, 樋口 (2008a), 佐藤, 樋口 (2009) がある。これらの研究は、平滑化事前分布と呼ぶ、反応係数が時間進展とともに滑らかに変動するという制約を課したモデルを階層モデルとして導入し、市場反応係数の動的変化を表現する。本研究は、非集計データを用いた動的モデルの研究であり、先行研究が少ないテーマを対象としている。

5.2.2 多変量カウントデータを対象にした研究

本節では、多変量カウントデータを対象にした研究を整理する。マーケティング研究に関しては2章でも説明しているため、本項ではマーケティング分野以外での先行研究を整理する。Knape et al.(2009)では、鳥の移動に関するカウントデータを多変量状態空間モデルの枠組みでモデル化している。目的変数は多変量正規分布に従うと仮定している。Jung et al.(2011)は、多変量動的因子モデルを提案している。ニューヨーク証券取引所の5つの株式について、5分間隔の取引数で構成される時系列データに適用した。各系列の値は独立に負の二項分布に従うと仮定して、そのパラメータベクトルを因子分解する。また、その因子負荷量がランダムウォークに従うと仮定し、動的構造を表現してい

る。McCausland et al.(2011) では、金融市場の取引件数データを分析している。各系列がそれぞれ独立なポアソン分布にしたがうとし、そのパラメータベクトルが因子構造を持ち、そこで観測データの相関関係を表現している。これは、Jung et al.(2011) に近いアプローチであると言える。

5.3 提案モデル

本節では、提案モデルとそのパラメータ推定の枠組みを提示する。はじめに、表 5.1 には提案モデルで用いる変数を示す。太字体はベクトルを示し、ベクトルはすべて縦ベクトルとする。また、表 5.2 には添字を示す。表 5.1 中の SP はセールスプロモーションを示す。

本研究では、4 章のモデルと同様、多変量カウントデータ (購買個数) を目的変数ベクトルとした非集計タイプの市場反応モデルを提案する。提案モデルは、状態空間モデルの枠組みで表現する。そのため、以降では観測モデル、システムモデル、事前分布の順に説明する。

表 5.1 変数一覧

表記	内容 (一般)	内容 (提案モデル)	次元
y_{itm}	観測変数	購買個数	スカラ
η_{itm}	リンク関数	同左	スカラ
Z_{it}	個体内モデル説明変数	SP 変数	$M \times BM$ 行列
γ_{it}	個体内モデル回帰係数	SP 変数の回帰係数	BM 次元ベクトル
ζ_{it}	個体内モデル誤差項	同左	M 次元ベクトル
w_{it}	個体間モデル誤差項	同左	BM 次元ベクトル
Ω	個体内モデルの分散共分散行列	同左	$M \times M$ 行列
Σ	個体間モデルの分散共分散行列	同左	$BM \times BM$ 行列

表 5.2 添字一覧

記号	内容
i	世帯数 $(1, \dots, I)$
t	時点数 $(1, \dots, T)$
m	SKU 数 $(1, \dots, M)$
b	SP 変数の数 $(1, \dots, B)$

5.3.1 観測モデル

観測モデルは、購買個数の生起メカニズムを規定する。本研究では、 $\mathbf{y}_{it} = (y_{it1}, \dots, y_{itM})$ を目的変数ベクトルとした多変量のモデリングを実施するが、4章と同様に観測変数 $y_{itm}, y_{itm'}$ 間には独立性を仮定しモデル化する。(5.1) 式には、個人 i の時点 t における SKU m の購買個数 y_{itm} の生起メカニズムを表現するモデルを示す。本研究では、目的変数となる y_{itm} は単変量ポアソン分布に従うとする。 $\exp(\eta_{itm})$ がパラメータになる。ただし、SKU m 間では、リンク関数 η_{itm} に相関構造を仮定する。(5.2) 式がその仮定を定式化したものであり、多変量回帰モデルにより表現する。

$$\begin{aligned} f(y_{itm} | \exp(\eta_{itm})) &= \frac{\exp(-\exp(\eta_{itm})) (\exp(\eta_{itm}))^{y_{itm}}}{y_{itm}!} \\ &= \frac{\exp(y_{itm}\eta_{itm} - \exp(\eta_{itm}))}{y_{itm}!} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{it} = \mathbf{Z}_{it}\boldsymbol{\gamma}_{it} + \boldsymbol{\zeta}_{it}, \quad \boldsymbol{\zeta}_{it} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (5.2)$$

(5.2) 式中、 $\boldsymbol{\eta}_{it}$ はリンク関数のベクトルであり、(5.3) 式で定義する。また $\boldsymbol{\zeta}_{it}$ は誤差項のベクトルであり、(5.4) 式で定義する。 $\boldsymbol{\eta}_{it}$, $\boldsymbol{\zeta}_{it}$ ともに M 次元ベクトルである。

$$\boldsymbol{\eta}_{it} = \begin{pmatrix} \eta_{it1} & \eta_{it2} & \dots & \eta_{itM} \end{pmatrix}^T \quad (5.3)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_{it} = \begin{pmatrix} \zeta_{it1} & \zeta_{it2} & \dots & \zeta_{itM} \end{pmatrix}^T \quad (5.4)$$

$\boldsymbol{\zeta}_{it}$ は、平均は $\mathbf{0}$ ベクトル (M 次元)、分散共分散行列 $\boldsymbol{\Omega}(M \times M)$ 行列の多変量正規分布に従う確率変数である。 $\boldsymbol{\Omega}$ はフルランクの分散共分散行列を仮定する。デザイン行列 \mathbf{Z}_{it} は

(5.5) 式のように表現する.

$$Z_{it} = \begin{pmatrix} z_{it1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_{it2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_{itM} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

(5.6) 式では, Z_{it} の成分である z_{itm} を定義する (B 次元ベクトル)

$$z_{itm} = (z_{it1}^1, z_{it1}^2, \dots, z_{it1}^B) \quad (5.6)$$

(5.7) 式には, 個人 i のセールスプロモーションの効果を示す γ_{it} を定義する.

$$\gamma_{it} = \left(\gamma_{it1}^1 \quad \gamma_{it1}^2 \quad \cdots \quad \gamma_{it1}^B \mid \gamma_{it2}^1 \quad \gamma_{it2}^2 \quad \cdots \quad \gamma_{it2}^B \mid \cdots \mid \gamma_{itM}^1 \quad \gamma_{itM}^2 \quad \cdots \quad \gamma_{itM}^B \right)^T \quad (5.7)$$

この部分が提案モデルの特徴的な部分である. 前述のとおり観測データ y_{itm} には独立性を仮定するかわりに, η_{itm} 間には相関構造を仮定する. 商品間の購買傾向の類似性は, Ω を用いて評価できる. なお, (5.7) 式で定義した γ_{it} は, 4 章のモデルでは γ_i であった. すなわち, プロモーションの効果の時間変化を許容している点で 4 章のモデルと異なる.

5.3.2 システムモデル

システムモデルは, 消費者ごとのパラメータの時間遷移を記述するモデルである. 状態空間モデルの枠組みで定式化できる (5.8) 式がシステムモデルになる.

$$\gamma_{it} = \gamma_{i,t-1} + \mathbf{w}_{it}, \quad \mathbf{w}_{it} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (5.8)$$

当該モデルは, セールスプロモーションの効果 γ_{it} が, 時間変動することを表現する. γ_{it} は前節で示したとおり, BM 次元の縦ベクトルである. \mathbf{w}_{it} は BM 次元縦ベクトルを示し, Σ は誤差の分散共分散行列 ($BM \times BM$ 行列) を示している. ここで Σ は対角行列とする. 4 章では, この部分に, セールスプロモーションの効果 γ_i が世帯のデモグラフィック情報によって説明される, 階層モデルを導入した. 一方, 本章のモデルは, 個人ごとにパラメータは設定しているものの, 世帯のデモグラフィック情報による階層化はおこなっていない点が 4 章のモデルと異なる.

5.3.3 事前分布

Ω^{-1} , Σ^{-1} には, (5.9) 式で示す事前分布を設定する. 本節以降, I_B など I に下付き添字があるものは, この次元の単位行列を示す.

$$\begin{aligned}\Omega^{-1} &\sim \text{Wishart}(\nu_{0\Omega}, V_0); \nu_{0\Omega} = M + 4, V_{0\Omega} = \nu_{0\Omega} I_M \\ \Sigma^{-1} &\sim \text{Wishart}(\nu_{0\Sigma}, V_{0\Sigma}); \nu_{0\Sigma} = BM + 4, V_{0\Sigma} = \nu_{0\Sigma} I_{BM}\end{aligned}\quad (5.9)$$

5.3.4 事後分布と推定アルゴリズム

図 5.1 には, 提案モデルの DAG(Direct acyclic graph; 有向非巡回グラフ) を示す.

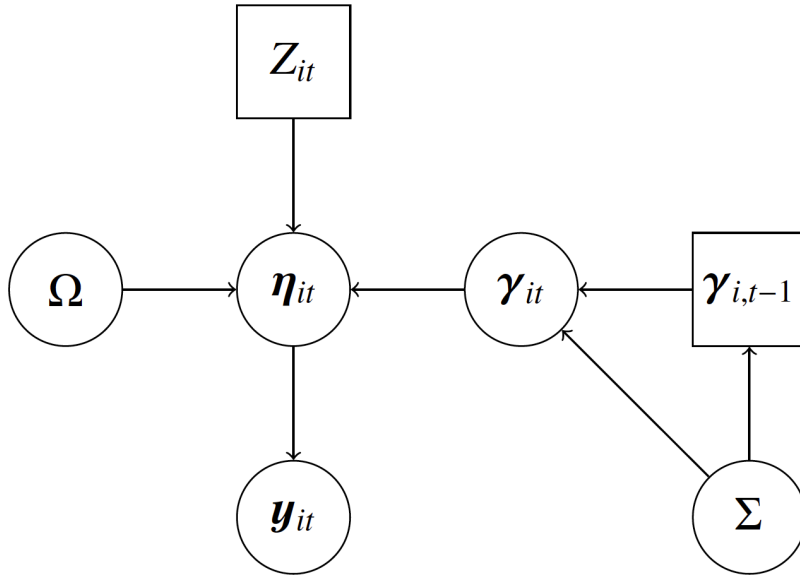


図 5.1 提案モデルの DAG

(5.10) 式が同時事後分布の分解になる.

$$\begin{aligned}&p(\{\gamma_{it}\}, \{\eta_{it}\}, \Sigma_i, \Omega | \{y_{it}\}, \{Z_{it}\}, \{\gamma_{i,t-1}\}) \\ &\propto p(\Omega) \prod_{i=1}^I p(\Sigma_i) \prod_{t=1}^T p(y_{it} | \eta_{it}) p(\eta_{it} | \gamma_{it}, Z_{it}, \Omega) p(\gamma_{it} | \gamma_{i,t-1}, \Sigma_i) \\ &= p(\Omega) \prod_{i=1}^I p(\Sigma_i) \prod_{t=1}^T p(\eta_{it} | \gamma_{it}, Z_{it}, \Omega) p(\gamma_{it} | \gamma_{i,t-1}, \Sigma_i) \prod_{m=1}^M p(y_{itm} | \eta_{itm})\end{aligned}\quad (5.10)$$

(5.10) 式の右辺にある $p(y_{itm} | \eta_{itm})$ は単変量ポアソン分布, $p(\eta_{it} | \gamma_{it}, Z_{it}, \Omega)$ は多変量正規分布の確率密度関数である. (5.10) 式において, $\prod_{i=1}^I \prod_{t=1}^T \prod_{m=1}^M p(y_{itm} | \eta_{itm})$ の部分がモデルの尤

度関数になる。本枠組みの特徴は、リンク関数をパラメータとしている点である。 η_{it} をパラメータとしてとりこむことにより、多変量ポアソン分布の尤度を独立としてとらえても、平均構造の意味で相関構造をとりこめる。すなわち、 η_{it} を発生させてしまえば、 γ_{it} 、 Ω は共役の関係を使えるようになり、その発生は既存の手法で容易に実現できる。(5.10)式において、上記の意味で $p(\eta_{it}|\gamma_{it}, Z_{it}, \Omega)$ は η_{it} の事前分布の役割を担う。事後分布からの推定アルゴリズムは付録 C に示す。

5.4 分析データの概要

使用したデータの概要は次のとおりである。分析対象とした SKU 数は 9 であり、分析対象期間は 2001 年 4 月 1 日から 2003 年 3 月 31 日の月別、24 時点のデータを使用した。また対象世帯数は 50 人である。用いたデータは 4 章と同じだが、本章では対象とする SKU 数と世帯数をそれぞれ 17 から 9 に、110 から 50 に減らしている。本章は、消費者異質性及び時間的異質性を同時に勘案可能なモデルを提案することを主眼としている。その妥当性を検証するため、世帯数と商品数を減少させ検証している。世帯数及び商品数を増やした検証は、今後の課題とする。

本モデルで目的変数となる購買データは、月別、世帯別、SKU 別に集計した。4 章と同様であるが、ここでも再度詳細を述べる。このデータは「ある世帯が、ある SKU を、1 か月に何個購入したか」を示す。カレールーは、調理される際、各世帯の嗜好に応じて、複数ブランドのカレールーが同時に用いられることがある。それゆえ、ある期間単位で見ると世帯ごとに複数の SKU を購入の対象としていることが多い。よって、SKU 間の関係性を表現できる本モデルを適用するのに適したカテゴリである。解析の対象とした世帯は、期間内のすべての月で、対象 SKU のいずれかを購入しているものとし、対象の SKU はカレールーカテゴリでシェアの大きいものを選択した。表 5.3 には、分析対象 SKU の基本統計量を示す。

本研究で用いるコーザルデータは、エンド陳列実施有無、チラシ掲載有無、価格掛率の 3 つである。用いたデータや、以下で述べる集計方法も 4 章と同様であるが、こちらも再度詳細を述べる。エンド陳列実施有無、チラシ掲載有無は、実施された日は 1、実施されない日は 0 の日別の二値データである。価格掛率は、POS データから、「売価 ÷ 最大売価」と計算する。

表 5.3 分析対象 SKU

メーカー名	ブランド名	味種名	重量 (グラム)	最大 売価	平均 売価	エンド 日数	チラシ 日数	購買 個数
メーカー A	ブランド A	甘口	240	268	176	123	8	175
メーカー A	ブランド A	中辛	240	268	168	88	14	267
メーカー A	ブランド A	辛口	240	268	176	60	13	108
メーカー A	ブランド B	甘口	200	198	165	156	8	170
メーカー A	ブランド B	中辛	200	198	168	101	11	263
メーカー A	ブランド B	辛口	200	198	168	91	8	136
メーカー B	ブランド C	甘口	200	218	180	21	2	84
メーカー B	ブランド C	中辛	200	218	174	29	2	127
メーカー B	ブランド C	辛口	200	218	174	18	2	30

本研究の目的変数の粒度は月としているため、前段のコーザルデータを加工し、月別に説明変数を作成する。表 5.4 には、説明変数の一覧を示す。価格掛率からは 2 つの変数を作成した。第一は、SKU ごとかつ月ごとの、最小の価格掛率である（自 SKU 最小価格掛率）。これは、ある月のある SKU での最大の値引き幅と言い換えられる。第二は、SKU ごとかつ月ごとに、最小の価格掛率で販売された日数をカウントしたものである（自 SKU 最小掛率日数）。この値は、最小の値引き幅で何日間販売されたかを示す。これらの変数は、世帯ごとに来店した日のみを集計対象とした。すなわち、月別、SKU 別、世帯別に算定されることになる。以降では、世帯ごとに来店した日のみを集計対象にすることを「来店日ベース」と呼ぶことにする。

エンド陳列変数は、来店日ベースでエンド陳列が実施されていた日数をカウントした（自 SKU エンド陳列実施日数）。一方、競合 SKU について、この値をすべて足し上げたものも変数とする（他 SKU エンド陳列実施日数）。

チラシは各世帯の自宅に届き、閲覧することができるので、来店日ベースでのカウントはおこなわず、その月内の実施日数をすべてカウントした（自 SKU チラシ掲載実施日数）。また、各世帯にそのチラシが配布したかどうかの情報はない。よって、同じ月、同じ

SKU であれば，すべての世帯で同じ値をとる．こちらもエンド陳列と同様に，競合 SKU をすべて足し上げたものも変数とする（他 SKU チラシ掲載実施日数）．

表 5.4 モデルの説明変数

変数カテゴリ	内容	名称
セールスプロモーション変数	自 SKU 最大価格掛率	自価格掛率
	自 SKU 最大掛率日数	自価格日数
	自 SKU エンド陳列実施日数	自エンド
	他 SKU エンド陳列実施日数	競エンド
	自 SKU チラシ掲載実施日数	自チラシ
	他 SKU チラシ掲載実施日数	競チラシ

5.5 パラメータ推定結果

パラメータは付録 C に示したアルゴリズムにより推定した．MCMC の試行回数は 100,000 回で，最初の 90,000 回はバーンインとして棄却し，最後の 10,000 回を事後分布からのサンプルとして採用した．

5.5.1 4 章のモデルとの比較

本章の提案モデルは，4 章のモデルをベースに，時間的異質性を考慮できるモデルとなっている．そこで，4 章のモデルと DIC を比較し，モデル適合の改善度合いを確認した．表 5.5 には，各モデルの DIC を示す．DIC の定義は 4 章で述べたため，ここでは割愛する．

表 5.5 各モデルの DIC

モデル名称	DIC
本章のモデル	3005.77
4 章のモデル	4263.10

結果として、本章のモデルの DIC の方が小さい結果となったが、4 章のモデルは、階層ベイズモデルの枠組みで消費者共通性を構造化し評価できる点で本章のモデルと異なる。本章のモデルは、消費者異質性は考慮しているものの、構造化はおこなっていない。本章のモデルが DIC では優っていたものの、この点で、4 章のモデルは消費者共通性の構造を評価できる示唆が得られるため、マーケティング実務における有用性は十分に担保されると考える。

5.5.2 セールスプロモーション効果 (γ_i)

図 5.2 および図 5.3 には、ある 1 世帯の、2 商品のパラメータの時間推移を示す。自ブランドの価格掛率の係数は、この世帯では負の値であり、これは値下げによって購買個数が増えることを意味する。ただ、2 商品とも時間的変動は小さい。一方で、自ブランドの価格日数の係数は、両ブランドで負の値となっている。これは、安い価格で販売する日数が多いほど購買個数が低下することと解釈できるが、これは実務的な知見とは逆の結果になっている。自ブランドのエンド陳列・チラシ掲載は、両ブランドで正の値である。これは、エンド陳列・チラシ掲載の日数が多いほど購買個数が増加することを示す。一方、競合ブランドのエンド陳列は負の値をとっており、購買個数の減少につながる結果となっている。また、競合ブランドのチラシ掲載も、負の値をとる時刻が多く、こちらも購買個数の減少につながると解釈できる。

図 5.4 から図 5.6 には、10 世帯分のパラメータの時間推移を示す。図 5.7 から図 5.9 には、時間および個人を 1 つのサンプルとして、商品ごとにヒストグラムを描いた。図 5.10 から図 5.12 には、時間ごとに 1 人を 1 サンプルとして、商品・施策ごとに箱ひげ図を用いて時系列推移を示した。すべての図に関して、紙幅の都合上、ブランド A の 3SKU のみを示した。これらの図からは、セールスプロモーション施策ごとに、個人、商品、時間それぞれの変動幅は大きく異なることが読み取れる。自価格掛率は、時間による変動がほとんどみられなかったが、商品や個人ごとに水準が大きくばらついていた。競合エンドや競合エンドは、平均的には負の値をとりながらも時間による変動幅が非常に大きい。定数項は、商品や個人による変動は大きいですが、時間的な変動はほとんどみられない。なお、4 章と同様に、セールスプロモーションが購買にどの程度影響しているかを確認した結果、本モデルでも、セールスプロモーションによらず購入される割合が一定量存在した。

