

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400190

研究課題名(和文) タイプ排除定理と無限組み合わせ論の研究

研究課題名(英文) Omitting Types Theorem and Infinite Combinatorics

研究代表者

坪井 明人 (TSUBOI, Akito)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：30180045

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：モデル理論の重要な手法であるコンパクト性を用いて、数学的構造を解析した。対象とする構造は、グラフ構造と算術(PAおよびそれより弱い体系)および順序極小理論のモデルである。グラフ構造は、モデル理論的には、2変数述語記号の構造と考えることができ、モデル完全性、モデル随伴理論の存在条件などについて結果を得た。また順序極小理論に関連しては、順序極小構造の関数族による拡張において、再帰的飽和性の観点から研究を行った。また無限組み合わせ論に関連した研究も行った。

研究成果の概要(英文)：Using Compactness Theorem, which is an important tool in model theory, we studied mathematical structures from model theoretic view point. Mathematical structures we studied are graph structures, models of arithmetic (PA or weaker systems) and models of o-minimal theories. As for the graph structures, we obtained results related to model completeness and sufficient conditions for the existence of a model companion. We also studied infinite combinatorics related to the problem of edge coloring of infinite graphs.

研究分野：モデル理論

キーワード：数理論理学 モデル理論

### 1. 研究開始当初の背景

古典的タイプ排除定理は Baire のカテゴリー定理に対応するもので、モデル理論的には小さなモデルの構成を支援する。一方において、モデル理論のもう一つの重要な定理であるコンパクト性定理により、大きな(十分な飽和性を持つ)モデルは、比較的簡単に構成できる。本研究においては、「必要な部分は十分に大きい、それ以外は小さなモデルは作れるか」という問題に対して、モデル理論と無限組み合わせ論の両面からの研究を行いたいと考えた。

### 2. 研究の目的

モデル理論を利用して、数学的構造の解析を行う。モデル理論的な手法の有効性は、多くの場合、コンパクト性にある。数学的構造をコンパクト性により拡大して、自己同型が容易に作れる状況にして、議論を行い、再びもとの構造に戻るといった手法が多く使われる。この手法のもとで、興味ある数学的対象を研究することを目的とする。特に今回の研究においては、グラフ構造(2変数述語記号Rを解釈する構造でRに対称性と非反射性を仮定)および順序極小理論(順序構造の拡張となる構造において、一次元の定義可能集合が有限個の区間と点の和として記述されるもの)のモデルを主な対象とした。

### 3. 研究の方法

筑波大学におけるモデル理論セミナー(週2回程度)を通じて、研究を発展させた。研究協力者となる大学院生やポスドクも参加をして、議論を深めた。モデル理論の研究者以外(証明論研究者、集合論研究者)とも連絡を密にした。学内の研究者(研究分担者、連携研究者)だけでなく神戸大学の研究者とも研究打ち合わせなどを行って、研究の進捗状況や方針について意見を求めた。各年度2回程度の研究集会を開き研究成果の発表を行った。同時に参加するモデル理論専門家および非専門家から意見を聞き、研究計画の方向性を随時補正して研究を行った。

### 4. 研究成果

主な対象ごとに結果を整理する。

#### グラフ理論関連.

いわゆるグラフはモデル理論的にはR-構造(ただしRは2変数述語記号)として考えることができる。グラフをモデル理論的に考察した。

モデル完全性を持つ条件、モデル随伴理論を持つことと条件を研究した。本研究では、主にグラフの公理を拡張する理論に興味を持っている。すべての構造はグラフとある意味で対応するので、グラフの理論を分類することは、一般的な理論を分類することと同程度の難易度を持つ。研究で得られたことは、下記

のとおりである:

(A) 障害物という概念を導入して、理論 T がモデル完全性を持つことは、すべての存在型論理式が本質的に有限個の障害物を持つことと同値になることを示した。

(B) また定義可能拡大という概念を導入し、十分条件として、T が定義可能な拡張を認められた場合、T はモデルのコンパニオンを持つことを示した。

#### 超準モデル関連.

実閉体に新たな関数族を付加した順序極小となる拡張について、整数部分が非アルキメデス的で、関数族が十分に近似可能であれば、その構造が再帰的に飽和であることを示した。また、真の算術の構造から実閉体を構成する方法はよく知られているが、かなり弱い体系からも同様な手法が可能であることを示した。

