地球 球体説.

前5C初頭. 古代ギリシャ.

前8C半ば、
前6C半ば } 植民地、地中海世界.

イスタンブール

⇑

ビザンチウム.

都市.

フェニキア人.

→ 北極星に気付いた。

→ 高度が場所により異なることにも気付いた。

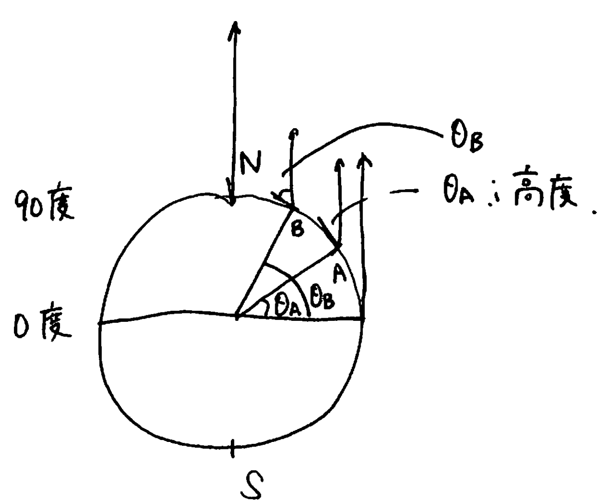
もし地球が平面だとしたら、北極星は、遠くにある。(無限遠).

ってことをみとめると、高度が場所によって異なることがおかしい。

→ 1) 東西の移動では高度に変化なし。

2) 南→北で、高度は、増大する。

更に、高度の増え方は、移動した距離に比例する。



A → B に移動した時、$\theta_B - \theta_A$ 増加.

ギリシャの人は、幾何学大好きなんですね。

そういうところがあって、地球が球ってことになるんですね。

ギリシャってのは、どれい制なんですね。ひま ~~[illegible]~~ だから数学するんですね。

先に話はすすみます。

地球が球だとしたら、半径を出してやろうと。

半径。

エラトステネス (アルキメデスの友人)

前3C

$$\frac{d_{BA}}{\theta_B - \theta_A} = \frac{\text{地球の周囲の長さ}}{360}$$

結果として、誤差が1%以下。すごいですね。

文化というのは、常に increase ではない。

文化というのは、なくなることもあるんですね。

アレクサンドリア そこに、図書館(ムセイオン)があった。

エラトステネスは、そこの館長。もう記録は、残っていない。

理由は、焼き打ちにある。焼き打ちは、ムスリムの専売特許ではなかった。

キリスト教が最初。聖書が良い物、それ以外は、まがまがしいものとして、

破かいすることに、たぶん、まよいはなかった。

数学だとユークリッド原論があるけど、これは、今に続わっている。

地球と月、太陽の distance もアリスタルコスによって、測られた。

光が直進することは、知ってたけど、地球の大気で、光が屈折することを考慮しなかった。

中世末 コペルニクス 太陽中心説。

トスカネリ 地球球体説 → 半径を計算してるけど、小さくなった。

コロンブスは、今までは、東周りだったけど、西周りでいけるはず。
しかもトスカネリは半径を小さくみつもってたから、西に出発した。
アメリカ大陸について、そこをインドと思ってたから、インディアンってよぶようになった。

微積分。　古代ギリシャでは、静学。

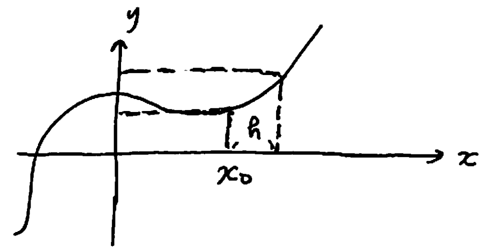
動学、力学、万有引力の法則　：Newton (17C)

こういったことを行うには、微積分が必要になってきます。

19C以降の微積分というのは、それ以前と異なっています。

高校では、19C以降のものをやっている。

$y = f(x)$



平均の変化率。

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

← x_0での接線の傾きを出している。

微分 ← 極限が必要になる。（高校では、極限やって、微分をやるって構成になってる）。

↑

をやるってなると、悪名高いε-δをやることに。

極限の概念が数学の世界で確立するのが19C、なんですよ。

アルキメデス　円の面積　πr^2.
(前3C).

↑

ローマ帝国がでてくる時代ですね。

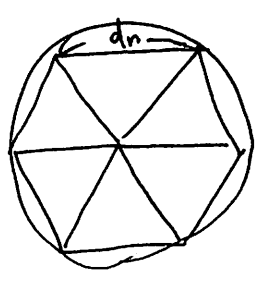
シチリア島にいたんですね。

幾何学をやっている時、ローマ兵に対し、「私の円を乱すな。」それでさされる。

円の周囲の長さ、っていうのは、rに比例 → $d_r = 2\pi r$ ってなるようにπを決めた。

内接する正n角形の面積 ≤ 円の面積 ≤ 外接する正

- n=6



$$n \cdot \frac{1}{2} d_n r_n = \frac{1}{2} \underbrace{(n d_n)}_{\downarrow\ 2\pi r} \underbrace{r_n}_{\downarrow\ r} \to \pi r^2.$$

$h f'(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$

↑ hが十分小さければ、成立してると考えた。

→ どれくらい hが小さいか。

$\underline{h^2 = 0}$ となるくらい小さい。

↑

冪零無限小といって、いっぱいある。

$D = \{ d \in \mathbb{R} \mid d^2 = 0 \}$

$\varphi : D \to \mathbb{R}$ という関数があったとしたら、

$\exists!\, a \in \mathbb{R} \quad \forall d \in D. \quad \varphi(d) = \varphi(0) + ad$

$\varphi(d) = f(x_0+d)$

$\varphi(0) = f(x_0)$.

