土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 73, No. 2 (応用力学論文集 Vol. 20), I_273-I_281, 2017.

界面捕捉法に基づく自由表面流れ解析手法のための Discontinuous Galerkin 法の検討

田中聖三 [1]・高瀬慎介 [2]

[1]正会員 博 (工) 筑波大学助教 システム情報系 構造エネルギー工学域（〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1）
E-mail: stanaka@kz.tsukuba.ac.jp
[2]正会員 博 (工) 八戸工業大学講師　工学部　土木建築工学科（〒 031-8501 青森県八戸市妙字大開 88-1）

本論文では，界面捕捉法に基づく自由表面流れ解析手法の構築を目的とし，VOF 法における移流方程式の解法として，Discontinuous Galerkin 法の有効性について検討を行うものである．界面を間接的に表現する VOF 関数は分布の不連続性を維持する必要があり，時間進展において質量保存も満たす必要がある．数値解析例として，移流方程式の解法の解析精度，質量保存性を検討するため，2 次元回転移流問題を取り上げ，また，自由表面流れ問題での有効性を検討するため，2 次元ダムブレイク問題を取り上げる．従来の方法である安定化有限要素法と体積補正手法を組み合わせた方法と比較を行うことで，DG 法の解析精度と質量保存性における有効性を確認した．

Key Words: *Discontinuous Galerkin method, interface caputuring method, free-surface flows*

1. はじめに

津波や洪水に代表される水害は被害範囲が広く，人的や経済的に甚大な被害を引き起こす．これらの被害を低減するためには対策工を設置したり，避難所を選定したりする必要があり，あらかじめ発生しうる災害規模を設定し，その災害の状況を予測し，それらの設計，計画を行う必要がある．津波や洪水による被害を予測する上では，その浸水域や建物に作用する力を把握する必要があり，数値解析においては，時々刻々と変化する自由表面を取り扱う方法が必要となる．自由表面流れ問題に対する数値解析手法は，これまでに数多く提案されているが，その中の代表的な手法として VOF(Volume of Fluid) 法[1] がある. VOF 法では流体の基礎方程式は Euler 記述された方程式を用い，空間的に固定された解析座標により解析を行う方法である．その際，移動境界である自由表面は，局所的な体積占有率を表す VOF 関数の分布により表現され，この VOF 関数を移流方程式などにより移動させることにより，自由表面の移動を取り扱う．VOF 法では，VOF 関数により自由表面は間接的に表現されるため，その関数の分布の特性 (不連続性) が失われると，自由表面位置が不明瞭となってしまうことが短所となる．このため VOF 関数の更新を行うための移流方程式の解法は，高精度であることが要求され，さらに VOF 関数の不連続性を維持する必要がある．上記の要求に対する数値解析手法として，SUPG 法に基づく安定化有限要素法[2] や CIP 法[3] があるが，VOF 関数の特徴である不連続性を維持し続けることは困難であり，この性質を回復させる方法として，質量保存を満たしながら鋭敏化する手法も提案されている (例えば[4)5)])．これらの方法は非常に有効な方法である[6] が，解析メッシュの解像度が一定で，現象に対して十分に分割されていることが前提となるため，計算コストを削減するために解析メッシュに粗密付けを行った場合，この鋭敏化により質量保存則に対する誤差が生じる場合がある．これは，解析メッシュの粗い部分で発生した誤差が解析メッシュの細かな部分へも影響を及ぼす可能性があり，津波や洪水の解析のように水域が分離し，複数存在するような問題へ適用した場合，浸水域の評価へ誤差を発生させる可能性がある．一方，解析領域を連続しない個別の小領域（要素）群とその要素境界群に分割し，要素ごとに定義される不連続な近似関数を用いる Discontinuous Galerkin (DG) 法が提案され，衝撃波問題を含む Navier-Stokes 方程式や浅水長波方程式など様々な問題に適用されている[7]．DG 法においても解析を進めるにつれて界面での不連続性は失われるが，局所的な質量保存を満たすような補正を行うことが可能であり，VOF 関数の不連続性を維持しつつ，質量保存を満たすような解法となる可能性がある．

そこで本論文は, 界面捕捉法に基づく自由表面流れ解

析手法の構築を研究背景とし，VOF 法における移流方程式の解法としての DG 法の有効性について検討を行うものである．数値解析例として，移流方程式の解法の質量保存性を検討するために，2 次元平面 2 領域における矩形分布の回転移流問題を取り上げる．また，自由表面流れ問題での検討を行うため， 2 次元ダムブレイク問題を取り上げる．従来の方法である安定化有限要素法と体積補正手法を組み合わせた方法と比較を行い，DG 法による解析精度と質量保存性について確認する．

2. 数値解析手法

本論文で用いる数値解析手法として，移流方程式の解法と自由表面流れ解析に対する離散化方法について述べる．

移流方程式の解法としては，SUPG 法に基づく安定化有限要素法と DG 法の比較を行う．これらによる離散化手法について述べるとともに，各手法の界面鋭敏化や安定化についても解説する．

また，VOF 法に基づく自由表面流れに対する安定化有限要素法による離散化について述べる．本論文では安定化有限要素法による方法を Continuous Galerkin 法と呼び，以下 CG 法と略記する．

(1) 移流方程式の解法

a) 基礎方程式

界面関数 ϕ の挙動は以下の移流方程式に支配される．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \qquad \text{on } \Omega \tag{1}$$

ここで $\mathbf{u}$ は流速である．境界条件として，以下のディレクレ境界条件が課せられる．

$$\phi = g \qquad \text{on } \Gamma_g \tag{2}$$

ここで，Γ_g は流入境界 ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ となる境界) を表す．また初期条件として，領域内での分布は以下のように与えられる．

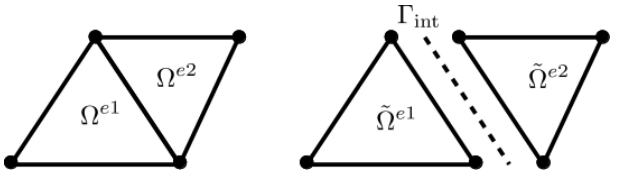
$$\phi = \phi_0 \qquad \text{on } \Omega \tag{3}$$

