2002年度:関数解析学特別研究

楕円型境界値問題入門

平良和昭

改訂増補版（2018年10月）

まえがき

本書の目的は，実解析学，関数解析学及び偏微分方程式論にまたがる基本的な事項を通して，現代解析学の基本的な手法とアイデアに習熟することである．キャッチフレーズは「学生目線での楕円型境界値問題への入門書」である．具体的には，ルベーグ積分論，シュワルツ超関数論，フーリエ解析等の基礎的事項について解説し，楕円型境界値問題への平易な入門書を目指している．

本書の記述スタイルは,「学生目線」であるため，図版や概念図が豊富に用いられており，読者の方々には，定理，定義，具体例等の数学的な内容をイメージし易いものと思われる．

アンリ・ルベーグ (Henri Lebesgue : 1875–1941) は，19 世紀末から 20 世紀前半にかけて活躍したフランスの解析学者である．積分論は，19 世紀の半ばからフーリエ解析と密接に関連して研究されてきたが，リーマン積分の拡張であるルベーグ積分は，フーリエ解析，確率論，偏微分方程式，関数解析等の現代数学の基礎である ([20]). 現在では，解析学を学ぶ際に最も基本的な役割を果たしている．また，情報理論を始め，エックス線解析や超音波探査などの工学技術分野でも，ルベーグ積分の成果なしでは今日の姿はなかったと思われる．

最近では，数学科以外の分野で，ルベーグ積分論が体系的に講義されることは稀である．平良和昭が講義を担当した 15 年前と今日では，学生の数学的訓練の質も量も変化してきている．したがって，人類の知的財産であるルベーグ積分論が重要であればこそ，理工学系の学生向けの講義においては，数学科向けとは異なる流儀を踏襲すべきだと考えている．

本書の第 I 部は，主にルベーグ測度及びルベーグ積分のアイデア及び基本的な性質をまとめた入門書である．特に，ルベーグ積分の持つ効用について，理工学系の意欲的な学生にとって，将来，役に立つことを願って作成されたルベーグ積分論の自習書である．前半の 1 次元ルベーグ積分論の内容は，出口英生の卒業論文（広島大学理学部数学科： 1997 年度）に，大幅に手を加えたものである．

第 II 部は，線形代数と微分積分学の「無限次元版」である関数解析学からの準備である．関数解析的な考え方を通して，微分積分学と線形代数学の基本的事項を統一的な観点から学ぶ．同時に，集合論，位相数学等の総合的な復習も兼ねる．さらに，現代解析学の基本的な考え方について学ぶことにより，解析学本来の面白さ，奥行きの深さを味わうことを目的とする．この部分は，平良和昭の筑波大学での講義を基に，杉野延幸がノートを作成した．

第 III 部は，ルベーグ積分論の具体的な応用として，最も初歩的な 1 次元の超関数論の入門書である．歴史的には，超関数は，関数解析の線形汎関数の考え方を使って，アダマール，ソボレフ，シュワルツ等によって発展させられた「一般化された関数」である ([21], [12])．超関数の理論では，ルベーグ積分のアイデアが決定的な役割を果たしている．この部分は，平良和昭の広島大学及び筑波大学での講義ノートを基にしている．

最後の第 IV 部は，ルベーグ積分論，超関数の考え方を基礎にして，偏微分方程式論における楕円型境界値問題への「関数解析的なアプローチ」についての自習書である．楕円型境界値問題の超関数解の存在及び一意性定理，さらには固有値分布の問題について，丁寧にまとめた入門書である．この部分は，杉野延幸の修士論文（筑波大学大学院数理物質科学研究科： 2002 年度）に加筆したものである．尚，この第 IV 部のアプローチで，ロバン問題の場合も，ディリクレ問題，ノイマン問題の場合と同様に解くことができる ([27])．また，非線形問題を視野に入れると，ヒルベルト空間の構造を持つソボレフ空間 $H^m(\Omega)$ から，より一般のバナッハ空間の構造を持つソボレフ空間 $W^{m,p}(\Omega)$ への発展も可能である ([4])．

数学という学問は，古代のエジプトの頃から何千年も，時代と国境を超えて，世界中の人々を魅了し，受け継がれてきた人類の素晴らしい文化遺産である．数学は，音楽，絵画，詩歌等と同じ

く，人々の「感性」に強く訴え続けてきた．これは，ニュートン力学に代表されるように，数学が単に自然現象の解明に役に立つという実学的な側面以上に，数学自身の持つ美しさ，魅力が人々の心をとらえて離さないからである．しかしながら，音楽や絵画等と決定的に異なるのは，数学を真に味わうためには「論理」という強固な鎧を突き破るための感覚，いわゆる小平邦彦先生の言われる「数覚」という特殊な感覚が不可欠な点にある．数学離れの最大の原因も，突き詰めれば，数学という学問自身の持つこの「論理」という鎧にあると思われる．そのために，数学を深く学ぶ際に最も難しい問題は，論理面にとらわれることなく，数学的実在をイメージ豊かにとらえることができるか，という点にある．

本書は，フーリエ解析，確率論，偏微分方程式，関数解析等を統一的な観点から学ぶ意欲的な理工系の学生，大学院学生にとって，将来，役に立つことを願って作成された本格的な自習書である．大学や大学院レベルでの学問を学ぶ際には,「木を見て森を見ず」ということのないように，常に全体像を念頭に置く学習態度が不可欠である．

読者の方々が，本書を通じて，壮麗な現代解析学の奥深さ，楽しさを味わう貴重な体験の一助になれば，著者一同の望外の幸せである．

2018 年 10 月

平良和昭，出口英生，杉野延幸

目 次

第 I 部
ルベーグ積分論入門

第 I 部では，まず，ルベーグ測度の具体的な構成及び基本的な性質について解説する．

高校数学では，面積のイメージを基にして，1 変数関数の定積分を定義した．このリーマン流の考え方は，２変数の場合にも適用できる．1 変数関数の定義域は区間であり，簡単であった．しかしながら，２変数関数の積分を定義する際には，関数の定義域として，円，楕円等の曲線で囲まれた 2 次元の様々な図形が現われて，数学的な状況はより複雑になる．

一般の図形の面積あるいは体積の概念が，多変数の関数の積分を定義する際の本質的なポイントになる．図形の面積は，その図形を底面とする高さ 1 の立体の体積に等しいということを利用して，面積を持つ集合の概念を導入することができる．このように積分の概念を（逆手に）利用して，図形の面積を定義する流儀は，フランスの解析学者ジョルダンによる ([43])．

しかしながら，ルベーグ流の考え方では,「一般的に，与えられた集合の面積，体積とは何か」という極めて深い集合論的洞察から出発することになる．実際，ルベーグの著書 [20] のタイトルが「積分・長さおよび面積」であることは，極めて興味深い．

リーマン積分とルベーグ積分の考え方の本質的な相違について，簡単に説明する．

今，目の前に，大量の硬貨があるとして，合計金額を数えることを考える．例えば，１０人の人間で手分けをして，皆で，硬貨の山を小さな１０の山に分ける．各人が，それぞれの山の硬貨を数える．その後，全員で合計する方法．これがリーマン式の積分の考え方である．

一方，すべての硬貨の種類がいくつあるかを予め調べることから始める．日本円では，１円，５円，１０円，５０円，１００円，５００円の６種類である．そこで，６人の人間が，硬貨の山から，それぞれの硬貨を抜き出して，その枚数を数える．その後で，全員で合計する方法．これがルベーグ式の積分の考え方である．

したがって，ルベーグ測度の構成法の鳥瞰図は，以下のように,（すべての硬貨の種類がいくつあるかを調べることに対応する）集合論的なアプローチになる：

集合	（外）測度	性質
すべての集合	カラテオドリ外測度	劣加法的測度
可測集合	ルベーグ測度	完全加法的測度
区間塊	有限加法的測度	有限加法的測度
区間	測度	区間の長さ

次に， ルベーグ積分の基本的な事項，概念，定理等について，丁寧に解説する．ルベーグ積分導入の利点は，たとえば，微分積分学の基本公式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

について，リーマン積分との比較で，次のように述べられる：

分野	$f(x)$	dx
微分積分学	連続的微分可能関数	リーマン測度
実解析学	絶対連続関数	ルベーグ測度

1　1 次元ルベーグ測度の構成

簡単のため，前半部では，1 次元の場合に限って話を進める．

以下では，数直線 $\mathbf{R}$ の半開区間

$$(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

のことを単に**区間**と呼ぶことにする．ここで，$-\infty \leq a < b \leq \infty$ とするが，$b = \infty$ の場合は

$$(a,b] = \{x : a < x < \infty\} = (a,\infty)$$

と解釈する．空集合 $\emptyset$ も便宜上**区間**と考える．

$\mathbf{R}$ における区間全体からなる集合を $\mathcal{I}$ と書く．任意の区間 $I = (a,b] \in \mathcal{I}$ に対して，その長さを

$$|I| = b - a$$

と定義する．ただし，$a = -\infty$ または $b = \infty$ のときは $|I| = \infty$. また $|\emptyset| = 0$ と定める．

集合 $A \subset \mathbf{R}$ が**開集合**であるとは，任意の $x \in A$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$(x-\delta, x+\delta) \subset A$ となるときをいう．開集合の $\mathbf{R}$ における補集合として表される集合を**閉集合**という．また，ある $M > 0$ が存在して，任意の $x \in A$ に対して $|x| < M$ となるとき，A は**有界**であるという．

定義 1.1. 任意の集合 $A \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : I_n \in \mathcal{I}, \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A\right\} \tag{1.1}$$

とおいて，これを A の**ルベーグ 外測度**（またはカラテオドリ (Carathéodory) 外測度）という．

ここで，ルベーグ式の定義が，ジョルダン流の考え方と決定的に異なるのは，可算個（無限！）の区間による被覆を考える点である．

$\mu^*(A) = 0$ となる集合 $A \subset \mathbf{R}$ を（1 次元の）**零集合**という．

例 1.1. 有限個の点からなる集合は，明らかに零集合である．空集合も零集合である．また，有理点全体の集合のように高々可算個の点からなる集合も零集合である．なぜなら，$\mathbf{Q}$ は可算集合であるから，

$$\mathbf{Q} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

と表わされる．次に，任意の正数 ε をとり固定する．点 a_1 を幅 $\varepsilon/2$ の区間で覆う，点 a_2 を幅 $\varepsilon/2^2$ の区間で覆う，..., 点 a_n を幅 $\varepsilon/2^n$ の区間で覆う，..., という操作を順次行うと，

$$\begin{aligned}\mu^*(\mathbf{Q}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

正数 ε は任意にとることができるので，$\mu^*(\mathbf{Q})=0$. ゆえに，有理点全体の集合 $\mathbf{Q}$ は零集合である．

以下で， ルベーグ外測度 μ^* の性質を調べるために，集合と位相に関する準備が必要である．

定理 1.1 (ハイネ・ボレルの被覆定理)**.** E を $\mathbf{R}$ の有界閉集合とする．$\mathbf{R}$ の開集合系 $\{G_\lambda\}$ が存在して

$$E \subset \bigcup_{\lambda} G_\lambda$$

となるならば，$\{G_\lambda\}$ の中の有限個のものだけで E を覆うことができる．すなわち，適当な G_{λ_1}, ..., G_{λ_n} をとれば

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}$$

となる．

注意 1.1. 集合 $E \subset \mathbf{R}$ に対して，定理 1.1 の主張が成り立つとき，E は**コンパクト**であるという．定理 1.1 は，言い換えると，$\mathbf{R}$ の有界閉集合はコンパクトであることを主張している．

注意 1.2. 定理 1.1 で，閉集合という仮定はおとせない．それは，

$$(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},1\right)$$

であるが，有限個の区間 $(1/n,1)$ で有界開区間 $(0,1)$ を覆うことはできないからである．

また，有界という仮定も落とせない．それは，

$$[1,\infty) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1,n+1)$$

であるが，有限個の区間 $(n-1,n+1)$ で閉区間 $[1,\infty)$ を覆うことはできないからである．

証明. 第 1 段：$E=[a,b]$, $-\infty<a<b<\infty$ の場合．証明は背理法による．

$$E \subset \bigcup_{\lambda} G_\lambda$$

であるが，どのような有限個の G_λ でも E は覆われないとする．

$[a,b]$ の 2 等分点を c とすると $[a,c]$ または $[c,b]$ のうち少なくとも片方は，有限個の G_λ では覆われないはずである．これを $[a_1,b_1]$ とする．次に，$[a_1,b_1]$ に対して上と同様の考察をすると，$[a_1,b_1]$ に含まれて長さが $(b-a)/2^2$ の閉区間 $[a_2,b_2]$ で有限個の G_λ では覆われないようなものが存在する．この操作を次々と繰り返すと，有限個の G_λ では覆われないような閉区間の単調減少列 $\{[a_n,b_n]\}$ が得られ，

$$\begin{aligned}&a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1, \\ &b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}\end{aligned}$$

となる．したがって，$\{a_n\}$ は単調増加かつ有界であるから収束する．その極限値を α とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha, \quad a \leq \alpha \leq b$$

となる．この α は E の点であるから，どれかの G_λ に含まれている．G_λ は開集合であったから，正数 ε を十分小にとると

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset G_\lambda$$

となる．n を十分大にとって，$(b-a)/2^n < \varepsilon$ となるようにすれば，

$$[a_n, b_n] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset G_\lambda$$

となって $[a_n, b_n]$ はただ 1 つの G_λ に含まれることになって，矛盾である．

第 2 段：E が $\mathbf{R}$ の任意の有界閉集合の場合．まず，十分大きな閉区間 $[a,b]$ をとれば

$$E \subset [a,b]$$

とできる．

$$E \subset [a,b] \subset \left(\bigcup_\lambda G_\lambda\right) \cup E^c$$

であるから，$[a,b]$ は $\bigcup_\lambda G_\lambda$ に 1 つの開集合 E^c を合せた開集合系によって覆われたことになる．第 1 段によって適当な $G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_n}$ をとれば，

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}\right) \cup E^c.$$

よって

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}$$

となる．

定理 1.2. 任意の区間 $I = (a,b]$ に対して，

$$\mu^*(I) = |I| = b - a.$$

証明. $a = -\infty$ または $b = \infty$ のときは $\mu^*(I) = |I| = \infty$ となるから $-\infty < a < b < \infty$ の場合を考える．

区間 $I = (a,b]$ は I 自身を覆っているわけだから

$$\mu^*(I) \leq b - a \tag{1.2}$$

が成り立つ．

次に，正数 ε を任意にとって固定する．この ε に対して，$\mu^*(I)$ の定義式 (1.1) から，区間の列 $I_n = (a_n, b_n]$ で

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

かつ

$$\mu^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq \mu^*(I) + \varepsilon$$

となるものが存在する．十分小さい正数 δ に対して

$$[a+\delta, b] \subset I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

各区間 I_n を少し広げた開区間の列

$$I_{n,\varepsilon} = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

を考えれば，当然

$$[a+\delta, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,\varepsilon}.$$

ところで，$[a+\delta, b]$ は有界閉区間であるから，ハイネ・ボレルの被覆定理 (定理 1.1) によって，このうちの有限個の開区間 $I_{n,\varepsilon}$ によって覆われている．よって，ある n_0 が存在して

$$[a+\delta, b] \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} I_{n,\varepsilon}.$$

これから

$$\begin{aligned} b-(a+\delta) &\leq \sum_{n=1}^{n_0}\left(b_n + \frac{\varepsilon}{2^n} - a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

したがって，

$$b - a - \delta < \mu^*(I) + 3\varepsilon.$$

すなわち，

$$b - a - \delta - 3\varepsilon < \mu^*(I).$$

ここで，ε や δ は任意の正数であったから

$$b - a \leq \mu^*(I)$$

でなければならない．

(1.2) と合わせて，$\mu^*(I) = b - a$ を得る．

定理 1.2 によって，区間の長さは (1.1) で定義される外測度 μ^* で測っても変わらないことが分かった．

以下で，さらに外測度 μ^* の性質を調べる．$\mathbf{R}$ の部分集合を A, B, A_n, B_n 等で表す．

定理 1.3. 外測度 μ^* は次の性質を持つ：

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \infty, \quad \mu^*(\emptyset) = 0 \quad \text{（非負性）} \tag{1.3}$$

$$A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad \text{（単調性）} \tag{1.4}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \quad \text{（劣加法性）} \tag{1.5}$$

証明. (1.3) の証明：$0 \le \mu^*(A) \le \infty$ は μ^* の定義から明らか．
　また，$\emptyset \subset \emptyset \in \mathcal{I}$ だから $\mu^*(\emptyset) \le |\emptyset| = 0$.
　(1.4) の証明：$A \subset B$ とし B の覆い方

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n \in \mathcal{I},$$

を考えると

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

でもあるから

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

この右辺で，B のすべての覆い方に対する下限をとれば $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ を得る．
　(1.5) の証明：任意の正数 ε を与えるごとに，各 A_n に対して

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_{n_k}| \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

となる $I_{n_k} \in \mathcal{I}$, $k = 1, 2, \ldots,$ がとれる．このとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n_k}.$$

すなわち，右辺は，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

の 1 つの覆い方であるから

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |I_{n_k}| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

ところで，ε は任意の正数であったから，(1.5) が成り立つ．

定理 1.4. 任意有限個の互いに素な（共通部分のない）区間 $I_1, \ldots, I_n$ に対して

$$\mu^*(I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(I_k) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \tag{1.6}$$

が成り立つ．

証明. 正数 ε が任意に与えられたとき，この ε に対して μ^* の定義から，区間の列 E_j, $j = 1, 2, \ldots$, で

$$I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

かつ

$$\sum_{j=1}^{\infty} |E_j| \leq \mu^* (I_1 \cup \ldots \cup I_n) + \varepsilon$$

となるものが存在する．

次に，

$$\begin{aligned} &E_{1,j} = I_1 \cap E_j,\ E_{2,j} = I_2 \cap E_j, \ldots, \\ &E_{n,j} = I_n \cap E_j,\ j = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

とおくと，各 $E_{k,j}$ は区間であって

$$I_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{1,j},\ I_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{2,j}, \ldots,\ I_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n,j}.$$

一方，定理 1.2 と劣加法性 (1.5) から

$$|I_1| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_{1,j}|,\ |I_2| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_{2,j}|, \ldots,\ |I_n| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_{n,j}|.$$

また，

$$|E_{1,j}| + |E_{2,j}| + \ldots + |E_{n,j}| \leq |E_j|$$

であるから

$$\begin{aligned} |I_1| + |I_2| + \ldots + |I_n| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_{1,j}| + \sum_{j=1}^{\infty} |E_{2,j}| + \ldots + \sum_{j=1}^{\infty} |E_{n,j}| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |E_{k,j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_j| \\ &\leq \mu^* (I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

ここで，正数 ε は任意であったから

$$|I_1| + |I_2| + \ldots + |I_n| \leq \mu^* (I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n)$$

を得る．

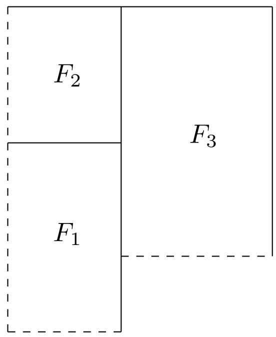
また，劣加法性 (1.5) より，

$$\begin{aligned} \mu^* (I_1 \cup \ldots \cup I_n) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mu^* (I_k) \\ &= |I_1| + \ldots + |I_n| \end{aligned}$$

だから，逆の不等式も成り立ち (1.6) が証明された．

定義 1.2. 有限個の互いに素な区間の和集合として表される集合を**区間塊**という．区間塊の全体を $\mathcal{F}$ と表す.

