地球球体説

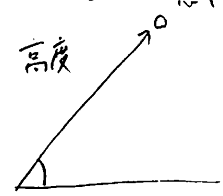
前5c.初頭
古代ギリシャ

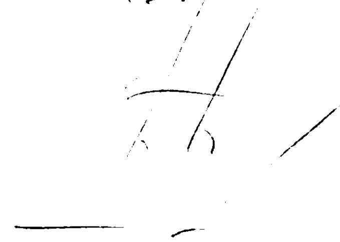
前8c.半ば
〜
前6c.半ば
植民

地中海世界

イスタンブール
⇑
ビザンチウム
都市

フェニキア人

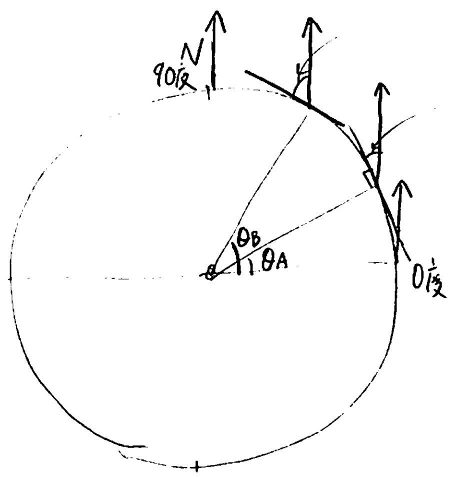




1) 東西の移動では高度に変化なし

2) 南から北への移動では高度に増大する.

高度の増え方は移動した距離に比例する.



θ_B:高度

θ_A:高度

円弧の長さ $= d_{BA}$

$\theta_B - \theta_A$

半径

エラトステネス(前3c.) ― アルキメデスの友人

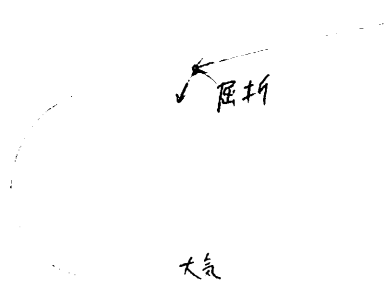
$$\frac{d_{BA}}{\theta_B - \theta_A} = \frac{\text{地球の周囲の長さ}}{360}$$

誤差1%以下

エジプト　アレクサンドリア
アレクサンダー大王

図書館
ムセイオン → 焼打ち
ムスリム
キリスト教徒

地球　月　アリスタルコス
太陽



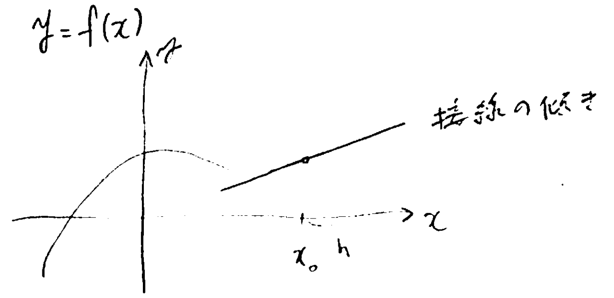
中世末　コペルニクス　太陽中心説
トスカネリ　地球球体説

コロンブス

微積分　静学
　　　　動学

力学
万有引力の法則 } Newton (17c)

17 }
18 }
19 ← 高校

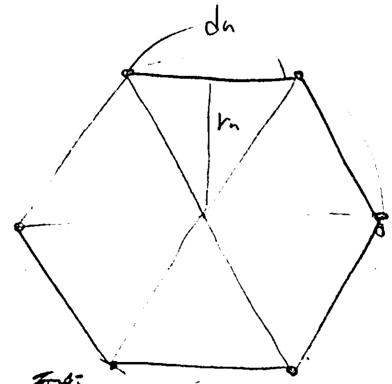


$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ← 平均の変化率

微分 ⇐ 極限　ε-δ
19c.

円の周囲の長さ d_r
(半径r) ↑
rに比例

$d_r = 2\pi r$



アルキメデス (前3c.) シチリア島
円の面積 πr^2
ローマ帝国
私の円を乱すな!

内接する正n角形の面積 ≤ 円の面積

$$n\cdot\frac{1}{2} d_n \cdot r_n = \frac{1}{2}\, n d_n \cdot r_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi r^2$$

$n d_n \to 2\pi r$, $r_n \xrightarrow{n\to\infty} r$

(極限の考えはまだ確立していない)

Newtonの時代
hが十分小さければ　$h f'(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$ が成り立つ
$h^2 = 0$ (巾零無限小)
$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$

$\varphi : D \to \mathbb{R}$
$(\exists!\, a \in \mathbb{R})(\forall d \in D)(\varphi(d) = \varphi(0) + a d)$

$\varphi(d) = f(x_0 + d)$ とする.
$(\varphi(0) = f(x_0))$ → $\varphi(d) = \varphi(0) + a d$
$f(x_0+d) = f(x_0) + a d$ となる $a \in \mathbb{R}$ が存在.
この a を $f'(x_0)$ とする.