ここで，ϕ_0 は時刻 0 での ϕ の分布である．

b) CG 法による離散化

従来の離散化方法である CG 法として，安定化有限要素法による方法を示す．基礎方程式 (1) に対して，SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用し，以下の重み付き残差方程式が得られる．

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega w \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) d\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left(\tau_{\mathrm{SUPG}} \mathbf{u} \cdot \nabla w \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi \right) d\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\mathrm{SC}} \nabla w \cdot \nabla \phi \, d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4}$$



図–1 CG 法 (左) および DG 法で用いられる三角形要素節点配置 (黒点が節点を示す)

ここで，$\tau_{\mathrm{SUPG}}, \tau_{\mathrm{SC}}$ は安定化パラメータである．式 (4) 中の一番目の要素ごとの総和項は移流項に対する安定化項である SUPG 項である．二番目の要素ごとの総和項は界面近傍における数値不安定性を除去する項であるが，数値粘性により界面関数の不連続性が弱まる可能性がある．これに対し，界面関数の不連続性を回復させる鋭敏化を施す．鋭敏化については後で述べる．上記の方程式を空間方向へ三角形 1 次要素を用いる．要素節点配置は図-1(左) に示す．また時間方向に陽的 3 段階 3 次精度 Runge-Kutta 法を用いて離散化し，連立 1 次方程式を解くことにより，界面を時間進展させる．

時間進展とともに低下する界面の不連続性を回復させるため，各時刻において，解析領域内での体積保存を考慮した界面鋭敏化手法[4] を適用する．

$$\hat{\phi} = c^{1-\alpha} \phi^\alpha, \qquad 0 \le \phi \le c, \tag{5}$$

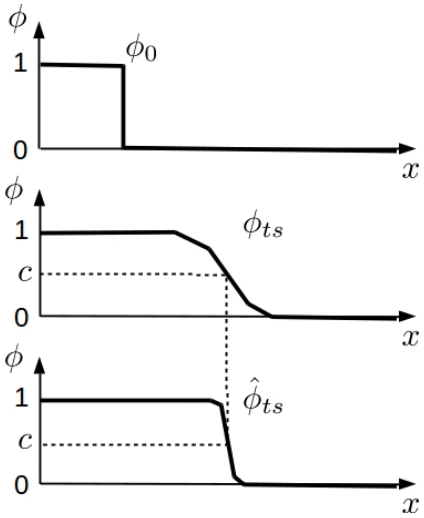
$$\hat{\phi} = 1 - (1-c)^{1-\alpha} (1-\phi)^\alpha, \qquad c \le \phi \le 1. \tag{6}$$

ここで，α は鋭敏化の強度を設定するパラメータであり，次式で定義される．

$$\alpha = \frac{\log 0.2}{\log(0.2 + 0.3 C_r)} \tag{7}$$

ここで，C_r は界面移流に対するクーラン数であり，界面近傍の流速とメッシュサイズを用いて計算され，領域内での最大値を使用する．ただし，α の値が大きすぎる場合，鋭敏化の効果が強くなり，関数分布の不連続性が顕著となり，数値不安定が引き起こされる．また，α の値が小さい場合は鋭敏化の効果が小さくなる．そのため安定性を考慮し，α は 1.0 ～ 1.5 の範囲とした．c は鋭敏化を行う基準値であり，図-2 の鋭敏化モデルに示されるように，この値以上の ϕ の領域は 1.0 へ，以下の領域は 0.0 へ近づくように補正される．図-2 の上段は初期の分布を表し，中段は解析を進めた時刻 ts での得られた界面関数の分布を表す．下段は鋭敏化を施した界面関数の分布を表す．鋭敏化を行う基準値 c は解析領域全体での質量保存を考慮し，次の非線形方程式を解くことにより決定される．

$$Mc^{1-\alpha} - N(1-c)^{1-\alpha} = R, \tag{8}$$



図–2 質量保存を考慮した界面鋭敏化方法

ここで，M, N, R は以下の式で表される

$$M = \rho_a \int_\Omega c^\alpha d\Omega, \qquad 0 \le \phi \le c \tag{9}$$

$$N = \rho_a \int_\Omega (1-c)^\alpha d\Omega, \quad c < \phi \le 1 \tag{10}$$

$$R = m_a - \rho_a \int_\Omega d\Omega, \qquad a < c \le 1 \tag{11}$$

ここで ρ_a は二層流体における一方の流体の密度 (式 (17) での ρ_1) であり，移流方程式の検証では $\rho_a = 1$ としている．また，m_a は解析領域内の質量を表しており，以下の様に初期量と初期から時刻 ts までの領域境界での流出入量を考慮したものとなる．

$$m_a = \rho_a \int_\Omega \phi_0 \, d\Omega + \rho_a \int_0^{t_s} \int_\Gamma \phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma dt \tag{12}$$

この手法は，質量保存を満たしながら界面鋭敏化を施すことのできるとても有効な方法である．しかしながら，前提条件として，界面近傍の解像度が一定であることがあり，計算効率などの理由により，解析メッシュの解像度が粗密化されていると，質量保存則に対する誤差が界面に沿って平均化されてしまうという問題がある．この問題は，この手法が解析領域全体の質量を解析領域全体で質量保存を考慮し，鋭敏化 (=界面位置の移動) を行うため，誤差が大きな領域と小さな領域が混在しても，界面全体に誤差を分散させてしまうことに起因する．

c) DG 法による離散化

DG 法では要素内の補間関数を定義する節点変数が隣接要素間で共有されない要素を用いて離散化を行う．今，図-3 に示されるように，各要素内部の集合を $\tilde{\Omega}$，その要素境界の集合を $\Gamma_{\rm int}$ とし，基礎方程式 (1) を離散化すると，

$$\int_{\tilde{\Omega}} w \frac{\partial \phi}{\partial t} \, d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}} \nabla w \cdot (\mathbf{u}\phi) \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\rm int}} [\![w]\!] (\mathbf{u}\phi^-) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \tag{13}$$