例として，2 次元の場合の区間塊を図示する：



定理 1.5. $\mathbf{R}$ の区間塊の全体 $\mathcal{F}$ は次の性質を持つ：

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c = \mathbf{R} \setminus A \in \mathcal{F}$

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

この 3 条件を満たす集合族を**有限加法族**という.

定理 1.4 と定理 1.5 の直接の帰結として次の定理を得る.

定理 1.6. μ^* は次の性質を持つ：

$$\begin{aligned} &\text{すべての } A \in \mathcal{F} \text{ に対して } 0 \leq \mu^*(A) \leq \infty,\ \text{特に } \mu^*(\emptyset) = 0, \\ &A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B). \end{aligned} \tag{1.7}$$

性質 (1.7) と帰納法により

$$\begin{aligned} &A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F},\ A_j \cap A_k = \emptyset\ (j \neq k) \\ &\Longrightarrow \mu^*(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j) \end{aligned} \tag{1.8}$$

を得る．これは外測度 μ^* の有限加法族 $\mathcal{F}$ での**有限加法性**を示している.

定義 1.3. 集合 $E \subset \mathbf{R}$ が，次の条件 (1.9) を満たすとき，E は**可測**[1]
（または μ^*-可測）であるという：任意の集合 $A \subset \mathbf{R}$ に対して

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \tag{1.9}$$

また,

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

[1] 可測性の定義は不自然に見えるかもしれないが，実は自然と現れる性質である．後出の注意 1.3 を参照.

であるから，μ^* の劣加法性 (1.5) より，不等式

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

は常に成り立つ．したがって，集合 E が μ^*-可測であることをいうためには，次の不等式を示せばよい：任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

$\mathbf{R}$ の μ^*-可測な集合の全体を $\mathcal{M}$ または $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ と書く．

定理 1.7. $\mathbf{R}$ の区間塊はすべて μ^*-可測である．言い換えれば，

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$$

が成り立つ．

証明. $E \in \mathcal{F}$ とする．任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n \in \mathcal{I}$$

なる覆い方を考えると

$$A \cap E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E), \quad A \cap E^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E^c).$$

ところで

$$I_n = (I_n \cap E) \cup (I_n \cap E^c)$$

に注意して，μ^* の区間塊の全体 $\mathcal{F}$ における有限加法性 (1.8), μ^* の劣加法性 (1.5) と単調性 (1.4) を用いると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n \cap E^c) \\
&\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).
\end{aligned}$$

したがって，A のすべての覆い方に対する左辺の下限をとることにより

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

となって，$E \in \mathcal{M}$ である．

以上から，$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ を得る．

定理 1.8. 零集合は，すべて μ^*-可測である．

証明. 零集合 E と任意の集合 $A \subset \mathbf{R}$ に対して μ^* の劣加法性 (1.5) と単調性 (1.4) により

$$\begin{aligned}
&\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \\
&\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A).$$

以上から，

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad (= \mu^*(A \cap E^c))$$

が成り立つので $E \in \mathcal{M}$ である．

定理 1.9. $E_k \in \mathcal{M}$, $k = 1, 2, \ldots$, $E_j \cap E_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ であって，

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

ならば

$$S \in \mathcal{M}, \quad \mu^*(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) \quad \text{（完全加法性）}$$

が成り立つ．

証明. まず，任意の $A \subset \mathbf{R}$ と任意の n に対して，

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap S^c) \tag{1.10}$$

が示せたとすると，$n \to \infty$ としてから，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k) = A \cap S$$

であることと μ^* の劣加法性 (1.5) を用いて

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap S^c) \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap E_k)\right) + \mu^*(A \cap S^c) \\ &= \mu^*(A \cap S) + \mu^*(A \cap S^c)\end{aligned} \tag{1.11}$$

となるから，$S \in \mathcal{M}$ が示される．

また，(1.11) は等式となる．(1.11) において $A = S$ ととることにより

$$\mu^*(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

を得る．

(1.10) を数学的帰納法によって証明する．$n = 1$ のとき，$E_1 \in \mathcal{M}$ であることと μ^* の単調性 (1.4) により

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap S^c).\end{aligned}$$

次に，(1.10) が n まで成り立つと仮定して，A を $A \cap E_{n+1}^c$ で置き換えて

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A \cap E_{n+1}^c\right) &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*\left(A \cap E_{n+1}^c \cap E_k\right) \\ &\quad + \mu^*\left(A \cap E_{n+1}^c \cap S^c\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap S^c).\end{aligned} \tag{1.12}$$

一方，$E_{n+1} \in \mathcal{M}$ であったから，(1.12) より，

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\left(A \cap E_{n+1}\right) + \mu^*\left(A \cap E_{n+1}^c\right) \\ &\geq \mu^*\left(A \cap E_{n+1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \mu^*\left(A \cap E_k\right) + \mu^*\left(A \cap S^c\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mu^*\left(A \cap E_k\right) + \mu^*\left(A \cap S^c\right).\end{aligned}$$

ゆえに，(1.10) が $n+1$ の場合に成り立つことが示された．

定理 1.10. E, $F \in \mathcal{M}$ ならば $E^c \in \mathcal{M}$, $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}$, $E \cap F \in \mathcal{M}$.

証明. まず，$E^c \in \mathcal{M}$ を示す．$E \in \mathcal{M}$ より，任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\left(A \cap E\right) + \mu^*\left(A \cap E^c\right) \\ &= \mu^*\left(A \cap (E^c)^c\right) + \mu^*\left(A \cap E^c\right) \\ &= \mu^*\left(A \cap E^c\right) + \mu^*\left(A \cap (E^c)^c\right).\end{aligned}$$

ゆえに，$E^c \in \mathcal{M}$ である．

また $E \cap F \in \mathcal{M}$ を証明すれば $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}$ もいえるので，$E \cap F \in \mathcal{M}$ を示す．

E, F が可測であることを順に使うと，任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して

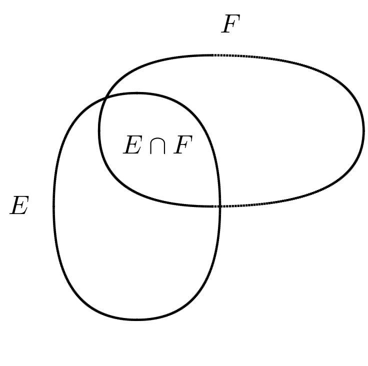
$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\left(A \cap E\right) + \mu^*\left(A \cap E^c\right) \\ &= \mu^*\left(A \cap E \cap F\right) + \mu^*\left(A \cap E \cap F^c\right) \\ &\quad + \mu^*\left(A \cap E^c \cap F\right) + \mu^*\left(A \cap E^c \cap F^c\right).\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}&(A \cap E \cap F^c) \cup (A \cap E^c \cap F) \cup (A \cap E^c \cap F^c) \\ &\quad = A \cap \bigl((E \cap F^c) \cup (E^c \cap F) \cup (E^c \cap F^c)\bigr) \\ &\quad = A \cap \bigl((E \cap F^c) \cup E^c\bigr) \\ &\quad = A \cap \bigl((E \cup E^c) \cap (F^c \cup E^c)\bigr) \\ &\quad = A \cap (F^c \cup E^c) \\ &\quad = A \cap (E \cap F)^c\end{aligned}$$

となることと μ^* の劣加法性 (1.5) を使えば

$$\begin{aligned}&\mu^*\left(A \cap E \cap F^c\right) + \mu^*\left(A \cap E^c \cap F\right) + \mu^*\left(A \cap E^c \cap F^c\right) \\ &\quad \geq \mu^*\left((A \cap E \cap F^c) \cup (A \cap E^c \cap F) \cup (A \cap E^c \cap F^c)\right) \\ &\quad = \mu^*\left(A \cap (E \cap F)^c\right).\end{aligned}$$



ゆえに,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap (E \cap F)^c)$$

となって，$E \cap F \in \mathcal{M}$ であることが分かる．

系 1.1. $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ ならば,

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}, \quad \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}.$$

証明. まず,

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$$

を示す.

$n = 1$ のときは明らか．$n = m$ のとき成り立つと仮定する．$n = m + 1$ のとき

$$\bigcap_{k=1}^{m+1} E_k = \left(\bigcap_{k=1}^{m} E_k\right) \cap E_{m+1}$$

であり,

$$\bigcap_{k=1}^{m} E_k, \quad E_{m+1} \in \mathcal{M}$$

だから，定理 1.10 により,

$$\bigcap_{k=1}^{m+1} E_k \in \mathcal{M}$$

を得る．よって，任意の自然数 n に対して,

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$$

が成り立つ.

また，定理 1.10 より, $E_k \in \mathcal{M}$ ならば $E_k^c \in \mathcal{M}$ であるから

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k^c\right)^c \in \mathcal{M}.$$

定理 1.11. $E_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots,$ ならば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}.$$

証明. まず,

$$F_1 = E_1, \quad F_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \ (n \geq 2)$$

とおくと，定理 1.10 と系 1.1 により $F_n \in \mathcal{M}$. そして，$j \neq k$ のとき $F_j \cap F_k = \emptyset$ だから，定理 1.9 より

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{M}.$$

また，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

が成り立つ．なぜなら，$F_n \subset E_n$ より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

また，$x \in \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ ならば $x \in E_j$ となる j が存在する．このとき，$x \in F_1 \cup \ldots \cup F_j$ だから $x \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. ゆえに，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

が成り立ち，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

がいえる．よって，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$$

を得る．

$\mathcal{M}$ に属する集合を（1 次元）**ルベーグ可測集合**という．集合族 $\mathcal{M}$ の基本的な性質をまとめると，

$$\text{(1.13)} \qquad \begin{cases} \text{(i)} \quad \emptyset \in \mathcal{M} \\ \text{(ii)} \quad E \in \mathcal{M} \Longrightarrow E^c = \mathbf{R} \setminus E \in \mathcal{M} \\ \text{(iii)} \quad E_n \in \mathcal{M},\ n = 1, 2, \ldots, \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M} \quad \text{（完全加法性）} \end{cases}$$

という形にいい表すことができる．

一般に，このような 3 つの性質をもった集合族を，**完全加法族**，**可算加法族**または σ-**加法族**等と呼ぶ．

μ^* を $\mathcal{M}$ 上に制限したものを μ と書いて，$\mathbf{R}$ における**ルベーグ測度** (Lebesgue measure) という．ルベーグ測度 μ は次の性質を持つ：

$$\text{(1.14)} \qquad \begin{cases} \text{(i)} \quad \mu(\emptyset) = 0 \\ \text{(ii)} \quad \text{任意の } A \in \mathcal{M} \text{ に対して } 0 \leq \mu(A) \leq \infty \quad \text{（非負性）} \\ \text{(iii)} \quad A_n \in \mathcal{M},\ n = 1, 2, \ldots,\ A_j \cap A_k = \emptyset\ (j \neq k) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow \mu\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{（完全加法性）} \end{cases}$$

集合 $\mathbf{R}$, 完全加法族 $\mathcal{M}$, ルベーグ測度 μ を組み合せたものを（1 次元）**ルベーグ測度空間**と呼び，3 組の形 $(\mathbf{R}, \mathcal{M}, \mu)$ に書く．

注意 1.3. 区間塊の全体 $\mathcal{F}$ に対して，集合族 $\mathcal{N}$ は $\mathcal{N} \supset \mathcal{F}$ を満たすとする．さらに，$\mathcal{N}$ が (1.13) を満たし，μ^* を $\mathcal{N}$ 上に制限したものが (1.14) を満たすならば，$\mathcal{N}$ の元は可測になる．よって，不自然に見える可測性の定義も実は自然と現れる性質ということになる．

実際に，$E \in \mathcal{N}$ とする．$A \subset \mathbf{R}$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $I_n \in \mathcal{I}$ が存在して，

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

$H = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ とおくと，$\mathcal{N}$ が $\mathcal{F}$ を含み，(1.13) を満たすことから

$$H,\ H \cap E,\ H \cap E^c \in \mathcal{N}.$$

よって，μ^* の劣加法性，有限加法性，単調性により，

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n) \\ &\geq \mu^*(H) = \mu^*(H \cap E) + \mu^*(H \cap E^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \geq \mu^*(A). \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

となり，E の可測性が従う．

定理 1.12. $\mathbf{R}$ の開集合は可測集合である．したがって，閉集合も可測集合である．

証明. $O \subset \mathbf{R}$ を開集合とする．O に含まれる有理点は可算個であるから，これにもれなく番号を付けて，$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ とする．各 x_n に対して $x_n \in I_n \subset O$ となる開区間で最大なものが存在するのでこれを I_n とする．このとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = O$$

である．なぜなら，明らかに

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset O.$$

次に，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset O$$

を背理法によって示す．任意の自然数 n に対して $x \notin I_n$ となるような $x \in O$ が存在するとする．O に含まれる任意の有理点はいずれかの I_n に属するから，$x \in O \setminus \mathbf{Q}$ となる．O は開集合だから，十分小さな正数 δ に対して，開区間 $(x - \delta, x + \delta)$ は O に含まれる．この区間内には有理点が存在するので，その中の 1 つを x_m とすると，x_m を含む開区間 I_m は明らかに，

$$x \in I_m$$

となる．これは，任意の自然数 n に対して $x \notin I_n$ であることに矛盾するので，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset O.$$

よって，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = O.$$

また，開区間は区間の和集合で表される．これは，開区間を (a,b) とすると，十分大きな $n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$(a,b) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{k}\right]$$

となることから従う．よって，定理 1.11 より，任意の開区間は $\mathcal{M}$ に属する． 再び，定理 1.11 より

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{M}$$

であるから，$O \in \mathcal{M}$ が分かる．また，閉集合は開集合の補集合だから，定理 1.10 より，閉集合は可測である．

最後に，ルベーグ測度の性質をいくつか述べる．そのために，まず，集合列，数列の上極限，下極限の定義を与える．

定義 1.4. 集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{E_n\}$ の**上極限**，**下極限**を，それぞれ，

$$\varlimsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right),$$
$$\varliminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k\right)$$

と定義する．

明らかに，

$$\varliminf_{n\to\infty} E_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} E_n$$

が成り立つ．特に，$\{E_n\}$ が

$$\varliminf_{n\to\infty} E_n = \varlimsup_{n\to\infty} E_n$$

を満たすとき，この共通の集合を $\lim_{n\to\infty} E_n$ で表し，$\{E_n\}$ の極限という．集合列の極限が存在するとき，その集合列は収束するという．

定義 1.5. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{a_n\}$ の**上極限**，**下極限**を，それぞれ，

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{1\le n<\infty} \sup_{n\le k<\infty} a_k \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \sup_{n\le k<\infty} a_k\right),$$
$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{1\le n<\infty} \inf_{n\le k<\infty} a_k \quad \left(= \lim_{n\to\infty} \inf_{n\le k<\infty} a_k\right)$$

