様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８００５６

研究課題名（和文）結晶確率モデルのハミルトン力学系による導出及びそれにおける相対効果の影響

研究課題名（英文）Deriving stochastic crystal model from Hamiltonian dynamical system and the effect of relative effecacy

研究代表者
梁　松（LIANG, Song）

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：６０３２４３９９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：理想気体環境に入れられた二つの重粒子が、環境軽粒子達とノン・ランダムな相互作用をしながら動く系について、軽粒子達の質量が０に収束する時、重粒子達の挙動の極限を考えた。特に、二つの重粒子と軽粒子達との間の相互作用は同じタイプであると仮定する。重粒子達の挙動に相対効果がある場合とない場合それぞれについて、対応している確率微分方程式の解により定められる確率過程の収束を証明することにより、それぞれの極限過程の唯一の候補を求めた。また、相対効果がある場合について、粒子モデルの解が実際に上述の極限過程の候補に収束することを証明した。

研究成果の概要（英文）：Put two heavy particles into an ideal gas environment, a system consists of infinitely many light particles with a certain initial distribution, and assume that the interactions between particles are non-random. In this research, the interactions between the heavy particles and the light particles are assumed to be of same type. We are interested in the problem of the limit behaviors of the heavy particles when the mass of the light particles converges to 0, under different settings.
We considered the stochastic differential equations corresponding to the cases with or without relative efficacy for the behaviors of heavy particles, and proved the convergences of the corresponding stochastic processes. This gives us the concrete expressions of the only candidate limit processes for each case. Also, we proved the convergence of the particle-environment model to this candidate for the case with relative efficacy.

研究分野：確率論

キーワード：拡散過程　確率微分方程式　古典力学系　収束

１．研究開始当初の背景

ニュートン力学系やハミルトン力学系等のノン・ランダムな力学系は、確率過程を導出するのによく使われるモデルである。例えば、拡散過程を説明するために、一定の初期分布に従う無限個の軽粒子を含む理想気体と呼ばれる環境に置かれた重粒子の動きがよく使われる。なぜならば、直感的には、重粒子はたくさんの軽粒子に作用され、もし各作用が独立であると仮定できるならば、独立同分布な確率変数の中心極限定理により、重粒子の挙動を拡散過程とみなせるからである。

しかし、現実的には、粒子間の相互作用は重粒子のみならず、軽粒子達へも影響を与えるので、各時刻における軽粒子の分布は元の軽粒子の分布と異なるのは自明であり、重粒子と一度相互作用した軽粒子が再び重粒子と相互作用することもあり得るので、重粒子に作用する各軽粒子が独立同分布であると仮定するのも正しくない。

厳密的には、重粒子を入れる前の軽粒子環境は一定の確率分布に従い、軽粒子達と重粒子達の間の相互作用はランダム性のない力学運動法則に従うとし、軽粒子達の質量 m が 0 に収束し、軽粒子の密度も各軽粒子の速度もそれに合わせて無限大に行くときの重粒子達の挙動を議論することが必要である。

この問題は、1971 年に Holley によって初めて提出され、重粒子が一個しかない、しかもすべての粒子が一次元で動く場合に関して研究された。その後、色々な研究者により拡張され、特に最近、Liang-Kusuoka の研究により、重粒子が二つあり、かつ各相互作用がポテンシャルにより与えられる場合について、m が 0 に収束するときの重粒子達の挙動が研究された。具体的には、二つの重粒子が異なるタイプ、即ち、重粒子達と軽粒子達との間の相互作用は、一つの重粒子が吸引力であり、もう一つの重粒子が斥力である場合、重粒子達の挙動は「反射壁のある拡散過程」に収束することが証明された。

しかし、例えば結晶確率モデルを説明するために、二つの重粒子は軽粒子達と同じ種類の相互作用を持つ場合についても研究しなくてはならない重要な問題ではるが、殆ど研究されていなかった。