$(f+g)' = f' + g'$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - \{f(x_0) + g(x_0)\}}{h}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$\downarrow$ $f'(x_0)$　　$\downarrow$ $g'(x_0)$

$f(x_0+d) + g(x_0+d)$
$= f(x_0) + f'(x_0) d + g(x_0) + g'(x_0) d$
$= f(x_0) + g(x_0) + d\{ f'(x_0) + g'(x_0) \}$

$(fg)' = f'g + fg'$ (Leipnizの公式)

$$\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0+h) + f(x_0)\,g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,g(x_0+h) + f(x_0)\,\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$\xrightarrow[h\to\infty]{} f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

実際にやったこと

$$f(x_0+d)\,g(x_0+d) = \{f(x_0) + f'(x_0)d\}\{g(x_0) + g'(x_0)d\}$$
$$= f(x_0)\,g(x_0) + \{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)\}d + f'(x_0)\,g'(x_0)\underbrace{d^2}_{=0}$$

Barkley (哲学者) ← Leipnizにコメント

D. $a \in \mathbb{R},\ d \in D$

$ad \in D \quad \because\ (ad)^2 = a^2d^2 = a^2 \cdot 0 = 0$

$d_1, d_2 \in D$

$(d_1+d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 = 0 + 0 + 2d_1d_2$

$(d_1+d_2)^3 = d_1^3 + d_2^3 + 3d_1^2d_2 + 3d_1d_2^2 = 0$

$D_n = \{d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0\}$

<u>report I</u> $d_1 \in D_n,\ d_2 \in D_m \Rightarrow d_1 + d_2 \in D_{n+m}$

(hint. 二項定理)

<u>Corollaly</u> $d_1, \dots, d_n \in D \Rightarrow d_1 + \cdots + d_n \in D_n$

$d_1 \in D$,

$f(x_0+d_1) = f(x_0) + f'(x_0) + d_1$

$d_1, d_2 \in D$

$$f(x_0+d_1+d_2) = f(x_0+d_1) + f'(x_0+d_1)\, d_2$$
$$= f(x_0) + f'(x_0) d_1 + \{ f'(x_0) + f''(x_0) d_1 \} d_2$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(d_1+d_2) + f''(x_0)\, d_1 d_2$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(d_1+d_2) + \frac{1}{2} f''(x_0)(d_1+d_2)^2$$

$d_3 \in D$,

$$f(x_0+d_1+d_2+d_3) = f(x_0+d_1+d_2) + f'(x_0+d_1+d_2)\, d_3$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(d_1+d_2) + f''(x_0)\, d_1 d_2$$
$$+ \{ f'(x_0) + f''(x_0)(d_1+d_2) + f'''(x_0)\, d_1 d_2 \} d_3$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(d_1+d_2+d_3) + f''(x_0)(d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3) + f'''\, d_1 d_2 d_3$$
$$= \cdots$$

taylor 展開

↑

$$d_1d_2 + d_2d_3 + d_3d_1 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}$$
$$d_1 d_2 d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{3}$$

report II

(1) $f(x_0+d_1+d_2+d_3+d_4)$

(2) $f(x_0+d_1+\cdots+d_5)$

∘ $f(x) = C$.

$f(x_0+d) - f(x_0) = C - C = 0 = 0 \cdot d \qquad \therefore f'(x_0) = 0$.

∘ $f(x) = x$

$f(x_0+d) - f(x_0) = x_0 + d - x_0 = d = 1 \cdot d \qquad \therefore f'(x_0) = 1$.

∘ 三角関数

dが十分小さければ $(d^2 = 0)$

$\sin d = d$

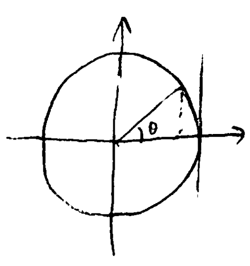
$\cos d = 1$.

$$\sin(x_0+d) = \sin x_0 \cos d + \cos x_0 \sin d$$
$$= \sin x_0 + (\cos x_0)\, d$$

$\therefore \sin' = \cos$

$$\cos(x_0+d) = \cos x_0 \cos d - \sin x_0 \cos d$$
$$= \cos x_0 - (\sin x_0)\, d$$

$\cos' = -\sin$



高校では

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

○ 指数関数

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$e > 0$ (正の数とする)　　　$10^d = 10^0 + ad$

$(e^x)' = ?$

$$e^{x+d} = \left(10^{\log_{10} e}\right)^{x+d} = 10^{(\log_{10} e)(x+d)} = 10^{(\log_{10} e)x} \cdot 10^{(\log_{10} e)d}$$

$$= e^x\left(1 + a(\log_{10} e)\,d\right) = e^x + e^x \cdot a(\log_{10} e)\,d$$

↓

ここが1になれば $(e^x)' = e^x$ になる。