と定義する．

明らかに，

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つが，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が存在するときには，両者は α に等しい．

定理 1.13. $E_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots,$ とする．

(i) 集合列 $\{E_n\}$ が単調増加のとき，または，単調減少で $\mu(E_1) < \infty$ のときは，

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{1.15}$$

(ii) 一般の可測集合列 $\{E_n\}$ に対しては

$$\mu\left(\varliminf_{n\to\infty} E_n\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right), \tag{1.16}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty \text{ ならば，} \mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} E_n\right) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right). \tag{1.17}$$

特に，(1.16) と (1.17) から

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty \text{ で } \lim_{n\to\infty} E_n = E \text{ ならば，} \mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right). \tag{1.18}$$

証明. (i) $\{E_n\}$ が単調増加ならば，

$$A_n = E_n - E_{n-1}, \quad E_0 = \emptyset$$

とおくことによって

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

となるから μ の完全加法性により

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu\left(A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right).$$

次に，$\{E_n\}$ が単調減少ならば，

$$A_n = E_1 \setminus E_n$$

は単調増加で，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = E_1 \setminus \lim_{n\to\infty} E_n.$$

ゆえに，$\mu\left(E_1\right) < \infty$ に注意し，(1.15) を用いると，

$$\begin{aligned}
\mu\left(E_1\right) - \mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) &= \mu\left(E_1 \setminus \lim_{n\to\infty} E_n\right) \\
&= \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_1 \setminus E_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\mu\left(E_1\right) - \mu\left(E_n\right)\right) \\
&= \mu\left(E_1\right) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right).
\end{aligned}$$

したがって，

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(E_n\right).$$

(ii) 一般の場合には，

$$B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

とおくと $\{B_n\}$ は単調増加で

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \varliminf_{n\to\infty} E_n.$$

よって，$B_n \subset E_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ に注意し，(1.15) を用いると，

$$\begin{aligned}
\mu\left(\varliminf_{n\to\infty} E_n\right) &= \mu\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \\
&= \varliminf_{n\to\infty} \mu(B_n) \\
&\leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(E_n)
\end{aligned}$$

となって，(1.16) が成り立つ．

(1.17) は，

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

とおいて，上と同様に計算することによって示される．

(1.18) は，(1.16) と (1.17) から従う．

注意 1.4. 定理 1.13 の (i) で $\{E_n\}$ が単調減少の場合に $\mu(E_1) < \infty$ なる条件と (1.17) で

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$$

なる条件を一般には除くことができない．

たとえば，$E_n = (n, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : n < x < \infty\}$ とすると，$\{E_n\}$ は単調減少である．すべての n に対して $\mu(E_n) = \infty$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty.$$

一方，

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$$

である．

次の定理は，ルベーグ（外）測度の平行移動および反転に関する不変性を主張している：

定理 1.14. 集合 $E \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
a + E &= \{a + x : x \in E\}, \quad a \in \mathbf{R}, \\
-E &= \{-x : x \in E\}
\end{aligned}$$

とおく．このとき，

$$\mu^*(a + E) = \mu^*(-E) = \mu^*(E).$$

さらに，E が可測ならば，$a + E$, $-E$ も可測であって，

$$\mu(a + E) = \mu(-E) = \mu(E).$$

証明. 集合 E に対して，

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n \in \mathcal{I}$$

なる覆い方を考えると，任意の実数 a に対して，

$$a + E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a + I_n), \quad a + I_n \in \mathcal{I}$$

だから，
$$\mu^*(a+E) \le \sum_{n=1}^{\infty} |a+I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$
したがって，E のすべての覆い方に対する右辺の下限をとることにより
$$\mu^*(a+E) \le \mu^*(E).$$
a と E の代わりにそれぞれ $-a$, $a+E$ を考えると，
$$\mu^*(E) = \mu^*(-a+a+E) \le \mu^*(a+E).$$
ゆえに，
$$\mu^*(a+E) = \mu^*(E).$$
集合 E が可測な場合は，定義より，任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して，
$$\mu^*(A-a) = \mu^*((A-a)\cap E) + \mu^*((A-a)\cap E^c).$$
上で示したように，各項の集合を a だけ平行移動しても外測度は変わらないから，
$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap(E+a)) + \mu^*(A\cap(E+a)^c).$$
これは，$a+E$ が可測であることを意味する．よって，
$$\mu(a+E) = \mu(E).$$
集合 $-E$ についても，同様の議論で示せる．

定理 1.15. 集合 $E \subset \mathbf{R}$ が可測ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，
$$\begin{aligned} &G \supset E, \quad \mu(G \setminus E) < \varepsilon, \\ &F \subset E, \quad \mu(E \setminus F) < \varepsilon \end{aligned}$$
を満たす開集合 G と閉集合 F が存在する．

証明. (a) まず，開集合 G についての主張を証明する．

$S_n = \{x \in \mathbf{R} : |x| < n\}$ とおく．E が有界なときは，$E \subset S_{n_0}$ となる n_0 が存在し，$\mu(E) < \infty$ である．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，区間の列 I_n で，
$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$
かつ
$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$
となるものが存在する．各 I_n を
$$I_n = (a_n, b_n]$$
と表すと，開区間
$$G_n = \left(a_n, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$$
は
$$\mu(G_n) = |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

を満たす．$G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ とおくとこれは開集合で，

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E,$$
$$\mu(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|I_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) < \mu(E) + \varepsilon.$$

よって，

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon$$

となる．

E が有界でないときは，各 n に対して $E_n = E \cap S_n$ とおくと，E_n は有界な可測集合だから，上で示したことより，

$$G_n \supset E_n, \quad \mu(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たす開集合 G_n が存在する．$G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ とおくとこれも開集合で，

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

さらに，$G \setminus E \subset \cup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$ だから，

$$\mu(G \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

(b) 次に，閉集合 F についての主張を証明する．

E が有界なときは，$E \subset S_{n_0}$ となる n_0 が存在する．$\overline{S_{n_0}} = \{x \in \mathbf{R} : |x| \leq n_0\}$ とすると，$\overline{S_{n_0}} \setminus E$ も可測集合だから，(a) より

$$G \supset \overline{S_{n_0}} \setminus E, \quad \mu(G \setminus (\overline{S_{n_0}} \setminus E)) < \varepsilon$$

を満たす開集合 G が存在する．よって，$F = \overline{S_{n_0}} \setminus G$ とおくとこれは閉集合で，$F \subset \overline{S_{n_0}} \setminus (\overline{S_{n_0}} \setminus E) = E$ を満たす．まとめると，

$$F \subset E \subset \overline{S_{n_0}} \subset G \cup F \quad (G \cap F = \emptyset).$$

このことから，

$$G \cup F \supset (\overline{S_{n_0}} \setminus E) \cup (E \setminus F) \cup F$$

が分かる．$G \cap F = \emptyset$ だから，

$$G \supset (\overline{S_{n_0}} \setminus E) \cup (E \setminus F).$$

よって，

$$E \setminus F \subset G \setminus (\overline{S_{n_0}} \setminus E)$$

となるので

$$\mu(E \setminus F) \leq \mu(G \setminus (\overline{S_{n_0}} \setminus E)) < \varepsilon$$

が成り立つ．

E が有界でないときは，$E_1 = E \cap S_1$, $E_n = E \cap (S_n \setminus S_{n-1})$, $n \geq 2$, とおくと，各 E_n は有界な可測集合だから，上で示したことより

$$F_n \subset E_n, \quad \mu(E_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たす閉集合 F_n が存在する．$F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ とおくと，これは閉集合となる．

実際に，$x \in F^c = \cap_{n=1}^{\infty} F_n^c$ とし，$x \in S_{m-1}$ となる m をとる．このとき，任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して，

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset S_m$$

であり，$(\cup_{n=m+1}^{\infty} F_n)^c \supset S_m$ だから，

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} F_n \right)^c = \bigcap_{n=m+1}^{\infty} F_n^c.$$

各 F_n^c は開集合だから，$n = 1, \ldots, m$ に対して，$\delta_n \in (0,1)$ が存在して，$(x-\delta_n, x+\delta_n) \subset F_n^c$. $\delta = \min_{1 \le n \le m} \delta_n$ とすると，$n = 1, \ldots, m$ に対して，$(x-\delta, x+\delta) \subset F_n^c$. すなわち，

$$(x-\delta, x+\delta) \subset \bigcap_{n=1}^{m} F_n^c.$$

まとめると，

$$(x-\delta, x+\delta) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c = F^c$$

となり，F^c は開集合，すなわち，F は閉集合である．

$F \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ であり，$E \setminus F \subset \cup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus F_n)$ だから，

$$\mu(E \setminus F) \le \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus F_n) \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

2 1 次元ルベーグ積分の定義

定義 2.1. 集合 $E \in \mathcal{M}$ を

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$$

と有限個の互いに素な可測集合の和集合であるとし，

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x) \tag{2.1}$$

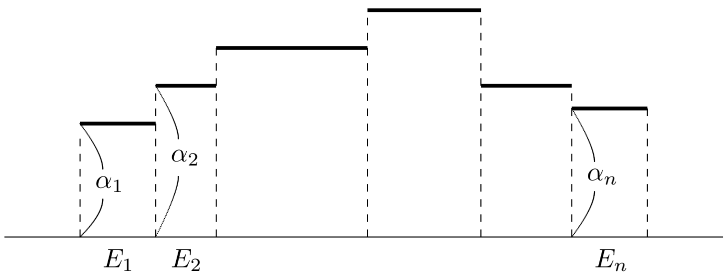
の形に表される関数を，**単関数**または**階段関数**という．ここで，α_j は実数，$\chi_{E_j}(x)$ は E_j の**定義関数**，すなわち

$$\chi_{E_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E_j, \\ 0 & \text{if } x \notin E_j \end{cases}$$

である．

このような単関数に対しては，リーマン積分の考え方を拡張して

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \alpha_1 \mu(E_1) + \alpha_2 \mu(E_2) + \ldots + \alpha_n \mu(E_n)$$



と定義するのが自然である．

　そして，一般の関数 $f(x)$ に対しては，$f(x)$ がこのような単関数列 $\{f_k(x)\}$ の極限として表されるとき，$f_k(x)$ の積分値 $\int_E f_k(x)\,d\mu(x)$ の $k \to \infty$ としたときの極限をもって

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) := \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,d\mu(x)$$

が定義できるということをこの小節で示す．

　まず

$$\overline{\mathbf{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

とする．その位相は，次の形の線分の和集合を開集合と呼ぶことによって定義される：

$$(a,b), \quad [-\infty, a), \quad (a, +\infty].$$

$\overline{\mathbf{R}}$ の元を，**拡張された実数**という．

　関数 $f(x)$ は，可測集合 $E \in \mathcal{M}$ で定義され，拡張された実数値をとるものとする．以下では，$0 \cdot \pm\infty = 0$ と規約する．

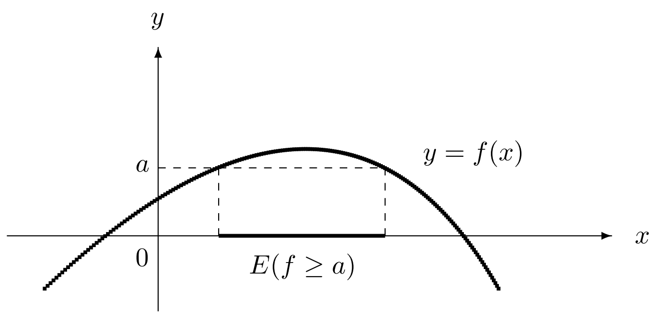
　a を拡張された実数とするとき

$$E(f > a) = \{x \in E : f(x) > a\}$$

と定義する．

　同様にして

$$E(f \le a) = \{x \in E : f(x) \le a\}\,,$$
$$E(a < f \le b) = \{x \in E : a < f(x) \le b\}$$



等も定義される．

定義 2.2. 任意の実数 a に対して

$$E(f > a) \in \mathcal{M}$$

が成り立つとき，$f(x)$ を**ルベーグ可測関数**，または単に**可測関数**という．

例 2.1. (2.1) の形で表される単関数は，可測関数である．実際に，任意の実数 a に対して

$$E(\chi_{E_j} > a) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } a \geq 1, \\ E_j & \text{if } 0 \leq a < 1, \\ \mathbf{R} & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

であり，$\emptyset, E_j, \mathbf{R} \in \mathcal{M}$ だから，可測集合 E_j の定義関数 $\chi_{E_j}(x)$ は可測関数である．同様にして，単関数 (2.1) が可測関数であることも証明できる．

$f(x)$ が可測関数であることと，任意の実数 a に対して次の各集合が $\mathcal{M}$ に属することとは互いに同値である：

$$\begin{aligned} E(f \leq a) &= E \setminus E(f > a) \in \mathcal{M} \\ E(f \geq a) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{M} \\ E(f < a) &= E \setminus E(f \geq a) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

また，$f(x)$ が可測ならば，次の各集合は可測である：

$$\begin{aligned} E(f = a) &= E(f \geq a) \cap E(f \leq a) \in \mathcal{M} \\ E(f < \infty) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f < n) \in \mathcal{M} \\ E(f = \infty) &= E \setminus E(f < \infty) \in \mathcal{M} \\ E(f > -\infty) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > -n) \in \mathcal{M} \\ E(f = -\infty) &= E \setminus E(f > -\infty) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

E で定義された関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$E(f > g) = \{x \in E : f(x) > g(x)\}$$

等の記号を用いる．

定理 2.1. 関数 $f(x), g(x)$ が E $(\in \mathcal{M})$ で可測ならば，集合 $E(f > g), E(f \geq g), E(f = g)$ はすべて $\mathcal{M}$ に属する．

証明. すべての有理数の集合 $\mathbf{Q}$ は可算集合であることに注意すると，

$$E(f > g) = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} \{E(f > r) \cap E(r > g)\} \in \mathcal{M}.$$

同様にして，$E(g < f) \in \mathcal{M}$ でもあるから

$$\begin{aligned} E(f \geq g) &= E \setminus E(g < f) \in \mathcal{M}, \\ E(f = g) &= E(f \geq g) \setminus E(f > g) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

である．

定理 2.2. 関数 $f(x)$ が可測ならば，任意の実数 α に対して，$f(x)$ の冪（べき） $|f(x)|^\alpha$ も可測である．ただし，$\alpha < 0$ のとき $f(x) = 0$ なる点 x においては $|f(x)|^\alpha = \infty$ と約束する．[2]

証明. $\alpha > 0$ の場合：$a > 0$ ならば

$$E\left(|f|^\alpha \geq a\right) = E\left(|f| \geq a^{\frac{1}{\alpha}}\right) = E\left(f \geq a^{\frac{1}{\alpha}}\right) \cup E\left(f \leq -a^{\frac{1}{\alpha}}\right) \in \mathcal{M}.$$

$a \leq 0$ ならば，$E(|f|^\alpha \geq a) = E \in \mathcal{M}$ だから，$|f(x)|^\alpha$ は可測関数である．

$\alpha < 0$, $\alpha = 0$ の場合も同様に証明できる．

定理 2.3. 関数 $f(x)$, $g(x)$ が可測ならば，任意の実数 α, β に対して，一次結合 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ も可測である．

証明. $\alpha \cdot \beta = 0$ のときは明らかである．

$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ のときは，任意の実数 a に対して，$\beta \gtrless 0$ に従って，

$$E(\alpha f + \beta g > a) = E\left(g \gtrless -\frac{\alpha}{\beta} f + \frac{a}{\beta}\right)$$

となるから，任意の実数 α, β に対して，関数 $\alpha f(x) + \beta$ が可測であることがいえれば，定理 2.1 によって証明が終わる．ところで，$\alpha f(x) + \beta$ が可測関数であることを示すのは容易である．

定理 2.4. 関数 $f(x)$, $g(x)$ が可測ならば，積 $f(x) \cdot g(x)$ も可測である．

証明. 積 $f \cdot g$ は

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left\{(f+g)^2 - (f-g)^2\right\}$$

と表される．定理 2.3 により，$f + g$, $f - g$ は可測であり，定理 2.2 により，$(f+g)^2$, $(f-g)^2$ も可測である．よって，再び定理 2.3 により，

$$\frac{1}{4}\left\{(f+g)^2 - (f-g)^2\right\}$$

は可測である．

定理 2.5. $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots,$ が可測関数ならば

$$\sup_{1 \leq n < \infty} f_n(x), \quad \inf_{1 \leq n < \infty} f_n(x), \quad \varlimsup_{n \to \infty} f_n(x), \quad \varliminf_{n \to \infty} f_n(x)$$

も可測関数である．特に，$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在すれば，極限関数 $f(x)$ も可測関数である．

証明. まず，$g(x) = \sup_{1 \leq n < \infty} f_n(x)$ とおく．任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} E(g > a) &= E\left(\sup_{1 \leq n < \infty} f_n > a\right) \\ &= E(f_1 > a \text{ or} \ldots \text{or } f_n > a \text{ or} \ldots) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

だから，$g(x)$ は可測である．

[2] $|f(x)|^\alpha$, $\alpha f(x) + \beta g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ 等と書くからには，これらは不定形ではないものとする．