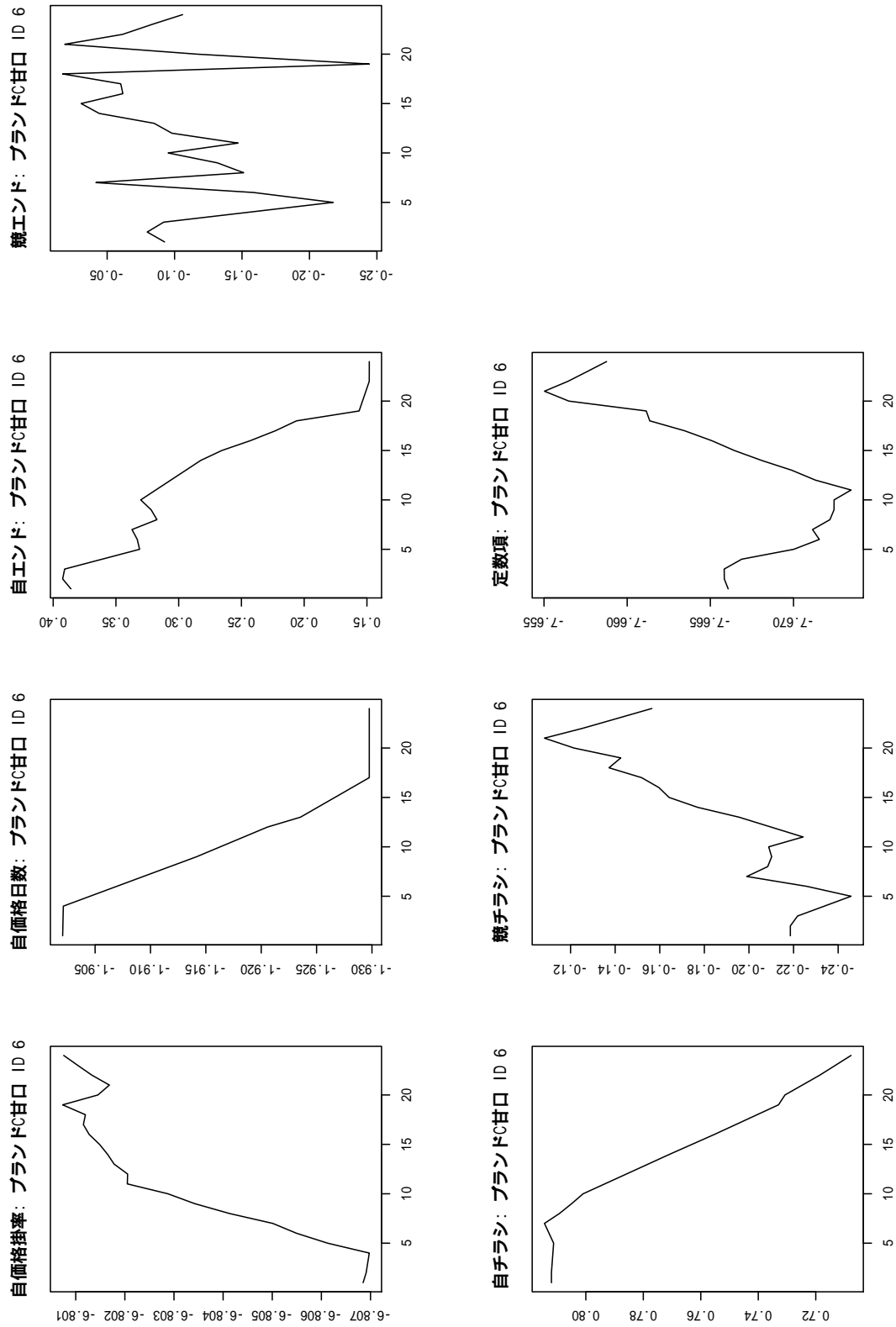


図 5.2 回帰係数 (世帯番号 6, ブランド C 甘口)

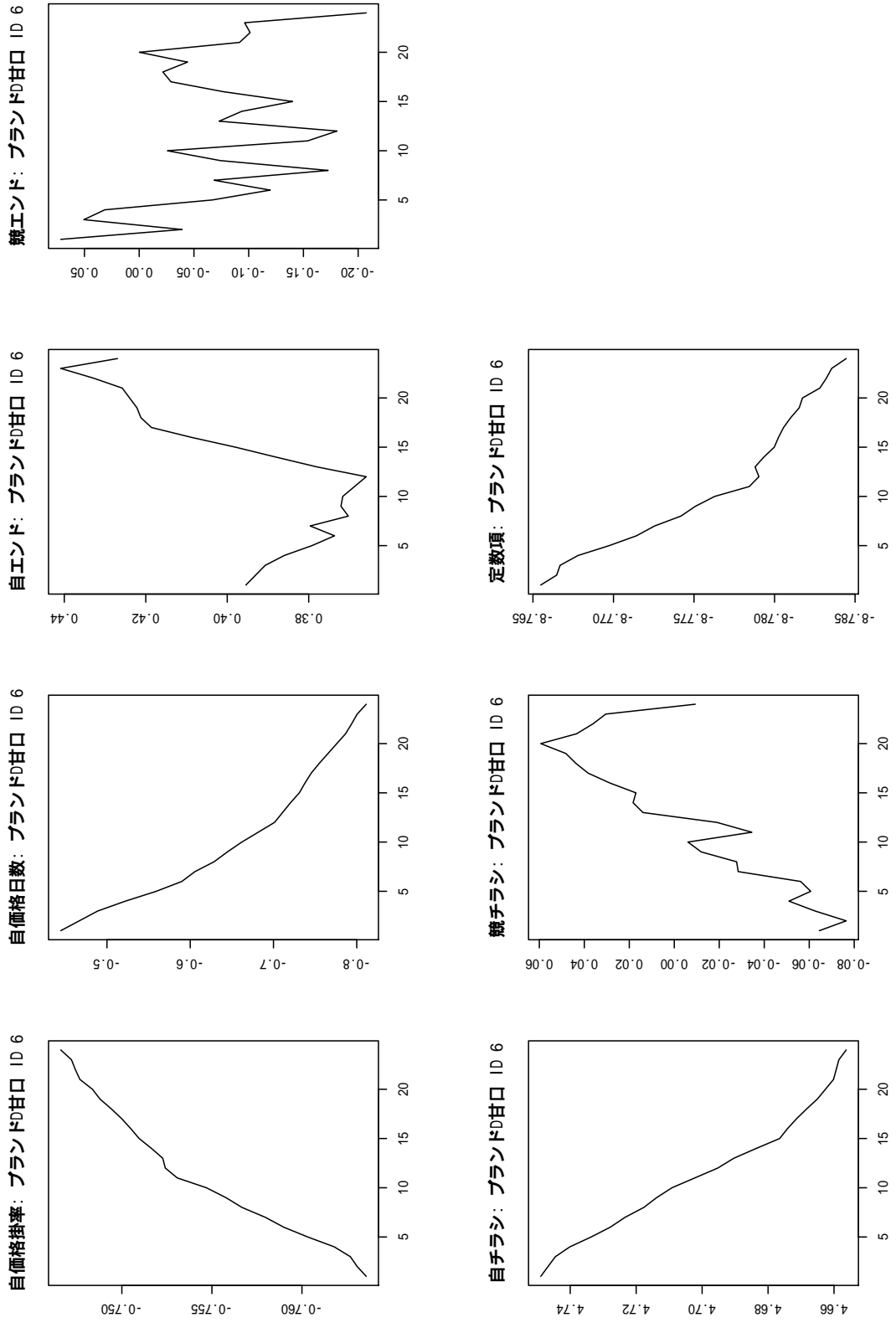


図 5.3 回帰係数 (世帯番号 6, ブランド D 甘口)

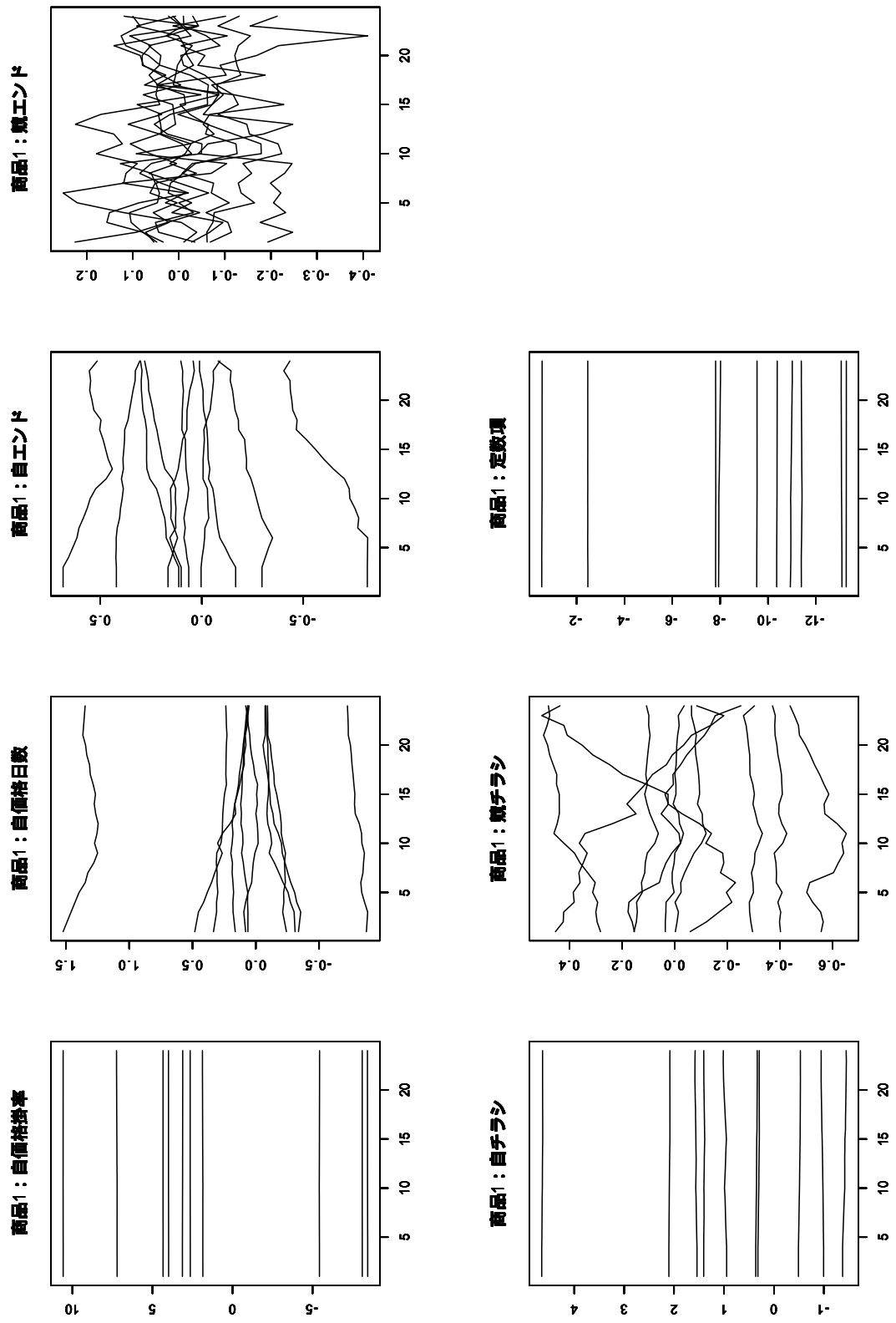


図 5.4 10 人分の回帰係数 (ブランド A 甘口)

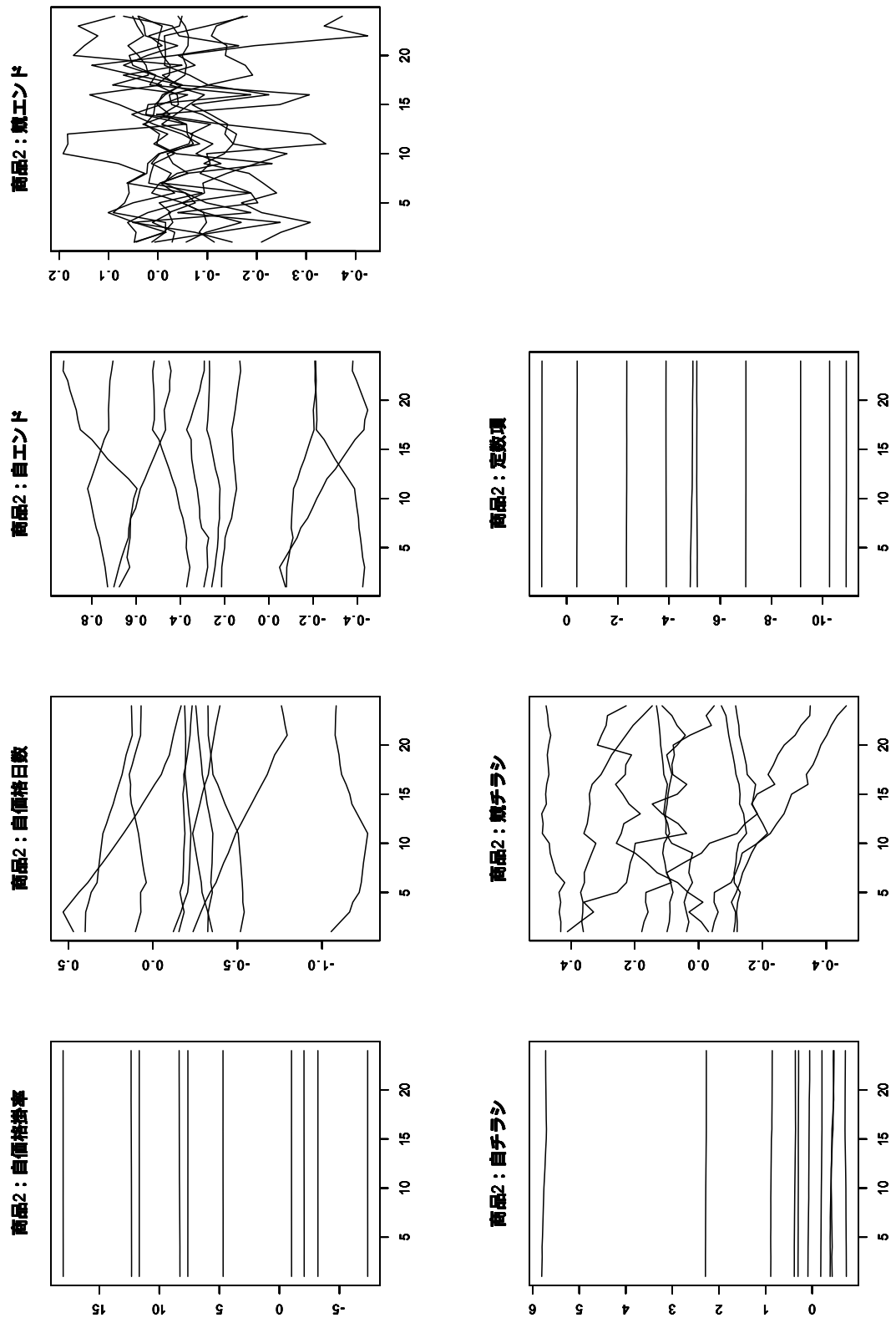


図 5.5 10 人分の回帰係数 (ブランド A 中辛)

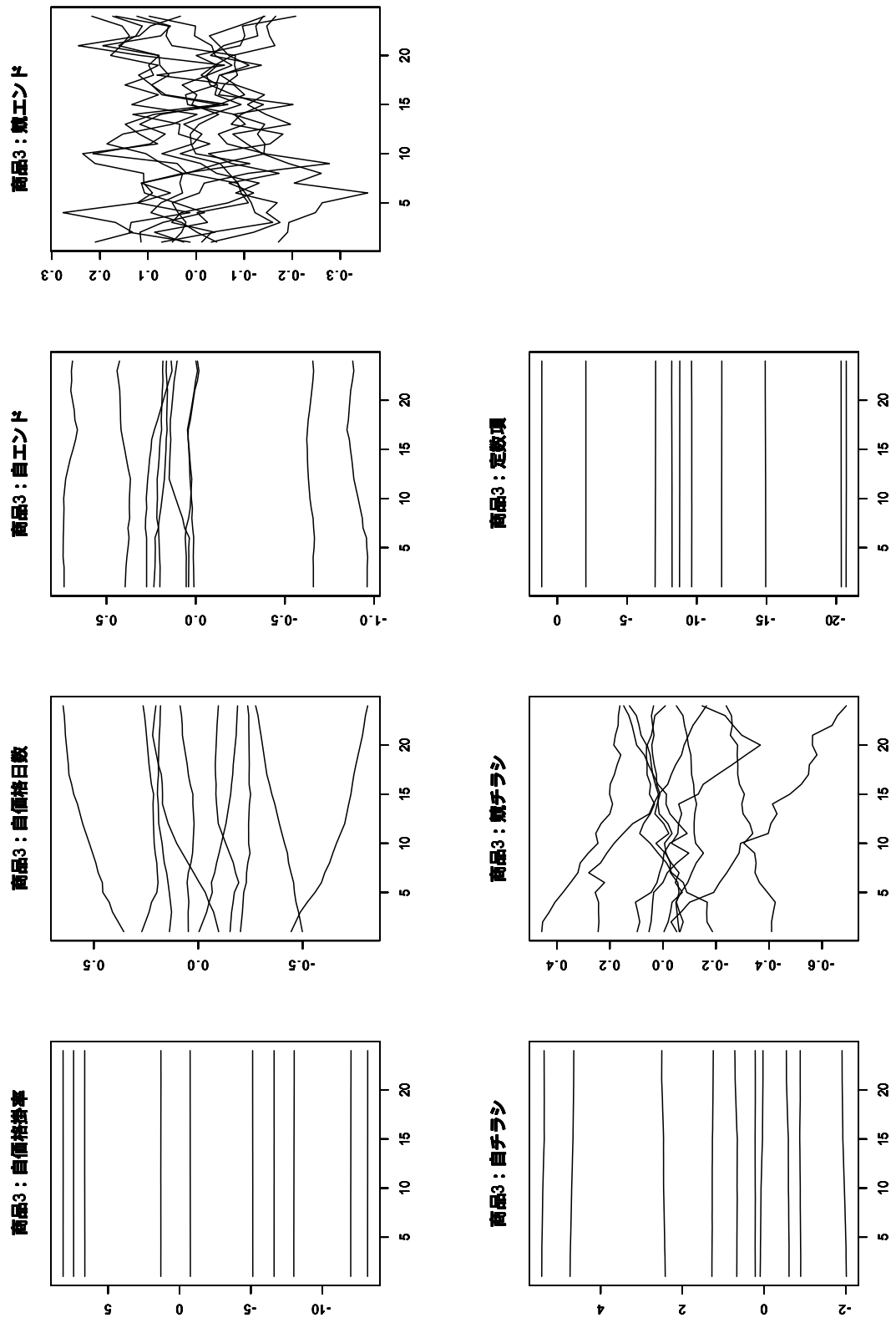


図 5.6 10 人分の回帰係数 (ブランド A 辛口)