２．研究の目的

本研究の目的は、上述のように、一定の初期分布に従う無限個の軽粒子を含む理想気体と呼ばれる環境に置かれた二つの重粒子がランダム性のない力学運動法則に従って軽粒子達と相互作用しながら動くとし、軽粒子達の質量が 0 に収束するとき、重粒子達の挙動の極限として結晶確率過程を導くことにある。特に、二つの重粒子と軽粒子達との間の相互作用は同じ種類である場合について研究する。

ここで特に重要なのは、重粒子達に作用する軽粒子達に関して独立性という不自然な条件を課さずに、重粒子達の挙動を議論することである。

このとき、重粒子達の挙動について、相対効果を仮定するかどうかによって、状況が全く異なる。具体的には、相対効果がある場合、重粒子達の速度は光速という定数を超えることがないので、位置を表す確率過程のタイト性は割と簡単に得られる、しかし、速度の不連続性により、例え速度を表す確率過程のタイト性を証明できたとしても、それを具体的に記述するのは簡単ではない。一方の相対

効果がない場合について、重粒子達の速度自身が有限時間で無限大になる可能性があるので、位置によって定められる経験分布の過程を考えることになるが、エネルギーの激しい減衰により、位置の取りうる範囲を定めるのも簡単な問題ではない。

３．研究の方法

本研究において、主に以下のアイデア・手法が使われた：

（1）まず、相対効果が存在する場合について、極限過程の候補を求めるために、対応している確率微分方程式の解の極限を研究した。

この問題に関して、一番の難点は極限における速度の非連続性である。詳しく説明すると、ポテンシャル関数はコンパクトな台を持つので、極限過程は存在と仮定すれば、拡散過程相及び等速運動相という二つの相を持つことが予想される。具体的には、重粒子がポテンシャルの台の外にある時には、元々の確率微分方程式は実質パラメータを含んでいないので、極限が自然的に存在し元の拡散過程と同じものになる、これが拡散過程相を与える。一方、重粒子がポテンシャル関数の台の中に入った瞬間、運動量が瞬時に無限大になり、速度は光速になる。これが等速運動相である。また、等速運動相では重粒子はある特定な場所では反射されて再び二つの相の境界に戻る。

問題は、重粒子が等速運動相から二つの相の境界に戻った時、どんな挙動を取るのかである。再び反射して等速運動相に留まるのか、それとも拡散過程相に突入するのか。また、拡散過程に入るのなら、初期速度はどんな値を取るのか。実はこれが今の問題の一番の難点である。

本研究では、二つの新しい確率過程を導入することによりこの問題を解決した。具体的には、まず「総エネルギー」という確率過程 Ht を考えると、これは重粒子がどの相にあっても常に有限な値を取り、しかも満たしている確率微分方程式も具体的に与えることができる。即ち、Ht は常時追跡可能である。一方、拡散過程相では、運動量の絶対値は Ht によって一意的に定まる。さらに、等速運動相では、運動量は無限大にはなるが、実は、無限大になるのは位置と同じ方向の成分だけである。よって、「運動量の位置に直行する成分」 Rt を考えれば、これも常に有限であり、しかも追跡可能である。即ち、重粒子が等速運動相から二つの相の境界に到着したとき、重粒子がどんな挙動を取るかは Ht とRt の値によって完全に定められる。

（2）次に、相対効果が存在する場合に関して、粒子環境のモデルについて研究し、軽粒子達の質量が 0 に収束する時、重粒子達の状態を表す確率過程が収束することを証明した。この証明は、タイト性及び収束性の証明という二つのステップに分けられる。

タイト性を証明するとき、一番の難点は、重粒子達のみならず軽粒子達も同時に動いているので、系の動きを表す微分方程式が非常に複雑であり、解析が難しい。しかし、軽粒子達と比べれば、重粒子達の速度が十分遅いので、軽粒子達の挙動を考えるとき、重粒子達は動いていないものとして近似できるはず。上述の問題の解決策として、今述べたように、軽粒子達の挙動を、重粒子達が動いていない時のもので近似し、この近似の精密な誤差評価も具体的に与えたのがポイントである。この近似により、考える常微分方程式が元の方程式より簡潔なものとなり、具体的な性質を議論することが可能になった。

