

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 9 月 25 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2016

課題番号：25400004

研究課題名(和文)モチーフの実現関手の構成

研究課題名(英文)Construction of the realization functors of motives

研究代表者

木村 健一郎 (KIMURA, Kenichiro)

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：50292496

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：周期積分を使う混合TateモチーフのHodge実現関手を構成することができた。それは2つのプレプリントにまとめられた。次の論文で、Bloch-Krizの元のHodge実現と我々の構成したものが同じであることを書く予定である。また、寺嶋氏と共同で構成した混合楕円モチーフの圏の実現関手の構成、楕円ポリログと多重楕円ポリログに対応するモチーフのHodge実現の具体的な計算、さらに、一般の代数曲線のコホモロジーで生成される混合モチーフのテンソル圏のバー構成による定義と、実現関手の構成、さらに、今まで得られた結果を使い、Kontsevich-Zagierの周期予想の研究も行う予定である。

研究成果の概要(英文)：We succeeded in the construction of the Hodge realization functor on the category of mixed Tate motives in terms of period integrals. In the next paper we will prove that the functor we have constructed is equivalent to the original one defined by Bloch and Kriz. We will also construct the Hodge realization of mixed elliptic motives, and apply our results to the study of the period conjecture formulated by Kontsevich-Zagier.

研究分野：数論幾何学

キーワード：Hodge実現

### 1. 研究開始当初の背景

混合モチーフの圏は、代数多様体に対する普遍的なコホモロジー理論というべきものである。最初 Grothendieck が滑らかな射影的代数多様体に対する純モチーフの圏の存在を予想した。その後 Deligne と Beilinson が一般の代数多様体に対する混合モチーフの圏の存在を予想した。予想通りの性質を持つ混合モチーフの圏の存在はまだ証明されていないが、スタンダード予想や Beilinson-Soule の消滅予想が重要であることがわかっている。しかしこれらの予想の解決のための本質的なアイデアは今のところ発見されていない。

そこで、より直接にモチーフの圏を構成する試みがある。混合モチーフの圏は淡中圏、つまりある代数群の表現の圏に同値であることが予想されている。また、既約表現の間の拡大群は、代数的 K 群により記述されると予想される。このように指定される拡大群を持つ代数群の構成法として、bar 構成がある。これは次数つき微分代数(differential graded algebra, DGA)から出発して、ある条件のもとでその DGA のホモロジー群が既約表現の間の拡大群になるような代数群を構成する方法である。Bloch-Kriz ではアフィン空間内の代数的サイクルからできる DGA で、定義体の高次 Chow 群をホモロジー群に持つようなものが使われた。高次 Chow 群は代数的 K 群と同型である。この DGA から bar 構成により定義される可換な Hopf 代数を H とする。混合 Tate モチーフという混合モチーフの部分圏は、H 上の次数つき余加群の圏であると考えられる。この構成の利点は、スタンダード予想や Beilinson-Soule の消滅予想などを必要としないことである。

混合モチーフの圏からは l-進、Hodge などの実現関手が存在すべきであり、自然な実現

関手を定義することが重要である。Bloch-Kriz は混合 Tate モチーフの l-進および Hodge 実現関手を定義している。これらは層の Godement resolution を用いたやや抽象的なものである。Hodge 実現については、ある条件を満たす位相的錯体の存在を仮定して、微分形式の積分による具体的な構成も行っている。

### 2. 研究の目的

Bloch-Kriz による混合 Tate モチーフの圏の Hodge 実現関手を、微分形式の積分を用いて仮定なしに構成する事。さらに、混合楕円モチーフの圏の Hodge 実現関手を、微分形式の積分を用いて構成すること。

### 3. 研究の方法

ホッジ構造を定義するには次の性質を持つ位相的チェインの複体  $C(n)$  の存在が必要かつ十分であることがわかった。

- (1)  $C(n)$  は複素数体上のアフィン空間に含まれる位相的チェインの複体である。
- (2)  $C(n)$  の各元は face (いくつかの座標が 0 または無限大であるような部分空間) と正しい余次元で交わる。
- (3)  $C(n)$  は Bloch-Kriz が定義した DGA を生成する代数的サイクルを含む。
- (3)  $C(n)$  の元と余次元 1 の face との交わりをとる写像は、 $C(n)$  から  $C(n-1)$  への複体の写像である。
- (4) アフィン空間上の、極を持つある微分形式  $\omega_n$  を考える。 $C(n)$  の各元上の  $\omega_n$  の積分は収