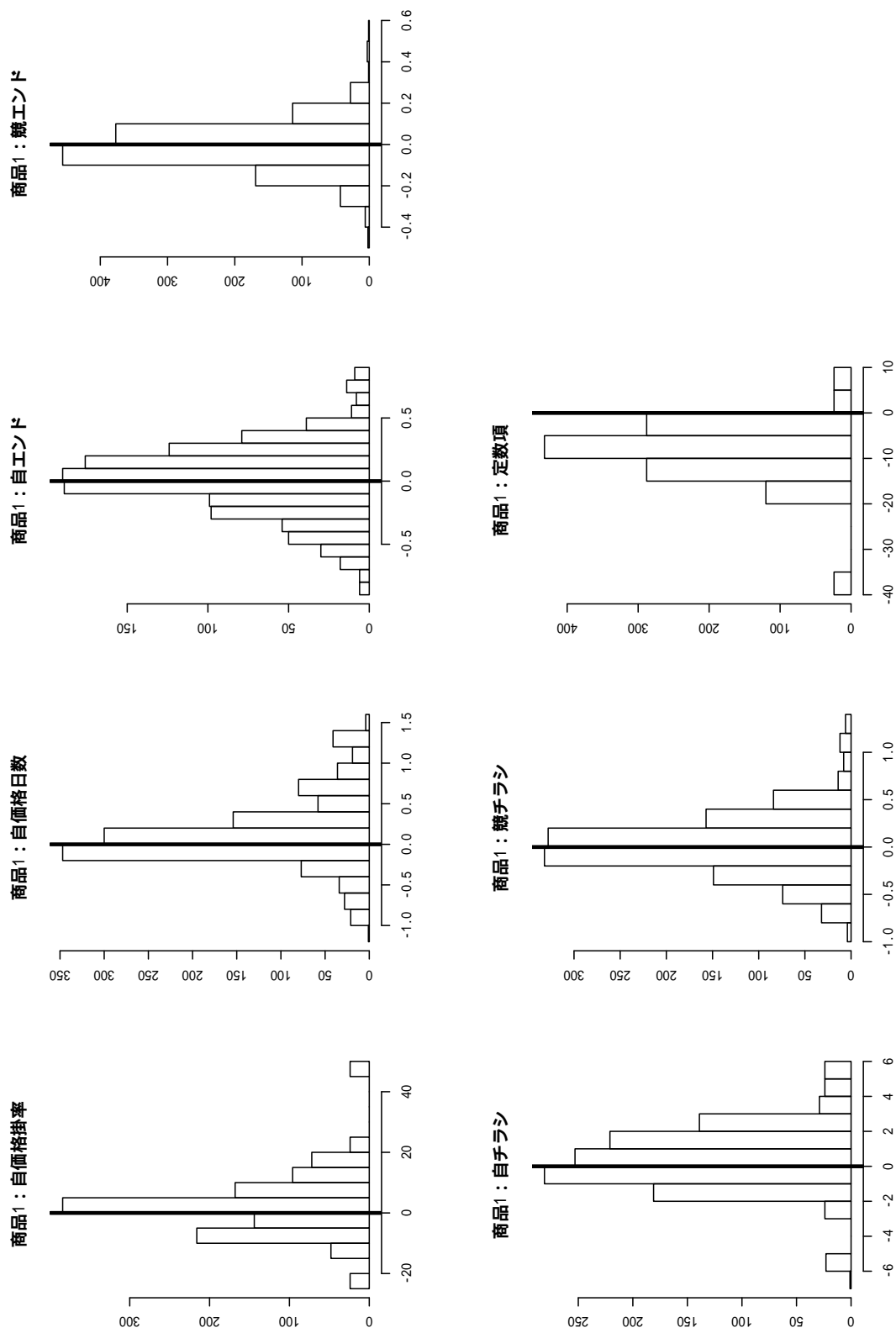


図 5.7 施策別商品別ヒストグラム (ブランド A 甘口)

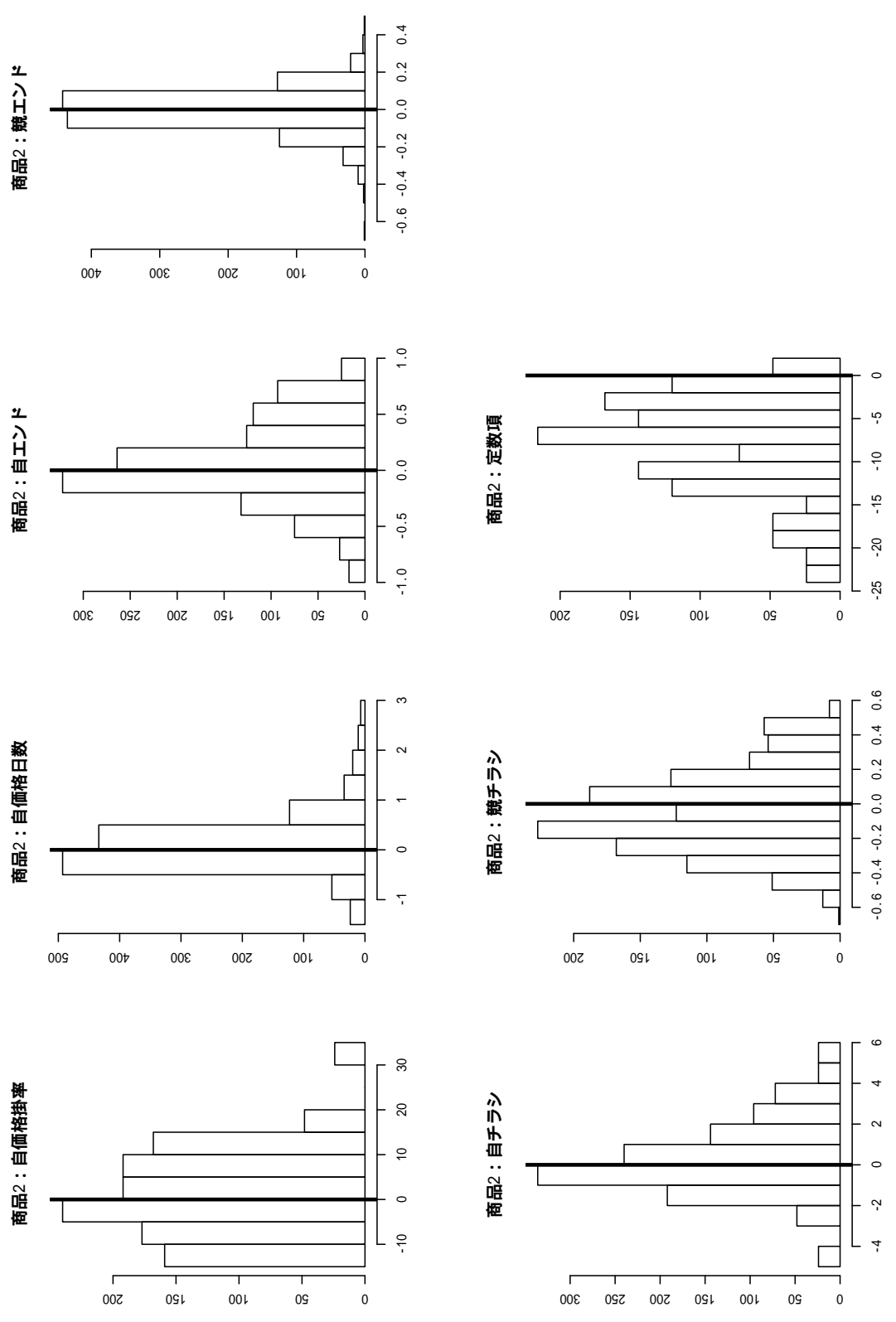


図 5.8 施策別商品別ヒストグラム (ブランド A 中卒)

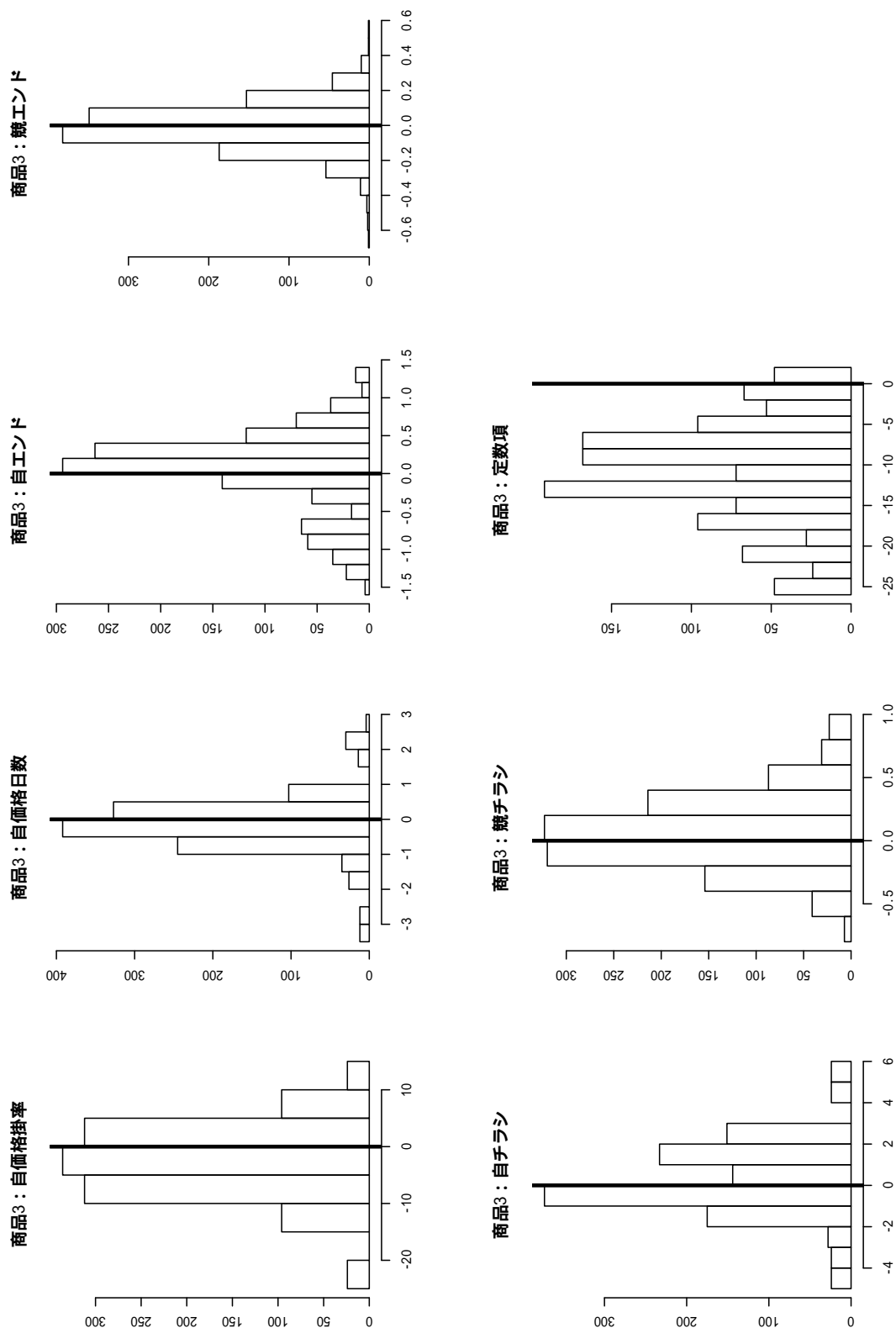


図 5.9 施策別商品別ヒストグラム (ブランド A 辛口)

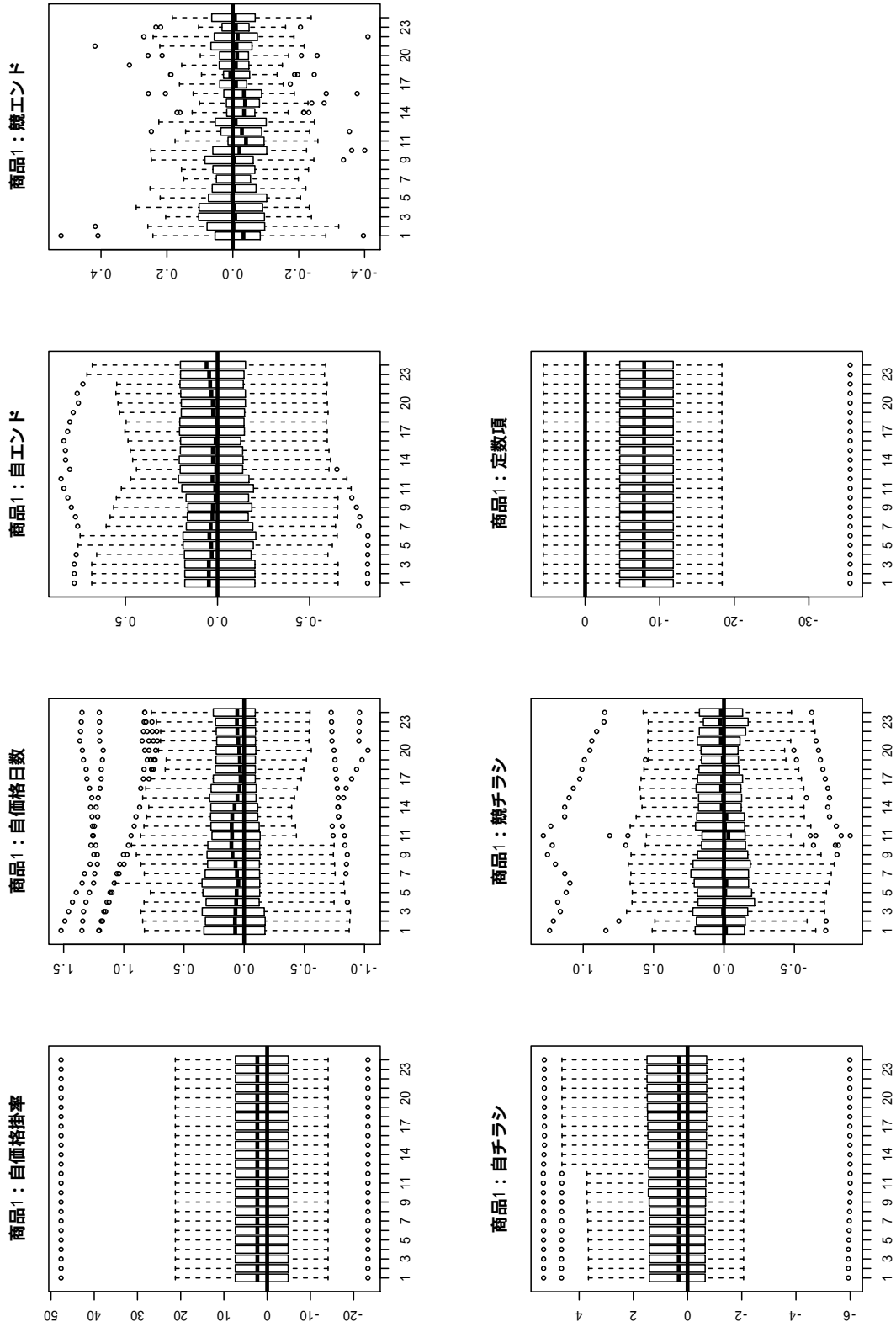


図 5.10 時系列推移 (箱ひげ図, ブランド A 甘口)

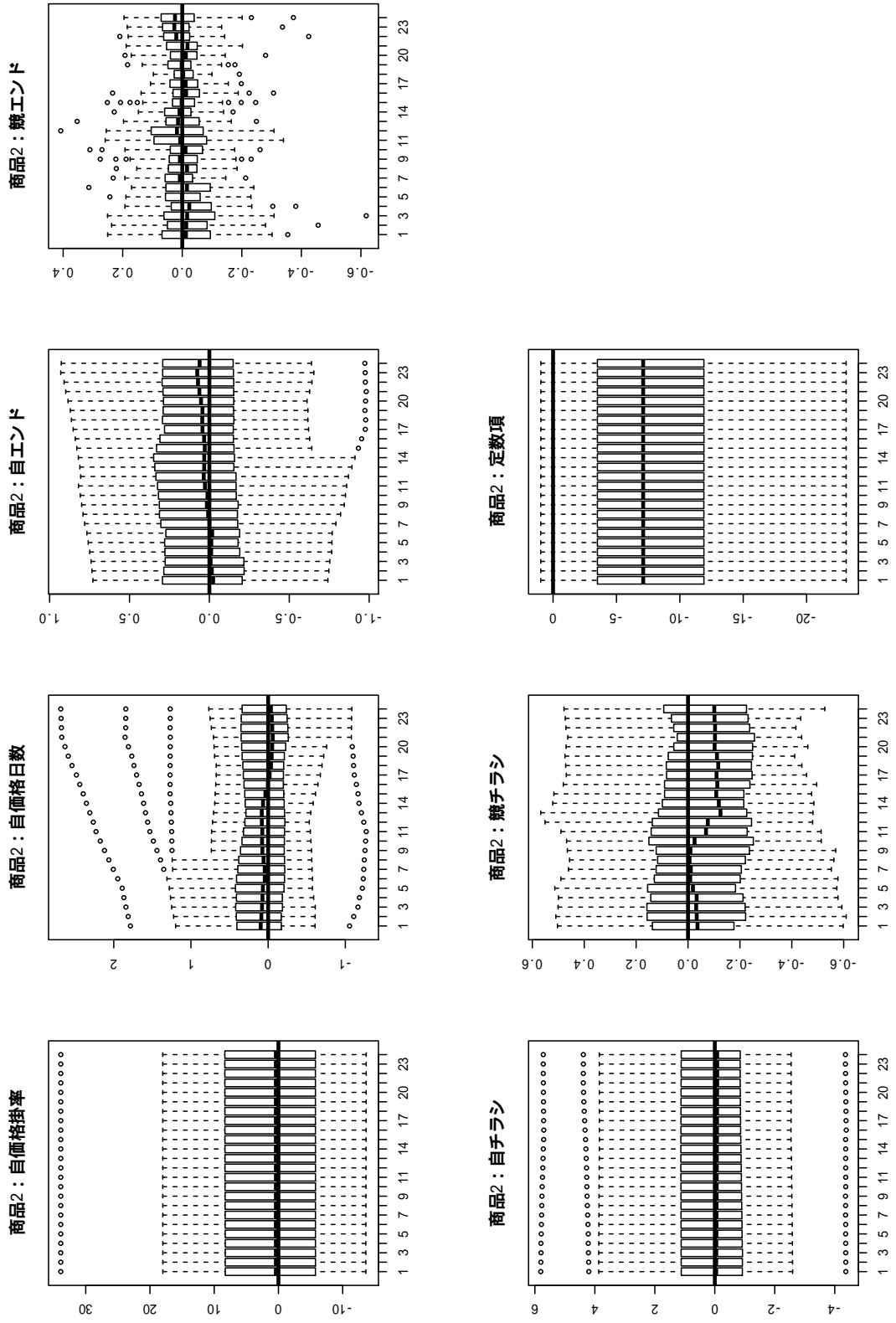


図 5.11 時系列推移 (箱ひげ図, ブランド A 中辛)