また，

$$\inf_{1 \le n < \infty} f_n(x) = -\sup_{1 \le n < \infty} \{-f_n(x)\}$$

であるから，$\inf_{1 \le n < \infty} f_n(x)$ も可測関数である．

さらに，

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x) = \inf_{1 \le n < \infty} \left\{ \sup_{n \le k < \infty} f_k(x) \right\},$$
$$\underline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x) = \sup_{1 \le n < \infty} \left\{ \inf_{n \le k < \infty} f_k(x) \right\}$$

だから，$\overline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)$ と $\underline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)$ も可測関数となる．よって，$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在すれば

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x) = \underline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x)$$

となるので，極限関数 $f(x)$ は可測関数である．

例 2.2. $\mathbf{R}$ 上で連続な関数はすべて可測関数である．なぜならば，$f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の連続関数とすると，任意の実数 a に対して，

$$E(f > a) = \{x \in E : f(x) > a\} = E \cap \{x \in \mathbf{R} : f(x) > a\}$$

であるが，$\{x \in \mathbf{R} : f(x) > a\}$ は開集合となり，定理 1.12 より，可測集合だからである．$\{x \in \mathbf{R} : f(x) > a\}$ が開集合であることは，f の連続性より，$f(b) > a$ を満たす任意の実数 b に対して，ある正数 δ が存在して，

$$x \in (b - \delta, b + \delta) \Longrightarrow f(x) > a$$

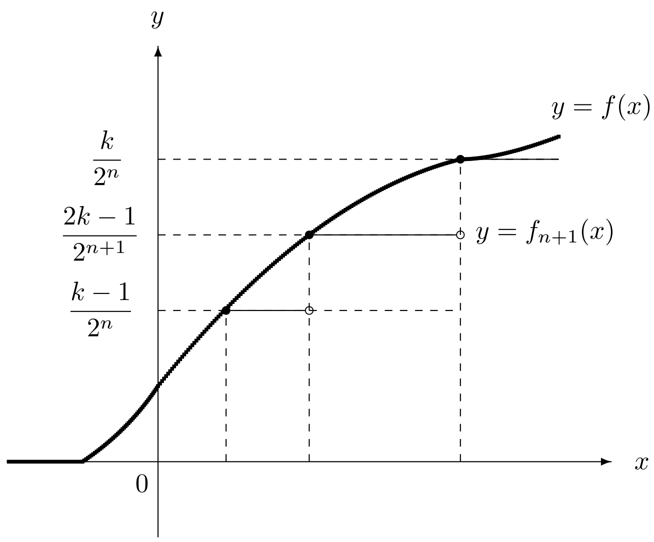
となることから従う．よって，定理 2.5 により，連続関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して $\overline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)$, $\underline{\lim}_{n \to \infty} f_n(x)$ は可測関数となる．また，$\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在すればこれも可測関数となる．

定理 2.6. 関数 $f(x)$ が E $(\in \mathcal{M})$ で可測で非負ならば，E で可測で非負なる単関数の単調増加列 $\{f_n(x)\}$ で $f(x)$ に E の各点で収束するものが存在する．

証明. まず，E 上非負なる単関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \text{if } \ x \in E\left(\frac{k-1}{2^n} \le f < \frac{k}{2^n}\right), \ (k = 1, 2, \dots, n \cdot 2^n), \\ n & \text{if } \ x \in E(f \ge n) \end{cases}$$

で定義する．$f_n(x)$ の値の分割の仕方が $1/2^n$ 等分なので，$n+1$ のときは n のときの細分になっている．したがって，各点 $x \in E$ で $\{f_n(x)\}$ は単調増加である．



次に，$f_n(x)$ の可測性を示す．任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$E(f_n > a) = \begin{cases} E & \text{if } a < 0, \\ \bigcup_{k=k'}^{n\cdot 2^n+1} E\left(f_n = \frac{k-1}{2^n}\right) & \text{if } 0 \le a < n, \\ & \left(k' = \min\left\{k : \frac{k-1}{2^n} > a\right\}\right) \\ \emptyset & \text{if } a \ge n \end{cases}$$

であって，

$$E\left(f_n = \frac{k-1}{2^n}\right) = \begin{cases} E\left(\frac{k-1}{2^n} \le f < \frac{k}{2^n}\right) & \text{if } k = 1, 2, \dots, n\cdot 2^n, \\ E(f \ge n) & \text{if } k = n \cdot 2^n + 1. \end{cases}$$

$f(x)$ が可測なことにより

$$E\left(f_n = \frac{k-1}{2^n}\right) \in \mathcal{M}$$

だから，単関数 $f_n(x)$ は可測である．

$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ なることは，まず $f(x) = \infty$ なる点 x においては，$f_n(x) = n$ だから $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$．また，$f(x) < \infty$ なる点 x では，$n > f(x)$ となるすべての n に対して

$$0 \le f(x) - f_n(x) \le \frac{1}{2^n}$$

となっているから，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となる．

定理 2.5 と定理 2.6 を合せると，

定理 2.7. 関数 $f(x)$ は E $(\in \mathcal{M})$ で非負とする．このとき，$f(x)$ が E で可測であるための必要十分条件は，非負なる可測な単関数の単調増加列 $\{f_n(x)\}$ が存在して，$f(x)$ に E の各点で収束することである．

ここで，単関数の積分に戻る．$f(x)$ が単関数で非負のとき

$$\begin{aligned} &f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \\ &E = E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_n,\ E_j \in \mathcal{M}, \\ &E_0 = E(f = 0),\ E_j \cap E_k = \emptyset\ (j \ne k), \\ &\alpha_0 = 0,\ \alpha_j > 0\ (j \ge 1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

と表される．このような $f(x)$ に対して

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j\right) \tag{2.3}$$

という定義が意味を持つためには，(2.3) の右辺の値が $f(x)$ の (2.2) のような表し方に無関係なことを示す必要がある．

いま，$f(x)$ が (2.2) のほかに

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \chi_{F_k}(x), \\
&E = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_m,\ F_j \in \mathcal{M}, \\
&F_0 = E(f=0) = E_0,\ F_j \cap F_k = \emptyset\ (j \neq k), \\
&\beta_0 = 0,\ \beta_j > 0\ (j \geq 1)
\end{aligned}$$

とも表されたとすると，$E_j \cap F_k \neq \emptyset$ ならば

$$\alpha_j \mu\left(E_j \cap F_k\right) = \beta_k \mu\left(E_j \cap F_k\right)$$

によって $\alpha_j = \beta_k$ である．

(a) $\mu\left(E_j \cap F_k\right) = \infty$ となる $j,\ k \geq 1$ が存在する場合には，その $j,\ k$ に対しては $\mu\left(E_j\right) = \mu\left(F_k\right) = \infty$ だから

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j\right) = \infty = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu\left(F_k\right).$$

(b) もしすべての j, k に対して $\mu\left(E_j \cap F_k\right) < \infty$ の場合は，$\alpha_0 = \beta_0 = 0$ によって

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j\right) &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j \cap \left(\bigcup_{k=0}^{m} F_k\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mu\left(\bigcup_{k=0}^{m} \left(E_j \cap F_k\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{k=0}^{m} \mu\left(E_j \cap F_k\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \alpha_j \mu\left(E_j \cap F_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_k \mu\left(E_j \cap F_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \beta_k \sum_{j=0}^{n} \mu\left(F_k \cap E_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu\left(F_k\right).
\end{aligned}$$

ゆえに，$f(x)$ の表現を変えても (2.3) の右辺の値は変わらない．

定理 2.8. (i) $f(x), g(x)$ が E 上の単関数で非負ならば

$$\int_E (f(x) + g(x))\,d\mu(x) = \int_E f(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x).$$

(ii) $f(x)$ が E 上の単関数で非負，$E \supset A \cup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ ならば

$$\int_{A \cup B} f(x)\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_B f(x)\,d\mu(x).$$

証明. (i) 単関数 $f(x)$, $g(x)$ が次のように表されているとする．

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \chi_{F_k}(x),\\
&E = E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_n = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_m,\\
&E_j \cap E_k = \emptyset\ (j \neq k), \quad F_j \cap F_k = \emptyset\ (j \neq k),\\
&\alpha_0 = 0 < \alpha_j\ (j \geq 1), \quad \beta_0 = 0 < \beta_k\ (k \geq 1).
\end{aligned}$$

このとき，$f(x) + g(x)$ も単関数で

$$f(x) + g(x) = \sum_{j,k} (\alpha_j + \beta_k) \chi_{E_j \cap F_k}(x)$$

と表される．

(a) $\mu(E_j) = \infty$ なる $j \geq 1$ がある場合には，少なくとも 1 つの k $(0 \leq k \leq m)$ に対して $\mu(E_j \cap F_k) = \infty$ となるから

$$\int_E (f(x) + g(x))\,d\mu(x) = \infty = \int_E f(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x)$$

が成り立つ．

(b) $\mu(F_k) = \infty$ となる $k \geq 1$ がある場合も同様である．

(c) すべての j, $k \geq 1$ に対して $\mu(E_j) < \infty$, $\mu(F_k) < \infty$ となる場合は，

$$\begin{aligned}
\int_E (f(x) + g(x))\,d\mu(x) &= \sum_{(j,k) \neq (0,0)} (\alpha_j + \beta_k) \mu(E_j \cap F_k)\\
&= \sum_{(j,k) \neq (0,0)} \alpha_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{(j,k) \neq (0,0)} \beta_k \mu(E_j \cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=0}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \sum_{j=0}^{n} \mu(E_j \cap F_k)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j \cap \left(\bigcup_{k=0}^{m} F_k\right)\right) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu\left(\left(\bigcup_{j=0}^{n} E_j\right) \cap F_k\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(F_k)\\
&= \int_E f(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

(ii) 次に，

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad E = E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_n,\\
&E_0 = E(f = 0), \quad E_j \cap E_k = \emptyset\ (j \neq k), \quad \alpha_0 = 0 < \alpha_j\ (j \geq 1)
\end{aligned}$$

とすると

$$
\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f(x)\,d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j \cap (A\cup B)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left((E_j \cap A)\cup (E_j \cap B)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mu\left(E_j \cap A\right) + \mu\left(E_j \cap B\right)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j \cap A\right) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j \cap B\right) \\
&= \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_B f(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}
$$

定理 2.9. $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ も $g(x)$ も E 上の単関数で非負とし，$\{f_n(x)\}$ は n について単調増加で，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq g(x), \quad \forall x \in E$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) \geq \int_E g(x)\,d\mu(x). \tag{2.4}$$

証明. $E_0 = E(g=0)$, $F = E\setminus E_0$ とおくと，定理 2.8 により

$$\int_E g(x)\,d\mu(x) = \int_{E_0} g(x)\,d\mu(x) + \int_F g(x)\,d\mu(x) = \int_F g(x)\,d\mu(x)$$

だから，はじめから E 上で $g(x) > 0$ として証明すればよい．

このとき，

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad 0 < \alpha_j < \infty$$

と表されるから，

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, \quad \beta = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$$

とおくと，

$$0 < \alpha \leq g(x) \leq \beta < \infty.$$

したがって，$0 < \varepsilon < \alpha$ なる任意の実数 ε に対して，$g(x) - \varepsilon$ は単関数で正である．

ここで

$$F_n = E(f_n > g - \varepsilon), \quad n = 1, 2, \ldots$$

とおくと，$\{f_n(x)\}$ が単調増加で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq g(x)$$

であったから，$\{F_n\}$ は単調増加で

$$\lim_{n\to\infty} F_n = E.$$

これから定理 1.13 によって

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(F_n\right) = \mu(E).$$

以下，2 つの場合にわけて証明する：

(1) $\mu(E) < \infty$ のとき：この場合は，

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(E \setminus F_n\right) = \mu(E) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(F_n\right) = 0$$

だから，先の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 n_0 が存在して

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \mu\left(E \setminus F_n\right) < \varepsilon.$$

したがって，定理 2.8 を用いて

$$\begin{aligned}
\int_E f_n(x)\,d\mu(x) &\geq \int_{F_n} f_n(x)\,d\mu(x) \quad \geq \quad \int_{F_n} (g(x)-\varepsilon)\,d\mu(x) \\
&= \int_{F_n} g(x)\,d\mu(x) - \varepsilon\mu\left(F_n\right) \\
&\geq \int_E g(x)\,d\mu(x) - \int_{E\setminus F_n} g(x)\,d\mu(x) - \varepsilon\mu(E) \\
&\geq \int_E g(x)\,d\mu(x) - \beta\mu\left(E\setminus F_n\right) - \varepsilon\mu(E) \\
&> \int_E g(x)\,d\mu(x) - \varepsilon(\beta+\mu(E)).
\end{aligned}$$

ここで，$n \to \infty$ として

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) \geq \int_E g(x)\,d\mu(x) - \varepsilon(\beta+\mu(E)).$$

$\beta + \mu(E) < \infty$ で ε は任意に小さくとれるので，(2.4) が成り立つ．

(2) $\mu(E) = \infty$ のとき：この場合は，

$$\begin{aligned}
f_n(x) &\geq (g(x)-\varepsilon)\chi_{F_n}(x) \\
&\geq (\alpha-\varepsilon)\chi_{F_n}(x).
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
\int_E f_n(x)\,d\mu(x) &\geq \int_E (\alpha-\varepsilon)\chi_{F_n}(x)\,d\mu(x) \\
&= (\alpha-\varepsilon)\mu\left(F_n\right).
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) &\geq (\alpha-\varepsilon)\lim_{n\to\infty} \mu\left(F_n\right) \\
&= (\alpha-\varepsilon)\mu(E) \\
&= \infty \\
&\geq \int_E g(x)\,d\mu(x)
\end{aligned}$$

となるから，(2.4) が成り立つ．

定理 2.10. E 上の非負単関数列 $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ がどちらも n について単調増加であって

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

とすると

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,d\mu(x).$$

証明. 自然数 m を任意に固定する．仮定により

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \geq g_m(x)$$

だから 定理 2.9 により

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) \geq \int_E g_m(x)\, d\mu(x).$$

この左辺は m に無関係だから，$m \to \infty$ として

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) \geq \lim_{m\to\infty} \int_E g_m(x)\, d\mu(x). \tag{2.5}$$

単関数列 $\{f_n(x)\}$ と $\{g_n(x)\}$ の役割を入れ換えて，同じ論法で (2.5) の逆の不等式を得る．したがって，(2.5) の両辺は相等しい．

ここで，ようやく一般の非負値可測関数 $f(x)$ に対する積分を定義することができる．この場合，定理 2.6 により，非負の単関数 $f_n(x)$ の単調増加列で $f(x)$ に近づくもの $\{f_n(x)\}$ が存在する．このとき，$\{\int_E f_n(x)\, d\mu(x)\}$ も n について単調増加である．したがって

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) \tag{2.6}$$

と定義すると，この右辺の極限値は上の定理 2.10 によって $f(x)$ に近づく単関数の増加列 $\{f_n\}$ のとり方に関係しない．それゆえ (2.6) は $f(x)$ の積分の定義として意味を持つ．

定理 2.11. (i) $f(x)$, $g(x)$ が E 上で可測かつ非負ならば

$$\int_E (f(x) + g(x))\, d\mu(x) = \int_E f(x)\, d\mu(x) + \int_E g(x)\, d\mu(x). \tag{2.7}$$

(ii) $f(x)$ が E 上で可測かつ非負で $E \supset A \cup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ ならば

$$\int_{A\cup B} f(x)\, d\mu(x) = \int_A f(x)\, d\mu(x) + \int_B f(x)\, d\mu(x).$$

証明. (i) E 上で $f(x)$, $g(x)$ が可測かつ非負ならば，それぞれ f, g に収束するような非負単関数の単調増加列 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ が存在する．このとき，$\{f_n + g_n\}$ も非負単関数の単調増加列で $f + g$ に収束する．定理 2.8 (i) より

$$\int_E (f_n(x) + g_n(x))\, d\mu(x) = \int_E f_n(x)\, d\mu(x) + \int_E g_n(x)\, d\mu(x).$$

よって，定理 2.10 を適用すると，(2.7) を得る．

(ii) 同様に，定理 2.8 (ii) と定理 2.10 を適用することにより証明できる．

定義 2.3. 一般の可測関数 $f(x)$ に対して

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

とおくと，$f^+(x)$, $f^-(x)$ は可測で

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad f^+(x) \geq 0,\ f^-(x) \geq 0$$

となり，(2.6) のようにして

$$\int_E f^+(x)\,d\mu(x), \quad \int_E f^-(x)\,d\mu(x)$$

が定義される．この 2 つの値が有限のとき，$f(x)$ は E 上で**ルベーグ積分可能** (Lebesgue integrable) であるといい，

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E f^+(x)\,d\mu(x) - \int_E f^-(x)\,d\mu(x) \tag{2.8}$$

と定義して，この値を E 上での $f(x)$ の**定積分**という．

リーマン積分とルベーグ積分の関係について，本書で必要となる，積分範囲が有界閉区間で，被積分関数が連続な場合のみを説明する．

定理 2.12. 関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば，$[a,b]$ 上での $f(x)$ のリーマン積分とルベーグ積分の値は等しい．

証明． $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と分けて考えれば，$f(x) \geq 0$ の場合だけを証明すればよい．

