

書評

礒田正美 著

『算数・数学教育における  
数学的活動による学習過程の構成  
—数学化原理と表現世界、  
微分積分への数量関係・関数領域の指導—』

銀 島 文\*

本書は、「はじめに」に記されている通り、著者が早稲田大学から博士（教育学）の学位を授与された学位請求論文「数学教育における数学的活動による学習過程の構成に関する研究：表現世界の再構成過程と関数の水準によるFreudenthal 数学化論の拡張」に、「はじめに」と「結び」を加えて出版されたものである。「はじめに」では、博士論文の研究主題が広い視野から解題されており、「結び」では論文作成に至る経緯等が記されている。

原論文は、約30年にわたって進められた著者のこれまでの研究が総合されたものである（23頁）。著者の最初の問題意識は、著者自身の数学上の原体験であり、学部（筑波大学自然学類）時代に友人と探求したゲームの背後にある数理（必勝法）の発見にあったと述べられている（10頁）。各章では、それぞれ基盤となる著者の文献一覧と概要も述べられている。研究の進め方や論文の構成の仕方としても学ぶ点が多い。

本研究の目的は、「活動を通して数学を学べるようにする際に、そこで実現されるであろう学習過程が、真に数学を活動として学べる過程であると判断する際の基準を示すこと、そして、その基準を学習過程の構成原理として特定内容に係る教材研究を進め、その特定内容を活動を通して学べる学習過程が実際に構成できたかを確認できるようにすること（2頁）」と述べられている。つまり、学習者側の視点と指導者側の視点の両方を扱うことが志向されていると解釈できる。原論

---

\*国立教育政策研究所・教育課程研究センター

文は，序章と終章に4章を加えて構成されており，具体的には，以下のような構成になっている（節までを記載）。

## 序 章

- 本研究の目的
- 本研究の動機と意図
- 本研究の課題，方法と先行研究の限定
- 本研究の構成

## 第1章 数学化の規定

- 第1章の構成
- 第1節 本研究における活動観
- 第2節 数学化が求められる背景
- 第3節 数学化に対する諸説と Freudenthal の数学化
- 第4節 数学化の規定とそのための水準要件
- 第5節 数学化規定の妥当性と適用上の課題
- 第1章のまとめ

## 第2章 表現世界の再構成過程としての数学化

- 第2章の構成
- 第1節 課題に対する表現の記述枠組みの設定
- 第2節 表現世界の再構成過程と数学化の過程
- 第3節 表現世界の再構成からみた歴史上の数学化
- 第4節 表現世界の再構成過程からみた数学化の学習課題
- 第2章のまとめ

## 第3章 学校数学における関数の水準

- 第3章の構成
- 第1節 学校数学における水準の設定方法
- 第2節 学校数学における関数の水準
- 第3節 表現世界の再構成過程からみた関数の水準
- 第4節 学校数学における水準の機能と関数の水準の意義
- 第3章のまとめ

## 第4章 微分積分への数学化としての学習過程の構成

## 第4章の構成

### 第1節 数学化過程の構成原理

### 第2節 微分積分への数学化課題と基本定理の考え

### 第3節 困難校における微分積分学の基本定理への数学化

### 第4節 表現世界の再構成過程からみた基本定理への数学化

### 第4章のまとめ

## 終章

### 本研究の結果

### 本研究のオリジナリティ

### 本研究の成果の射程

以下、評者の関心にしたがって、二つの内容に焦点化して本書の内容を紹介する。

## フロイデンタルの数学化論と本書のオリジナリティ

Hans Freudenthal (1905–1990) の研究は、経済協力開発機構 (OECD: Organization for Economic Cooperation and Development) が実施する「生徒の学習到達度調査」(PISA: Programme for International Student Assessment) の「数学的リテラシー」概念や「数学的リテラシー」評価枠組みの理論的背景を構成している。「PISA ショック」という言葉があるように、今日、PISA は各国の教育行政に対して大きな影響を及ぼしている。そうした状況を勘案しても、Freudenthal は、今日の数学教育、あるいは、教育評価全般に深く影響を及ぼした研究者と言える。必ずしもこの点は原論文と関連するものではないが、そうした点からも原論文の考察内容に一定の意義を認めることができる。

また、本書では、数学化過程において表現が進化していく様相を表すことで、Freudenthal の数学化を拡張的に定式化することが意図されており、Freudenthal が提唱した数学化過程と水準を表象する枠組みとして、「表現世界の再構成過程」が提出されている (vii 頁)。数学教育において、「表現」が教育目標の主要構成要素であることから、表現に着目することが極めて有益とも述べられている (vii 頁)。このように、今日的な教育的課題との関連も強く主張されており、意欲的な研究課題の設定と論文構成になっている。