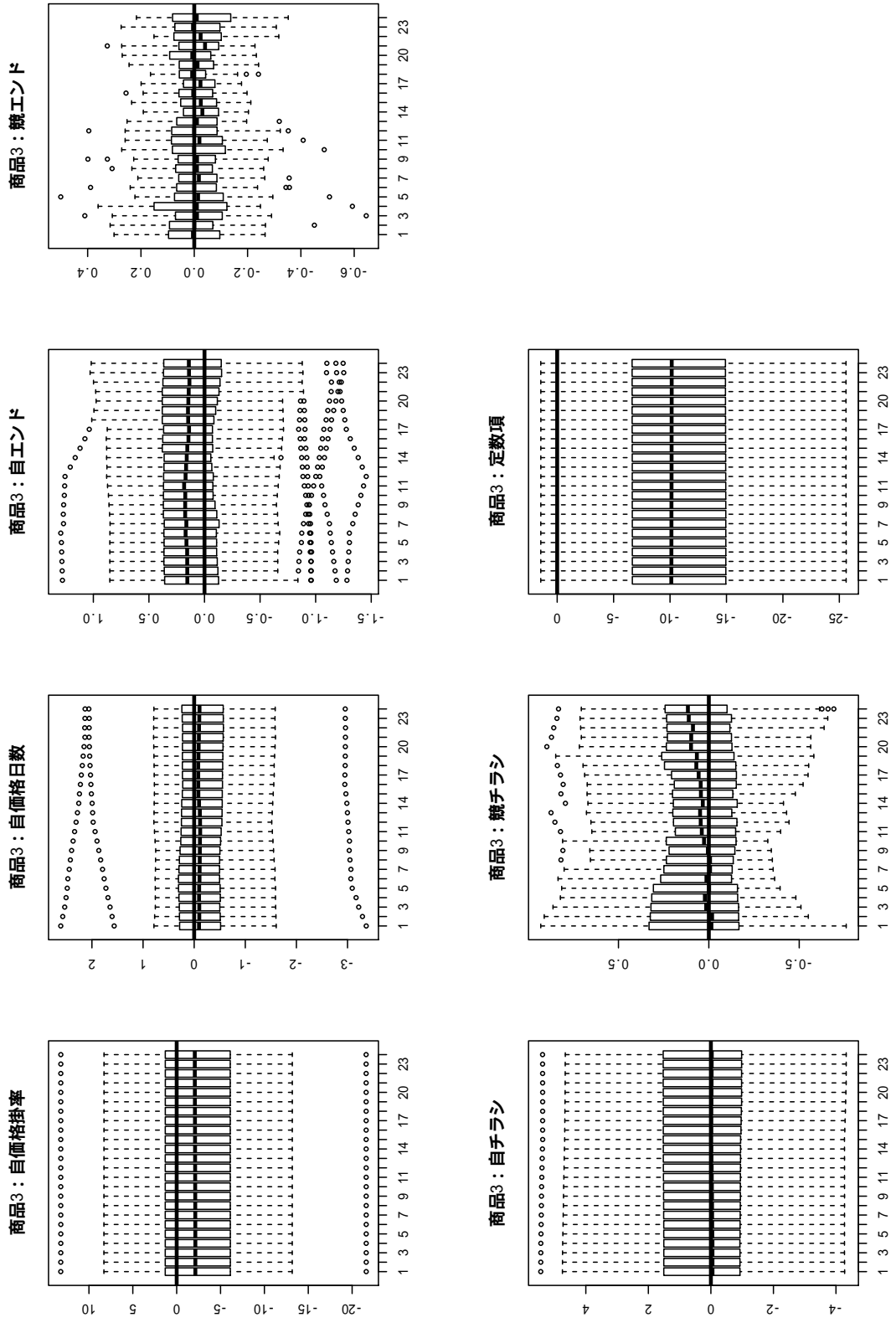


図 5.12 時系列推移 (箱ひげ図, ブランド A 辛口)

以上の結果を集約するため、このデータに分散分析を適用した。この分析により、上記の3つの観点、すなわち個人、商品、時間のうち、どの変動が優勢であるかを確認することができる。表 5.6 と表 5.7 には、分散分析の結果である F 値と P 値をそれぞれ示す。

表 5.6 分散分析の結果: F 値

区分	自価格掛率	自価格日数	自エンド	競エンド	自チラシ	競チラシ	定数項
個人	10.350	13.194	3.071	6.191	8.687	11.125	8.357
商品	7.999	93.850	0.859	0.05	86.448	29.913	348.625
時間	0.000	0.004	0.660	0.088	0.020	9.321	0.008

表 5.7 分散分析の結果: P 値

区分	自価格掛率	自価格日数	自エンド	競エンド	自チラシ	競チラシ	定数項
個人	0.001	0.000	0.080	0.013	0.003	0.001	0.004
商品	0.005	0.000	0.354	0.822	0.000	0.000	0.000
時間	0.988	0.952	0.417	0.766	0.888	0.002	0.928

表 5.7 からは、施策によって効果の変動要因が異なっている可能性が示唆された。具体的には、価格に関連する施策は個人と商品による変動が優勢であるという結果が得られている。これは、個人や商品により価格プロモーション効果が異なることを示唆しており、施策実施時も、この点を考慮することが必要であるといえる。またエンド陳列(自、競合)は、個人の変動が優勢であるという結果になっている。ここからは、商品や時間よりも個人ごとに効果が異なることが示唆される。チラシは、自商品のチラシは個人と商品、競合チラシは時間でも変動するという結果になっている。競合のチラシの実施時期によって、自社商品の売上に与える影響が異なることを示唆している。定数項は、個人や商品による変動が優勢であり、時間による変動は大きくないという結果が得られた。

ここまで分散分析の結果をまとめたが、時間的異質性のパラメータには平滑化事前分布という強い制約がおかれているため、他の2つと比較して変動が小さく抑えられている可

能性に留意する必要がある。

以上の結果から導かれる実務への示唆をあげる。価格は商品や消費者による変動が大きいことから、クーポンなどを用いて、商品ごと、消費ごとに価格をコントロールすることが有効であると考えられる。また、チラシも商品によって効果が異なることから、チラシに掲載する商品は吟味する必要がある。

5.5.3 相関係数行列 (Ω)

4章と同様に、推定の結果得られた分散共分散行列 Ω から SKU 間の距離を計算し、クラスタリングを行った。具体的な手法は4章と同じだが、参考までに再度説明する。分散共分散から相関係数を算出し、1から相関係数を引いたものを距離とし、この距離の行列から、最遠隣法によって階層的クラスタリングを行った。その結果を図5.13に示す。図5.13において、濃淡のある部分では、色が黒に近い組み合わせほど、SKU間の距離が近いことを表す。また、左部、上部の線は、階層的クラスタリングの結果をデンドログラム (Dendrogram) で示したものである。この距離は、セールスプロモーションの影響を排除したうえでのSKUの各ペアの同時購買されやすさと解釈できる。例えばある2つのSKUの距離が近い場合、これらのSKUは期間併買される傾向があることを示唆する。

図5.13をみると、対象SKUは大きく4つのグループに分けられた。左下部の濃い色の正方形に該当するブランドA甘口とブランドB甘口のグループ、その右上に位置する、ブランドB辛口とブランドC辛口のグループ、さらにその右上に位置する、ブランドC甘口、辛口とブランドA中辛のグループ、最後に右上部のブランドA辛口とブランドB中辛のグループである。この結果を解釈すると、まず、同じ味種が期間併買されやすい傾向にあることがわかる。例えば、ブランドB辛口とブランドC辛口のグループ、ブランドB辛口とブランドC辛口のグループなどである。ただし、味種が同じであるだけでは同じグループには属していない。以上の知見から、4章と同様に、実務への示唆を整理することができるが、内容としては同じものであるため割愛する。

5.6 おわりに

本テーマでは、第2のテーマで提案した、見かけ上独立なポアソン回帰モデル (SIPRM) を動的に拡張し、状態空間モデルの枠組みでモデル化する手法を提案した。実証分析で

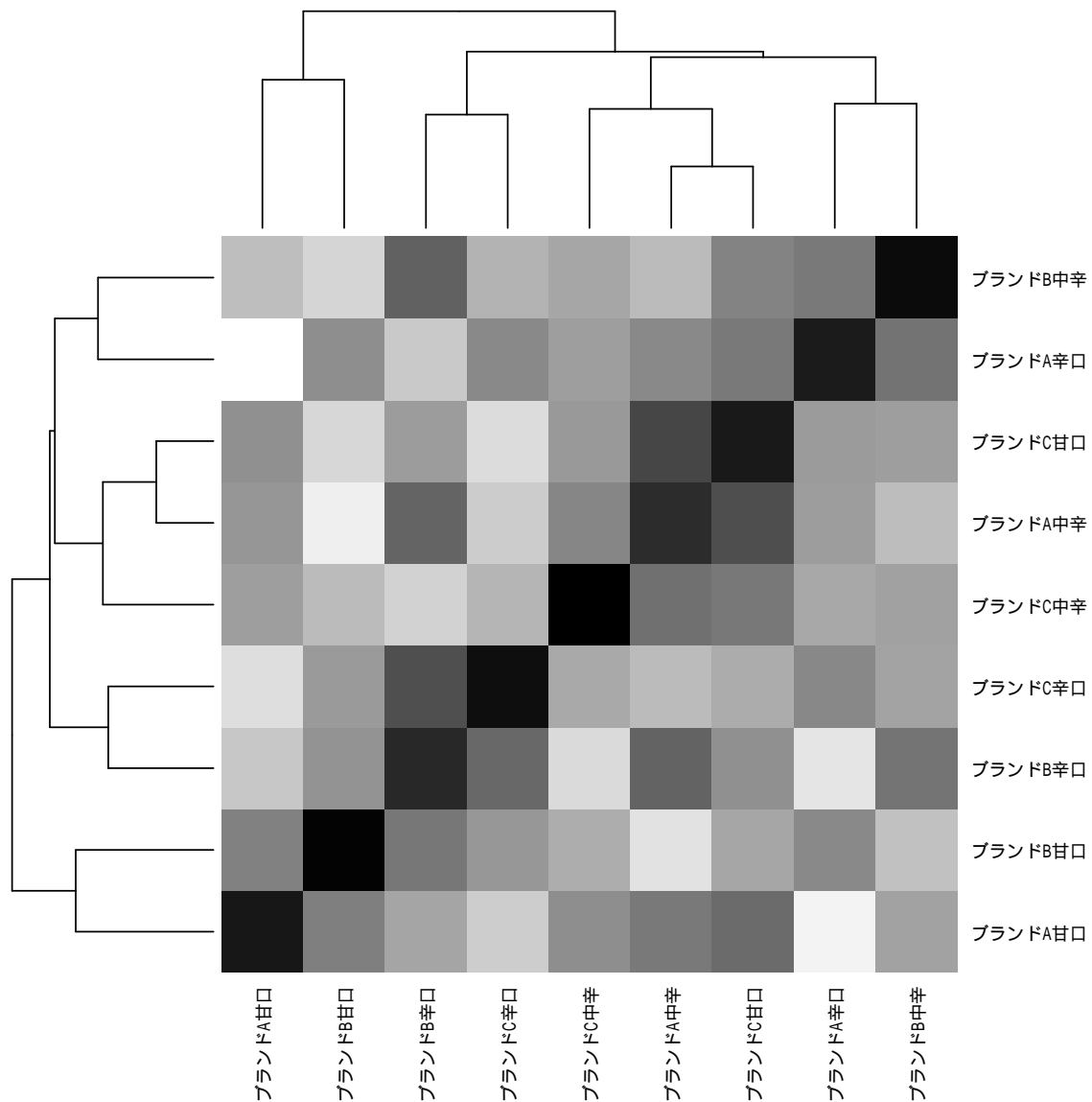


図 5.13 距離行列

は、ID 付 POS データから集計できる個人ごとの各 SKU の販売個数を目的変数とした検証をおこなった。この際、9 つの SKU を同時にモデル化し、かつ個人ごとのモデルとすることで、時間的異質性と消費者異質性を同時に評価した。これにより、セールスプロモーションの効果を SKU ごと、時間ごとかつ個人ごとに得ながら、SKU 間の競争構造の評価もおこなった。また、得られた回帰係数に対して分散分析を適用することで、プロモーション施策ごとに、時間、個人、SKU のどの変動が優勢であるかも評価した。先行研究には、時間、個人、SKU の 3 つの観点からプロモーション施策の効果を評価したものはなく、この点でセールスプロモーション効果構造の一端を明らかにすることができたと考え

ている。また、本モデルの結果から、マーケティング実務への示唆を得ることもできた。

今後の研究の方向性として2点あげておきたい。1点目として、今回は2階層としたモデルを3階層に拡張することが考えられる。具体的には、1層目のモデルでのセールスプロモーションの係数に対して、2層目もモデルでさらに説明変数を加える。この説明変数としては、第1のテーマのように、テレビ広告量を含めることが考えられる。さらに3層目には今回のモデルと同様に平滑化事前分布を適用し、その時間変動を許容する。

今回のような2層の、階層化しない平滑化事前分布の導入は、先行研究の一部で議論の対象になっている。具体的には、前述したように「滑らかに変動するという制約で得られたパラメータは、欠落した説明変数や誤ったモデル仕様の結果として発生した残余に影響を受けた人工的な値である」(阿部, 2008), 「動的個人モデルのパラメータはランダムウォークで記述されており、どのような要因によって変化するのかを知ることができない」(里村, 2008)といった指摘がなされている。一方で、阿部(2008)は、さらに「平滑化事前分布の問題点を回避し、マーケティングで有用な動的知見を抽出するには、市場反応の動的進展に影響する要因を用いて、階層モデル化することが一つの方策だ」と述べており、上記のモデルはこの点に対応できる。

2点目として、個人の属性データなどを用いてモデルを階層化することで、消費者異質性をより精緻に表現することが可能となる。本テーマでは、個人のパラメータは階層化せずに、個人ごとにモデルとして推定し、その異質性を表現した。その点で、消費者異質性に関しては拡張の余地がある。具体的には、個人のパラメータを階層化し、そこに個人の属性や行動特性などを加えることで、より精緻に個人ごとのパラメータを得られることが期待される。なお、このように自由度高くモデルを拡張できるのは、動的な見かけ上独立なポアソン回帰モデル(DSIPRM)による大きなメリットの一つである。

第 6 章

結論

本研究では、1章に問題意識としてあげた4点を、3つの研究テーマに落とし込んで議論を進めてきた。この4つの問題意識とは、消費者異質性を評価する階層ベイズモデル、時間的異質性を評価する状態空間モデル、商品カテゴリ内の競争状態を表現する多変量モデル、およびプロモーション効果測定、であった。それぞれの観点と研究テーマとの関連を表6.1に再掲する。本章では、最初にそれぞれの研究テーマの結果を整理し、その後、統合的な結論と貢献を整理し、最後に本研究の限界と今後の発展について述べる。

表 6.1 研究テーマ (表 1.2 の再掲)

実務課題	問題意識	テーマ 1	テーマ 2	テーマ 3
マイクロマーケティング	消費者異質性の考慮		○	○
製品ライフサイクルの高速化	時間異質性の考慮	○		○
競合商品の増加	多変量モデル	○	○	○
プロモーション効果	プロモ効果モデル	○	○	○

6.1 各テーマの結論

第1の研究テーマでは、時間的異質性を考慮し、複数の商品におけるセールスプロモーションと広告の同時効果をモデル化した。モデルの枠組みとして3階層の状態空間モデルを用いた。具体的には、1層目はセールスプロモーションの売上に対する効果を説明するモデル、2層目はそれらの効果をテレビ広告量で説明するモデル、3層目はモデル全体を

時間変動させるために、平滑化事前分布を導入した。パラメータ推定には、カルマンフィルタと固定区間平滑化を用いた。

本テーマの新規性を整理する。マーケティングの観点では、テレビ広告とセールスプロモーションの同時的かつ動的効果のメカニズムの一端を明らかにすることができた。特にテレビ広告は、先行研究では売上への効果が明確には分かっていなかったが、セールスプロモーションを通じて購買に影響を与える間接効果の存在が示唆された。また、広告ストックと参照価格を潜在変数としてモデルに含めた結果、自商品の広告ストックが多いほど、また参照価格が高いほど、セールスプロモーションの効果は強くなる傾向が見られた。これは、消費者が自商品のテレビ広告を見た記憶を強く持っているほど、あるいは、自商品の価格が高いと感じているほど、セールスプロモーションの売上促進効果が高まると解釈することができる。他方で、競合商品に関しては、広告ストックが多いほど、また参照価格が高いほど、値引きによる売上現象の効果が強まる傾向があった。すなわち、消費者が競合商品のテレビ広告を見た記憶を強く持っているほど、あるいは競合商品の価格が高いと感じているほど、競合商品の値引きにより自商品の売上がより大きく低下するといえる。

マーケティング実務において、セールスプロモーションの費用はメーカーの持ち出しであることが多く、一般的には広告と同様、その実施はメーカーでコントロールできる場合もある。それにもかかわらず、これらは統合的に管理されず、個別に計画されることが多い。この理由のひとつは、それぞれの目標指標が異なる点にある。しかし、両者を売上という同一の指標で統合的に管理できれば、それぞれの施策の効率化につながることは明らかである。その意味で、広告とセールスプロモーション、それぞれの売上に対する効果を明確にした本研究の結果は、マーケティング実務での活用につながる。また、本研究の副次的な効果として、広告のアカウントビリティ、すなわち広告を出稿する理由を、売上に対する効果を根拠にしてステークホルダーに提示することも可能となる。

第2の研究テーマでは、消費者異質性を考慮してセールスプロモーションの効果をモデル化した。またモデルはSKUレベルでの購買個数を目的変数とした多変量モデルとすることで、SKU間の競争構造も同時に表現した。モデルの枠組みとしては、階層ベイズモデルの枠組みで、1層目はセールスプロモーションの購買個数に対する効果を説明するモデル、2層目はそれらの効果を世帯変数によって説明するモデルとした。本研究のモデルは、多変量ポアソン分布を見かけ上独立と仮定し、単変量のポアソン分布の積として表現

する。さらに個々のポアソン分布パラメータの対数(リンク関数)をパラメータととらえデータ拡大により発生させる。その上で、それらリンク関数ベクトルを目的変数ベクトルとした多変量回帰モデルによって表現し、種々の推論を行った。

本テーマでの新規性をあげる。第1は、既存研究には存在しない、消費者の異質性を考慮した多変量カウントデータを表現可能なモデルを提示した点である。第2は、本テーマでは、17SKUを多変量モデルでモデル化したが、これほど多くの商品を同時にモデル化した研究は少ない点である。1章で述べたとおり、一つの商品カテゴリには、SKUレベルでみると非常に多くの商品が存在することが一般的であるが、それをモデル化することは、先行研究で提示されたモデルでは困難だった。

提案モデルからは、いくつかの重要なマーケティング上の知見を得ることができた。具体的には、セールスプロモーションの効果がSKUや世帯ごとに得られた点や、SKU間の競争構造(期間併買)の傾向を把握できた点である。セールスプロモーションは、自商品の価格掛率、競合商品のエンド陳列、競合商品のチラシ配布が、購買個数に強く影響するという結果が得られた。またこの効果には世帯によって差異があり、この差異は対象商品カテゴリの購買頻度、客単価および来店頻度によって生じていることが示唆された。SKU間の競争構造の結果からは、同じブランドの複数の味種は期間併買されやすいことや、期間併買されやすいSKUのグループが存在することも示唆された。ここからは、セールスプロモーションの実施をより戦略的におこなうための知見が得られた。

本テーマで提案したモデルは、競合商品の数が多い場合でも、ギブスサンプリングやM-Hサンプリングなどの既存手法を用いてパラメータ推定がおこなえる。このモデルを、見かけ上独立なポアソン回帰モデル(Seemingly Independent Poisson Regression Model; SIPRM)と呼んだ。提案モデルでは、一般的なカウントデータを表現する分布(多変量ポアソン分布や多変量負の二項分布)を仮定したモデルよりも、モデルの拡張性が高い。例えば、5章に示したような、多変量カウントデータモデルの動的拡張などをイメージしてもらえればよい。この点で、今後のマーケティング研究やそれ以外の分野でも広く用いることができると考えている。

第3のテーマでは、時間と消費者の異質性を考慮して、セールスプロモーションの効果をモデル化した。本テーマでは、第2のテーマで提案した、見かけ上独立なポアソン回帰モデル(SIPRM)を動的見かけ上独立なポアソン回帰モデル(DSIPRM)に拡張し、各SKUの販売個数ベクトルを目的変数ベクトルとした多変量カウントデータのモデルを構築し

た。この際、9つのSKUを同時にモデル化し、かつ個人ごとのモデルとすることで、時間的異質性と消費者異質性を同時に評価した。これにより、セールスプロモーションの効果をSKUごと、時間ごとかつ個人ごとに得ながら、SKU間の競争構造の評価もおこなった。また、得られた回帰係数に対して分散分析を適用することで、プロモーション施策ごとに、時間、個人、SKUのどの変動が優勢であるかも評価した。

本テーマの新規性としては、多変量のカウントデータに対して、消費者異質性と時間的異質性を同時に取り込むことで、時間、個人、商品の3つの観点でセールスプロモーションの効果を評価したことである。先行研究には、本研究のように多数のブランドの競争状態を表現しながら、個人ごとにセールスプロモーションの動的効果をとらえようとした研究は存在しない。この点で、本研究はセールスプロモーションの効果測定において新たな知見を得ることができた。

6.2 統合的な結論とマーケティング研究への貢献

本節では、3つの研究テーマの結果から、本論文としての結論をまとめる。本論文の目的は、市場を構成する3つの重要な軸、すなわち、消費者の異質性、時間的異質性、競争構造の観点から、プロモーション活動の効果構造に関する統合的なモデルを提案し、そこからマーケティング実務に有用な知見と示唆を得ることであった。以下に、3つのテーマを通じて得られた結論をまとめる。

セールスプロモーションは売上に影響を与える。特に値引きの影響が大きい(テーマ1,2,3)。3つのテーマすべてで、値引きの効果は顕著に示された。一方、それ以外のセールスプロモーション施策は、テーマによって結果が異なった。

広告はセールスプロモーションを通じて売上に影響する(テーマ1)。また広告は、直接売上につながると考えるよりも、セールスプロモーションを通じて売上に影響を及ぼすと考えるほうが妥当であることも示唆された。

セールスプロモーションの効果は消費者ごとに異なる(テーマ2)。テーマ2では、セールスプロモーションの効果に対して、消費者異質性を考慮するモデルとしないモデルを比較した結果、前者が支持された。これは、先行研究の多くで得られている結論と同様であり、本研究でもそれを追認する結果となった。

広告やセールスプロモーションの効果は時点ごとに異なる (テーマ 1,3). テーマ 1 とテーマ 3 では, 時間的異質性を評価するモデルを提案した. その結果, 効果が動的に変動することが確認された. これは, 広告やセールスプロモーションの同時的な効果, セールスプロモーション単独の効果, 両方で観察された. これらより, プロモーションの効果は, 動的に変動しうることが示唆された.