ここで，$[\![w]\!] = w^+ - w^-$ であり，$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$ の境界が $+$ で表され，反対側が $-$ で表される．空間方向へ三角形 1 次要素を用いる．要素節点配置は図-1(右) に示すように，要素節点が隣接要素間で共有されていないものを用いるが，これらの要素間での物理量のやりとりは，式 (13) の境界 $\Gamma_{\rm int}$ の積分項を通して行われる．また時間方向に陽的 3 段階 3 次精度 Runge-Kutta 法を用いて離散化する．DG 法は要素補間関数を定義する節点変数が隣接要素間で共有されないため，未知変数の自由度が同一次数の CG 法に比べて大きくなり，計算コストが増加する．しかし，時間方向の離散化を陽的に行うと，解析領域全体の自由度に関する連立 1 次方程式を解く必要は無く，要素自由度に関する小さな連立 1 次方程式を要素数分解けば良くなるため大きな問題点では無いと考えられる．

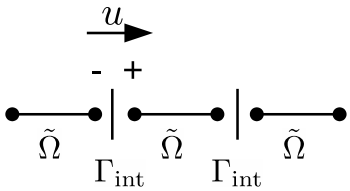
DG 法でも界面の不連続性が保たれない場合やオーバーシュート，アンダーシュートなどの不安定性が現われる場合があるため，要素ごとの分布関数の傾きを制御する Slope Limiter 処理を施す．本報告では，1 次関数要素に対するシンプルな Slope Limiter[11] を適用する．この方法では，図-4 で示される要素 e に対して，要素 e の図心位置の値 ϕ_e と隣接する要素 $1 \sim 3$ の図心位置の値 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) を用いて線形の関数 $L_\triangle(x)$ を領域 $i \sim iii$ において構築する．例えば，$L^{\rm i}_\triangle(x)$ はそれぞれの点位置と ϕ_e, ϕ_2, ϕ_3 を用いた平面分布となる．これらの関数 $L^e_\triangle(x), L^{\rm i}_\triangle(x), L^{\rm ii}_\triangle(x), L^{\rm iii}_\triangle(x)$ の勾配 $\nabla L^e_\triangle(x)$, $\nabla L^{\rm i}_\triangle(x), \nabla L^{\rm ii}_\triangle(x), \nabla L^{\rm iii}_\triangle(x)$ を求め，その関数勾配の大きなものから順に候補の関数 $L^*_\triangle(x)$ とし，要素 e のエッジ CA, BC, AB 上の点 $x_{\rm CA}, x_{\rm BC}, x_{\rm AB}$ でオーバーシュート，アンダーシュートが無いか確認する．

$$\min(\phi_3, \phi_e) \le L^*_\triangle(x_{\rm CA}) \le \max(\phi_3, \phi_e) \tag{14}$$

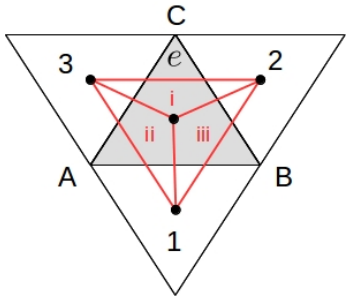
$$\min(\phi_2, \phi_e) \le L^*_\triangle(x_{\rm BC}) \le \max(\phi_2, \phi_e) \tag{15}$$

$$\min(\phi_1, \phi_e) \le L^*_\triangle(x_{\rm AB}) \le \max(\phi_1, \phi_e) \tag{16}$$

以上を全て満たした場合は，この候補の補間関数 $L^*_\triangle(x)$ を用いて要素 e の分布を再構築する．満たさない場合は，次に勾配の小さな関数を $L^*_\triangle(x)$ とし，再度式 (14)-(16 を確認していく．全ての候補の関数が満たさない場合は，最も勾配の小さな関数を用いて要素 e の分布を再構築する．この方法では，要素内の質量は変化しないので，前述の CG 法のような誤差の問題は発生しにくい．なお，要素 e が解析領域境界に接している場合，上記関数の候補が少なくなる．例えば，エッジ CA が領域境界に接している場合，候補となる関数は，$L^e_\triangle(x)$,



図–3 DG 法における離散化領域 (1 次元モデル)



図–4 Slope Limiter のための補間空間

$L^{\rm iii}_{\triangle}(x)$ の 2 つとなる．またエッジ CA, AB が領域境界に接している場合は，候補は $L^{e}_{\triangle}(x)$ のみとなり，これは Slope Limiter は適用されないこととなる．

(2) 自由表面流れ

a) 流体の基礎方程式

自由表面流れのモデルとして密度と粘性係数が異なる 2 種類の流体を考える．下添字 1 と 2 を使って密度と粘性係数を ρ_1, ρ_2 と μ_1, μ_2 とする．この 2 種類の流体が混ざった解析領域内において，密度と粘性係数を場所の関数とする．すなわち，

$$\rho = \phi\rho_1 + (1-\phi)\,\rho_2, \tag{17}$$

$$\mu = \phi\mu_1 + (1-\phi)\,\mu_2, \tag{18}$$

ここで，ϕ は場所の関数である界面関数であり，1 の流体内では $\phi = 1$，2 の流体内では $\phi = 0$ となる．流れに伴い界面関数は時間変化するが，この時間変化は式 (1) の移流方程式に支配される．本論文では，この移流方程式の解法に DG 法と安定化有限要素法に基づく CG 法を適用し，比較を行う．なお，次の非圧縮性粘性流体の基礎方程式に対しては，安定化有限要素法 (CG 法) を適用する．

流速 $\mathbf{u}$ は次の非圧縮性粘性流体の基礎方程式の解となる．

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{f}\right) - \nabla\cdot\sigma(\mathbf{u},p) = 0 \quad \text{on } \Omega \tag{19}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{on } \Omega \tag{20}$$