区間 $[a,b]$ を 2^n 等分した分点を

$$a = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,2^n} = b, \quad x_{n,k} = a + \frac{k(b-a)}{2^n}$$

とし，

$$f_n(x) = f(a)\chi_{\{a\}}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{(x_{n,k-1},x_{n,k}]} f(x) \cdot \chi_{(x_{n,k-1},x_{n,k}]}(x), \quad a \leq x \leq b,$$

とおく．$f_n(x)$ は非負の単関数で，$[a,b]$ の分割の仕方により，n に関して単調増加である．さらに，f の一様連続性から，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. よって，ルベーグ積分の定義より，

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n(x)\,d\mu(x).$$

右辺の積分を計算すると，

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f_n(x)\,d\mu(x) &= f(a)\mu(\{a\}) + \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{(x_{n,k-1},x_{n,k}]} f(x) \cdot \mu((x_{n,k-1},x_{n,k}]) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{[x_{n,k-1},x_{n,k}]} f(x) \cdot \frac{b-a}{2^n}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

$f(x)$ は $[a,b]$ 上でリーマン可積分だから，$n \to \infty$ のとき，(2.9) の右辺は，

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

に収束する．

以上により，

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

以下，ルベーグ積分の基本的な性質を列挙する：

定理 2.13. 可測関数 $f(x)$ が集合 E 上で積分可能であることと $|f(x)|$ が集合 E 上で積分可能であることとは同値である．このとき，さらに

$$\left|\int_E f(x)\,d\mu(x)\right| \le \int_E |f(x)|\,d\mu(x)$$

が成り立つ．

証明. $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ から，$f(x)$ の可積分性と $|f(x)|$ の可積分性は同値であることが分かる．さらに，定理 2.11 の (i) より，

$$\begin{aligned}\left|\int_E f(x)\,d\mu(x)\right| &= \left|\int_E f^+(x)\,d\mu(x) - \int_E f^-(x)\,d\mu(x)\right| \\ &\le \int_E f^+(x)\,d\mu(x) + \int_E f^-(x)\,d\mu(x) = \int_E |f(x)|\,d\mu(x).\end{aligned}$$

定理 2.14. $\mu(E) = 0$ ならば，任意の可測関数 $f(x)$ は集合 E 上で積分可能であって，

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = 0.$$

証明. $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ に対して，非負単関数の単調増加列 $\{f_n^+(x)\}$ が存在し，$f_n^+ \to f^+$ かつ

$$\int_E f^+(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n^+(x)\,d\mu(x)$$

である．さらに，

$$\int_E f_n^+(x)\,d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{n,j}\mu(E_{n,j}), \quad E = E_{n,1} \cup \ldots \cup E_{n,m_n},\ E_{n,j} \cap E_{n,k} = \emptyset\ (j \ne k)$$

と表されるとすると，$\mu(E_{n,j}) \le \mu(E) = 0$ だから，

$$\int_E f_n^+(x)\,d\mu(x) = 0.$$

よって，

$$\int_E f^+(x)\,d\mu(x) = 0.$$

$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ に対しても同様にして，

$$\int_E f^-(x)\,d\mu(x) = 0$$

だから主張が成り立つ．

定理 2.15. 可測関数 $f(x)$ が集合 E 上で積分可能ならば，

$$\mu\left(E(f = +\infty)\right) = \mu\left(E(f = -\infty)\right) = 0.$$

証明. 定理 2.11 の (ii) より，任意の $\alpha > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_E f^+(x)\,d\mu(x) &= \int_{E(f=+\infty)} f^+(x)\,d\mu(x) + \int_{E\setminus E(f=+\infty)} f^+(x)\,d\mu(x) \\ &\ge \int_{E(f=+\infty)} \alpha\,d\mu(x) \quad = \quad \alpha\mu(E(f=+\infty)).\end{aligned}$$

$f(x)$ は E 上積分可能だから，

$$0 \leq \int_E f^+(x)\, d\mu(x) < \infty$$

であって，α は任意に大きくとれるから，$\mu(E(f = +\infty)) = 0$ である．同様にして，$\mu(E(f = -\infty)) = 0$ も証明できる．

定義 2.4. 各 $x \in E$ に対して命題 $P(x)$ が与えらえているとする．零集合 N が存在して，すべての $x \in E \setminus N$ に対して命題 $P(x)$ が成り立つとき，$P(x)$ **は，ほとんどいたるところで成り立つ，** または，**ほとんどすべての** x **に対して命題** $P(x)$ **が成り立つ**といいい，$P(x)$ a.e. $x \in E$ または単に，$P(x)$ a.e. と表す．

より正確には，a.e. は

(1) a.e. $x \in E \implies$ almost every $x \in E$

(2) a.e. in $E \implies$ almost everywhere in E

のように almost every あるいは almost everywhere の省略記号である．尚、確率論では、a.s. (almost surely) $P(x)$ **は，ほとんど確実に成り立つ**を使うことが多い．

例 2.3. (1) 集合 E 上の可測関数 $f(x), g(x)$ に対して，零集合 N が存在して，すべての $x \in E \setminus N$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ **と** $g(x)$ **はほとんどいたるところで等しい**といいい，$f(x) = g(x)$ a.e. と表す．

(2) 集合 E 上の可測関数列 $\{f_n(x)\}$ と可測関数 $f(x)$ に対して，零集合 N が存在して，すべての $x \in E \setminus N$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つとき，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. と表す．

定義 2.5. 集合 E 上の可測関数 $f(x), g(x)$ が，条件

$$\mu(E(f \neq g)) = 0$$

を満たしているとき，$f(x), g(x)$ **はほとんどいたるところで等しい**といいい，$f(x) = g(x)$ a.e. 等と表す．ここで，a.e. は almost everywhere の略記号である．

定理 2.16. 可測関数 $f(x)$ は E 上非負で

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = 0$$

ならば E 上ほとんどいたるところで $f(x) = 0$ である，すなわち，$f(x) = 0$ a.e. $x \in E$.

証明. まず

$$E_n = \left\{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\right\} = E\left(f > \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

とおく．このとき，$\{E_n\}$ は単調増加で，$E_n \subset E$, $n = 1, 2, \ldots,$ を満たす．もしある n に対して $\mu(E_n) > 0$ となったとすると

$$0 = \int_E f(x)\, d\mu(x) \geq \int_{E_n} f(x)\, d\mu(x) \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) > 0$$

となって，矛盾である．

したがって，$\mu(E_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ でなければならない．

一方，

$$E(f>0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f>\frac{1}{n}\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\lim_{n\to\infty}E_n$$

であるから，定理 1.13 の (i) より

$$\mu(E(f>0))=\lim_{n\to\infty}\mu\left(E_n\right)=0.$$

ゆえに，$f(x)=0$ a.e. $x\in E$ が成り立つ.

定理 2.17. 可測関数 $f(x)$ が集合 A, B $(A\cap B=\emptyset)$ 上で積分可能ならば，和集合 $A\cup B$ 上で積分可能であって，

$$\int_{A\cup B}f(x)\,d\mu(x)=\int_A f(x)\,d\mu(x)+\int_B f(x)\,d\mu(x).$$

証明. 定理 2.11 の (ii) より，

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B}f^+(x)\,d\mu(x)&=\int_A f^+(x)\,d\mu(x)+\int_B f^+(x)\,d\mu(x),\\ \int_{A\cup B}f^-(x)\,d\mu(x)&=\int_A f^-(x)\,d\mu(x)+\int_B f^-(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

この 2 つの式の右辺の各項は仮定により有限である．よって，f は $A\cup B$ で積分可能であって，

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B}f(x)\,d\mu(x)&=\int_A f^+(x)\,d\mu(x)+\int_B f^+(x)\,d\mu(x)-\int_A f^-(x)\,d\mu-\int_B f^-(x)\,d\mu(x)\\ &=\int_A f(x)\,d\mu(x)+\int_B f(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

定理 2.18. 可測関数 $f(x)$ が集合 E 上で積分可能ならば，任意の実数 α に対して，スカラー倍 $\alpha f(x)$ も E 上で積分可能であって，

$$\int_E \alpha\, f(x)\,d\mu(x)=\alpha\int_E f(x)\,d\mu(x).$$

証明. 積分の定義より明らか.

定理 2.19. 可測関数 $f(x)$, $g(x)$ が集合 E 上で積分可能ならば，和 $f(x)+g(x)$ も集合 E 上で積分可能であって，

$$\int_E (f(x)+g(x))\,d\mu(x)=\int_E f(x)\,d\mu(x)+\int_E g(x)\,d\mu(x).$$

証明.

$$\begin{aligned}&E_{11}=E(f\geq 0,\ g\geq 0),\quad E_{12}=E(f\geq 0,\ g<0),\\ &E_{21}=E(f<0,\ g\geq 0),\quad E_{22}=E(f<0,\ g<0)\end{aligned}$$

とおくと，これらはそれぞれ互いに素であって，$E=E_{11}\cup E_{12}\cup E_{21}\cup E_{22}$. よって，定理 2.17 より，各 E_{jk} 上で主張を証明すれば良い．各 E_{jk} 上では f, g は一定符号だから，E 上で f, g が一定符号の場合に帰着される．さらに，f, g が同符号ならば，定理 2.11 の (i) より，この定理の主張は従う．$f\geq 0\geq g$ の場合を考える（$f\leq 0\leq g$ の場合も同様である）.

まず，

$$A=E(f+g\geq 0),\quad B=E(f+g<0)$$

とおく．このとき，A において，

$$f = (f+g) + (-g), \quad f+g \geq 0,\ -g \geq 0$$

だから，定理 2.11 の (i) と定理 2.18 より，

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\,d\mu(x) &= \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu(x) + \int_A (-g(x))\,d\mu(x)\\ &= \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu(x) - \int_A g(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

よって，

$$0 \leq \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_A g(x)\,d\mu(x) < \infty.$$

また，B において，

$$-g = f + (-(f+g)), \quad f \geq 0,\ -(f+g) > 0$$

となることを用いると，上と同様にして，

$$0 \geq \int_B (f(x)+g(x))\,d\mu(x) = \int_B f(x)\,d\mu(x) + \int_B g(x)\,d\mu(x) > -\infty.$$

したがって，定理 2.17 より，$f+g$ は $E = A \cup B$ 上で積分可能であって，

$$\begin{aligned}\int_E (f(x)+g(x))\,d\mu(x) &= \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu(x) + \int_B (f(x)+g(x))\,d\mu(x)\\ &= \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_B f(x)\,d\mu(x) + \int_A g(x)\,d\mu(x) + \int_B g(x)\,d\mu(x)\\ &= \int_E f(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

定理 2.20. 集合 E 上の可測関数 $f(x), g(x)$ はほとんどいたるところで等しいとする．このとき，$f(x)$ が集合 E 上で積分可能ならば，$g(x)$ も集合 E 上で積分可能であって，

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E g(x)\,d\mu(x).$$

証明. 仮定より $\mu(E(f \neq g)) = 0$ だから，定理 2.17 と定理 2.14 により，

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,d\mu(x) &= \int_{E(f=g)} f(x)\,d\mu(x) + \int_{E(f\neq g)} f(x)\,d\mu(x) &= \int_{E(f=g)} f(x)\,d\mu(x)\\ &= \int_{E(f=g)} g(x)\,d\mu(x) &= \int_E g(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

最後に，ルベーグ積分の絶対連続性の定理（定理 2.23）を証明する．そのために，2 つの定理を準備する：

定理 2.21. 関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ の部分集合 E 上でルベーグ積分可能とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|\int_E f(x)\,d\mu(x) - \int_E f_\varepsilon(x)\,d\mu(x)\right| \leq \int_E |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,d\mu(x) < \varepsilon$$

を満たし，ある有界集合の外では恒等的に 0 となる $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f_\varepsilon(x)$ が存在する．

証明. 最初の不等式は明らかである．また，

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad (f^+(x) \geq 0,\ f^-(x) \geq 0)$$

だから，$f(x) \geq 0$ と仮定してよい．

$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{if } \ x \in E\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}, \quad |x| < n\right),\ (k = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n) \\ 0 & \text{if } \ x \in E(f \geq n) \cup E(|x| \geq n) \end{cases}$$

とすると，$\{f_n(x)\}$ は E 上の非負単関数の単調増加列で，$f_n \to f$ である．$f_n(x) \leq f(x)$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f(x)\, d\mu(x) - \int_E f_n(x)\, d\mu(x) \right) = 0.$$

よって，n を十分大きくとれば，

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\, d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.10}$$

この n を固定して，$S_n = \{x : |x| < n\}$ とおくと，

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad \alpha_j > 0, \quad E_j \subset S_n$$

と表される．定理 1.15 より，各可測集合 E_j に対して

$$F_j \subset E_j \subset G_j \subset S_n, \quad \mu(G_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}$$

となるような閉集合 F_j と開集合 G_j が存在する．また，これに対して

$$g_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ x \in F_j, \\ 0 & \text{if } \ x \in {G_j}^c \end{cases}$$

となる $\mathbf{R}$ 上で $0 \leq g_j(x) \leq 1$ を満たす連続関数 $g_j(x)$ が存在する．たとえば次のような関数を考えればよい：

$$g_j(x) = \frac{d(x, G_j^c)}{d(x, G_j^c) + d(x, F_j)}.$$

このとき，$x \notin G_j \setminus F_j$ ならば $\chi_{E_j}(x) = g_j(x)$ だから

$$\int_{E_j} |\chi_{E_j}(x) - g_j(x)|\, d\mu(x) \leq \mu(G_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}.$$

よって，

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(x)$$

とすると，f_ε は $\mathbf{R}$ で連続で，$x \notin S_n$ ならば $f_\varepsilon(x) = 0$ を満たし，

$$\int_E |f_n(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \leq \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_E |\chi_{E_j}(x) - g_j(x)|\, d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

ゆえに，(2.10), (2.11) より，

$$\begin{aligned} \int_E |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \quad &\leq \quad \int_E |f(x) - f_n(x)|\, d\mu(x) + \int_E |f_n(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \\ &< \quad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad = \quad \varepsilon. \end{aligned}$$

次の定理は，ルベーグ積分に関する平行移動および反転に関する不変性を主張している：

定理 2.22 (ルベーグ積分の不変性)**.** $\mathbf{R}$ 上の可測関数 $f(x)$ が，定積分

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\,d\mu(x)$$

を持つとする．このとき，任意の $y \in \mathbf{R}$ に対して，関数

$$f(x+y), \quad f(-x)$$

も，x の関数として可測であって，定積分を持つ．

さらに，

$$\int_{\mathbf{R}} f(x+y)\,d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} f(-x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,d\mu(x).$$

証明. $f(x) \geq 0$ の場合を示せばよい．まず，$f(x)$ が単関数

$$f(x) = \sum_j a_j \chi_{E_j}(x)$$

の場合は，

$$f(x+y) = \sum_j a_j \chi_{E_j - y}(x).$$

定理 1.14 より，$f(x+y)$ は x の可測関数であり，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} f(x+y)\,d\mu(x) &= \sum_j a_j \mu(E_j - y) \\
&= \sum_j a_j \mu(E_j) \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x)\,d\mu(x)
\end{aligned}$$

となることが分かる．

$f(x)$ が一般の場合は，$f(x)$ に近づく単関数 $f_n(x)$ の単調増加列をとれば，$f_n(x+y)$ も単関数の単調増加列で，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x+y) = f(x+y).$$

よって，$f(x+y)$ は x の可測関数で，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} f(x+y)\,d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x+y)\,d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

関数 $f(-x)$ についても，同様の議論で示せる．

次の定理は，ルベーグ積分の絶対連続性を主張している：

定理 2.23 (ルベーグ積分の絶対連続性)**.** 関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上でルベーグ積分可能ならば，

$$\lim_{|y|\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f(x)|\,d\mu(x) = 0.$$

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定理 2.21 と定理 2.22 から，

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f_\varepsilon(x+y)|\, d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) < \varepsilon, \quad \forall y \in \mathbf{R} \tag{2.12}$$

となるある有界集合の外で恒等的に 0 となる連続関数 $f_\varepsilon(x)$ が存在する．

次に，$S_n = \{x : |x| < n\}$ とすると，$f_\varepsilon(x)$ に依存して n を十分大きくとり，$|y| < 1$ であれば，

$$\{x : f_\varepsilon(x+y) \neq 0\} \subset S_n \tag{2.13}$$

とできる．関数 $f_\varepsilon(x)$ は有界閉集合 $\overline{S_n} = \{x : |x| \leq n\}$ で連続だから，特に，一様連続である．よって，

$$\lim_{|y|\to 0} \left\{ \sup_{x\in S_n} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \right\} = 0.$$

したがって，

$$\lim_{|y|\to 0} \int_{S_n} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \leq \lim_{|y|\to 0} \left\{ \sup_{x\in S_n} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \right\} \mu(S_n) = 0. \tag{2.14}$$

ところが，(2.12), (2.13) より，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f(x)|\, d\mu(x) \quad &\leq \quad \int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f_\varepsilon(x+y)|\, d\mu(x) + \int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \\
&\qquad + \int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\, d\mu(x) \\
&< \quad \varepsilon + \int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

両辺の極限 $\limsup_{|y|\to 0}$ をとると，(2.14) より，

$$\limsup_{|y|\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f(x)|\, d\mu(x) \leq 2\varepsilon.$$