束する。また、余次元 1 の face への制限写像について Cauchy formula が成り立つ。

(5)  $n$  が 1 以上の時、複体  $C(n)$  は 0 でないホモロジー群を持たない。

考察の結果、semi-algebraic set から作られるチェインの複体がこれらの性質を持つことが期待される。このうち性質 4 と 6 については、intersection complex の専門家である花村昌樹氏(東北大学)から必要な知識を得て証明する。もっとも困難と思われるのは 5 であるが、寺杉友秀氏と共同で証明したい。また、混合 Tate モチーフを定義したシカゴ大学の S. Bloch 氏とも共同研究を行う。

その次の計画として、混合楕円モチーフの圏の実現関手の構成、および混合楕円モチーフの圏から Voevodsky の三角圏への自然な関手の構成を行う。混合楕円モチーフは、寺杉氏との共同研究により構成したもので、Bloch-Kriz の構成をヒントに、楕円曲線のモチーフを含む混合モチーフの圏に対応する Hopf 代数を構成したものである。混合 Tate モチーフのホッジ実現関手の構成を土台として、混合楕円モチーフのホッジ実現関手を構成する。扱う代数的サイクルはより複雑になるが、基本的には混合 Tate モチーフの場合の自然な拡張として構成できるはずである。また、1-進実現関手の構成も行う。Bloch はポリログに対応するモチーフのホッジ実現関手の具体的な計算を行っている。これをヒントに、楕円ポリログに対応するモチーフのホッジ実現関手の計算を具体的にを行い、楕円ポリログ関数が周期積分に現れることを証明する。楕円ポリログは普通のポリログより状況が複雑で、直接計算が難しい可能性がある。その場合は体上でなく、楕円曲線の族のモチーフを考えることにより新たな

可能性を探る。楕円ポリログの創始者の一人である A. Levin 氏(モスクワ)と共同研究を行う。

また、混合楕円モチーフの圏から Voevodsky の定義したモチーフの三角圏への自然な関手を構成する。これにより我々の構成した混合楕円モチーフの圏が正しいものである根拠が得られる。

#### 4 . 研究成果

寺杉友秀氏、花村昌樹氏と共同で研究してきたが、周期積分を使う混合 Tate モチーフの Hodge 実現関手を構成することができた。それは 2 つのプレプリント にまとめられた。次の論文で、Bloch-Kriz の元の Hodge 実現と我々の構成したものが同じであることを書く予定である。また、寺杉氏と共同で構成した混合楕円モチーフの圏の実現関手の構成、楕円ポリログと多重楕円ポリログに対応するモチーフの Hodge 実現の具体的な計算、さらに、一般の代数曲線のコホモロジーで生成される混合モチーフのテンソル圏のバー構成による定義と、実現関手の構成、さらに、今まで得られた結果を使い、Kontsevich-Zagier の周期予想の研究も行う予定である。

#### 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

Kimura, K., The Hodge realization of mixed Tate motives.

(Hopf algebras and quantum groups : their possible applications), RIMS kokyuroku 1840, 139--148, 2013.

[URL:http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1840.html](http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1840.html). 査読有

[学会発表](計 2 件)

Kenichiro Kimura,

Hodge realization of Bloch-Kriz mixed Tate motives via integral of logarithmic forms. 第 12 回 鹿児島代数・解析・幾何学セミナー、2017 年 2 月 15 日。鹿児島大学理学部(鹿児島市)。

Kenichiro Kimura,  
Semi-algebraic chains and the Hodge  
realization of mixed Tate motives.  
Tsuda college mini-workshop on Calabi-Yau  
varieties, arithmetic, geometry and  
physics. 津田塾大学(東京都小平市)。2015  
年 8 月.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

木村 健一郎(Kimura, Kenichiro)  
筑波大学・数理物質系・講師  
研究者番号：50292496

(4)研究協力者

寺杣 友秀 (Terasoma, Tomohide)

花村 昌樹 (Hanamura, Masaki)