ここで，p は圧力，$\mathbf{f}$ は外力，そして σ は流体の応力である．境界条件は以下のようになる．

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \qquad \text{on } \Gamma_g, \tag{21}$$

$$\sigma\cdot\mathbf{n} = \mathbf{h} \qquad \text{on } \Gamma_h, \tag{22}$$

ここで，Γ_g, Γ_h はディレクレ境界，ノイマン境界である．初期条件として，流速の初期分布 $\mathbf{u}_0$ は，非圧縮条件 $\nabla\cdot\mathbf{u}_0 = 0$ を満たす流速を与える．

b) 有限要素法による定式化

非圧縮性粘性流体の基礎方程式 (19),(20) に対して SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法[8)−10)] を適用すると，以下の弱形式を得る：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{w}\cdot\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{f}\right)d\Omega \\
&+ \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{w}) : \sigma(\mathbf{u},p)\,d\Omega + \int_\Omega q\nabla\cdot\mathbf{u}\,d\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \left\{\tau_S\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w} + \tau_P\frac{1}{\rho}\nabla q\right\} \\
&\quad \cdot\left\{\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{f}\right) - \nabla\cdot\sigma(\mathbf{u},p)\right\}d\Omega \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{DC}\nabla\cdot\mathbf{w}\rho\nabla\cdot\mathbf{u}\,d\Omega \\
&= \int_{(\Gamma)_{\mathbf{h}}} \mathbf{w}\cdot\mathbf{h}\,d\Gamma,
\end{aligned} \tag{23}$$

ここで $\tau_S, \tau_P, \tau_{DC}$ は安定化パラメータ[10)] である．流速 $\mathbf{u}$ および圧力 p の時間積分には，Crank-Nicolson 法を用いる．

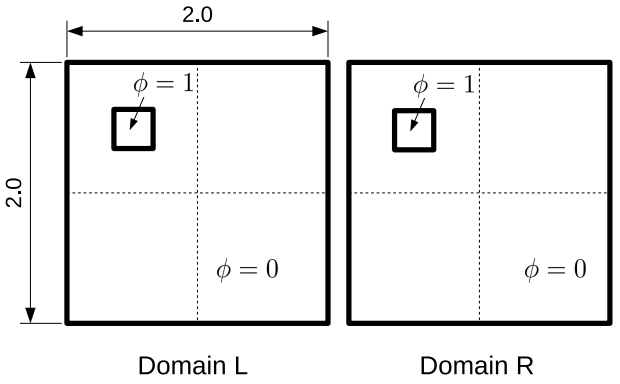
式 (19),(20) に対する空間方向と時間方向の離散化過程で得られる方程式は，非線形の連立 1 次方程式であり，流体挙動を正確に把握するためには，非線形解析を高精度かつ安定に行う必要がある．本研究では，非線形方程式に対して Newton-Rapshon 法を用いて反復的に解くものとする．得られた非線形方程式は，次のように表すことができる．

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{F}, \tag{24}$$

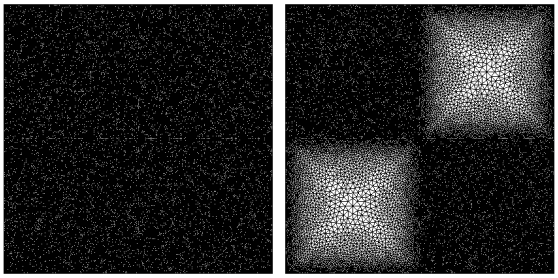
ここで，$\mathbf{d}_{n+1}$ は時刻レベル $n+1$ での未知節点量である．式 (24) に対して Newton-Raphson 法を適用すると，次式のような線形方程式が得られる．

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{d}^k}(\Delta\mathbf{d}^k_{n+1}) = \mathbf{F} - \mathbf{R}(\mathbf{d}^k_{n+1}) \tag{25}$$

ここに，k は Newton-Raphson 法の繰り返し回数を表し，$\Delta\mathbf{d}^k_{n+1}$ は $\mathbf{d}^k_{n+1}$ に対する増分を表す．式 (25) で表される線形方程式は，各時刻レベルにおいて収束するまで繰り返すことにより解かれる．この連立 1 次方程式の解法には，Matrix-Free 法[12)] に基づく GMRES 法[13)] を用いる．



図–5 解析モデル



図–6 解析メッシュ

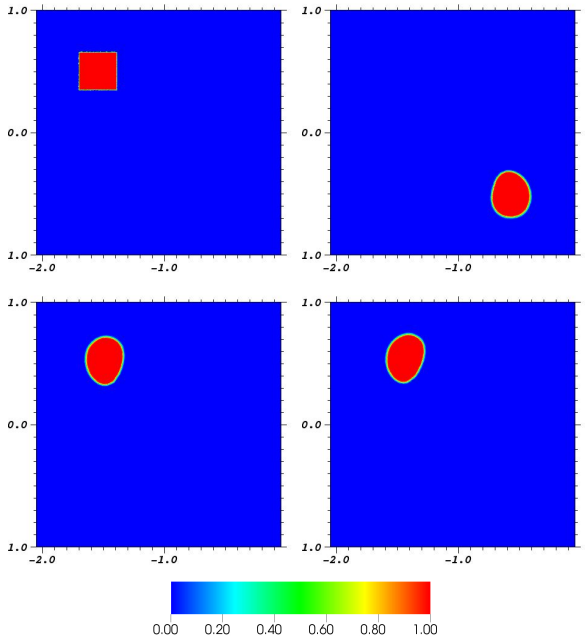
3. 数値解析例

数値解析例を通して，本手法の有効性を検討する．移流方程式の解法の精度，質量保存性を検証するため，矩形分布の回転移流問題を取り上げる．また，自由表面流れ問題への適用として，2 次元ダムブレイク問題を取り上げる．