ゆえに，

$$\lim_{|y|\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f(x)|\, d\mu(x) = 0.$$

3　項別積分等の種々の極限操作

ルベーグ積分では，リーマン積分の場合よりも種々の極限をとる操作において，はるかに作業が簡単かつ明瞭となる．たとえば，連続関数の列 $\{g_n(x)\}$ に対して，その極限関数

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

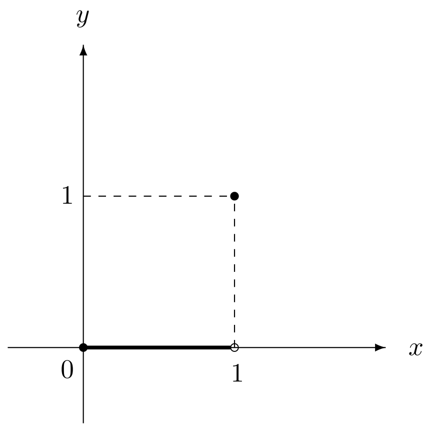
が存在したとしても，連続となるとは限らないが，常にルベーグ可測関数となる．実際，定理 2.5 の帰結として，可測関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し，極限関数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

が存在する場合には，$f(x)$ は可測関数になるからである．

例 3.1. $E=[0,1]$ 上で，関数列 $f_n(x)=x^n$, $n=1,\,2,\,\ldots$, を考える．

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0 & \text{if} \ \ 0\le x<1,\\ 1 & \text{if} \ \ x=1.\end{cases}$$



$f(x)$ は，$[0,1]$ 上で不連続であるが，区間 $[0,1)$ で 0, 一点 $\{1\}$ で 1 という値をとる階段関数で，もちろん可測である．

この節では，集合はすべてルベーグ可測集合族 $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbf{R})$ に属し，関数はすべてルベーグ可測関数とする．

定理 3.1. 集合 E 上で $\{g_n(x)\}$ は非負の単関数列で

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$$

とすると

$$\int_E f(x)\,d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n(x)\,d\mu(x).$$

証明. まず，

$$h_N(x)=g_1(x)+\ldots+g_N(x)$$

とおくと，$h_N(x)$ は非負なる単関数であって，定理 2.8 より，

$$\begin{aligned}\int_E h_N(x)\,d\mu(x) &= \int_E (g_1(x)+\ldots+g_N(x))\,d\mu(x)\\ &= \int_E g_1(x)\,d\mu(x)+\ldots+\int_E g_N(x)\,d\mu(x)\\ &= \sum_{n=1}^{N}\int_E g_n(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

一方，$\{h_N(x)\}$ は非負単関数の単調増加列で，

$$\lim_{N\to\infty}h_N(x)=f(x)$$

だから，積分の定義により

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,d\mu(x) &= \lim_{N\to\infty}\int_E h_N(x)\,d\mu(x)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_E g_n(x)\,d\mu(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E g_n(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

定理 3.2. 集合 E 上で $\{f_n(x)\}$ は非負の可測関数列で

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

とすると

$$\int_E f(x)\,d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x).$$

証明. 各 $f_n(x)$ に対して，定理 2.6 により，非負なる単関数の単調増加列 $\{f_{nm}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ が存在して

$$f_n(x)=\lim_{m\to\infty} f_{nm}(x)$$

となる．

このとき，

$$h_{n1}(x)=f_{n1}(x),\quad h_{nm}(x)=f_{nm}(x)-f_{n,m-1}(x),\quad m=2,3,\ldots,$$

とおくと，$h_{nm}(x)$ は非負な単関数で

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \lim_{k\to\infty} f_{nk}(x) = \lim_{k\to\infty}\sum_{m=1}^{k} h_{nm}(x)\\ &= \sum_{m=1}^{\infty} h_{nm}(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．そこで，

$$\{h_{nm}(x)\}_{\substack{1\le n<\infty\\ 1\le m<\infty}}$$

を一列に並びかえたものを改めて $\{g_1(x), g_2(x), \ldots\}$ とすると，正項級数の足す順序をかえても和は等しいから

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} h_{nm}(x)\\ &= \sum_{N=1}^{\infty} g_N(x)\end{aligned}$$

である．

たがって，定理 3.1 により

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,d\mu(x) &= \sum_{N=1}^{\infty}\int_E g_N(x)\,d\mu(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_E h_{nm}(x)\,d\mu(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E\sum_{m=1}^{\infty} h_{nm}(x)\,d\mu(x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

定理 3.3 (単調収束定理またはベッポ・レヴィの定理)**.** 集合 E 上の可測関数列 $\{f_n(x)\}$ と可測関数 $f(x)$ に対して，

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots, \quad \text{a.e.}$$

であって，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. ならば

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x). \tag{3.1}$$

証明. 定理 2.14 より，零集合は積分の値に影響を与えないので，すべての $x\in E$ に対して，

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots,$$

であって，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ である場合を考えれば十分である．

(a) E の各点で $f_n(x)$ が有限値の場合にまず証明する．この場合

$$g_1(x) = f_1(x), \quad g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

とおくと

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \quad g_k(x) \ge 0$$

だから，定理 3.2 により

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,d\mu(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_E g_k(x)\,d\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E g_k(x)\,d\mu(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_E f_1(x)\,d\mu(x) + \int_E (f_2(x)-f_1(x))\,d\mu(x)\right.\\ &\qquad \left. + \ldots + \int_E (f_n(x)-f_{n-1}(x))\,d\mu(x)\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

(b) 次に，$\mu\left(E(f_n=\infty)\right) > 0$ となる n が存在する場合には，集合 $E\left(f_n=\infty\right)$ 上で $f(x)=\infty$ だから (3.1) は $\infty=\infty$ となって定理は成立する．

したがって，すべての n に対して $\mu(E(f_n=\infty))=0$ とすると，集合

$$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n=\infty)$$

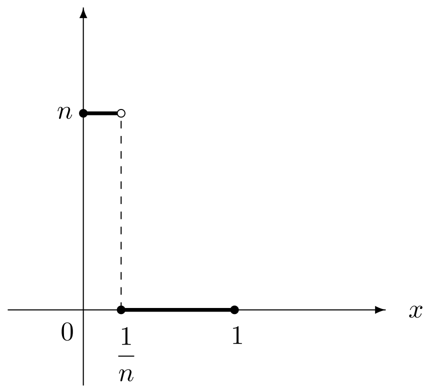
も

$$0 \le \mu(E_0)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n=\infty)\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E(f_n=\infty))=0$$

により，零集合であって，定理 2.14 より，E_0 上で任意の関数の積分は 0 であるから，結局，E の各点で $f_n(x)$ が有限値の場合に帰着される．

例 3.2. 定理 3.3 で $\{f_n(x)\}$ が単調という条件をはずすと，定理の結論は必ずしも成り立たなくなる．その例をあげる．閉区間 $[0,1]$ で

$$f_n(x)=\begin{cases} n & \text{if } 0 \le x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{if } \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$



に対して，極限関数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases} \infty & \text{if } x=0, \\ 0 & \text{if } 0<x\le 1 \end{cases}$$

が存在する．

一方，

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu(x)=1, \quad n=1,2,\ldots, \quad \int_{[0,1]} f(x)\,d\mu(x)=0$$

であって (3.1) は成立しない．

定理 3.4. 関数 $f(x)$ は E 上で定積分を持つとする（積分の値は，有限でなくてもよい）．このとき，

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \cap E_m=\emptyset \ (n \ne m)$$

ならば

$$\int_E f(x)\,d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\,d\mu(x).$$

証明． 前節で述べたように，$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と分けて考えれば $f(x) \geq 0$ の場合だけを証明すればよい．このとき

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in E_n \\ 0 & \text{if } x \in E \setminus E_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

なる関数 $f_n(x)$ も可測で，

$$f_n(x) \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

だから，定理 3.2 によって

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\,d\mu(x).$$

定理 3.5 (ファトゥの補助定理)**.** 集合 E 上の可測関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ がほとんどいたるところ非負ならば

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x). \tag{3.2}$$

証明． 下極限の定義は

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right)$$

であったから，

$$g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

とおくと，仮定から $g_n(x) \geq 0$ a.e. であり，関数列 $\{g_n(x)\}$ は単調増加で E の各点で

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

となる．したがって，単調収束定理（定理 3.3）により

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,d\mu(x) &= \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,d\mu(x) \\ &= \int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

一方，各 n に対して $g_n(x) \leq f_n(x)$ だから

$$\int_E g_n(x)\,d\mu(x) \leq \int_E f_n(x)\,d\mu(x).$$

この両辺の下極限をとると，左辺には極限値が存在するので

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\,d\mu(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x). \tag{3.4}$$

以上，(3.3) と (3.4) から (3.2) を得る．

定理 3.6 (ルベーグの優収束定理)**.** 関数 $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ は集合 E 上で可測であり，E 上で積分可能な関数 $\varphi(x) \geq 0$ が存在して，

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{a.e.} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

とする．このとき

(i) $$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x) \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x),$$

(ii) $$\int_E \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x) \ge \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x).$$

したがって，E 上の可測関数 $f(x)$ が存在し，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ a.e. が成り立つならば，

(iii) $$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x).$$

証明. まず，

$$g(x) = \varliminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad h(x) = \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

とおく．

$$|f_n(x)| \le \varphi(x) \quad \text{a.e.}$$

なる仮定により

$$\varphi(x) + f_n(x) \ge 0 \quad \text{a.e.}, \quad \varphi(x) - f_n(x) \ge \quad \text{a.e.}$$

だから，ファトゥの補助定理（定理 3.5）と

$$\varliminf_{n\to\infty} (-f_n(x)) = -\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) = -h(x)$$

なることを用いて

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E (\varphi(x) + f_n(x))\,d\mu(x) \ge \int_E \varliminf_{n\to\infty} (\varphi(x) + f_n(x))\,d\mu(x) = \int_E (\varphi(x) + g(x))\,d\mu(x),$$
$$\varliminf_{n\to\infty} \int_E (\varphi(x) - f_n(x))\,d\mu(x) \ge \int_E \varliminf_{n\to\infty} (\varphi(x) - f_n(x))\,d\mu(x) = \int_E (\varphi(x) - h(x))\,d\mu(x).$$

すなわち，

$$\int_E \varphi(x)\,d\mu(x) + \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) \ge \int_E \varphi(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x),$$
$$\int_E \varphi(x)\,d\mu(x) - \varlimsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) \ge \int_E \varphi(x)\,d\mu(x) - \int_E h(x)\,d\mu(x).$$

この 2 つの式から，それぞれ (i), (ii) が得られる．

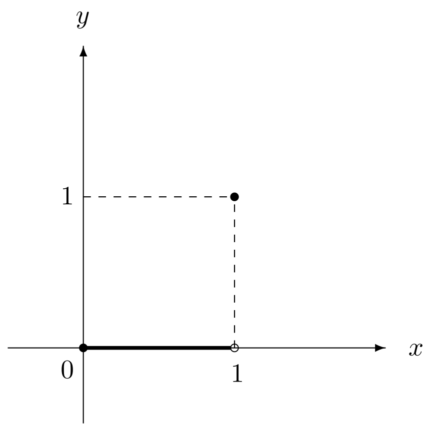
(iii) は (i), (ii) で等号の成り立つ場合として得られる．

例 3.3. 例 3.1 で与えられた関数列 $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, を再び考えてみる．

$$|x^n| \le 1, \quad \forall x \in [0,1]$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{if } x = 1. \end{cases}$$



よって，ルベーグの優収束定理（定理 3.6）より，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} x^n\,d\mu(x) = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} x^n\,d\mu(x) = \mu(\{1\}) = 0.$$

系 3.1 (ルベーグの有界収束定理)**.** $\mu(E) < \infty$ なる集合 E 上の可測関数列 $\{f_n(x)\}$ と可測関数 $f(x)$ に対して，定数 $M > 0$ が存在して E 上ほとんどいたるところで $|f_n(x)| \le M$, $n = 1, 2, \ldots$, であり，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ a.e. が成り立つならば，$f_n(x)$ も $f(x)$ も E 上で積分可能であって

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x).$$

証明. $\varphi(x) \equiv M$ とおくと，$\mu(E) < \infty$ なることにより $\varphi(x)$ は E 上で積分可能である．ゆえに，ルベーグの優収束定理（定理 3.6）から，この系 3.1 を得る．

例 3.4. 関数 $f(x)$ は $\mu(E) < \infty$ なる集合 E 上で可測かつ $|f(x)| \le 1$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f(x)|^n\,d\mu(x) = \mu(\{x \in E : |f(x)| = 1\}) \tag{3.6}$$

である．

実際に，$x \in E(|f| < 1)$ ならば $\lim_{n\to\infty} |f(x)|^n = 0$, $x \in E(|f| = 1)$ ならば $\lim_{n\to\infty} |f(x)|^n = 1$ であるので，有界収束定理（系 3.1）が使えて，(3.6) を得る．

系 3.2. $\mu(E) < \infty$ なる集合 E 上で $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, が積分可能であって，E 上で一様に $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となるならば，極限関数 $f(x)$ も E 上で積分可能であって

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x)$$

が成り立つ．

証明. $\{f_n\}$ が E 上で f に一様収束することから，ある自然数 N が存在して，$n \ge N$ ならばすべての $x \in E$ に対して

$$|f_n(x) - f_N(x)| \le 1.$$

したがって

$$|f_n(x)| \le |f_N(x)| + 1$$

となる．ゆえに，

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|\,d\mu(x) &= \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|\,d\mu(x)\\ &\le \int_E |f_N(x)|\,d\mu(x) + \mu(E)\end{aligned}$$

より $f(x)$ は E 上積分可能である．

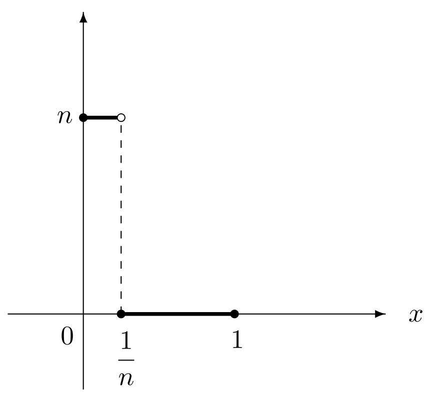
また，$\varphi(x) = |f_N(x)| + 1$ とおいて，$\{f_n(x) : n \ge N\}$ にルベーグの優収束定理（定理 3.6）を適用することによって，

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x)$$

も分かる．

注意 3.1. 定理 3.6 において (3.5) を満たすような積分可能な関数 $\varphi(x)$ が存在するという仮定を除くことはできない．例 3.2 で与えられた関数列

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{if } 0 \le x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{if } \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$



を再び考えてみる．すでに示したように，この $f_n(x)$ に対して，

$$\int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x) \ne \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu(x).$$

この $\{f_n(x)\}$ に対して条件 (3.5) を満たす可積分関数 $\varphi(x)$ は存在しない． 実際に，可測関数 $\varphi(x)$ が

$$f_n(x) \le \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1,\ n = 1, 2, \ldots,$$

を満たすならば，

$$\varphi(x) \ge n, \quad \frac{1}{n+1} \le x < \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots,$$

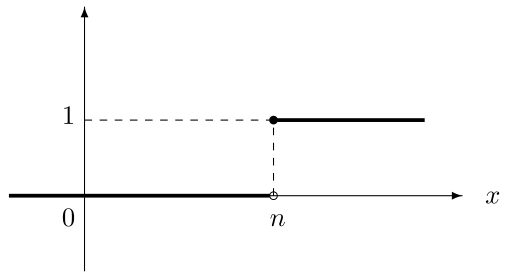
だから

$$\int_{[0,1]} \varphi(x)\,d\mu(x) \ge \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

となる．したがって，$\varphi(x)$ は可積分ではない．

注意 3.2. 系 3.1 で，一般に $\mu(E) < \infty$ なる条件を除くことはできない．たとえば

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \ \ n \le x < \infty, \\ 0 & \text{if} \ \ -\infty < x < n, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$



という関数列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると

$$\begin{aligned} &0 \le g_n(x) \le 1, \quad && n = 1, 2, \ldots, \\ &\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0, \quad && -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{gathered} \int_{\mathbf{R}} g_n(x)\, d\mu(x) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x)\, d\mu(x) = \infty, \\ \int_{\mathbf{R}} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} 0 \ \ d\mu(x) = 0. \end{gathered}$$

次の定理は，積分記号下での微分法を保証する結果である：

定理 3.7 (積分記号下での微分定理)**.** 関数 $f(x, \alpha)$, $(x, \alpha) \in E \times (a, b)$, は x の関数として，E 上で積分可能，α の関数としては，(a, b) で微分可能とする．さらに，E 上で積分可能な関数 $\varphi(x)$ が存在して

$$\left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \right| \le \varphi(x), \quad (x, \alpha) \in E \times (a, b)$$

とすると，積分 $\int_E f(x, \alpha)\, d\mu(x)$ は α の関数として (a, b) で微分可能であって，

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\int_E f(x, \alpha)\, d\mu(x) \right) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, d\mu(x) \tag{3.7}$$