SKU レベルでの競争構造が存在する (テーマ 2,3). テーマ 2 とテーマ 3 では, 多変量カウントデータを目的変数とし, それらが相関構造を持つモデルをした. 今まで述べてきたとおり, この相関構造は, マーケティング観点では競争構造と解釈できる. テーマ 2 では, 競争構造を持たないモデルとの比較において, 提案したモデルが支持される結果となった. これは, 市場に SKU レベルでの競争構造が存在することが示唆される結果と解釈できる.

以上, 3つのテーマからの統合的な結論を述べたが, 消費者異質性や時間的異質性を評価できるモデルのほうが有用であるという結論は, 先行研究の多くでも得られており, 本研究の結論もそれに沿ったものとなっている. 一方で, SKU レベルでの競争構造や, 広告とセールスプロモーションとの同時効果については, まだ先行研究では知見の蓄積が進んでおらず, この点でこれらの研究は, マーケティング研究において新たな知見を提供するものになったと考える.

6.3 モデリング観点での貢献

3つのテーマを通じて提案したモデルは, それぞれ, 今後のマーケティング研究に活用できるモデルの枠組みを提案した. テーマ 1 では, 3階層状態空間モデルの枠組みで, 2つの関心のあるマーケティング施策の同時効果を, 時間的異質性を含めて評価できるモデルを提案した. 先行研究では, このようなモデルは提案されていない. 本研究では, 広告とセールスプロモーションに着目したモデルとしたが, これ以外に動的かつ同時的な効果をもつ可能性のあるマーケティング施策に関して本モデルを用いることで, 今までにない新たな知見を獲得できることが期待される.

テーマ 2 では, 多変量カウントデータを目的変数とした階層ベイズモデルを提案した. 2章で述べたとおり, このようなモデルは先行研究では確認されず, 新たなモデルの枠組みを提案するものとなった. 本テーマでは, このモデルを用いて, 消費者異質性の仮定の

もとでのセールスプロモーションの個人ごとの効果を評価した。また同時に SKU 間の競争構造も表現するモデルとした。このモデルでは、パラメータの推定方法として、ポアソン回帰におけるリンク関数をパラメータととらえてデータ拡大を用いた。提案したモデルは、目的変数の次元が高い場合でも、効率的にパラメータ推定がおこなえる。このモデルを、見かけ上独立なポアソン回帰モデル (SIPRM) と呼んだ。このモデルでは、観測変数には単変量のポアソン分布を仮定するが、リンク関数の分布に多変量正規分布を仮定して観測変数の系列間の相関を表現している。この点で、モデルの拡張性が高い。具体的には、階層ベイズモデルに適用する場合に、正規分布は多くの分布と共役な関係であるため、パラメータの推定が効率的に実現できる。また、状態空間モデルに適用する場合、正規分布であればカルマンフィルタが利用できる。カルマンフィルタによるパラメータの推定は極めて容易である。テーマ3のモデルがこれに該当する。

今まで述べてきたとおり、マーケティング実務では、競合商品が多数存在することが一般的である。その競争状態をモデル化する際に、競争状態を多変量正規分布で表現できる本モデルの枠組みは非常に有用であると考えられる。

テーマ3では、SIPRMの枠組みで、時間的異質性、消費者異質性、SKUレベルでの競争構造の3つを同時に取り込んだモデルを提案した。本モデルの枠組みにより、市場を捉える3つの軸である、時間、消費者、商品を同時に扱うことが可能となるため、今まで捉えられなかった市場の複雑な構造の解明につながることも期待される。

6.4 実務への貢献

本研究の目的の一つとして、マーケティング実務への示唆を提供し、マーケティング施策の高度化への貢献を目指すと述べた。この目的にしたがって、本項には本研究の実務に対する貢献を整理する。

広告プランニングの効果向上。広告とセールスプロモーションは、これまでは目標指標の違いから、連動して施策をおこなうことが難しかった。しかし、テーマ1で得られた、広告とセールスプロモーションの同時的効果の関係をを用いることで、売上を目的指標として広告とセールスプロモーションの計画を同時に立てることが可能になる。これは、企業のプロモーション計画の高度化につながる。

広告のアカウントビリティへの対応。岸他 (2000) で「広告のアカウントビリティ」すなわち「なぜ、その広告を出稿しなければならないのか」という問いの存在が指摘されている。テーマ 1 では、広告の売上に対する効果を明らかにした。この結論により、上記の問いに対して今まで以上に明快な答えをステークホルダーに提示できる。

低コストでの広告効果分析が可能。広告効果分析は、学術研究や実務において、シングルソースデータを用いておこなわれることが多い。このシングルソースデータは、必要に応じて都度調査によって取得されるため、データの取得費用が膨大になる。一方、テーマ 1 では、POS データとテレビ視聴率データという、日々自動で取得されているデータを用いている。これらのデータは入手費用を低く抑えられるため、提案したモデルはコストの面で優位性がある。

世帯ごとにセールスプロモーションが実施できる (ワン・トゥー・ワン・マーケティング)。テーマ 2 およびテーマ 3 では、世帯ごとにセールスプロモーションの効果を評価した。この結果を用いることで、世帯ごとにセールスプロモーションを実施することが可能になる。エンド陳列とチラシは世帯ごとの施策は難しいが、値引きでは、レジで発行されるクーポンなどを用いて世帯ごとの提示価格を擬似的にコントロールできる。この方法により、価格に対する反応が強い世帯のみにクーポンを発行することなどが考えられる。

SKU 間の競争構造を考慮したセールスプロモーション計画を立てられる。テーマ 2 およびテーマ 3 で、SKU 間の競争構造を表現することができた。この結果を用いることで、セールスプロモーション施策の効率化を図ることができる。この例を示す。競合商品ではあるが、自社商品と併買される傾向にある商品がセールスプロモーションの対象となっていた場合、自社商品でセールスプロモーションをおこなう必要はない。このようなアプローチにより、セールスプロモーション費用の軽減を図ることが可能になる。

セールスプロモーションを実施するのに適したタイミングを知ることができる。テーマ 1 およびテーマ 3 では、セールスプロモーションや広告の効果の時間変化を把握することができた。この結果から、効果が高い時期にプロモーションを実施することで、より高い効果を期待できる。特にセールスプロモーションであれば、プロモーション実施時期の調整がしやすいため、より有効である。

6.5 本研究の限界と今後の課題

ここまで、本研究の結論や成果を述べたが、最後に本研究の限界と、今後の研究の方向性を整理する。

消費者異質性および時間的異質性の構造を同時に評価できるモデルの導入。2章で述べたとおり、基本的に先行研究は、消費者異質性か時間的異質性のどちらかを評価対象とした研究がほとんどであった。しかし、実際のマーケティングにおいて、施策の効果はその両方に影響を受けていると考えることが自然である。本研究では、第1のテーマで時間的異質性を、第2のテーマで消費者異質性を、第3のテーマでは、その両方を評価した。しかし、第3のテーマでは提案したモデルは、消費者異質性については個別にパラメータを推定しており、階層型のアプローチはとっていない。この意味で、消費者異質性および時間的異質性、両方の構造を同時に把握できるモデルは提案できていない。

消費者の好みを因子構造として取り込んだモデルの提案。第3のテーマでは、リンク関数の誤差項の共分散として、SKU間の期間併買の傾向を表現した。この部分に、長谷川・照井(2011)のように、消費者ごとの因子構造を導入することが考えられる。これにより、商品の期間併買傾向を消費者ごとに確認でき、かつその構造が解釈可能なかたちで表現できる。また、消費者の好みは時間的に変動すると仮定することも自然である。その意味で、このモデルに時間的異質性を取り込むことも、モデル拡張の方向性として考えられる。

広告のストック効果のより精緻な表現。テーマ1ではテレビ広告効果を扱った。その際のストック効果として、指数型のストック効果を導入したが、先行研究では、さまざまなストックの関数が提案されている。これを取り込むことで、より精緻に広告ストック効果を表現することが可能になると考える。

付録 A 研究テーマ 1 におけるアルゴリズムとプログラム

A.1 状態空間モデルのアルゴリズム

線形ガウス型状態空間モデルとは、時系列データを対象に、観測モデルとシステムモデルを用いて、そのシステムを記述する手法である。まず、時点 n の多変量時系列を \mathbf{y}_n とする。このとき、この時系列を表現する、次の 2 つの方程式で構成されるモデルを状態空間モデルと呼ぶ。

(観測モデル)

$$\mathbf{y}_n = H_n \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, R_n) \quad (\text{A1})$$

(システムモデル)

$$\mathbf{x}_n = F_n \mathbf{x}_{n-1} + G_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, Q_n) \quad (\text{A2})$$

\mathbf{x}_n は直接には観測できない、 k 次元ベクトルである。 F_n は $k \times k$ 行列、 G_n は $k \times m$ 行列をそれぞれ示す。 \mathbf{v}_n はシステムノイズであり、正規白色雑音である。 \mathbf{y}_n は l 系列の時系列観測値ベクトル、 H_n は $l \times k$ 行列、 \mathbf{w}_n は観測ノイズであり、こちらも正規白色雑音を仮定する。 k は設定する状態ベクトルの数、 m は誤差を持つ状態ベクトルの数を示す。 観測モデルは、時系列 \mathbf{y}_n が観測される仕組みを、システムモデルは回帰係数の時間変化を、それぞれ表現している。 時系列解析で用いられる線形モデルの多くは、状態空間モデルの形で表現でき、統一的に取り扱うことができる。

状態空間モデルにおいて重要な問題は、時系列で観測されたデータ \mathbf{y}_n に基づいて、状態 \mathbf{x}_n の推定を行うことである。以下では、観測値 $Y_j = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_j\}$ に基づいて時刻 n に

おける状態 \mathbf{x}_n の推定を行う問題を考える。推定は、 j と n の時間差により、以下の3つに区別される。まず $j < n$ の場合は、観測区間より先の将来の状態を推定する問題で、予測と呼ばれる。 $j = n$ の場合は、観測区間の最終時点、すなわち現在の状態を推定する問題で、フィルタと呼ばれる。また $j > n$ の場合は、現在までの観測値に基いて過去の状態を推定する問題で、平滑化と呼ばれる。

(A1) 式と (A2) 式で定義した、線形ガウス型の状態空間モデルの状態推定は、予測とフィルタについては、カルマンフィルタと呼ばれる逐次的な計算アルゴリズムで、平滑化については、固定区間平滑化によってそれぞれ実施できる。ここでは、まず (A3) 式で、状態 \mathbf{x}_n の条件付き平均と分散共分散行列を定義し、それを用いて、(A4) 式と (A5) 式でカルマンフィルタ、(A6) 式で、固定区間平滑化のアルゴリズムをそれぞれ示す。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n|j} &\equiv E(\mathbf{x}_n|Y_j) \\ V_{n|j} &\equiv E[(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n|j})(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n|j})^t]\end{aligned}\tag{A3}$$

[一期先予測]

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{n|n-1} &= F_n \mathbf{x}_{n-1|n-1} \\ V_{n|n-1} &= F_n V_{n-1|n-1} F_n^t + G_n Q_n G_n^t\end{aligned}\tag{A4}$$

[フィルタリング]

$$\begin{aligned}K_n &= V_{n|n-1} H_n^t (H_n V_{n|n-1} H_n^t + R_n)^{-1} \\ \mathbf{x}_{n|n} &= \mathbf{x}_{n|n-1} + K_n (\mathbf{y}_n - H_n \mathbf{x}_{n|n-1}) \\ V_{n|n} &= (I - K_n H_n) V_{n|n-1}\end{aligned}\tag{A5}$$

[固定区間平滑化]

$$\begin{aligned}A_n &= V_{n|n} F_{n+1}^t V_{n+1|n}^{-1} \\ \mathbf{x}_{n|N} &= \mathbf{x}_{n|n} + A_n (\mathbf{x}_{n+1|N} - \mathbf{x}_{n+1|n}) \\ V_{n|N} &= V_{n|n} + A_n (V_{n+1|N} - V_{n+1|n}) A_n^t\end{aligned}\tag{A6}$$

線形ガウス型状態空間モデルが、静的パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を含む場合、最尤法で推定する。

尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta})$ は、一期先予測密度の積として、(A7) 式で定義される。

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{n=1}^N g_n(\mathbf{y}_n | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n-1}, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{n=1}^N g_n(\mathbf{y}_n | \mathbf{Y}_0, \boldsymbol{\theta})\tag{A7}$$

ここで N は時点数を示す。(A7) 式の両辺の対数をとれば、(A8) 式の一期先対数尤度が得られる。

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \left\{ \ell N \log 2\pi \sum_{n=1}^N \log |d_{n|n-1}| + \sum_{n=1}^N (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n|n-1})^T d_{n|n-1}^{-1} (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n|n-1}) \right\}\tag{A8}$$

この一期先対数尤度は、カルマンフィルタの副産物として得られる。具体的には、(A8) 式の計算で必要となる $\mathbf{y}_{n|n-1}$, $\mathbf{d}_{n|n-1}$ は、カルマンフィルタで計算される。それぞれの算出式を (A9) 式, (A10) 式で示す。 $\boldsymbol{\theta}$ は (A8) 式を目的関数とした数値的最適化によって推定する (最尤法)。

$$\mathbf{y}_{n+j|n} = H_{n+j}\mathbf{x}_{n+j|n} \quad (\text{A9})$$

$$\mathbf{d}_{n+j|n} = H_{n+j}V_{n+j|n}H_{n+j}' + R_{n+j} \quad (\text{A10})$$

線形ガウス型状態空間モデルでは、静的パラメータ数の異なる複数のモデルから、最もよいものを選択するための規準として、赤池情報量規準 (AIC; Akaike's Information Criteria) を用いることができる。 (A11) 式が AIC の定義式である。

$$\text{AIC} = -2l(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2m \quad (\text{A11})$$

(A11) 式中の $l(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ は最大対数尤度を、 m はパラメータ数をそれぞれ示す。 また、ここで $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は、パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定量を示す。 そのため、 $l(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ はモデルの最大対数尤度になる。 AIC をモデル選択規準として採用した場合、AIC 最小のモデルが最良のモデルであると判定する。

A.2 提案モデルの推定プログラム

```

1 #####
2 ### Preparation ###
3 #####
4
5 ### Set Variables Dementia ###
6 nr <- nrow(YY.dat)
7 d.l <- 3
8 d.k1 <- 10
9 d.k2 <- 3
10 d.k3 <- 7
11 d.grp.gs <- 20
12 d.rp.gs <- 20
13 d.gs <- d.grp.gs * d.rp.gs
14
15 ### Define Variables ###
16 YY <- array(rep(0), dim=c(d.l, 1, nr))
17 HH1 <- array(rep(0), dim=c(d.l, d.l*d.k1, nr, d.gs))
18 HH2 <- array(rep(0), dim=c(d.l*d.k1, d.k2*d.k3, nr, d.gs))

```

```

19 HH <- array(rep(0), dim=c(d.l, d.k2*d.k3, nr, d.gs))
20
21 RR1 <- matrix(rep(0), nrow=d.l, ncol=d.l)
22 RR2 <- matrix(rep(0), nrow=d.l*d.k1, ncol=d.l*d.k1)
23 RR <- array(rep(0), dim=c(d.l, d.l, nr)) # new
24
25 FF <- diag(d.k2*d.k3)
26 GG <- diag(d.k2*d.k3)
27 QQ <- diag(d.k2*d.k3)
28
29 d.y <- matrix(rep(0), nrow=d.l, ncol=d.l)
30 f.error <- matrix(rep(0), nrow=d.l, ncol=1)
31 d.y.sm <- matrix(rep(0), nrow=d.l, ncol=d.l)
32 f.error.sm <- matrix(rep(0), nrow=d.l, ncol=1)
33 AA <- matrix(rep(0), nrow=d.k2*d.k3, ncol=d.k2*d.k3)
34
35 XX0 <- matrix(rep(0, d.k2*d.k3), nrow=d.k2*d.k3, ncol=1)
36 VV0 <- diag(100, d.k2*d.k3)
37
38 AA.out <- array(rep(0), dim=c(d.l*d.k1, d.l*d.k1, nr))
39 XX.smooth.out <- array(rep(0), dim=c(d.l*d.k1, 1, nr))
40 VV.smooth.out <- array(rep(0), dim=c(d.l*d.k1, d.l*d.k1, nr))
41
42 #####
43 ### Difine Kalman filtering function ###
44 #####
45
46 dlmreg <- function(u){
47   RR1[1,1] <- ob.para.1
48   RR1[2,2] <- ob.para.2
49   RR1[3,3] <- ob.para.3
50
51   RR2[1,1] <- exp(u[1])
52   RR2[2,2] <- exp(u[2])
53   RR2[3,3] <- exp(u[3])
54   RR2[4,4] <- exp(u[4])
55   RR2[5,5] <- exp(u[4])
56   RR2[6,6] <- exp(u[4])
57   RR2[7,7] <- exp(u[5])
58   RR2[8,8] <- exp(u[5])
59   RR2[9,9] <- exp(u[5])
60   RR2[10,10] <- exp(u[6])
61   RR2[11,11] <- exp(u[6])