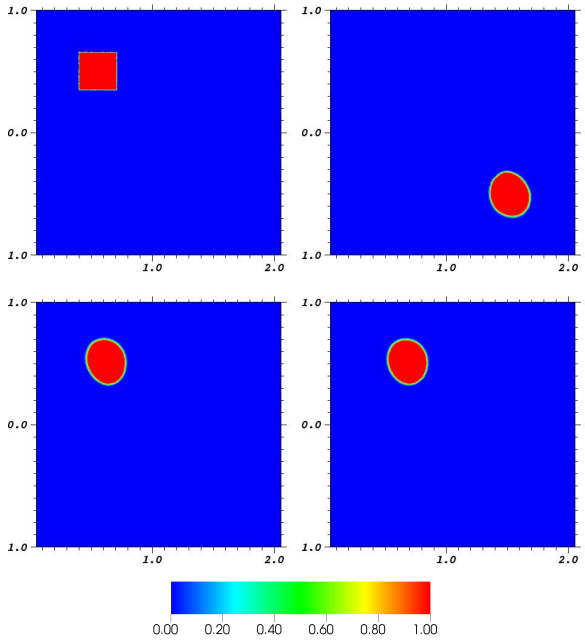
(1) 矩形分布の回転移流問題

a) 解析モデルおよび解析条件

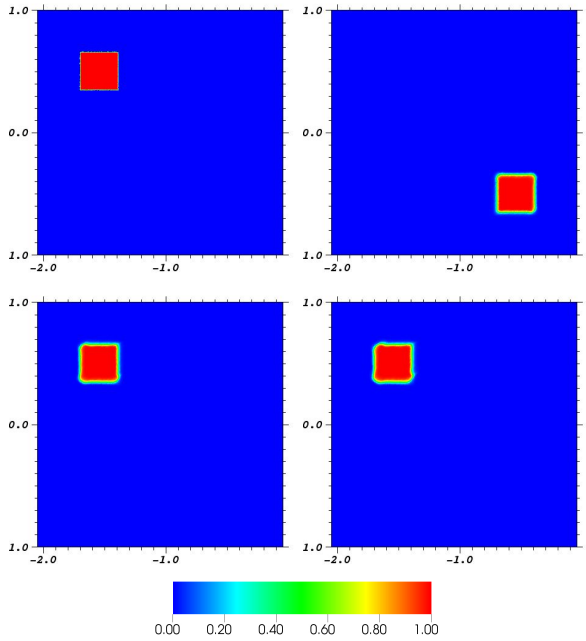
数値解析例として，式 (1) に支配される矩形分布の回転移流問題を取り上げる．図-5 に示すような，左右に領域が分かれているモデルを使用する．解析メッシュは，図-6 に示すように，Domain R の第 1,3 象限の解像度が低くなっているものを用いる．解像度が高い部分のメッシュサイズは，0.01, 低い部分は 0.05 となっている．流速 $\mathbf{u}$ は，左右の各領域の中心座標 (x_c, y_c) を用い，$(u, v) = (-y_c, x_c)$ とした．解析ケースとして，左右の解析領域を個別の解析領域として計算する，つまり Domain L と Domain R を別々に計算するもの（以下，個別解析と称する）と，左右の解析領域を一つの計算領域として計算する，つまり Domain L と Domain R は計算領域としてはひとつだが物理的には分かれているもの（以下，同時解析）の，2 ケースで検討する．同時解析は解析領域内に密度塊が複数存在する場合を取り扱っており，津波や洪水の解析において，浸水域が分離している状態を模擬している．



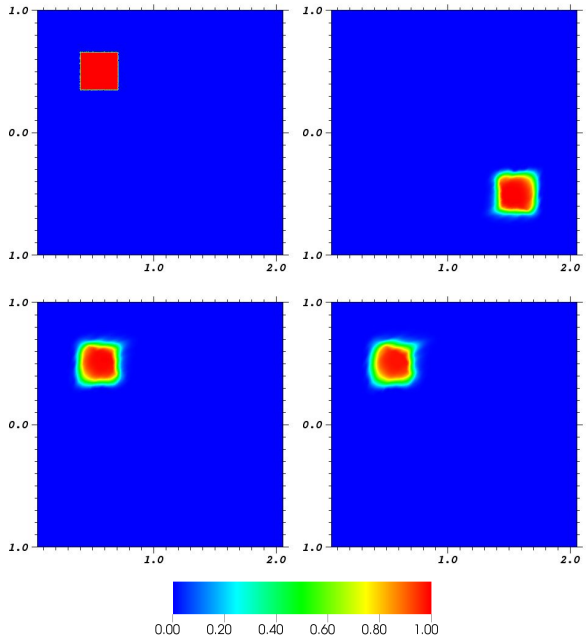
図–7 CG 法による VOF 関数の分布の平面分布 (個別解析,Domain L : 初期 (左上)，0.5 周後 (右上)，1 周後 (左下)，2 周後 (右下))



図–8 CG 法による VOF 関数の分布の平面分布 (個別解析,Domain R : 初期 (左上)，0.5 周後 (右上)，1 周後 (左下)，2 周後 (右下))



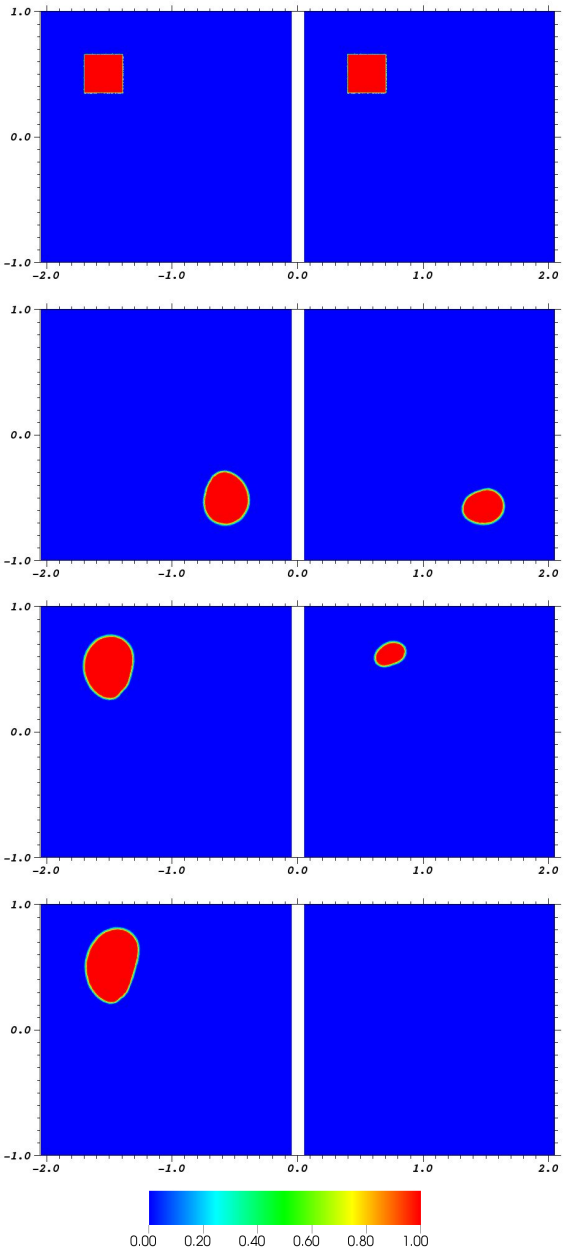
図–9 DG 法による VOF 関数の分布の平面分布 (個別解析,Domain L：初期 (左上)，0.5 周後 (右上)，1 周後 (左下)，2 周後 (右下))