が成り立つ．

証明. まず，任意の $\alpha_0 \in (a, b)$ に対して，仮定により

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) \tag{3.8}$$

だから

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) = f_\alpha(x, \alpha_0)$$

は可測関数の極限関数として可測である．

また，微分法の平均値の定理により，適当な $\delta > 0$ をとれば，$0 < |h| < \delta$ なる限り

$$\frac{f(x, \alpha_0 + h) - f(x, \alpha_0)}{h} = f_\alpha(x, \alpha_0 + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

ここで，θ は x, α_0, h に関係するが $0<\theta<1$ であるから，仮定により

$$\left|\frac{f(x,\alpha_0+h)-f(x,\alpha_0)}{h}\right| \le \varphi(x). \tag{3.9}$$

(3.8) と (3.9) によりルベーグの優収束定理（定理 3.6）が適用でき

$$\lim_{h\to 0}\int_E \frac{f(x,\alpha_0+h)-f(x,\alpha_0)}{h}\,d\mu(x) = \int_E f_\alpha(x,\alpha_0)\,d\mu(x).$$

ところで，$\alpha_0 \in (a,b)$ は任意であったから，微分

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_E f(x,\alpha)\,d\mu(x)\right)$$

が存在して，(3.7) が成り立つ．

例 3.5 (リーマン・ルベーグの定理)．可測関数 $f(x)$ が $-\infty<x<\infty$ でルベーグ可積分，すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,d\mu(x) < \infty$$

ならば，関数（フーリエ変換）

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,d\mu(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x) f(x)\,d\mu(x) + i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda x) f(x)\,d\mu(x)\end{aligned}$$

は $-\infty<\lambda<\infty$ において有界かつ連続である．さらに

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \varphi(\lambda) = 0$$

が成り立つ．

証明． (1) まず，

$$\begin{aligned}|\varphi(\lambda)| &\le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x} f(x)|\,d\mu(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}||f(x)|\,d\mu(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,d\mu(x)\end{aligned}$$

が成り立つので，関数 $\varphi(\lambda)$ は有界である．

(2) 次に，関数 $\varphi(\lambda)$ の連続性を示す．任意に λ を固定して，

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda+h) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda x} - e^{i(\lambda+h)x}\right) f(x)\,d\mu(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\left(1-e^{ihx}\right) f(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

任意の $x\in\mathbf{R}$ に対して，$h\to 0$ のとき $1-e^{ihx}\to 0$ であり，

$$|e^{i\lambda x}\left(1-e^{ihx}\right) f(x)| \le 2|f(x)|$$

であるから，ルベーグの優収束定理（定理 3.6）を適用できて，

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)-\lim_{h\to 0}\varphi(\lambda+h) &= \lim_{h\to 0}(\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda+h)) \\ &= \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}(1-e^{ihx})f(x)\,d\mu(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0} e^{i\lambda x}(1-e^{ihx})f(x)\,d\mu(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって，

$$\varphi(\lambda)=\lim_{h\to 0}\varphi(\lambda+h)$$

となり，$\varphi(\lambda)$ は $\mathbf{R}$ 全体で連続である．

(3) より詳しく，関数 $\varphi(\lambda)$ の一様連続性を示す．そのために，定理 2.21 を使う．任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\,d\mu(x)<\varepsilon$$

を満たし，ある有界閉区間 $[-R,R]$ の外では恒等的に 0 となる $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f_\varepsilon(x)$ が存在する．そこで，

$$\psi(\lambda):=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}f_\varepsilon(x)\,d\mu(x)=\int_{-R}^{R}e^{i\lambda x}f_\varepsilon(x)\,d\mu(x)$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}|\varphi(\lambda)-\psi(\lambda)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}(f(x)-f_\varepsilon(x))\,d\mu(x)\right| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\,d\mu(x) \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

一方，

$$|\psi(\lambda)-\psi(\eta)|=\left|\int_{-R}^{R}f_\varepsilon(x)\left(e^{i\lambda x}-e^{i\eta x}\right)d\mu(x)\right|$$

であって，

$$e^{i\lambda x}-e^{i\eta x}=e^{i\lambda x}\left(1-e^{i(\eta-\lambda)x}\right).$$

ところで，

$$\left|e^{ia}-1\right|\le|a|,\quad \forall a\in\mathbf{R}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}|\psi(\lambda)-\psi(\eta)| &= \left|\int_{-R}^{R}f_\varepsilon(x)\left(e^{i\lambda x}-e^{i\eta x}\right)d\mu(x)\right| \\ &\le \int_{-R}^{R}|f_\varepsilon(x)|\left|e^{i\lambda x}-e^{i\eta x}\right|d\mu(x) \\ &\le \int_{-R}^{R}|f_\varepsilon(x)||(\lambda-\eta)x|\,d\mu(x) \\ &\le R\,|\lambda-\eta|\int_{-R}^{R}|f_\varepsilon(x)|\,d\mu(x)\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
|\varphi(\lambda)-\varphi(\eta)| &\leq |\varphi(\lambda)-\psi(\lambda)|+|\psi(\lambda)-\psi(\eta)|+|\psi(\eta)-\varphi(\eta)| \\
&< 2\varepsilon+R\,|\lambda-\eta|\int_{-R}^{R}|f_\varepsilon(x)|\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

これより，

$$\varlimsup_{|\lambda-\eta|\to 0}|\varphi(\lambda)-\varphi(\eta)|\leq 2\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ は任意だから，関数 $\varphi(\lambda)$ の一様連続性が従う．

(4) 関数 $f_\varepsilon(x)$ は一様連続だから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が存在して，

$$|x|,|y|\leq R,\quad |x-y|<\delta \implies |f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(y)|<\varepsilon.$$

そこで，閉区間 $[-R,R]$ を次のように n 等分する：

$$x_0=-R,\quad x_n=R,\quad x_h-x_{h-1}<\delta.$$

このとき，定理 2.12 より，有界閉区間上の連続関数のルベーグ積分とリーマン積分の値は等しいことに注意すると，

$$\begin{aligned}
|\psi(\lambda)| &= \left|\int_{-R}^{R}e^{i\lambda x}f_\varepsilon(x)\,d\mu(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x_k))e^{i\lambda x}\,d\mu(x)\right. \\
&\qquad \left.+\sum_{k=1}^{n}f_\varepsilon(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{i\lambda x}\,d\mu(x)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x_k)|\,d\mu(x) \\
&\qquad +\sum_{k=1}^{n}|f_\varepsilon(x_k)|\left|\frac{1}{i\lambda}\left(e^{i\lambda x_k}-e^{i\lambda x_{k-1}}\right)\right| \\
&< 2R\varepsilon+\frac{2}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{n}|f_\varepsilon(x_k)|.
\end{aligned}$$

これより，

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}|\psi(\lambda)|\leq 2R\varepsilon.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{|\lambda|\to\infty}|\varphi(\lambda)| &\leq \limsup_{|\lambda|\to\infty}(|\varphi(\lambda)-\psi(\lambda)|)+\lim_{|\lambda|\to\infty}|\psi(\lambda)| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\,d\mu(x)+\lim_{|\lambda|\to\infty}|\psi(\lambda)| \\
&< \varepsilon+\lim_{|\lambda|\to\infty}|\psi(\lambda)| \\
&\leq (2R+1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

ところで，$\varepsilon>0$ は任意だから，

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\varphi(\lambda)=0.$$

4　n 次元ルベーグ積分

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ におけるルベーグ積分は，1 次元の場合と同じ手順で定義される．この節では，このことを簡潔に説明する．

まず，$\mathbf{R}^n$ において，

$$I = \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k] = \{(x_1, \ldots, x_n) : a_k < x_k \leq b_k,\ k = 1, \ldots, n\}$$

の形の集合を（n 次元の）**区間**と呼ぶ．ここで，$-\infty \leq a_k < b_k \leq \infty$, $k = 1, \ldots, n$ とする．$\mathbf{R}$ の場合と同様に，空集合 $\emptyset$ も区間と考える．$\mathbf{R}^n$ における区間全体からなる集合を $\mathcal{I}_n$ と書く．任意の区間 $I \in \mathcal{I}_n$ に対して，その体積を

$$|I| = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

と定義する．また，$|\emptyset| = 0$ と定める．

このとき，1 次元の場合と同じ手順で，ルベーグ外測度 μ^*, ルベーグ可測集合族 $\mathcal{M}$, ルベーグ測度 μ, 可測関数，ルベーグ積分が定義される．そして，集合 $\mathbf{R}^n$，完全加法族 $\mathcal{M}$，ルベーグ測度 μ を組み合せたものを n 次元ルベーグ測度空間と呼び，$(\mathbf{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ と書く．

5　n 次元ルベーグ積分論のまとめ

5.1　準備

以下，集合および関数は，すべてルベーグ可測であるとする．

まず，予備的な結果を述べる：

主張 5.1. (i) $f(x)$, $g(x)$ が集合 A 上で定義された非負値単関数ならば，

$$\int_A (f+g)\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu.$$

(ii) $f(x)$ が集合 A 上で定義された非負値単関数であって，$B + C \subset A$ ならば，

$$\int_{B+C} f\, d\mu = \int_B f\, d\mu + \int_C f\, d\mu.$$

主張 59.1 で極限移行することによって，

主張 5.2. (i) $f(x)$, $g(x)$ が集合 A 上で定義された非負値関数ならば，

$$\int_A (f+g)\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_A g\, d\mu.$$

(ii) $f(x)$ が集合 A 上で定義された非負値関数であって，$B + C \subset A$ ならば，

$$\int_{B+C} f\, d\mu = \int_B f\, d\mu + \int_C f\, d\mu.$$

5.2　ルベーグ積分の基本的性質

以下，ルベーグ積分の基本的な性質を列挙する：

定理 5.1 (性質 [I]).] $f(x)$ が集合 A 上で積分可能であることと $|f(x)|$ が集合 A 上で積分可能であることは同値である．

このとき，

$$\left|\int_A f\,d\mu\right| \leq \int_A |f|\,d\mu.$$

定理 5.2 (性質 [II]).] $\mu(A) = 0$ ならば，任意の関数 $f(x)$ は集合 A 上で積分可能であって，

$$\int_A f\,d\mu = 0.$$

定理 5.3 (性質 [III]).] $f(x)$ が集合 A 上で積分可能ならば，

$$\mu\left(A(f = +\infty)\right) = \mu\left(A(f = -\infty)\right) = 0.$$

定理 5.4 (性質 [IV]).] $f(x)$ が集合 B, C 上で積分可能ならば，和集合 $A = B + C$ 上で積分可能であって，

$$\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu + \int_C f\,d\mu.$$

定理 5.5 (性質 [V]).] $f(x)$ が集合 A 上で積分可能ならば，任意の実数 α に対して，スカラー倍 $\alpha f(x)$ も A 上で積分可能であって，

$$\int_A \alpha\, f\,d\mu = \alpha \int_A f\,d\mu.$$

定理 5.6 (性質 [VI]).] $f(x), g(x)$ が集合 A 上で積分可能ならば，和 $f(x) + g(x)$ も集合 A 上で積分可能であって，

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu.$$

定理 5.7 (性質 [VII]).] 集合 A 上の関数 $f(x), g(x)$ が，条件

$$\mu\left(A(f \neq g)\right) = 0$$

をみたしているとする．このとき，$f(x)$ が集合 A 上で積分可能ならば，$g(x)$ も集合 A 上で積分可能であって，

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu.$$

5.3　ルベーグ積分の不変性

最後に，ルベーグ積分に特有な平行移動および反転に関する不変性について述べる：

定理 5.8. ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $f(x)$ が，定積分

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,d\mu$$

を持つとする．このとき，任意のベクトル $y \in \mathbf{R}^n$ に対して，関数

$$f(x+y), \quad f(-x)$$

も，x の関数として可測であって，定積分を持つ．

さらに，

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\,d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f(-x)\,d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,d\mu.$$

6　ルベーグ積分の絶対連続性

今後は，伝統的な次の積分記号を使う：

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f(x)\,d\mu.$$

ここでは，ルベーグ積分の絶対連続性をあげる．まず，定理を 2 つあげる．

定理 6.1. $f(x)$ を $\mathbf{R}^n$ の部分集合 E 上で ルベーグ 積分可能な関数とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|\int_E f(x)\,dx - \int_E f_\varepsilon(x)\,dx\right| \le \int_E |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon$$

となるようなある有界集合の外では恒等的に 0 となる $\mathbf{R}^n$ 上の連続関数 f_ε が存在する．

証明. 最初の不等式は明らか．もし，$-\infty \le f(x) \le \infty$ ならば，

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

とおいて，

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad (f_+(x) \ge 0, f_-(x) \ge 0)$$

となるので，$f \ge 0$ としてもよい．

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & x \in E\left(\frac{k-1}{2^n} \le f < \frac{k}{2^n}, \quad |x| < n\right), \\ 0 & x \in E(f \ge n) \cup E(|x| \ge n) \end{cases}$$

とすると，$\{f_n(x)\}$ は E 上の単関数列で，$f_n \uparrow f$ である．$f_n(x) \le f(x)$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f(x)\,dx - \int_E f_n(x)\,dx\right) = 0.$$

よって，

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.1}$$

とする．この n を固定して，$S_n = \{x : |x| < n\}$ とおくと，

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \chi_{E_j}, \quad \alpha_j > 0, \quad E_j \subset S_n$$

と表される．ここで，各 E_j に対して，

$$F_j \subset E_j \subset G_j \subset S_n, \quad \mu(G_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}$$

となるような閉集合 F_j と開集合 G_j が存在する．また，これに対して，

$$g_j(x) = \begin{cases} 1 & x \in F_j, \\ 0 & x \in {G_j}^c \end{cases}$$

となる $\mathbf{R}^n$ 上で $0 \le g_j(x) \le 1$ なる連続関数 $g_j(x)$ が存在する．このとき，$x \notin G_j - F_j$ ならば $\chi_{E_j} = g_j$ だから，

$$\int_{E_j} |\chi_{E_j}(x) - g_j(x)|\, dx \le \mu(G_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}.$$

よって，$f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(x)$ とすると，f_ε は $\mathbf{R}^n$ で連続で，$x \notin S_n$ ならば $f_\varepsilon(x) = 0$ で，

$$\int_E |f_n(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx \le \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_E |\chi_{E_j}(x) - g_j(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2}$$

ゆえに，(6.1)，(6.2)より，

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx &\le \int_E |f(x) - f_n(x)|\, dx + \int_E |f_n(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

次の定理は，ルベーグ積分の平行移動および反転に関する不変性を主張している：

定理 6.2 (ルベーグ積分の不変性)**.** $f(x)$ を $\mathbf{R}^n$ 上 ルベーグ 可測関数で，$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx$ をもつならば，任意の $y \in \mathbf{R}^n$ に対して $f(x+y)$，$f(-x)$ も x の関数として ルベーグ 可測で，

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(-x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx.$$

証明. $f \ge 0$ の場合を示せばよい．
$f(x) = \sum_j a_j \chi_{E_j}(x)$: 単関数の場合，$f(x+y) = \sum_j a_j \chi_{E_j - y}(x)$ だから，$f(x+y)$ は x の関数で，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\, dx &= \sum_j a_j \mu(E_j - y) \\
&= \sum_j a_j \mu(E_j) \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

一般の $f(x)$ の場合，$f(x)$ に近づく単関数 $f_n(x)$ の単調増加列をとれば，$f_n(x+y)$ も単関数の単調増加列で，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x+y) = f(x+y).$$

よって，$f(x+y)$ は x の可測関数で，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} f(x+y)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_n(x+y)\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_n(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

$f(-x)$ についても同様の議論で示せる．

次の定理は ルベーグ積分の絶対連続性を主張している：

定理 6.3 (ルベーグ積分の絶対連続性). $f(x)$ が $\mathbf{R}^n$ 上で ルベーグ 積分可能ならば，

$$\lim_{|y|\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f(x)|\,dx=0.$$

証明. 任意の $\varepsilon>0$ に対して，前の 2 つの定理から，

$$\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f_\varepsilon(x+y)|\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx<\varepsilon,\quad \forall y\in\mathbf{R}^n \tag{6.3}$$

となるある有界集合の外で恒等的に 0 となる連続関数 $f_\varepsilon(x)$ が存在する．$S_n=\{x:|x|<n\}$ とすると，f_ε に関係して n を十分大きくとり，$|y|<1$ であれば，

$$\{x:f_\varepsilon(x+y)\neq 0\}\subset S_n \tag{6.4}$$

とできる．$f_\varepsilon(x)$ は有界閉集合 $\overline{S_n}$ で連続である．したがって，一様連続だから，

$$\lim_{|y|\to 0}\left\{\sup_{x\in S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\right\}=0.$$

よって，

$$\lim_{|y|\to 0}\int_{S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\,dx\le\lim_{|y|\to 0}\left\{\sup_{x\in S_n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\right\}\mu(S_n)=0. \tag{6.5}$$

ところが，(6.3)，(6.4)より，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f(x)|\,dx\ &\le\ \int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f_\varepsilon(x+y)|\,dx+\int_{\mathbf{R}^n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\,dx\\&\quad+\int_{\mathbf{R}^n}|f_\varepsilon(x)-f(x)|\,dx\\&<\ \varepsilon+\int_{\mathbf{R}^n}|f_\varepsilon(x+y)-f_\varepsilon(x)|\,dx+\varepsilon.\end{aligned}$$