#### 組み合わせ論関連

我々は無限構造の構造に対する Ramsey 理論を導入した。G を k 部ランダムグラフあるいは三角形を持たない k 部ランダムグラフとして、辺に対して(有限)彩色がなされていると仮定する。このとき、G と同型になる部分 k 部グラフ H で、(2部ごとに)辺彩色が一定になるものが存在することを示した。この結果の系として、Hales-Jewett の定理を用いずに、有名な有限グラフに対する彩色定理を得ることができる。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 6 件)

① 竹内, 耕太; Tsuboi, Akito, Infinitary Method for Finite Structure, 数理解析研究所講究録/1938/pp. 59-642015 (査読なし)

② Akito Tsuboi, "Infinite monochromatic subgraphs" (pages 34-38), in Model theoretic aspects of the notion of independence and dimension (RIMS Kokyū Roku) (査読なし)

③ Kota Takeuchi, Yu-ichi Tanaka and Akito Tsuboi, "Model companions of theories of graphs" (pages 236-246), Mathematical Logic Quarterly, Article first published online: 22 MAY 2015 - DOI: 10.1002/malq.201400019 (査読あり)

④ Yu-ichi Tanaka and Akito Tsuboi, "A

construction of real closed fields”  
(pages 159-168),  
Mathematical Logic Quarterly, Article  
first published online: 15 MAY 2015 -  
DOI:  
10.1002/malq.201300052 (査読あり)

⑤ Kota Takeuchi, Akito Tsuboi,  
“Infinitary Method for Finite Structures”  
(pages 59-64), in Model theoretic  
aspects of the notion of independence  
and dimension (RIMS Kokyu Roku, 1938)  
(査読なし)

⑥ Akito Tsuboi, Dividing and Forking -  
A Proof of the Equivalence -, RIMS  
Kokyuroku1888/1888/pp. 23-27, 2014-04  
(査読なし)

[学会発表] (計 9 件)

① Akito Tsuboi, The number of  
independent strict orders, 2017 鹿児島モデル  
理論研究集会, 鹿児島国際大学 7 号館 728  
教室, 2017-03-09 - 2017-03-11

② 竹内 耕太, 坪井 明人, On the number  
of independent strict orders, 首都大学東京  
南大 沢キャンパス, 東京都, 2017 年 3 月  
24 日

③ 坪井 明人, 「モデル理論入門」, 数学基礎  
論サマースクール 2016, 早稲田大学西早稲田  
キャンパス 5 2 号館 1 0 1 教室 2016-09-  
05 - 2016-09-07

④ Akito Tsuboi, Infinite Monochromatic  
Subgraphs,  
RIMS Model Theory Workshop, RIMS  
Kyoto University,  
December 15, 2015  
(Joint work with Kota Takeuchi)

⑤ 坪井 明人, Uncountable  $\omega$ -categorical  
theories,  
「2015 モデル理論夏の勉強会」研究集会, 法  
政大学, 2015-08-23-2015-08-23

⑥ Tsuboi, Akito, Infinitary method and  
finite structures, Workshop on  
Mathematical Logic on the Occasion of  
Sakae Fuchino's 60th Birthday, Kobe  
University, 2014-11-17-2014-11-19

⑦ Akito Tsuboi, Infinitary Method for  
⑧ Infinite Method for Finite Structures,  
Classification Theory Workshop (ICM 2014  
Satellite Conference)  
Daejeon, Korea, NIMS (National  
Institute for Mathematical Sciences)  
2014-08-06 08-09

⑨ Akito Tsuboi, A model theoretic  
construction of real closed fields,  
Asian Logic Conference 2013, SUN YAT-  
SEN UNIVERSITY, Guangzhou, China  
2013-09-19

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等  
<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tsuboi/>  
(数理物質系数学域内のHP)  
<http://trios.tsukuba.ac.jp/>  
(筑波大学 TRIOS)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

坪井 明人 (TSUBOI, Akito)  
筑波大学・数理物質系数学域・教授  
研究者番号: 30180045

### (2) 研究分担者

塩谷 真弘 (SHIOYA, Masahiro)  
筑波大学・数理物質系数学域・准教授  
研究者番号: 30251028

### (3) 連携研究者

竹内 耕太 (TAKEUCHI, Kota )  
筑波大学・数理物質系数学域・助教

研究者番号： 50722485

(4)研究協力者

柳川 信 (YANAGAWA, Makoto)  
筑波大学・数理物質科学研究科・後期学生

(5) 研究協力者

依田 大樹 (YODA, Hiroki)  
筑波大学・数理物質科学研究科・後期学生

(6)研究協力者

岡部 峻典 (OKABE, Shunsuke)  
神戸大学大学院システム情報学研究科・後期  
学生