なお、原論文では、Freudenthal に準じて幾何以外の領域で水準設定が可能な

ことを示すために、教育課程の変遷が激しい関数領域を取り上げたとされている (viii 頁)。Freudenthal が数学化の典型として説明したのが van Hiele の幾何水準であり、そこでは指導内容の飛躍の層が指摘されている (13頁)。他方で、初等中等教育においては算術、代数領域の系統性が比較的是っきりしており、そうした理由からも、本論文では関数領域を検証事例の対象と定めたと述べられている (13頁)。

また更には、数学史上の数学内容を含めた広範な領域を学校数学の対象として考察を進めている点で、教材研究を革新するものと主張されている (409頁)。

上述の内容から、原論文のオリジナリティは、今日的課題を考察対象としていくこと、表現に着目したことで新たな視点を設定していること、関数領域に考察対象が拡張されていること、史的内容に考察範囲が拡張されていること、と捉えられる。

### 数学教育はいかに貢献しうるのか

なぜ数学を学ぶのか、なぜ数学を教えるのか、これらは一般的にもよく問われるものであり、数学教育学における根源的な問いでもある。「はじめに」では、これらの問いに対応する形で原論文の意義・意図が解説されており、そこでの解説内容と思想が本書全体に通底している。

著者は、数学教育の目標を、上位目標から見て①人間形成、②学び方・創り方・考え方、③知識・技能の三層からなると解説している (5 頁)。一方、Freudenthal は、人間が学ぶべきは、現実を数学化する活動であり、数学を数学化する活動であると言う数学化論を提唱しており、そうしたことから、Freudenthal の主張が著者の問題意識に沿う枠組みと共感できたと述べられている (iv 頁)。

更に、本書の学術的意義は、数学的活動を実現する学習過程構成理論を構築することで、数学教育学を、体系としての数学から目標を埋め込んだ人間形成学へ自立させる方途を示す点にある、と主張されている (viii 頁)。つまり、人間形成としての数学教育、それは数学を人間の営みとみなし、その営みそれ自体をも教育目標とみなす教育と述べられている (iv 頁)。これは、なぜ数学を学ぶのか、なぜ数学を教えるのかという問いに対する回答として、一定の納得を得られるものであり、論文中で構成される議論も、そうした回答に説得力を与えるものとして位置付いている。

本論文では、数学的活動による学習過程を構成する際の基本的な考え方が「数学化過程の構成原理」として以下のように提出されている。

〈数学化過程の構成原理〉

原理 1. 数学化を進める活動とは、生存可能性を追求する活動である。

原理 2. 数学化とは、数学的方法による再組織化を進めることである。

原理 3. 数学化の過程とは、表現世界の再構成過程である。

原理 4. 再組織化としての数学化の系統は、水準設定によって再帰的に系統付けられる。

原理 5. 数学化における学習課題は、表現世界の再構成過程の四様相である。

(314頁)

そして、「数学化過程の構成原理」は、数学的活動を目標にして内容選択し学習過程を構成する教育課程構成の一般理論の基盤をなすものとされている (viii 頁)。具体的には、その原理は対象とする数学内容を、いかなる順序で、いかに再組織化する形で教えれば、数学的活動による学習過程と言えるのかを説明する原理をなし、数学的活動を実現する指導計画を構想する際にも、授業づくりに際しても必要な基準となると述べられている (viii 頁)。つまり、教材研究指針としての構成原理の役割も担うと述べられており、この意味から、教材研究の方法論の確立に貢献しうると主張されている (20頁)。そして、教材研究の方法を学術的に議論しえるようにする理論こそが、本書が求める数学教育理論であり、数学教育学を人間形成学として自立させるために重要とも述べられている (viii 頁)。

以上、二つの内容に焦点化して本書の内容を紹介した。

「結び」にも述べられている通り、著者は現在、海外への日本の教育研究成果発信を精力的に推進なさっており、2006年からは、同じく筑波大学で博士号を取得されたタイ・コンケン大学の Maitree Inprasitha 先生と APEC 授業研究プロジェクトを受託されている (425頁)。

授業研究をはじめとして、我が国には誇るべき伝統や研究成果、実践の取組が数多く存在している。近年、我が国の教育に対する、諸外国からの注目はますます高まっており、その情報の発信に対する要望も高まっている。こうした現状を見ても、我が国から積極的な情報発信をしていくことが重要であろう。そうすることで、我々が何に取り組んできたのか、それはどのような理念や思想に依拠し

ているのかなど，これまで暗黙裡とされてきたことの自己認識を可能にし，見直す機会にもなり，更には言語化する契機となり，より質を高めるための重要な段階として位置付くはずである。そうした現状と照らしても，本書は大いに示唆的であり，ぜひ一読を薦めたい。

礪田正美著

『算数・数学教育における数学的活動による学習過程の構成

—数学化原理と表現世界，微分積分への数量関係・関数領域の指導—』

共立出版，2015年，5400円