図–10 DG 法による VOF 関数の分布の平面分布 (個別解析,Domain R：初期 (左上)，0.5 周後 (右上)，1 周後 (左下)，2 周後 (右下))

b) 解析結果

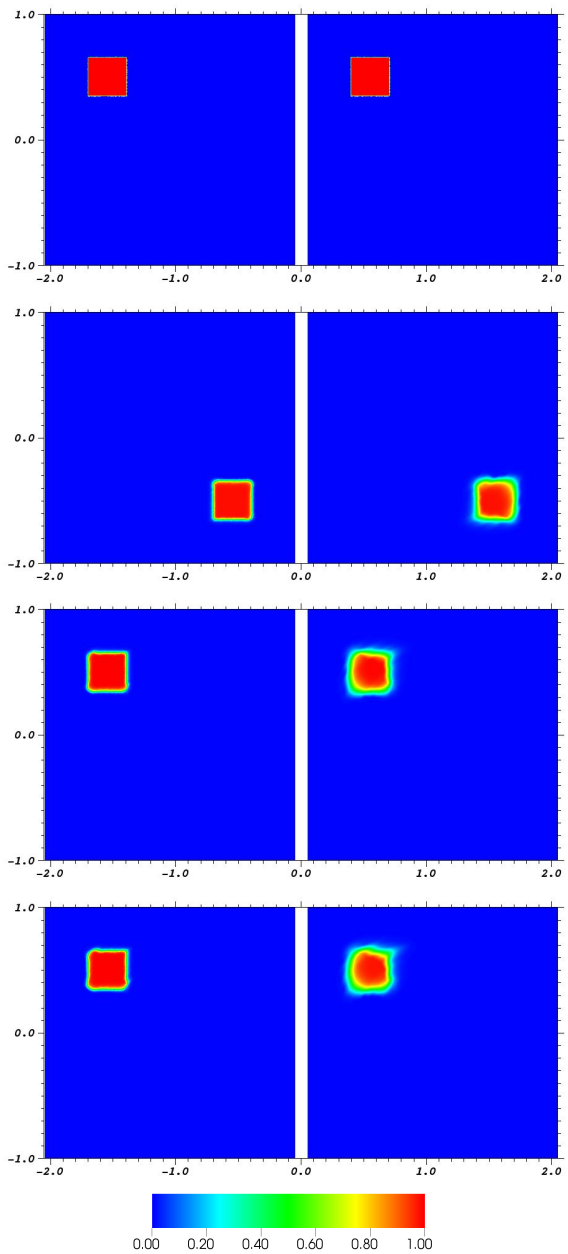
解析結果として，個別解析の各時刻における VOF 関数の平面分布図を示す．図-7 に CG 法による Domain L での結果を，図-8 に CG 法による Domain R での結果を示す．CG 法による結果は，初期の角型の形状を保つこ



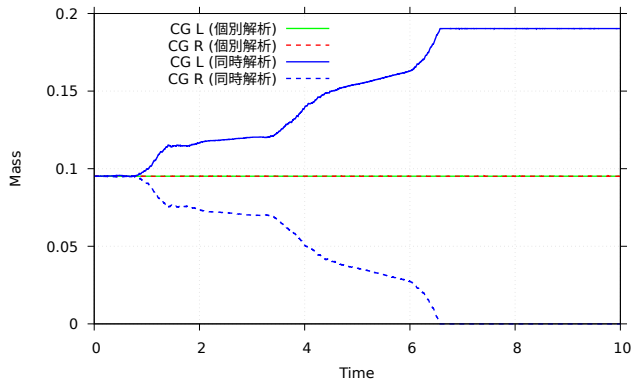
図–11 CG 法による VOF 関数の分布の平面分布 (同時解析：上より初期，0.5 周後，1 周後，2 周後)

とはできていないものの，解像度の低い部分を有する Domain R でも界面を不連続性を保つことができていることが分かる．一方，図-9 に DG 法による Domain L での結果を，図-10 に DG 法による Domain R での結果を示す．DG 法による結果は，解像度の高い Domain L では初期の角型の形状を比較的保つことができるが，解像度の低い部分を有する Domain R では界面の不連続性が保てていないことが分かる．これは Slope Limiter の影響も含まれており，不連続性を保つことができる方法を検討する必要がある．

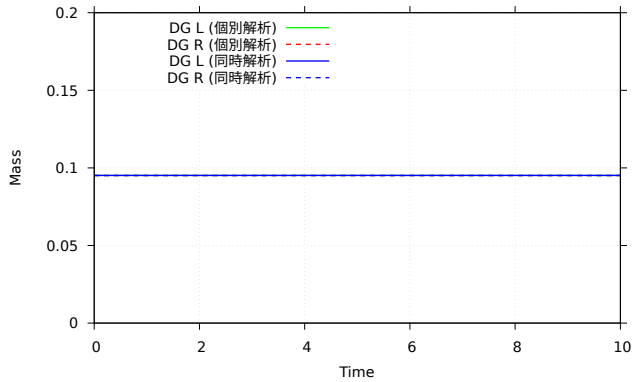
また，同時解析の結果として，図-11 に CG 法による VOF 関数の平面分布を示し，図-12 に DG 法による結



図–12 DG 法による VOF 関数の分布の平面分布 (同時解析：上より初期，0.5 周後，1 周後，2 周後)