```

```
62 RR2[12,12] <- exp(u[6])
63 RR2[13,13] <- exp(u[7])
64 RR2[14,14] <- exp(u[7])
65 RR2[15,15] <- exp(u[7])
66 RR2[16,16] <- exp(u[7])
67 RR2[17,17] <- exp(u[7])
68 RR2[18,18] <- exp(u[7])
69 RR2[19,19] <- exp(u[8])
70 RR2[20,20] <- exp(u[8])
71 RR2[21,21] <- exp(u[8])
72 RR2[22,22] <- exp(u[8])
73 RR2[23,23] <- exp(u[8])
74 RR2[24,24] <- exp(u[8])
75 RR2[25,25] <- exp(u[9])
76 RR2[26,26] <- exp(u[9])
77 RR2[27,27] <- exp(u[9])
78 RR2[28,28] <- exp(u[9])
79 RR2[29,29] <- exp(u[9])
80 RR2[30,30] <- exp(u[9])
81
82 QQ[1,1] <- exp(u[10])
83 QQ[2,2] <- exp(u[17])
84 QQ[3,3] <- exp(u[18])
85
86 QQ[4,4] <- exp(u[11])
87 QQ[5,5] <- exp(u[17])
88 QQ[6,6] <- exp(u[18])
89
90 QQ[7,7] <- exp(u[12])
91 QQ[8,8] <- exp(u[17])
92 QQ[9,9] <- exp(u[18])
93
94 QQ[10,10] <- exp(u[13])
95 QQ[11,11] <- exp(u[17])
96 QQ[12,12] <- exp(u[18])
97
98 QQ[13,13] <- exp(u[14])
99 QQ[14,14] <- exp(u[17])
100 QQ[15,15] <- exp(u[18])
101
102 QQ[16,16] <- exp(u[15])
103 QQ[17,17] <- exp(u[17])
104 QQ[18,18] <- exp(u[18])
```

```

105
106 QQ[19,19] <- exp(u[16])
107 QQ[20,20] <- exp(u[17])
108 QQ[21,21] <- exp(u[18])
109
110 f.error.out <- array(rep(0), dim=c(d.l, 1, nr))
111 count.nomiss <- 0
112 d.y.raw <- array(rep(0), dim=c(d.l,d.l, nr))
113
114 d.y[] <- 0
115 f.error[] <- 0
116 LL <- 0
117 count.nomiss <- 0
118
119 for (n in 1:nr){
120   RR[, ,n] <- HH1[, ,n,stk] %*% RR2 %*% t(HH1[, ,n,stk]) + RR1
121   if (n == 1){
122     XX.forecast.out[, ,n] <- FF %*% XX0
123     VV.forecast.out[, ,n] <- FF %*% VV0 %*% t(FF) + GG %*% QQ %*% t(GG)
124   } else {
125     XX.forecast.out[, ,n] <- FF %*% XX.filter.out[, ,n-1]
126     VV.forecast.out[, ,n] <- FF %*% VV.filter.out[, ,n-1] %*% t(FF) + GG %*%
      QQ %*% t(GG)
127   }
128   d.y <- det(HH[, ,n,stk] %*% VV.forecast.out[, ,n] %*% t(HH[, ,n,stk]) + RR
      [, ,n])
129   f.error.out[, ,n] <- YY[, ,n] - HH[, ,n,stk] %*% XX.forecast.out[, ,n]
130   if (sum(is.na(YY[, ,n])) == 0){
131     KG.out[, ,n] <- VV.forecast.out[, ,n] %*% t(HH[, ,n,stk]) %*% (solve(HH[, ,
      n,stk] %*% VV.forecast.out[, ,n] %*% t(HH[, ,n,stk]) + RR[, ,n]))
132     XX.filter.out[, ,n] <- XX.forecast.out[, ,n] + KG.out[, ,n] %*% f.error.
      out[, ,n]
133     VV.filter.out[, ,n] <- (diag(VV.filter.nrow) - KG.out[, ,n] %*% HH[, ,n,
      stk]) %*% VV.forecast.out[, ,n]
134     ll.sigma <- t(f.error.out[, ,n]) %*% (solve(HH[, ,n,stk] %*% VV.forecast.
      out[, ,n] %*% t(HH[, ,n,stk]) + RR[, ,n])) %*% f.error.out[, ,n] # sigma
      in 9.23
135     count.nomiss <- count.nomiss + 1
136   }else{
137     XX.filter.out[, ,n] <<- XX.forecast.out[, ,n]
138     VV.filter.out[, ,n] <<- VV.forecast.out[, ,n]
139     ll.sigma <- 0
140     d.y <- 1

```

```

141     count.nomiss <- count.nomiss
142   }
143   d.y.out[n] <- log(d.y)
144   d.y.raw[,n] <- d.y
145   ll.sigma.out[n] <- ll.sigma
146   f.error.out[,n] <- f.error
147   LL <- -1/2 * (d.l %>% count.nomiss %>% log(2*pi) + sum(d.y.out) + sum(ll.
    sigma.out))
148
149 }}
150
151 #####
152 ### Estimate Parameters ###
153 #####
154
155 KG.out <- array(rep(0), dim=c(d.k2*d.k3, d.l, nr))
156 f.error.out <- array(rep(0), dim=c(d.l, 1, nr))
157
158 XX.forecast.out <- array(rep(0), dim=c(d.k2*d.k3, 1, nr))
159 VV.forecast.out <- array(rep(0), dim=c(d.k2*d.k3, d.k2*d.k3, nr))
160
161 XX.filter.out <- array(rep(0), dim=c(d.k2*d.k3, 1, nr))
162 VV.filter.out <- array(rep(0), dim=c(d.k2*d.k3, d.k2*d.k3, nr))
163 VV.filter.nrow <- nrow(KG.out[, , 1] %>% HH[, , 1, stk])
164
165 d.y.raw <- array(rep(0), dim=c(d.l, d.l, nr))
166 d.y.out <- array(rep(0), dim=c(1, nr))
167 ll.sigma.out <- array(rep(0), dim=c(1, nr))
168
169 XX0 <- matrix(rep(0, d.k2*d.k3), nrow=d.k2*d.k3, ncol=1)
170 VV0 <- diag(100, d.k2*d.k3)
171
172 mle <- optim(
173   para
174   , dlmregc
175   , control=list(
176     fnscale= -1
177     , maxit = 500
178     , trace = 10)
179   , method = "Nelder-Mead")
180
181 #####
182 ### KF and Smoothing ###

```



```

183 #####
184
185 ### Kalman filtering
186
187 for (n in 1:nr){          # time
188     RR[,n] <- HH1[,n] %*% RR2 %*% t(HH1[,n]) + RR1
189     if (n == 1){
190         XX.forecast.out[,n] <- FF %*% XX0
191         VV.forecast.out[,n] <- FF %*% VV0 %*% t(FF) + GG %*% QQ %*% t(GG)
192     } else {
193         XX.forecast.out[,n] <- FF %*% XX.filter.out[,n-1]
194         VV.forecast.out[,n] <- FF %*% VV.filter.out[,n-1] %*% t(FF) + GG %*% QQ
           %*% t(GG)
195     }
196     d.y <- det(HH[,n,stk] %*% VV.forecast.out[,n] %*% t(HH[,n,stk]) + RR[,n
           ])
197     f.error.out[,n] <- YY[,n] - HH[,n,stk] %*% XX.forecast.out[,n]
198     if (sum(is.na(YY[,n])) == 0){
199         KG.out[,n] <- VV.forecast.out[,n] %*% t(HH[,n,stk]) %*% (solve(HH[,n,
           stk] %*% VV.forecast.out[,n] %*% t(HH[,n,stk]) + RR[,n]))
200         XX.filter.out[,n] <- XX.forecast.out[,n] + KG.out[,n] %*% f.error.out
           [,n]
201         VV.filter.out[,n] <- (diag(VV.filter.nrow) - KG.out[,n] %*% HH[,n,stk
           ]) %*% VV.forecast.out[,n]
202         ll.sigma <- t(f.error.out[,n]) %*% (solve(HH[,n,stk] %*% VV.forecast.
           out[,n] %*% t(HH[,n,stk]) + RR[,n])) %*% f.error.out[,n] # sigma in
           9.23
203         count.nomiss <- count.nomiss + 1
204
205     }else{
206         XX.filter.out[,n] <- XX.forecast.out[,n]
207         VV.filter.out[,n] <- VV.forecast.out[,n]
208         ll.sigma <- 0
209         d.y <- 1
210         count.nomiss <- count.nomiss
211     }
212     XX1.filter.out[,n] <- HH2[,n,stk] %*% XX.filter.out[,n]
213     d.y.out[n] <- log(d.y)
214     d.y.raw[,n] <- d.y
215     ll.sigma.out[n] <- ll.sigma
216     f.error.out[,n] <- f.error
217     YY.filter.out[,n] <- HH[,n,stk] %*% XX.filter.out[,n]
218

```

```

219 }
220 LL.2 <- -1/2 * (d.l %>% count.nomiss %>% log(2*pi) + sum(d.y.out) + sum(ll.
    sigma.out))
221
222 ### Smoothing
223 XX1.smooth <- matrix(rep(0), nrow=d.k1*d.l, ncol=1)
224 XX1.smooth.out <- array(rep(0), dim=c(d.k1*d.l, 1, nr))
225
226 AA.out <- array(rep(0), dim=c(d.k2*d.k3, d.k2*d.k3, nr))
227 XX.smooth.out <- array(rep(0), dim=c(d.k2*d.k3, 1, nr))
228 VV.smooth.out <- array(rep(0), dim=c(d.k2*d.k3, d.k2*d.k3, nr))
229
230 for (n in nr:1){
231   if (n == nr){
232     AA <- VV.filter.out[, ,n] %>% t(FF) %>% solve(VV.forecast.out[, ,n])
233     XX.smooth <- FF %>% XX.filter.out[, ,nr]
234     VV.smooth <- FF %>% VV.filter.out[, ,nr]
235   } \UTF{0081}@else\UTF{0081}@{
236     AA <- VV.filter.out[, ,n] %>% t(FF) %>% solve(VV.forecast.out[, ,n])
237     XX.smooth <- XX.filter.out[, ,n] + AA %>% (XX.smooth.out[, ,n+1] - XX.
        forecast.out[, ,n+1])
238     VV.smooth <- VV.filter.out[, ,n] + AA %>% (VV.smooth.out[, ,n+1] - VV.
        forecast.out[, ,n+1]) %>% t(AA)
239   }
240   XX1.smooth <- HH2[, ,n,stk] %>% XX.smooth
241
242   AA.out[, ,n] <- AA
243   XX.smooth.out[, ,n] <- XX.smooth
244   VV.smooth.out[, ,n] <- VV.smooth
245   XX1.smooth.out[, ,n] <- XX1.smooth
246 }

```

付録 B 研究テーマ 2 における事後分布からの推定アルゴリズムとプログラム

B.1 事後分布からの推定アルゴリズム

MCMC によるパラメータ推定の手続きは以下の通りである。

1. $\eta_{it}|Z_{it}, \gamma_i, \Omega, \mathbf{y}_{it}$ のサンプリング
2. $\gamma_i|\mathbf{d}_i, \Theta, \Sigma, \eta_{it}$ のサンプリング
3. $\Theta|\mathbf{d}_i, \Sigma, \gamma_i$ のサンプリング
4. $\Sigma|\gamma_i, \Theta, \mathbf{d}_i$ のサンプリング
5. $\Omega|\eta_{it}, Z_{it}, \gamma_i$ のサンプリング

以上を収束するまで繰り返す。以下に詳細を示す。

1. $\eta_{it}|Z_{it}, \gamma_i, \Omega, \mathbf{y}_{it}$ のサンプリング

η_{it} は、データ拡大によってサンプリングを行う。以下の式が、 η_{itm} の条件付き分布である。尤度がポアソン尤度であり、事前分布が正規分布であるため共役にはならず、メトロポリス・ヘイスティングス法を用いて推定を行う。この枠組みでは、条件付き分布が以下の式で表現できる。

$$(\eta_{it}|-) \propto p(\eta_{it}|Z_{it}, \gamma_i, \Omega) p(\mathbf{y}_{it}|\exp(\eta_{it})) \quad (\text{B1})$$

まず、ランダムウォークサンプラーで候補粒子を発生させる。

$$\eta_{it}^{(*)} = \eta_{it}^{(r-1)} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, 0.1I_M) \quad (\text{B2})$$

この採択確率は以下の式で表現できる。

$$\alpha(\boldsymbol{\eta}_{it}^{(*)}, \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r-1)}) = \min \left\{ \frac{p(\boldsymbol{\eta}_{it}^{(*)} | -)}{p(\boldsymbol{\eta}_{it}^{(r-1)} | -)}, 1 \right\} \quad (\text{B3})$$

採択確率と一様乱数 u を用いて確率的選択を行う。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r)} = \boldsymbol{\eta}_{it}^{(*)}, & \text{if } u \leq \alpha(\boldsymbol{\eta}_{it}^{(*)}, \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r-1)}) \\ \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r)} = \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r-1)}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B4})$$

2. $\boldsymbol{\gamma}_i | D, \Theta, \Sigma, \boldsymbol{\eta}_i, Z_i$ のサンプリング

$\boldsymbol{\gamma}_i$ はギブスサンプリングを用いて、以下の通り推定を行う。

ここで、 $\Omega^{-1} = C' C$ となる M 次正方行列を C として、 $C \boldsymbol{\eta}_{it} = \boldsymbol{\eta}_{it}^*$ 、 $C Z_i = Z_i^*$ 、 $C \boldsymbol{\zeta}_{it} = \boldsymbol{\zeta}_{it}^*$ と変数の変換をすれば、対角行列の分散共分散行列を持つ $\boldsymbol{\eta}_{it}$ のシステム

$$\boldsymbol{\eta}_{it}^* = Z_{it}^* \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\zeta}_{it}^*, \quad \boldsymbol{\zeta}_{it}^* \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, I) \quad (\text{B5})$$

が得られ、各変数を縦につないでできる $\boldsymbol{\eta}_i^* = Z_i^* \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\zeta}_i^*$ の関係から、

$$\boldsymbol{\eta}_i^* | Z_i^*, \boldsymbol{\gamma}_i, \Omega \sim \text{N}(Z_i^* \boldsymbol{\gamma}_i, I) \quad (\text{B6})$$

が得られ、これは相関のない正規線形回帰モデルとなる。これより、 $\boldsymbol{\gamma}_i$ は以下の通り発生させることができる

$$\boldsymbol{\gamma}_i | - \sim \text{MVN} \left(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i, (Z_i^{*t} Z_i^* + \Sigma^{-1})^{-1} \right) \quad (\text{B7})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i = (Z_i^{*t} Z_i^* + \Sigma^{-1})^{-1} (Z_i^{*t} Z_i^* \hat{\boldsymbol{\gamma}}_i + \Sigma^{-1} \bar{\boldsymbol{\gamma}}_i) \quad (\text{B8})$$

ここで、 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_i = \Theta D$ 、 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_i = (Z_i^{*t} Z_i^*)^{-1} Z_i^{*t} \boldsymbol{\eta}_i^*$ 。 $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i, \bar{\boldsymbol{\gamma}}_i, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_i$ は BM 次元ベクトル、 Θ は $C \times BM$ 行列、 D は C 次元ベクトル。

3. $\Theta | D, \Sigma, \boldsymbol{\gamma}_i$ のサンプリング

Θ は多変量重回帰モデルの回帰係数に該当する。ギブスサンプラーでサンプリングを行う。

$$\Theta^* = \text{vec}(\Theta) \sim \text{N}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \Sigma^{-1} \otimes (D^t D + A_d)^{-1}) \quad (\text{B9})$$

ここで、

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \text{vec}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}), \quad (\text{B10})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = (D^t D + A_d)^{-1} (D^t D \hat{\boldsymbol{\mu}} + A_d \tilde{\boldsymbol{\mu}}), \quad (\text{B11})$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (D^t D)^{-1} D^t \Gamma^* \quad (\text{B12})$$

Γ^* は, γ_{im} について i と m でプールし, $I \times BM$ の形にした行列を示す. $\hat{\mu}$, $\tilde{\mu}$ は $C \times BM$ 行列.

4. $\Sigma|\gamma_i, \Theta_m, D$ のサンプリング

Σ のサンプリングは, 以下の式に基づきギブスサンプラーで実施する.

$$\Sigma^{-1} \sim W(\nu_0 + I, (V_0 + S)^{-1}) \quad (\text{B13})$$

ここで,

$$S = \sum_{i=1}^I (\gamma_i^* - \bar{\gamma}_i)(\gamma_i^* - \bar{\gamma}_i)^t, \bar{\gamma}_i = \Theta^* d_i \quad (\text{B14})$$

γ_i^* は γ_{im} を, 商品について行方向にプールした BM 次元ベクトルである. Θ^* は Θ を, $BM \times C$ 行列に配置したものである.

5. $\Omega|\eta_i, Z_i, \gamma_i$ のサンプリング

Ω のサンプリングは, 以下の式に基づきギブスサンプラーで実施する.

$$\Omega^{-1} \sim W(\nu_0 + I \times T, (V_0 + S)^{-1}) \quad (\text{B15})$$

ここで,

$$S = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (\eta_{it} - Z^{*t} \gamma_i^*)(\eta_{it} - Z^{*t} \gamma_i^*)^t \quad (\text{B16})$$

η_{it} は M 次元ベクトル, Z^* は $M \times BM$ の行列. γ_i^* は前項で示したとおり, BM 次元ベクトルである.