上述の近似により、重粒子達の状態を表す過程を“マルチンゲール項（ジャンプ可）＋ドリフト項＋十分小さい剰余項”と分解できた。ここで、この分解の各項について、時間に関する連続性に拘らなかったのもポイント

の一つである。なお、収束先の具体的な表現を求めるときはマルチンゲール理論を用いて求めたが、その時にもこの分解が使われている。

（３）また、相対効果が存在する場合に関して、一次元の場合について、対応している確率微分方程式を考えることにより、求める極限過程の唯一候補の具体的な記述を与えた。総エネルギーの減衰が非常に激しいので、対応しているノンランダムな微分方程式に関してですら、解によって定められる経験分布の極限過程が自明ではない。

この問題を解くために、まずノンランダムな微分方程式を考え、重粒子の取りうる範囲を与える新しい過程を導入し、一往復に費やされる時間及びそれにおけるエネルギーの減衰との間のバランスを詳しく評価することにより、ノンランダムな場合における解によって定められる経験分布過程の極限を求めた。その後、マルチンゲールの表現定理及びブラウン運動の色々な性質を使い、ランダムな場合をノンランダムな場合に帰着し、問題にしている解によって定められる経験分布過程の収束を証明した。

４．研究成果

本研究の成果として、一定の初期分布に従う無限個の軽粒子を含む理想気体と呼ばれる環境に二つの重粒子が置かれ、二つの重粒子が同種類であるモデルの研究に関連し、以下の問題を解明できた：

重粒子達の動きに相対効果がある、即ち重粒子達の速度は光速という定数を越えられないという場合について、まず対応する確率微分方程式を考え、解の分布のタイト性を証明し、「総エネルギー」及び「運動量の位置に直交する方向の成分」という二つの新しい確率過程を導入することにより、確率微分方程式の解の分布の極限過程の具体的な記述を与えた。また、元の粒子モデルについて、軽粒子達の質量が０に収束するとき、重粒子達の動きを表す確率過程が前述の極限過程候補に収束することを証明した。

また、重粒子達の動きに相対効果がない場合について、対応する確率微分方程式の一次元の場合を研究した。まずブラウン運動の色々な性質を用いて、ノンランダムな場合に帰着した。また、総エネルギー過程を考え、重粒子の取りうる範囲を表す確率過程を新たに導入することにより、位置によって定められる経験分布過程の収束を証明し、極限過程の具体的な形を求めた。特に、一次元の場合、極限過程はノンランダムなものになる。これにより、同種類重粒子で、相対効果がない場合の極限の候補を与えた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３　件）

① <u>Song Liang</u>, Stochastic Newton equation in Strong potential limit, Stochastic Processes and their Applications 126 (2016), no. 10, 2913-2955. 査読有り
DOI: 10.1016/j.spa.2016.03.0013

② <u>Song Liang</u>, A mechanical model of Brownian motion with uniform motion area, The University of Tokyo. Journal of Mathematical Sciences 21 (2014), 1-100, 査読有り

③ <u>Song Liang</u>, Stochastic Hamiltonian Equation With Uniform Motion Area, Dynamic Systems and Applications 22

(2013) 557-589，査読有り

〔学会発表〕（計　4　件）

① Song Liang, Stochastic Newton equation with absorbing area, Stochastic Analysis and Applications, August 31--September 4, 2015 東北大学（仙台市）

② Song Liang, Stochastic Newton equation and absorbing area with single-well, Stochastic Processes, Analysis and Mathematical Physics (a satellite Conference of Seoul ICM 2014)」August 25-29, 2014, 関西大学(大阪府吹田市)

③ Song Liang, Diffusion processes and uniform motions, Tunisia-Japan Symposium on Science, Society and Technology 2013, November 15-19, 2013, Tunis（チュニジア）

④ Song Liang, 拡散過程とノンランダムな力学系,確率解析, March 18-20, 2014, 京都大学（京都市）

６．研究組織

(1)研究代表者

梁　松　(LIANG Song)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：60324399