図–13 CG 法による移流問題における各手法による領域ごとの質量の時刻歴



図–14 DG 法による移流問題における各手法による領域ごとの質量の時刻歴

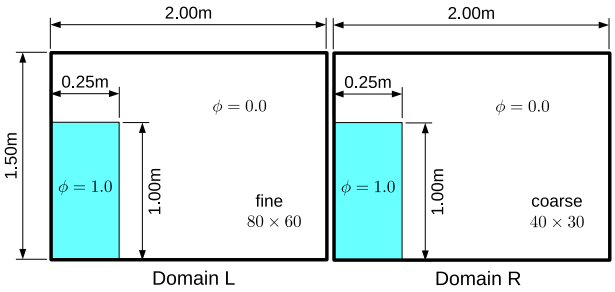
果を示す．CG 法の結果は計算途中で Domain R の分布が消えて無くなり，Domain L の分布が増えている．DG 法の同時解析の結果は個別解析の結果 (図-9,10) と同様の結果となっていることが分かる．

CG 法による解析領域毎の質量の時刻歴を図-13 に示すが，図-7,8,11 の平面分布の結果からも推察されるように，個別解析においては，両領域できちんと質量保存が満たされているが，同時解析においては，Domain R と Domain L での質量の総和は保存されているものの，Domain R で消えた質量が Domain L へ移動しており，領域ごとでの質量保存が見たされていないことが分かる．このことは，津波や洪水の浸水解析において，分離している水域の水が流況にかかわらず移動することを意味し，浸水域の評価に影響を及ぼす可能性がある．一方，DG 法による解析領域毎の質量の時刻歴を図-14 に示すが，個別解析でも同時解析でも，各領域で質量が保存されていることが分かる．以上の結果より，局所的な質量保存を満たして解析を行うことができる点で DG 法は，密度塊が複数存在するような問題に対する解法として優れていると言える．今後，さらに精度向上を行うために，より効果的な Slope Limiter の適用や高次補間要素の使用などを検討することが課題となる．

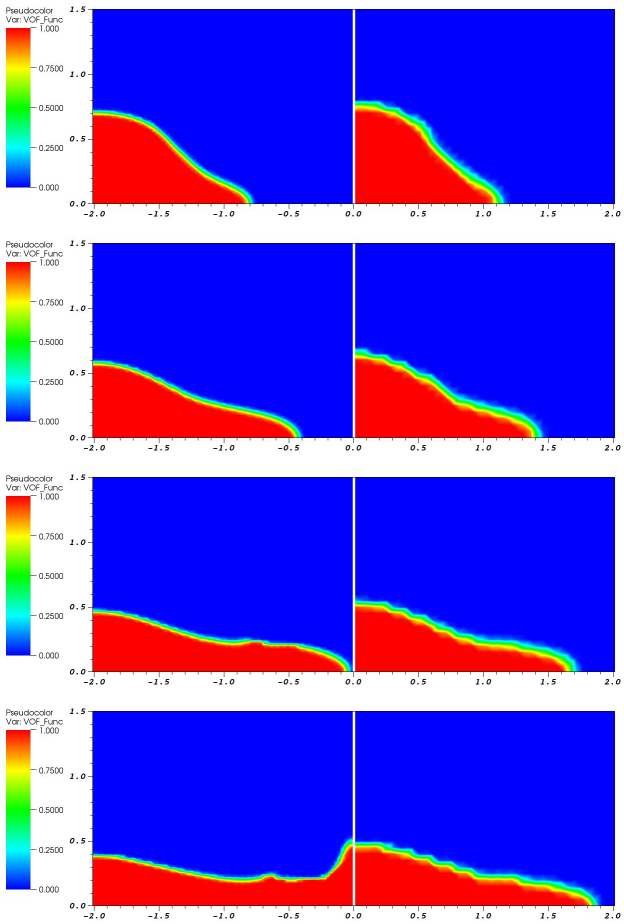
(2) ダムブレイク問題

a) 解析モデル

本手法の自由表面流れ問題での有効性を検討するため，ダムブレイク問題を数値解析例として取り上げる．先の移流問題と同様に，図-15 に示すような，左右に領域が分かれているモデルを使用する．ここでは，左右の領域を一つの領域として解析を行う同時解析とする．つまり，物理モデルとしては個別の水槽が 2 つ並んで

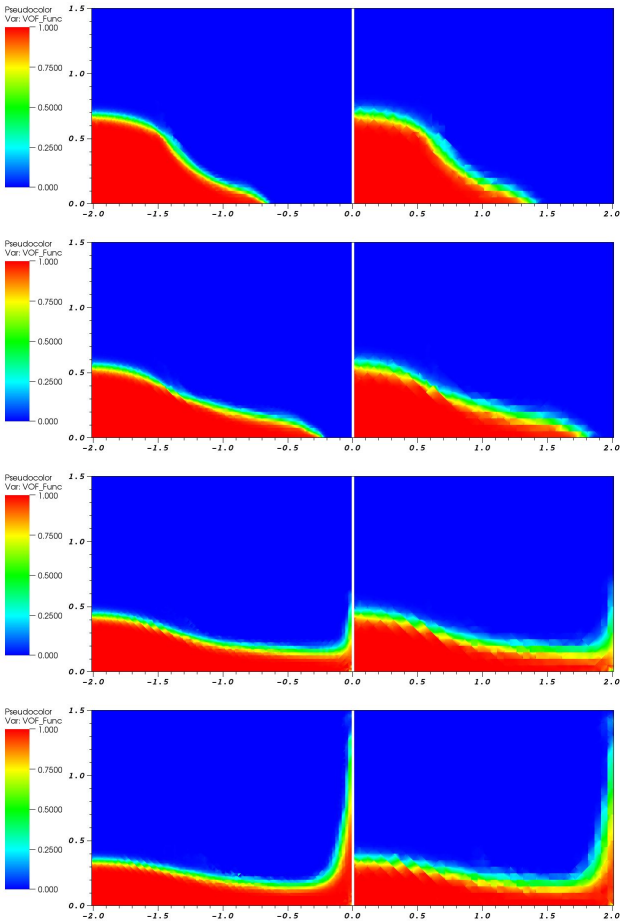


図–15 解析モデル



図–16 CG 法による自由表面形状 (上より T=0.3，0.4, 0.5, 0.6s)