B.2 事後分布からの推定プログラム

```

1 #####
2 ### Preparation ###
3 #####
4
5 ### Set Variables Demention ###
6 bb <- 7
7 cc <- 3
8 ii <- 110
9 tt <- 24
10 mm <- 17
11

```

```

12 ### Difine Variables###
13 yy <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
14 zz <- array(0, dim=c(bb, ii, tt, mm))
15 zz.offset <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
16 DD <- array(0, dim=c(cc, ii))
17 gamma <- array(0, dim=c(bb, ii, mm))
18 Omega <- diag(mm)
19 eta <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
20 Theta <- array(0, dim=c(cc, bb, mm))
21 Sigma.inv <- array(0, dim=c(bb*mm, bb*mm))
22
23 alpha <- c(rep(0,mm))
24 eta.0 <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
25 eta.prev <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
26 eta.ave <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
27 eta.asta <- NULL
28 gamma.bar <- array(0, dim=c(bb*mm,1))
29 gamma.bar.2 <- array(0, dim=c(bb,1))
30 gamma.hat <- array(0, dim=c(bb*mm,1))
31 gamma.tilda <- array(0, dim=c(bb*mm,1))
32 mu.bar <- array(0, dim=c(cc, bb*mm))
33 AA <- 0.01 * diag(cc)
34 GG <- diag(mm)
35 RR <- array(0, dim=c(ii, tt, mm, mm))
36
37 ### Set Priors ###
38 nu.0 <- bb*mm + 4
39 V.0 <- nu.0 * diag(bb*mm)
40 nu.omega.0 <- mm + 4
41 V.omega.0 <- nu.omega.0 * diag(mm)
42 mu.0 <- qq + 4
43 n.0 <- 2
44 s.0 <- 2
45
46 ### Difine gamma generation function ###
47 gamma.foreach <- function() {
48   foreach(vi = 1:ii, .export=ls(envir=parent.frame()), .packages=c('MASS', '
   mvtnorm')) %dopar% {
49     temp.zz.2 <- array(0, dim=c(mm*bb, mm*tt))
50     for (i in 1:mm){
51       for (j in 1:bb){
52         for (k in 1:tt){
53           temp.zz.2[(i-1) * bb + j, (i-1) * tt + k] <- zz[,vi,,][j,k,i]

```

```

54     }
55   }
56 }
57
58 temp.zz.2.asta <- chol(ginv(Omega) %x% diag(tt)) %**% t(temp.zz.2)
59 etav <- as.vector(eta[vi,,] - zz.offset[vi,,])
60 etav.asta <- chol(ginv(Omega) %x% diag(tt)) %**% etav
61 zasta.2 <- t(temp.zz.2.asta) %**% temp.zz.2.asta
62
63 Theta.asta <- array(0, dim=c(cc,bb*mm))
64 for (i in 1:cc){
65   Theta.asta[i,] <- as.vector(Theta[i,,])
66 }
67
68 Sig.m <- ginv(Sigma.inv)
69 gamma.hat <- ginv(zasta.2) %**% t(temp.zz.2.asta) %**% etav.asta
70 gamma.bar <- t(Theta.asta) %**% DD[,vi]
71 gamma.tilda <- ginv(zasta.2 + Sig.m) %**% (zasta.2 %**% gamma.hat + Sig.m
72   %**% gamma.bar)
73 gene.gamma <- mvnorm(1,gamma.tilda, ginv(zasta.2 + Sig.m))
74 gamma[,vi,] <- matrix(gene.gamma,ncol=mm)
75 }
76 }
77
78 #####
79 ### MCMC ###
80 #####
81
82 ### MCMC Settings ###
83 n.iter          <- 100000
84 n.burnout       <- 90000
85
86 ### Loop ###
87 for (v.iter in 1:n.iter){
88   eta.prev <- eta
89   for (vi in 1:ii){
90     for (vtt in 1:tt){
91       temp.zz.1 <- array(0, dim=c(mm,mm*bb))
92       temp.gamma.1 <- as.vector(gamma[,vi,])
93       for (i in 1:mm){
94         for (j in 1:bb){
95           temp.zz.1[i,(i-1) * bb + j] <- zz[,vi,vtt,][j,i]

```

```

96     }}
97     eta.ave[vi,vtt,] <- temp.zz.1 %*% temp.gamma.1 + zz.offset[vi,vtt,]
98     if (v.iter == 1){
99         eta.asta <- mvrnorm(1, rep(0,mm), diag(0.1, mm))
100    }else{
101    eta.asta <- eta.prev[vi,vtt,] + mvrnorm(1, rep(0,mm), diag(0.1, mm))
102    }
103    if (v.iter == 1){
104    p.eta.asta <- 1
105    p.eta <- 1
106    } else {
107    p.eta.asta <- dmvnorm(eta.asta,eta.ave[vi,vtt,],Omega) *
108    prod(exp((yy[vi,vtt,] * eta.asta) - exp(eta.asta)))
109    p.eta <- dmvnorm(eta.prev[vi,vtt,],eta.ave[vi,vtt,],Omega)
110    *
111    prod(exp((yy[vi,vtt,] * eta.prev[vi,vtt,]) - exp(eta.prev[vi,vtt,])
112    ))
113    }
114    alpha <- min(p.eta.asta/p.eta,1)
115    uu <- runif(1)
116    if (uu <= alpha){
117    eta[vi,vtt,] <- eta.asta
118    }else{
119    eta[vi,vtt,] <- eta.prev[vi,vtt,]
120    }
121    }
122    }
123    gamma.fe.out <- gamma.foreach()
124    for(i in 1:ii){
125    gamma[,i,] <- gamma.fe.out[[i]]
126    }
127    gamma.asta <- array(0, dim=c(ii,bb*mm))
128    for (i in 1:ii){
129    gamma.asta[i,] <- as.vector(gamma[,i,])
130    }
131    }
132    mu.hat <- ginv(DD[,] %*% t(DD[,])) %*% DD[,] %*% gamma.asta
133    mu.tilda <- ginv(DD[,] %*% t(DD[,]) + AA) %*% (DD[,] %*% t(DD[,]) %*% mu.
134    hat + AA %*% mu.bar)
135    mu.tilda.vec <- as.vector(mu.tilda)

```



```

135 Theta <- array(mvrnorm(1,mu.tilda.vec, Sigma.inv %x% ginv(DD[,] %**% t(DD
    [,]) + AA)), dim=c(cc, bb, mm))
136
137 SS <- 0
138 Theta.as.vec <- array(0, dim=c(bb*mm,cc))
139 for (i in 1:cc){
140   Theta.as.vec[,i] <- as.vector((Theta[i,,]))
141 }
142
143 for (vi in 1:ii){
144   gamma.bar.2 <- Theta.as.vec %**% DD[,vi]
145   SS <- SS + (as.vector(gamma[,vi,]) - gamma.bar.2) %**% t( as.vector(gamma
    [,vi,]) - gamma.bar.2)
146 }
147 Sigma.inv <- rwishart(nu.0 + ii, ginv(V.0 + SS))$IW
148
149 SS.4 <- 0
150 for (vi in 1:ii){
151   for (vtt in 1:tt){
152
153     temp.zz.1 <- array(0, dim=c(mm,mm*bb))
154     temp.gamma.1 <- as.vector(gamma[,vi,])
155
156     for (i in 1:mm){
157       for (j in 1:bb){
158         temp.zz.1[i,(i-1) * bb + j] <- zz[,vi,vtt,][j,i]
159       }}
160     ezgamma <- eta[vi, vtt,] - temp.zz.1 %**% temp.gamma.1 - zz.offset[vi,
    vtt,]
161     SS.4 <- SS.4 + ezgamma %**% t(ezgamma)
162   }}
163 Omega <- rwishart(nu.omega.0 + ii * tt, ginv(V.omega.0 + SS.4))$IW
164 }

```

付録 C 研究テーマ 3 における事後分布からの推定アルゴリズムとプログラム

C.1 事後分布からの推定アルゴリズム

研究 3 における MCMC のアルゴリズムは下記の 4 つのステップで構成される。第 1 ステップはランダムウォーク M-H 法、第 2 ステップではカルマンフィルタと固定区間平滑化、残りの 2 つのステップはギブスサンプラーをそれぞれもちいて推定する。

1. $\eta_{it}|Z_{it}, \gamma_{it}, \Omega, \mathbf{y}_{it}$ のサンプリング：データ拡大，ランダムウォークサンプリング
2. $\gamma_{it}|\gamma_{i,t-1}, \Sigma, \eta_{it}$ のサンプリング：カルマンフィルタ
3. $\Sigma|\gamma_{it}, \gamma_{i,t-1}$ のサンプリング：ギブスサンプラー
4. $\Omega|\eta_{it}, Z_{it}, \gamma_{it}$ のサンプリング：ギブスサンプラー

1. $\eta_{it}|Z_{it}, \gamma_{it}, \Omega, \mathbf{y}_{it}$ のサンプリング：データ拡大，ランダムウォークサンプリング

η_{it} は、データ拡大によってサンプリングを行う。以下の式が、 η_{itm} の条件付き分布である。尤度がポアソン尤度であり、事前分布が正規分布であるため共役にはならず、メトロポリス・ヘイスティングス法を用いて推定を行う。この枠組みでは、条件付き分布が以下の式で表現できる。

$$(\eta_{it}|-) \propto p(\eta_{it}|Z_{it}, \gamma_{it}, \Omega) p(\mathbf{y}_{it}|\exp(\eta_{it})) \quad (C1)$$

まず、ランダムウォークサンプラーで候補粒子を発生させる。

$$\eta_{it}^{(*)} = \eta_{it}^{(r-1)} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \sim \text{MVN}(\mathbf{0}, 0.1I_M) \quad (C2)$$

この採択確率は以下の式で表現できる。

$$\alpha(\boldsymbol{\eta}_{it}^{(*)}, \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r-1)}) = \min \left\{ \frac{p(\boldsymbol{\eta}_{it}^{(*)} | -)}{p(\boldsymbol{\eta}_{it}^{(r-1)} | -)}, 1 \right\} \quad (\text{C3})$$

採択確率と一様乱数 u を用いて確率的選択を行う。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r)} = \boldsymbol{\eta}_{it}^{(*)}, & \text{if } u \leq \alpha(\boldsymbol{\eta}_{it}^{(*)}, \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r-1)}) \\ \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r)} = \boldsymbol{\eta}_{it}^{(r-1)}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{C4})$$

2. $\boldsymbol{\gamma}_{it} | \boldsymbol{\gamma}_{i,t-1}, \Sigma, \boldsymbol{\eta}_{it}$ のサンプリング：カルマンフィルタと固定区間平滑化

$\boldsymbol{\gamma}_i$ はカルマンフィルタと固定区間平滑化を用いて、以下の通り推定を行う。ここでは、個人ごとにパラメータを推定する。最初に、以下 (カルマンフィルタ) を個人ごと、時間ごとに計算し、 $\boldsymbol{\gamma}_{i,t|t}$ を得る

$$\boldsymbol{\gamma}_{i,t|t-1} = \boldsymbol{\gamma}_{i,t-1|t-1} \quad (\text{C5})$$

$$S_{i,t|t-1} = S_{i,t-1|t-1} + \Sigma \quad (\text{C6})$$

$$e_{it} = \boldsymbol{\eta}_{it} - Z_{it} \boldsymbol{\gamma}_{i,t|t-1} \quad (\text{C7})$$

$$R_{it} = Z_{it} S_{i,t|t-1} Z_{it}^t + \Omega \quad (\text{C8})$$

$$K_{it} = S_{i,t|t-1} + Z_{it}^t R_{it}^{-1} \quad (\text{C9})$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{i,t|t} = \boldsymbol{\gamma}_{i,t|t-1} + K_{it} (\boldsymbol{\eta}_{it} - \boldsymbol{\eta}_{i,t|t-1}) \quad (\text{C10})$$

$$S_{i,t|t} = S_{i,t|t-1} - K_{it} R_{it} K_{it}^t \quad (\text{C11})$$

つづいて、個人ごと、時間ごとに固定区間平滑化を行う。手順は以下の通り。

(a) カルマンフィルタを履行 ($t = 1, \dots, T$)

(b) ($t = T, \dots, 1$) で、 $A_n = V_{n|n} F_{n+1}^t V_{n+1|n}^{-1}$ を計算し、その値をもとに以下を計算する。

$$\boldsymbol{x}_{n|N} = \boldsymbol{x}_{n|n} + A_n (\boldsymbol{x}_{n+1|N} - \boldsymbol{x}_{n+1|n}) \quad (\text{C12})$$

$$V_{n|N} = V_{n|n} + A_n (V_{n+1|N} - V_{n+1|n}) A_n^t \quad (\text{C13})$$

3. $\Sigma | \boldsymbol{\gamma}_{it}, \boldsymbol{\gamma}_{i,t-1}$ のサンプリング：ギブスサンプラー

Σ のサンプリングは、以下の式に基づきギブスサンプラーで実施する。

$$\Sigma^{-1} \sim W(\boldsymbol{\nu}_0 + I, (V_0 + S)^{-1}) \quad (\text{C14})$$

ここで,

$$S = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (\boldsymbol{\gamma}_{it}^* - \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{it})(\boldsymbol{\gamma}_{it}^* - \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{it})^t, \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{it}^* = \boldsymbol{\gamma}_{it} \quad (\text{C15})$$

$\boldsymbol{\gamma}_{it}^*$ は $\boldsymbol{\gamma}_{im}$ を, 商品について行方向にプールした BM 次元ベクトルである. $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_i^*$ は 2. で得られた $\boldsymbol{\gamma}_{it}$ を, 商品について行方向にプールした BM 次元ベクトルである.

4. $\Omega|\boldsymbol{\eta}_{it}, Z_{it}, \boldsymbol{\gamma}_{it}$ のサンプリング : ギブスサンプラー

Ω のサンプリングは, 以下の式に基づきギブスサンプラーで実施する.

$$\Omega^{-1} \sim W(v_0 + I \times T, (V_0 + S)^{-1}) \quad (\text{C16})$$

ここで,

$$S = \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T (\boldsymbol{\eta}_{it} - Z^{*t} \boldsymbol{\gamma}_{it}^*)(\boldsymbol{\eta}_{it} - Z^{*t} \boldsymbol{\gamma}_{it}^*)^t \quad (\text{C17})$$

$\boldsymbol{\eta}_{it}$ は M 次元ベクトル, Z^* は $M \times BM$ の行列. $\boldsymbol{\gamma}_i^*$ は前項で示したとおり, BM 次元ベクトルである.

C.2 事後分布からの推定プログラム

```

1 #####
2 ### Preparation ###
3 #####
4
5 ### Set Variables Demention ###
6 bb <- 7
7 ii <- 50
8 tt <- 24
9 mm <- 9
10
11 ### Difine Variables###
12 yy <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
13 zz <- array(0, dim=c(bb, ii, tt, mm))
14 zz.offset <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
15 gamma <- array(0, dim=c(bb, ii, mm, tt)) #20180319
16 Omega <- diag(mm)
17 eta <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
18 Sigma.inv <- array(0, dim=c(bb*mm, bb*mm, ii)) #20180319
19 eta.mean <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))

```

```

20 gamma.mean <- array(0, dim=c(bb, ii, mm, tt))
21 Sigma.mean <- array(0, dim=c(bb*mm, bb*mm, ii))
22 Omega.mean <- diag(0,mm)
23 alpha <- c(rep(0,mm))
24 eta.0 <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
25 eta.prev <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
26 eta.ave <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
27 eta.asta <- NULL
28 RR <- array(0, dim=c(ii, tt, mm, mm))
29 GG <- diag(mm)
30 gamma.ave.fore <- array(0, dim=c(bb*mm, ii, tt))
31 gamma.var.fore <- array(1, dim=c(bb*mm, bb*mm, ii, tt))
32 gamma.ave.filt <- array(0, dim=c(bb*mm, ii, tt))
33 gamma.var.filt <- array(1, dim=c(bb*mm, bb*mm, ii, tt))
34 gamma.ave.smth <- array(0, dim=c(bb*mm, ii, tt))
35 gamma.var.smth <- array(1, dim=c(bb*mm, bb*mm, ii, tt))
36 eps <- array(0, dim=c(ii, tt, mm))
37
38 ### Set Priors ###
39 nu.0 <- bb*mm + 4
40 V.0 <- nu.0 * diag(bb*mm)
41 nu.omega.0 <- mm + 4
42 V.omega.0 <- nu.omega.0 * diag(mm)
43 n.0 <- 2
44 s.0 <- 2
45
46 #####
47 ### MCMC ###
48 #####
49
50 ### MCMC Settings ###
51 n.iter <- 100000
52 n.burnout <- 90000
53
54 ### Loop ###
55 for (v.iter in 1:n.iter){
56
57   eta.prev <- eta
58
59   for (vi in 1:ii){
60     for (vtt in 1:tt){
61
62       temp.zz.1 <- array(0, dim=c(mm,mm*bb))

```

```

63     temp.gamma.1 <- as.vector(gamma[,vi,,vtt])
64     for (i in 1:mm){
65         for (j in 1:bb){
66             temp.zz.1[i,(i-1) * bb + j] <- zz[,vi,vtt,][j,i]
67         }}
68     eta.ave[vi,vtt,] <- temp.zz.1 %*% temp.gamma.1 + zz.offset[vi,vtt,]
69
70     if (v.iter == 1){
71         eta.asta <- mvrnorm(1, rep(0,mm), diag(0.001, mm))
72
73     }else{
74         eta.asta <- eta.prev[vi,vtt,] + mvrnorm(1, rep(0,mm), diag(0.001, mm)
75         )
76     }
77     if (v.iter == 1){
78         p.eta.asta <- 1
79         p.eta <- 1
80
81     } else {
82         p.eta.asta <- dmvnorm(eta.asta,eta.ave[vi,vtt,],Omega) *
83         prod(exp((yy[vi,vtt,] * eta.asta) - exp(eta.asta)))
84
85         p.eta <- dmvnorm(eta.prev[vi,vtt,],eta.ave[vi,vtt,],Omega) *
86         prod(exp((yy[vi,vtt,] * eta.prev[vi,vtt,]) - exp(eta.prev[vi,vtt,])
87         ))
88     }
89     alpha <- min(p.eta.asta/p.eta,1)
90
91     uu <- runif(1)
92
93     if (uu <= alpha){
94         eta[vi,vtt,] <- eta.asta
95
96     }else{
97         eta[vi,vtt,] <- eta.prev[vi,vtt,]
98     }
99 }
100 }
101
102 for (vi in 1:ii){
103     gamma.ave.0 <- array(runif(bb*mm, min=-5, max=5), dim=c(bb*mm))

```

```

104   gamma.var.0 <- diag(1,bb*mm)
105   KG <- NULL
106   WW <- NULL
107   RR <- NULL
108   AA <- NULL
109
110   for (vtt in 1:tt){
111     if (vtt == 1){
112       gamma.ave.fore[,vi,vtt] <- gamma.ave.filt[,vi,vtt]
113       gamma.var.fore[,vi,vtt] <- gamma.var.filt[,vi,vtt] + ginv(Sigma.inv
114         [,vi])
115     } else {
116       gamma.ave.fore[,vi,vtt] <- gamma.ave.filt[,vi,vtt - 1]
117       gamma.var.fore[,vi,vtt] <- gamma.var.filt[,vi,vtt - 1] + ginv(Sigma
118         .inv[,vi])
119     }
120     for (vm in 1:mm){
121       ranges <- ((vm-1)*bb+1):(((vm-1)*bb+1)+bb-1)
122       eps[vi,vtt,vm] <- eta[vi,vtt,vm] - zz[,vi,vtt,vm] %%% gamma.ave.fore[
123         ranges,vi,vtt] - zz.offset[vi,vtt,vm]
124     }
125     temp.zz.1 <- array(0, dim=c(mm,mm*bb))
126     for (i in 1:mm){
127       for (j in 1:bb){
128         temp.zz.1[i,(i-1) * bb + j] <- zz[,vi,vtt,][j,i]
129       }
130     }
131     RR <- temp.zz.1 %%% gamma.var.fore[,vi,vtt] %%% t(temp.zz.1) + Omega
132     KG <- gamma.var.fore[,vi,vtt] %%% t(temp.zz.1) %%% ginv(RR)
133     gamma.ave.filt[,vi,vtt] <- gamma.ave.fore[,vi,vtt] + KG %%% eps[vi,vtt
134       ,]
135     gamma.var.filt[,vi,vtt] <- gamma.var.fore[,vi,vtt] - KG %%% RR %%% t(
136       KG)
137   }
138 }
139
140 for (vi in 1:ii){
141   for (vtt in tt:1){
142     if (vtt == 24){
143       gamma.ave.smth[,vi,vtt] <- gamma.ave.filt[,vi,vtt]
144       gamma.var.smth[,vi,vtt] <- gamma.var.filt[,vi,vtt]
145     } else {
146       AA <- gamma.var.filt[,vi,vtt] %%% ginv(gamma.var.fore[,vi,vtt + 1])

```

```

141     gamma.ave.smth[,vi,vtt] <- gamma.ave.filt[,vi,vtt] + AA %%% (gamma.
      ave.smth[,vi,vtt + 1] - gamma.ave.fore[,vi,vtt + 1])
142     gamma.var.smth[, ,vi,vtt] <- gamma.var.filt[, ,vi,vtt] +
143       AA %%% (gamma.var.smth[, ,vi,vtt + 1] - gamma.var.fore[, ,vi,vtt +
      1]) %%% t(AA)
144   }
145 }
146 }
147
148 for (vi in 1:ii){
149   for (vm in 1:mm){
150     for (vb in 1:bb){
151       SS <- 0
152       for (vtt in 1:tt){
153         SS <- SS + (as.vector(gamma[vb,vi,vm,vtt]) - gamma.ave.smth[((vm-1)
      *bb+vb),vi,vtt]) %%% t(as.vector(gamma[vb,vi,vm,vtt]) - gamma.ave.
      smth[((vm-1)*bb+vb),vi,vtt])
154       }
155       Sigma.inv[((vm-1)*bb+vb),((vm-1)*bb+vb),vi] <- rinvgamma(1, (n.0 + tt
      )/2, (s.0 + SS)/2)
156     }
157   }
158 }
159
160 for (vi in 1:ii){
161   for (vtt in 1:tt){
162     gamma[,vi,,vtt] <- matrix(gamma.ave.smth[,vi,vtt],nrow=bb)
163   }
164 }
165
166 SS.4 <- 0
167 for (vi in 1:ii){
168   for (vtt in 1:tt){
169     temp.zz.1 <- array(0, dim=c(mm,mm*bb))
170     temp.gamma.1 <- as.vector(gamma[,vi,,vtt])
171
172     for (i in 1:mm){
173       for (j in 1:bb){
174         temp.zz.1[i,(i-1) * bb + j] <- zz[,vi,vtt,][j,i]
175       }}
176
177     ezgamma <- eta[vi, vtt,] - temp.zz.1 %%% temp.gamma.1 - zz.offset[vi,
      vtt,]