$f'(x_0)$が対応してる。

$$\to \underset{f(x_0+d)}{\underset{\shortparallel}{\varphi(d)}} = \underset{f(x_0)}{\underset{\shortparallel}{\varphi(0)}} + a\,d$$

$(f+g)' = f' + g'$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - \{f(x_0) + g(x_0)\}}{h}$$

$$= \lim_{h=0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \right)$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0).$$

これは、19C以降のやり方。

それ以前では、

$f(x_0+d) + g(x_0+d)$

$= f(x_0) + f'(x_0)\,d + g(x_0) + g'(x_0)d$

$= f(x_0) + g(x_0) + \{f'(x_0) + g'(x_0)\}\,d$.

$(fg)' = f'g + fg'$ (Leibniz の公式).

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}.$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}.$$

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h)}{h} + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$\xrightarrow{h \to 0} f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

$$f(x_0+d)g(x_0+d) = \{f(x_0) + f'(x_0)d\}\{g(x_0) + g'(x_0)d\}$$

$$= f(x_0)g(x_0) + \{f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\}d + f'(x_0)g'(x_0)d^2$$

claim はきてるんですよ。例えば、Berkley (哲学者). けど No comment。

$a \in \mathbb{R}$. $d \in \mathbb{D}$ $\to$ $ad \in \mathbb{D}$ $((ad)^2 = 0)$.

$d_1, d_2 \in \mathbb{D}$. $\to$ $(d_1+d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_1d_2 = d_1d_2$. ← 足し算に関して閉じてない。

$(d_1+d_2)^3 = d_1^3 + d_2^3 + 3d_1^2d_2 + 3d_1d_2^2 = 0$.

$\mathbb{D}_n = \{d \in \mathbb{R} \mid d^{n+1} = 0\}$.

report 1.

$d_1 \in \mathbb{D}_n$, $d_2 \in \mathbb{D}_m$ $\to$ $d_1 + d_2 \in \mathbb{D}_{n+m}$.

(hint 2項定理).

Corollary

$d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{D}_1$ $\to$ $d_1 + \cdots + d_n \in \mathbb{D}_n$.

$d_1 \in \mathcal{D}_1$

$f(x_0 + d_1) = f(x_0) + f'(x_0) d_1$

$d_1, d_2 \in \mathcal{D}$

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + d_1 + d_2) &= f(x_0 + d_1) + f'(x_0 + d_1) d_2 \\
&= f(x_0) + f'(x_0) d_1 + \{ f'(x_0) + f''(x_0) d_1 \} d_2 \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(d_1 + d_2) + f''(x_0) d_1 d_2 \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(d_1 + d_2) + \frac{1}{2} f''(x_0)(d_1 + d_2)^2
\end{aligned}
$$

$d_1 d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2}{2}$

$d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{D}$

$d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}$ と $d_1d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{3}$

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3) &= f(x_0 + d_1 + d_2) + f'(x_0 + d_1 + d_2) d_3 \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(d_1 + d_2) + f''(x_0) d_1 d_2 \\
&\quad + \{ f'(x_0) + f''(x_0)(d_1 + d_2) + f'''(x_0) d_1 d_2 \} d_3 \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(d_1 + d_2 + d_3) + f''(x_0)(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) + f''(x_0) d_1 d_2 d_3
\end{aligned}
$$

= Taylor 展開 になってる。.

report II.

(1) $f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$

(2) $f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)$.

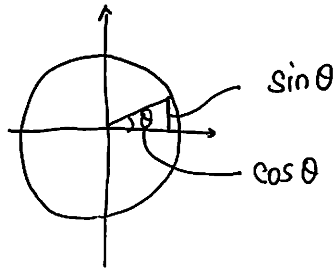
$f(x) = C$ (定数).

$f(x_0 + d) - f(x_0) = C - C = 0 = 0 \cdot d \rightarrow f'(x) = 0$.

$f(x) = x$

$f(x_0 + d) - f(x_0) = x_0 + d - x_0 = d = 1 \cdot d \rightarrow f'(x) = 1$.

三角関数.



$d \in \mathbb{R}$,

dが小さいと、 $\sin d = d$.
$\cos d = 1$.

$$\sin(x_0 + d) = \sin(x_0)\cos(d) + \cos(x_0)\sin(d).$$
$$= \sin x_0 + \cos x_0 \cdot d \longrightarrow \sin' = \cos$$
$$\cos(x_0 + d) = \cos x_0 \cos d - \sin x_0 \sin d$$
$$= \cos x_0 - \sin x_0 \cdot d, \longrightarrow \cos' = -\sin.$$

高校のとき、

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

をやった。.

指数関数.

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

$e > 0$ ってことにしときましょう。.

$(e^x)'$ を考える。.

$$e^{x+d} = \left(10^{\log_{10} e}\right)^{x+d} = 10^{(\log_{10} e)(x+d)} = 10^{(\log_{10} e)x} \cdot 10^{(\log_{10} e)d}.$$
$$= e^x\left(1 + a(\log_{10} e)d\right)$$
$$= e^x + e^x \cdot a \cdot (\log_{10} e)d.$$