いることになるが，数値モデルとしての計算領域はひとつの領域として取り扱う．解析メッシュは，Domain L で $80 \times 60(x \times y)$ 分割，Domain R で $40 \times 30(x \times y)$ 分割とした．液体は水とし，密度 1000kg/m^3，粘性係数 1.0×10^{-3}Pa·s とした．また，気体は空気とし，密度 1.2kg/m^3，粘性係数 1.8×10^{-5}Pa·s とした．時間増分量は，1.0×10^{-4}[s] を用いた．



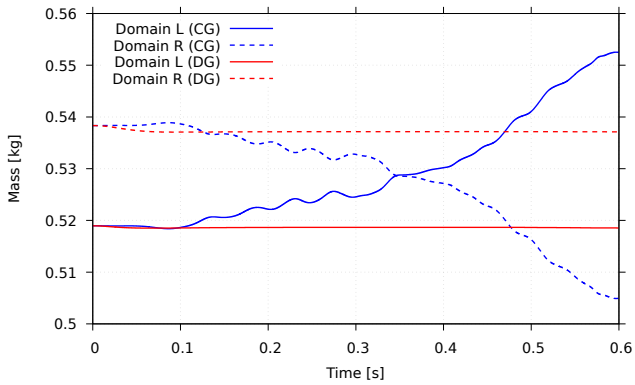
図–17 DG 法による自由表面形状 (上より T=0.3，0.4, 0.5, 0.6s)

b) 解析結果

解析結果として，各時刻の自由表面形状 (VOF 関数の平面分布) を示す．図-16 に CG 法による結果を，図-17 に DG 法による結果を示す．CG 法の結果は DG 法と比較して，界面の不連続性は保てているものの，水際線先端の移動に遅れが見られる．また，図-18 に，各手法による左右の領域での分布の質量の時刻歴を示す．DG 法による結果は，初期質量と変動無く解析を進めることができているのに対し，CG 法による結果は，総量は同じではあるが，解析時刻が進むにつれて，領域ごとでは増減をしていることが分かる．これは回転移流問題の場合と同じ現象であり，自由表面流れ解析においても，局所的な質量保存の観点から優れていると言える．

4. おわりに

本論文では，VOF 法に基づく自由表面流れ解析の移流方程式の解法として，DG 法を適用し，その有効性について検討した．数値解析例として，2 次元回転移流問



図–18 ダムブレイク問題での各手法による領域ごとの質量の時刻歴

題と 2 次元ダムブレイク問題を取り上げ，以下の結果を得た．

- 安定化有限要素法に基づく CG 法と体積補正を組み合わせた鋭敏化手法の結果は，個別解析では質量は保持されるものの，同時解析では領域をまたいで質量が移動する結果となった．
- DG 法は，局所的な質量保存を考慮した解法であるため，各領域で質量が保存される結果となった．

以上より，結論として DG 法は VOF 法に基づく自由表面流れ解析の移流方程式の解法として局所的な質量保存の観点から適していると言える．

今後の課題として，オーバーシュートやアンダーシュートを防ぐ Slope Limiter 手法の検討や，自由表面流れ解析への適用，三次元解析への適用などを行う予定である．

参考文献

1) Hirt, C.W., Nichols, B.D. : Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *Journal of Computational Physics*, Vol.39, pp.201-225, 1981.
2) Huges, T.J.R., Franka, L.P., Hulbert, G.M. : A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusion equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.73, pp.173-189, 1989.
3) Yabe, T., Aoki, T. : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, Vol.66, pp.219-232, 1991.
4) Aliabadi, S. and Tezduyar, T. E. :Stabilized-finite-element/interface-capturing technique for parallel computation of unsteady flows with interfaces, *Compute Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, pp.243-261, 2000.
5) 桜庭雅明，弘崎聡，樫山和男 : 自由表面流れ解析のたまの CIVA/VOF 法に基づく高精度界面捕捉法の構築, 応用力学論文集, Vol.6, pp.215-222, 2003.
6) 田中聖三, Sun, F., 堀宗朗, 市村強, Wijerathne, M.L.L.: 動的津波荷重による構造物の破壊解析の基礎的研究, 土木学会論文集 A1(構造・地震工学), Vol.69, No.4, I_903-I_908, 2013.
7) Cockburn, B., Karniadakis, G.E. and Shu, C.-W. : Discontinuous Galerkin Method, Springer, 2000.
8) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R. :Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.32, pp.199-259, 1982.
9) Tezduyar, T. E. :Stabilized finite element formulation forincompressible flow computation, *Advances in Applied Mechanics*, Vol.28, pp.1-44, 1991.
10) Aliabadi, S., Abedi, J. and Zellars, B. :Parallel finite element simulation of mooring forces on floating objects, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.41, pp.809-822, 2003.
11) Durlofsky, I. J. : Triangle based adaptive stenciles for solution of hyperbolic conservation lows, *Journal of Computational Physics*, Vol.98, pp.64-73, 1992.
12) Johan, Z., Hughes, T.J.R., Mathur, K.K. and Johansson, S.L. : A data parallel finite element method for computational fluid dynamics on the Connection Machine system, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.99, pp.113-134, 1992.
13) Saad, Y., Schultz, M. : GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM Jornal of Scientific and Statistical Computing*, Vol.7, pp.856-869, 1986.

(2017. 6. 23 受付)

A STUDY OF DG METHOD FOR FREE SURFACE FLOW PROBLEM BASED ON INTERFACE CAPTURING APPROACH

Seizo TANAKA and Shinsuke TAKASE

This paper presents the discontinuous Galerkin method for advection equation of free-surface flow analysis based on interface capturing approach. The discontinuous Galerkin method applied to the advection equation that the governing equation of the interface function of VOF method. Results obtained by linear DG method was compared with the result of continuous Galerkin method based on stabilized finite element method. As for the numerical example to verify the present method, the rotating square hill problem and broken-dam problem was carried out. It was concluded that the present method can obtain good mass conservation.