```



```
178
179     SS.4 <- SS.4 + ezgamma %**% t(ezgamma)
180   }
181   Omega <- rwishart(nu.omega.0 + ii * tt, ginv(V.omega.0 + SS.4))$IW
182 }
183 }
```

謝辞

本論文の作成にあたって、多くの方のご指導、ご協力を賜りました。以下に記し、厚く御礼を申し上げます。

主指導教員の佐藤忠彦先生には、修士課程を含めて約10年間という長きにわたり、ご指導をいただきました。研究上のご指導に加えて、研究をおこなうことの魅力や社会的意義を教えていただいたことが、研究の継続の励みになりました。本論文を完成させることができたのは、佐藤先生のご指導の賜物に他なりません。

副指導の西尾チヅル先生、牧本直樹先生をはじめ、筑波大学大学院ビジネス科学研究科の諸先生方には、副指導面談や審査過程を通じて、多くの有用なご助言や叱咤激励をいただきました。本論文の骨格になっている3つの研究は、日本マーケティング・サイエンス学会、日本オペレーションズ・リサーチ学会、応用統計学会、日本商業学会、統計関連学会連合大会など、多くの学会で発表いたしました。その際には、各分野に精通されている諸先生方から、有用な助言をいただきました。OBを含む、佐藤忠彦先生のゼミの皆様とは、折に触れて意見交換をさせていただきました。類似した研究課題に対峙する同門の方との交流は、私にとって大きな刺激となり、研究を続ける動機づけとなりました。前職、前々職を含む筆者の勤務先の皆様には、業務で多忙であるにもかかわらず、私の大学院で学びたいという意向を理解し、快く送り出していただきました。最後に、日々仕事と研究で苦勞する私を優しく見守りながら支え続けてくれた妻の淳子に、感謝の意を伝えたいと思います。

参考文献

- [1] Aktekin, T., Polson, N. and Soyer, R. (2018). "Sequential Bayesian analysis of multivariate count data", *Bayesian Analysis*, 13(2), 385–409.
- [2] Allenby, G. M., and Rossi, P. E. (1998). "Marketing models of consumer heterogeneity", *Journal of econometrics*, 89(1-2), 57–78.
- [3] Ando, T. (2006). "Bayesian State Space Modeling Approach for Measuring the Effectiveness of Marketing Activities and Baseline Sales from POS Data", *Sixth International Conference on Data Mining (ICDM'06)*, 21-32.
- [4] Ando, T. (2008), "Measuring the baseline sales and the promotion effect for incense products: a Bayesian state-space modeling approach", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 60(4), 763–780.
- [5] Bass, F. M., Bruce, N., Majumdar, S., and Murthi, B. P. S. (2007), "Wearout effects of different advertising themes: A dynamic Bayesian model of the advertising-sales relationship", *Marketing Science*, 26(2), 179–195.
- [6] Bhat, C. R. (2011), "The maximum approximate composite marginal likelihood (MACML) estimation of multinomial probit-based unordered response choice models", *Transportation Research Part B: Methodological*, 45(7), 923-939.
- [7] Bruce, N. I. (2008), "Pooling and dynamic forgetting effects in multitheme advertising: Tracking the advertising sales relationship with particle filters", *Marketing Science*, 27(4), 659–673.
- [8] Bruce, N. I., Peters, K. and Naik, P. A., "Discovering How Advertising Grows Sales and Builds Brands", *Journal of Marketing Research*, 49 (December 2012), 793–806.
- [9] Bruce, N. I., Murthi, B. P. S. and Rao, R. C. (2017). "A dynamic model for digital advertising: The effects of creative format, message content, and targeting on engage-

- ment”, *Journal of marketing research*, 54(2), 202–218.
- [10] Brijs, T., Karlis, D., Swinnen, G., Vanhoof, K., Wets, G. and Manchanda, P. (2004), ”A multivariate Poisson mixture model for marketing applications”, *Statistica Neerlandica*, 58(3), 322–348.
- [11] Buck, A. J., Blackstone, E. A., and Hakim, S. (2009), ”A multivariate poisson model of consumer choice in a multi-airport region”, *iBusiness*, 1(02), 85.
- [12] Chen, N., Li, Z., and Ou, Y. (2015), ”Multivariate exponentially weighted moving-average chart for monitoring Poisson observations”, *Journal of Quality Technology*, 47(3), 252–263.
- [13] Chib, S., Winkelmann, R. (2001), ”Markov chain Monte Carlo analysis of correlated count data”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 19(4), 428–435.
- [14] Colley, H. R. and Dutka, S. (1961), ”DAGMAR”, *Association of National Advertisers*.
- [15] Dippold, K., and Hruschka, H. (2013), ”A parsimonious multivariate poisson model for market basket analysis”, *Review of Managerial Science*, 7(4), 393–415.
- [16] Dekimpe, M. G., Franses, P. H. Hansses, D. M. and P. A. Naik (2006), ”Time-series models in marketing”, *ERIM Report Series*, August(2006).
- [17] DelVecchio, D., Krishnan, H. S. and Smith, D. C. (2007), ”Cents or Percent: The Effects of Promotion Framing on Price Expectations and Choice”, *Journal of Marketing*, 71-3 (July 2007), 158–170.
- [18] Dube, J., Hitsch, G. J. and Manchanda, P. (2005), ”An Empirical Model of Advertising Dynamics”, *Quantitative Marketing and Economics*, 3-2 (June 2005), 107–144.
- [19] Ehrenberg, A. S. C., Barnard, N., Kennedy, R. and Bloom, H. (2002), ”Brand advertising as creative publicity”, *Journal of Advertising Research*, 42(4) (2002), 7–18.
- [20] Ernst, C. O., Peter, S. H. L. and Jaap, E. W. (2010), ”Early Marketing Matters: A Time-Varying Parameter Approach to Persistence Modeling”, *Journal of Marketing Research*, 47-1 (February 2010), 173–185.
- [21] Eskin, G. J. and Baron, P. H. (1977), ”Effects of Price and Advertising in Test-Market Experiments”, *Journal of Marketing Research*, (November 1977), 14-4, 499–508.
- [22] Gamerman, D. and Migon (1993), H. S., ”Dynamic Hierarchical Models”, *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological)*, 55-3 (1993), 629–642.

- [23] Hall, S. R. (1924), "*Retail advertising and selling*", McGraw-Hill.
- [24] Harvey, B., Herbig, T., Keylock, M., Aggarwal, R. and Lerner, N. (2012), "Exploding the legend of television advertising and price promotions: the proper mix of price, instore, and tv for maximum short- and long-term ROI", *Journal of Advertising Research*, 52-3 (Sep 2012), 339–345.
- [25] Hawkins, E. R. (1957), "Methods of estimating demand", *Journal of Marketing*, 21(4), 428-438.
- [26] Heerde, H. J. V., Gijsenberg, M. J., Dekimpe M. G., and Steenkamp, J. E. M. (2013), "Price and Advertising Effectiveness over the Business Cycle", *Journal of Marketing Research* 50-2 (April 2013), 177–193.
- [27] Howell, J. R., Lee, S. and Allenby, G. M. (2015), "Price promotions in choice models", *Marketing Science*, 35(2), 319-334.
- [28] Jung, R. C., Liesenfeld, R., and Richard, J. F. (2011), "Dynamic factor models for multivariate count data: An application to stock-market trading activity", *Journal of Business and Economic Statistics*, 29(1), 73–85.
- [29] Kanetkar, V., Weinberg, C. B. and Weiss, D. L. (1992), "Price Sensitivity and Television Advertising Exposures: Some Empirical Findings", *Marketing Science*, 11-4 (November 1992), 359–371.
- [30] Kitagawa, G. and Kondo, F. (1998), "State Space Decomposition of Daily Scanner Sales into Trend, Day-of-the-Week Effect and Price Promotion Effect", *Research Memorandum*, 661 (1998).
- [31] Jung, R. C., and Winkelmann, R. (1993), "Two aspects of labor mobility: a bivariate Poisson regression approach", *Empirical Economics*, 18(3), 543-556.
- [32] Karlis, D. (2003), "An EM algorithm for multivariate Poisson distribution and related models", *Journal of Applied Statistics*, 30(1), 63-77.
- [33] King, G. (1989). "A seemingly unrelated Poisson regression model", *Sociological Methods and Research*, 17(3), 235-255.
- [34] Kitagawa, G. and Gersch, W. (1996), "*Smoothness priors analysis of time series*", Lecture Notes in Statistics, No116, Springer Verlag.
- [35] Knappe, J., Jonzen, N., Skold, M. and Sokolov, L. (2009), "Multivariate state space

- modelling of bird migration count data, In *Modeling Demographic Processes in Marked Populations*”, Springer.
- [36] Kondo, F. N. and Kitagawa, G. (2000), ”Time series analysis of daily scanner sales: extraction of trend, day-of-the-week effect and price promotion effect”, *Marketing Intelligence and Planning*, 18(2), 53–66.
- [37] Kumar, V. and Robert P. L. (1988), ”Measuring the effect of retail store promotions on brand and store substitution”, *Journal of Marketing Research*, 178–185.
- [38] McFadden, D. (1973). ”*Conditional logit analysis of qualitative choice behavior*”, Academic Press.
- [39] Manchanda, P. and Chintagunta, P. K. (2004), ”Responsiveness of physician prescription behavior to salesforce effort: An individual level analysis”, *Marketing Letters*, 15(2-3), 129–145.
- [40] Manchanda, P., Rossi, P. E. and Chintagunta, P. K. (2004), ”Response modeling with nonrandom marketing-mix variables”, *Journal of Marketing Research*, 41(4), 467–478.
- [41] Mazumdar, T., Raj, S. P. and Sinha, I. (2005), ”Reference Price Research: Review and Propositions, *Journal of Marketing*”, 69-4 (October 2005), 84–102.
- [42] McCausland, W. J., Miller, S., and Pelletier, D. (2011), ”Simulation smoothing for state-space models: A computational efficiency analysis”, *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(1), 199–212.
- [43] Munkin, M. K. and Trivedi, P. K. (1999), ”Simulated maximum likelihood estimation of multivariate mixed - Poisson regression models with application”, *The Econometrics Journal*, 2(1), 29–48.
- [44] Naik, P. A., Mantrala, M. K., and Sawyer, A. G. (1998), ”Planning media schedules in the presence of dynamic advertising quality”, *Marketing science*, 17(3), 214–235.
- [45] Naik, P. A. (1999), ”Estimating the Half-life of Advertisements”, *Marketing Letters*, 10(4), 345–356.
- [46] Naik, P. A. and Raman, K. (2003), ”Understanding the Impact of Synergy in Multimedia Communications”, *Journal of Marketing Research*, 40-4(2003), 375–388.
- [47] Naik, P. A., Raman, K. and Wine, R. (2005), ”Planning Marketing-Mix Strategies in

- the Presence of Interactions”, *Marketing Science*, 24-1 (2005), 25–34.
- [48] Neelamegham, R., Chintagunta, P. K. (2004), ”Modeling and Forecasting the Sales of Technology Products”, *Quantitative Marketing and Economics*, (September 2004), 2–3, 195–232.
- [49] Nelder, J. A. and Mead, R. (1965), ”A simplex method for function minimization”, *The Computer Journal*, 7-4 (1965), 308–313.
- [50] Rossi, P. E. and Allenby, G. M. (1993), ”A Bayesian approach to estimating household parameters”, *Journal of Marketing Research*, 171-182.
- [51] Rossi, P. E. and Allenby, G. M. (2003), ”Bayesian statistics and marketing”, *Marketing Science*, 22(3), 304–328.
- [52] Rossi, P., Allenby, G. and McCulloch, R. (2005), ”*Bayesian Statistics and Marketing*”, John Wiley & Sons.
- [53] Sriram, S. and Kalwani, M. U. (2007), ”Optimal Advertising and Promotion Budgets in Dynamic Markets”, *Management Science*, 53–1 (2007), 46–60.
- [54] Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P. and Van Der Linde, A. (2002), ”Bayesian measures of model complexity and fit”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 64(4), 583–639.
- [55] Strong, E. (1925), ”*The Psychology of Selling and Advertising*”, McGraw-Hill, New York.
- [56] Terui, N., Imano, Y. (2005), ”Forecasting Model with Asymmetric Market Response and Its Application to Pricing in Consumer Package Goods”, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 21-6 (2005), 541–560.
- [57] Terui, N., and Ban, M. (2008), ”Modeling heterogeneous effective advertising stock using single-source data”, *Quantitative Marketing and Economics*, 6(4), 415.
- [58] Terui, N. and Dahana, W. D. (2006), ”Price customization using price thresholds estimated from scanner panel data”, *Journal of interactive Marketing*, 20(3 - 4), 58–70.
- [59] Terui, N., Ban, M., and Allenby, G. M. (2011), ”The effect of media advertising on brand consideration and choice”, *Marketing Science*, 30(1), 74–91.
- [60] Terui, N., Ban, M and Maki, T. (2010), ”Finding Market Structure by Sales Count Dynamics - Multivariate Structural Time Series Models with Hierarchical Structure

- for Count Data -”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62 (2010), 92–107.
- [61] Wang, H. M. D., Kalwani, M. U. and Akçura, T. (2007), ”A Bayesian multivariate Poisson regression model of cross-category store brand purchasing behavior”, *Journal of Retailing and Consumer Services*, 14(6), 369–382.
- [62] Waugh, F. V. (1959), ”Needed research on the effectiveness of farm products promotion”, *Journal of Farm Economics*, 41(2), 364–376.
- [63] Wilkinson, J. B., Mason, J. B., and Paksoy, C. H. (1982), ”Assessing the impact of short-term supermarket strategy variables” ,*Journal of Marketing Research*, 72–86.
- [64] Xie, J., Song, M., Sirbu, M. and Wang, Q. (1997), ”Kalman Filter Estimation of New Product Diffusion Models, *Journal of Marketing Research*”, 34-3 (1997), 378–393.
- [65] 阿部 誠 (2003), ”広告は売上に本当に効果があるのか?”, 季刊マーケティング・ジャーナル 90, 23–2 (2003), 4–16.
- [66] 阿部 誠 (2008), ”コメント”, 日本統計学会誌, 38–1, 21–23.
- [67] 阿部 誠 (2013), ”データの集計における盲点”, マーケティングサイエンス, 21(1), 1–5.
- [68] (社) 中小企業研究所 (2004), ”製造業販売活動実態調査”, 社団法人 中小企業研究所.
- [69] 株式会社 電通 (2017), ”2017 年 日本の広告費”, 株式会社 電通.
- [70] 井上 友彦 (2010), ”医師の異質性を考慮した医薬品業界における営業訪問効果の分析”, マーケティングサイエンス, 18(1), 49–73.
- [71] 長谷川 翔平, 照井 伸彦. (2011), ”消費者選好の動的変化の可視化と消費者ポジショニング”, 日本統計学会誌, 41(1), 201-217.
- [72] 日高 徹司, 佐藤 忠彦 (2016). ”消費者とブランドとの関係を考慮した階層ベイズモデルによるクロスメディア効果推定 Z”, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, 59, 106–133.
- [73] 星野 崇宏 (2008), ”ブランドイメージに関する広告政策を策定するための階層ベイズ的な選択モデルとその応用”, マーケティングサイエンス, 15(1・2), 27–44.
- [74] 北川 源四郎 (2005), ”時系列解析入門”, 岩波書店.
- [75] 岸 志津江, 田中 洋, 島村 和恵 (2000), ”現代広告論”, 有斐閣.
- [76] 近藤 文代 (1999), ”デイリー POS データにおける曜日変動および値下げ効果の抽

- 出”, オペレーションズ・リサーチ, 3 (1999), 49-73.
- [77] フィリップ・コトラー, ケビン・レーン・ケラー (2008), ”マーケティング・マネージメント (第 12 版)”, ピアソンエデュケーション.
- [78] 宮津和弘, 佐藤忠彦 (2015), ”心理的財布と購買行動の関係性のモデル化”, 応用統計学, 44(3), 161-182.
- [79] 本橋永至, 樋口知之 (2013), ”市場構造の変化を考慮したブランド選択モデルによる購買履歴データの解析”, マーケティング・サイエンス, 21(1), 37-59.
- [80] 本橋永至, 磯崎直樹, 長尾大道, 樋口知之 (2012), ”状態空間モデルによるインターネット広告のクリック率予測”, オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, 57(10), 574-583.
- [81] 中村 博 (2001), ”消費者の参照価格に関する実証研究と今後の研究課題”, マーケティング・サイエンス, 10-1/2 (2001), 49-68.
- [82] 西尾チヅル, 宮澤永光, 中西祥八郎 (1992), ”ニューラルネットワークとファジィ推論を用いたセールスプロモーション効果分析システム”, 日本経営工学会誌, 42(6) (1992), 431-439.
- [83] 恩蔵 直人, 守口 剛 (1994), ”セールス・プロモーション -その理論, 分析手法, 戦略-”, 同文館.
- [84] 岡太 彬訓, 守口 剛, 木島 正明 (2001), ”マーケティングの数理モデル (経営科学のニューフロンティア)”, 朝倉書店.
- [85] 佐藤 忠彦, 樋口 知之 (2008a), ”動的個人モデルによる消費者来店行動の解析 (討論付)”, 日本統計学会誌, 38-1, 1-19.
- [86] 佐藤忠彦, 樋口知之 (2008b), ”動学的売上反応モデルによる POS データの解析”, マーケティングサイエンス, 15(1/2), 1-26.
- [87] 佐藤忠彦, 樋口知之, (2009), ”動的個人モデルによる購買生起行動の解析”, マーケティングサイエンス, 16(1/2), 49-73.
- [88] 佐藤 忠彦, 樋口 知之 (2013), ”ビッグデータ時代のマーケティング・ベイジアンモデリングの活用”, 講談社.
- [89] 里村 卓也 (2008), ”コメント”, 日本統計学会誌, 38-1 (2008), 25-28.
- [90] 高橋 郁夫 (1991), ”非計画購買の規定要因分析”, 杏林社会科学研究, 8-1 (1991), 34-52.

- [91] 高橋 佳生 (2013), ”流通構造の変化と取引慣行の変容”, 新世代法政策学研究, 19, 239–268.
- [92] 照井 伸彦 (1994), ”市場反応分析における残存効果と動学的潜在変数モデル”, 山形大学紀要 (社会科学), 第 25 巻第 1 号, pp51–91.
- [93] 照井 伸彦 (2008), ”コメント -マーケティングの中の時系列解析-”, 日本統計学会誌, 38–1 (2008), 29–30.
- [94] 照井 伸彦 (2008), ”ベイズモデリングによるマーケティング分析”, 東京電機大学出版局.
- [95] 上田 隆穂 (1986), ”消費者層の価格感度に対する TV 広告の効果 [成熟型商品における実証研究]”, 学習院大學經濟論集, 23-1/2, 73–85.
- [96] 株式会社ビデオリサーチ (2013), ”視聴率ハンドブック”, 株式会社ビデオリサーチ.
- [97] 山田浩喜, 佐藤忠彦 (2012), ”階層ベイズモデルによる百貨店の態度ベース店舗満足化構造に関する解析”, マーケティング・サイエンス, 20(1), 17–41.
- [98] 山田浩喜, 佐藤忠彦 (2016), ”百貨店顧客の来店回数生起メカニズムの構造異質性の解析”, 行動計量学, 43(1), 53–68.