両辺 $\overline{\lim_{|y|\to 0}}$ をとると，(6.5)より，

$$\overline{\lim_{|y|\to 0}}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f(x)|\,dx<2\varepsilon.$$

ゆえに，

$$\lim_{|y|\to 0}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x+y)-f(x)|\,dx=0.$$

7 フビニの定理

$(X,\mathcal{M})$ および $(Y,\mathcal{N})$ を可測空間とする．また，$A\in\mathcal{M}$ および $B\in\mathcal{N}$ に対して，長方形 $A\times B$ をすべて含むような $X\times Y$ の最小の σ–加法族を $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ とする．このとき，$\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ を $X\times Y$ 上の積 σ–加法族といい，$(X\times Y,\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$ は可測空間である．

測度空間の積に対して，次の定理が成り立つことが知られている ([9, Section 2.5])：

定理 7.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ および $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ を共に σ–有限な可測空間とする．このとき，

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{for } A \in \mathcal{M} \text{ and } B \in \mathcal{N}.$$

となるような $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ 上の σ–有限な非負測度 λ がただ 1 つ存在する．

測度 λ を μ と ν との積測度といい，以下では，$\mu \times \nu$ と表す．

積空間上の積分について考察する．$(X, \mathcal{M}, \mu)$ および $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ を共に σ–有限な可測空間，$\mu \times \nu$ を積 σ–加法族 $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ 上の μ と ν の積測度とする．

まず， E を $X \times Y$ の部分集合とする．X の中の任意の点 x に対して，

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

と E の x-切片集合 E_x を定義する．同様に， Y の中の任意の点 y に対して，

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

と E の y-切片集合 E^y を定義する．

例えば， $A \subset X$ および $B \subset Y$ に対して，$E = A \times B$ の場合は，切片集合は，それぞれ

$$\begin{aligned} E_x &= B, \\ E^y &= A \end{aligned}$$

となる．

次に，$f(x, y)$ を $X \times Y$ 上で定義された関数とする．X の中の任意の点 x に対して，x-切片集合 E_x 上の関数

$$f_x(y) = f(x, y) \quad \text{for } y \in E_x$$

として f の x-切片関数 f_x を定義する．同様にして，Y の中の任意の点 y に対して，y-切片集合 E^y 上の関数

$$f^y(x) = f(x, y) \quad \text{for } x \in E^y.$$

として f の y-切片関数 f^y を定義する．

例えば， $A \subset X$ および $B \subset Y$ に対して，$E = A \times B$ の場合は，切片関数は，それぞれ

$$\begin{aligned} (\chi_E)_x(y) &= \chi_{E_x}(y) = \chi_B(y) \quad \text{for } y \in Y, \\ (\chi_E)^y(x) &= \chi_{E^y}(x) = \chi_A(x) \quad \text{for } x \in X \end{aligned}$$

となる．

直積集合 $X \times Y$ 上で定義された関数関数 $f(x, y)$ が $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$–可測であって，その積分が存在する場合，慣習上，

$$\iint_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y)$$

と書く．この積分は，関数 $f(x, y)$ の**重積分**と呼ばれる．これは，(x, y) 変数について，一挙に積分を実行したものである．

一方、y 変数について積分した関数

$$g(x) = \int_Y f(x, y)\, d\nu(y), \quad x \in X$$

が定義され，さらに，x 変数についての積分が存在すれば，積分 $\int_X g\,d\mu$ を，次の記号のどれかで表す：

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x), \quad \int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)\,d\nu(y),$$
$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x), \quad \iint_{X\times Y} f(x,y)\,d\nu\,d\mu.$$

同様に，積分する順序を入れ替えた積分を

$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y), \quad \int_Y d\nu(y)\int_X f(x,y)\,d\mu(x),$$
$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y), \quad \iint_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\,d\nu$$

と表す．これらの積分は，関数 $f(x,y)$ の**累次積分**と呼ばれる．

次の定理は，一挙に積分した重積分と順番に積分した累次積分の間の最も重要な関係式を記述している：

定理 7.2 (フビニ (Fubini) の定理)**.** (i) 関数 $f(x,y)$ が $\mu\times\nu$–積分可能ならば，$f_x(y)=f(x,y)$, $y\in Y$ で定義される切片関数 $f_x(y)$ は，μ 測度についてほとんどすべての $x\in X$ に関して，ν–積分可能である．同様に，$f^y(x)=f(x,y)$, $x\in X$ で定義される切片関数 $f^y(x)$ は，ν 測度についてほとんどすべての $y\in Y$ に関して，μ–積分可能である．さらに，関数

$$g(x)=\int_Y f_x(y)\,d\nu(y)=\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$$

は，μ 測度についてほとんどすべての $x\in X$ に関して，μ–積分可能である．同様に，関数

$$h(y)=\int_X f^y(x)\,d\mu(x)=\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$$

は，ν 測度についてほとんどすべての $y\in Y$ に関して，ν–積分可能である．このとき，等式

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times\nu)=\int_X g(x)\,d\mu=\int_Y h(y)\,d\nu$$

が成り立つ．

(ii) 逆に，関数 $f(x,y)$ が $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$–可測ならば，関数

$$\varphi(x)=\int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y), \quad x\in X,$$
$$\psi(y)=\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x), \quad y\in Y$$

は，それぞれ，$\mathcal{M}$–可測，$\mathcal{N}$–可測であって，

$$\iint_{X\times Y} |f(x,y)|\,d(\mu\times\nu)=\int_X \varphi(x)\,d\mu=\int_Y \psi(y)\,d\nu$$

が成り立つ．さらに，関数 $\varphi(x)$ が μ–積分可能あるいは関数 $\psi(y)$ が ν–積分可能ならば，関数 $f(x,y)$ は $\mu\times\nu$–積分可能であって，前半の (i) の主張が成り立つ．

8　ルベーグ空間

$(\mathbf{R}^n,\mathcal{M},\mu)$ を n 次元ルベーグ測度空間とする．$\mathbf{R}^n$ で定義された複素数値関数 $f(x)$ がルベーグ可測であるとは，

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x), \quad f_1(x)=\operatorname{Re}f(x),\ f_2(x)=\operatorname{Im}f(x),$$

と表したとき，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ が，それぞれ可測関数となる場合をいう．

以下，特に断らない限り，関数は $\mathbf{R}^n$ 上で定義された複素数値関数とし，関数 $f(x)$ の集合 $E \in \mathcal{M}$ 上でのルベーグ測度による積分を

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f_1(x)\,dx + i\int_E f_2(x)\,dx$$
$$f_1(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

と定義して，上記のように $d\mu(x)$ の代わりに，μ を省略して dx と書くことにする．さらに，$E = \mathbf{R}^n$ のときは，ルベーグ積分を，単に $\displaystyle\int f(x)\,dx$ と書くことにする．

定義 8.1. $1 \le p < \infty$ とする．$\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $f(x)$ で

$$\int |f(x)|^p\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p\,dx < \infty$$

となるもの全体を $L^p(\mathbf{R}^n)$ または単に L^p と書く．ただし，$f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^n$ となる f と g は同一視するものとする．

$f \in L^p$ に対して

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

を $f(x)$ の L^p–**ノルム**という．

同様にして，$\mathbf{R}^n$ のルベーグ可測な部分集合 E に対して $L^p(E)$ が定義される．

定義 8.2. $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $f(x)$ で，測度 0 の集合を除いて有界（これを**本質的に有界**という）となるもの全体を $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ または単に L^∞ と書く．ただし，$f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^n$ となる f と g は同一視する．$f \in L^\infty$ に対して

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = \inf\{K : |f(x)| \le K \text{ a.e. } x \in \mathbf{R}^n\}$$

を $f(x)$ の L^∞–**ノルム**という．

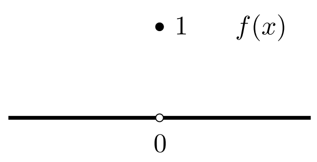
また，$\|f\|_\infty$ を

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}^n} |f(x)|$$

(ess sup = essential supremum) とも表す．

同様にして，$\mathbf{R}^n$ のルベーグ可測な部分集合 E に対して $L^\infty(E)$ が定義される．

例 8.1. 次のような関数を考える．



このとき

$$\begin{cases} \sup f(x) = 1 \\ \operatorname{ess\,sup} f(x) = 0 \end{cases}$$

となり，sup と ess sup との違いが分かる．

定理 8.1 (シュワルツの不等式)**.** $f,\, g \in L^2$ ならば，

$$\left|\int f(x)\overline{g(x)}\,dx\right|^2 \le \int |f(x)|^2\,dx \cdot \int |g(x)|^2\,dx. \tag{8.1}$$

証明. $f,\, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ とする．まず，

$$(|f(x)| - |g(x)|)^2 \ge 0$$

だから，不等式

$$2|f(x)\overline{g(x)}| \le |f(x)|^2 + |g(x)|^2$$

が従い，積分

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

の存在が分かる．

次に，$f,\, g \in L^2$ に対して

$$(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx \tag{8.2}$$

とおく．このとき $\|f\|_2$ を単に $\|f\|$ と書けば，シュワルツの不等式 (8.1) は

$$|(f,g)|^2 \le \|f\|^2\|g\|^2 \tag{8.3}$$

となる．$f(x)=0$ a.e. のとき (8.3) は明らかに成り立つ．$f(x)=0$ a.e. でないとすると $\|f\|>0$ である．任意の複素数 α に対して

$$\begin{aligned}(\alpha f - g, \alpha f - g) &= \int (\alpha f(x) - g(x))\overline{(\alpha f(x) - g(x))}\,dx \\ &= \int |\alpha f(x) - g(x)|^2\,dx \\ &= \|\alpha f - g\|^2 \quad \ge \quad 0.\end{aligned}$$

この左辺を $(\cdot,\cdot)$ の定義 (8.2) に従って書き直すと

$$|\alpha|^2\|f\|^2 - \alpha(f,g) - \overline{\alpha}(g,f) + \|g\|^2 \ge 0.$$

ここで，$\alpha = (g,f)/\|f\|^2$ とおけば

$$\frac{|(g,f)|^2}{\|f\|^2} - \frac{(g,f)(f,g)}{\|f\|^2} - \frac{\overline{(g,f)}(g,f)}{\|f\|^2} + \|g\|^2 \ge 0.$$

(8.2) により，$(g,f) = \overline{(f,g)}$ だから，これを上式に代入して両辺に $\|f\|^2$ をかけることにより (8.3) が得られる．

定理 8.2 (ヘルダーの不等式とミンコウスキーの不等式)**.** $1 \le p, q \le \infty$ は $1/p + 1/q = 1$ をみたすとする．ただし，$1/\infty = 0$. このとき，任意の $f \in L^p$, $g \in L^q$ に対して，

$$\left|\int f(x)g(x)\,dx\right| \le \|f\|_p\|g\|_q \tag{8.4}$$

が成り立つ．これを**ヘルダーの不等式**という．$p=2$ のときシュワルツの不等式 (8.1) となる．

また，$1 \le p \le \infty$ のとき，任意の $f,\, g \in L^p$ に対して，

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \tag{8.5}$$

が成り立つ．これを**ミンコウスキーの不等式**という．

証明． $p=1, \infty$ のとき，不等式 (8.4), (8.5) が成り立つのは明らかなので，$1<p<\infty$ の場合だけを証明する．

準備として，$1<p<\infty$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明する：任意の実数 $\alpha, \beta \geq 0$ に対して

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{8.6}$$

(a) $\alpha=0$ または $\beta=0$ のときは明らか．

(b) $\alpha>0, \beta>0$ の場合を証明する．(8.6) の両辺を β^q で割ると

$$\alpha\beta^{1-q} \leq \frac{1}{p}\alpha^p\beta^{-q} + \frac{1}{q}$$

となる．$p=q/(q-1)$ より

$$(\alpha\beta^{1-q})^p = \alpha^p\beta^{p(1-q)} = \alpha^p\beta^{-q}$$

が成り立つことに注意して $\lambda=\alpha\beta^{1-q}$ とおくと，不等式

$$\lambda \leq \frac{1}{p}\lambda^p + \frac{1}{q}, \quad \lambda>0$$

を示すことに帰着される．

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{p}\lambda^p + \frac{1}{q} - \lambda$$

とおくと，$\varphi'(\lambda)=\lambda^{p-1}-1$ より，$0<\lambda<1$ のとき，$\varphi'(\lambda)<0$. $\lambda=1$ のとき，$\varphi'(\lambda)=0$. $\lambda>1$ のとき，$\varphi'(\lambda)>0$. ゆえに，$\varphi(\lambda)$ は $\lambda=1$ のとき最小値 0 をとるので，上記の不等式は成り立つ．

(8.4) の証明： $\|f\|_p=0$ または $\|g\|_q=0$ ならば

$$f(x)g(x)=0 \text{ a.e.}$$

であるから (8.4) は成り立つ．

よって，$\|f\|_p>0, \|g\|_q>0$ とすると，(8.6) において $\alpha\geq 0, \beta\geq 0$ は任意であったから

$$\alpha = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad \beta = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

とおいて，両辺を $\mathbf{R}^n$ で積分すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |f(x)g(x)|\,dx &\leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int |g(x)|^q\,dx \\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

したがって，

$$\left|\int f(x)g(x)\,dx\right| \leq \int |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

を得て，これは，(8.4) にほかならない．

(8.5) の証明：

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)|$$

だから，$f(x)\geq 0, g(x)\geq 0$ の場合を証明すれば十分である．

不等式

$$(f(x)+g(x))^p \le (2\max\{f(x),g(x)\})^p \le 2^p(f(x)^p+g(x)^p), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

により

$$\int (f(x)+g(x))^p\,dx < \infty$$

であることに注意する．

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))^p\,dx &= \int (f(x)+g(x))^{p-1}f(x)\,dx \\ &\quad + \int (f(x)+g(x))^{p-1}g(x)\,dx\end{aligned}$$

と書けるので，ここで，

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

なる $q\ (=p/(p-1))$ をとり右辺の各項にヘルダーの不等式 (8.4) を適用すると，

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))^p\,dx &\le \left(\int (f(x)+g(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int f(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int (f(x)+g(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int g(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int (f(x)+g(x))^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}(\|f\|_p+\|g\|_p).\end{aligned}$$

これから

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p,$$

すなわち，(8.5) を得る．

注意 8.1. 次節の定理 9.1 で示すように，空間 L^p $(1 \le p \le \infty)$ は L^p–ノルムをノルムとして，完備となる。すなわち，L^p はバナッハ空間となる．バナッハ空間の定義については，第 II 部 を参照．

9 ルベーグ空間の完備性

定理 9.1 (リース・フィッシャーの定理)**.** 関数空間 L^p $(1 \le p < \infty)$ はノルム $\|\cdot\|_p$ に関して完備である．したがって，バナッハ空間である．

証明. $\{f_n\}$ を L^p のコーシー列とする：すなわち，

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_m-f_n\|_p=0.$$

このとき，$\{f_n\}$ の適当な部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をとり

$$\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}-f\|_p=0$$

となる $f \in L^p$ の存在を証明すれば

$$\limsup_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p \le \lim_{n,k\to\infty}\|f_n-f_{n_k}\|_p+\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k}-f\|_p=0,$$

すなわち，$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0$ となる．

上のような $\{f_{n_k}\}$ は次のようにして求められる．仮定から，まず n_1 を

$$n > n_1 \Longrightarrow \|f_n - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2}$$

となるようにとることができる．次に n_2 を，$n_2 > n_1$ でかつ

$$n \geq n_2 \Longrightarrow \|f_n - f_{n_2}\|_p < \frac{1}{2^2}$$

となるようにとれる．これを繰り返して，自然数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ を

$$\begin{cases} n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots, \\ n \geq n_k \Longrightarrow \|f_n - f_{n_k}\|_p < \dfrac{1}{2^k} \end{cases}$$

となるようにとれる．したがって，特に

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

ゆえに，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1 \tag{9.1}$$

となる．この $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ に対して

$$\lim_{k\to\infty}\|f_{n_k} - f\|_p = 0 \tag{9.2}$$

となる関数 $f \in L^p$ の存在を証明すればよい．

そこで，

$$g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1}|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

とおくと，

$$\begin{aligned} &g_k \in L^p, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ &0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots \leq g_k(x) \leq \ldots \end{aligned}$$

であって，(9.1) とミンコウスキーの不等式 (8.5) によって

$$\begin{aligned} \|g_k\|_p &\leq \|f_{n_1}\|_p + \left\|\sum_{j=1}^{k-1}|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|\right\|_p \\ &\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{k-1}\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \\ &< \|f_{n_1}\|_p + 1. \end{aligned}$$

単調収束定理（定理 3.3）により

$$\begin{aligned} \int \lim_{k\to\infty} g_k(x)^p\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int g_k(x)^p\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty}\|g_k\|_p^p \leq (\|f_{n_1}\|_p + 1)^p < \infty \end{aligned}$$

を得る．よって，ほとんどいたる所で有限な $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ が存在して，

$$g \in L^p, \quad \|g\|_p \le \|f_{n_1}\|_p + 1$$

となることが分かる．$g(x)$ が有限となる点 $x \in \mathbf{R}^n$ では，級数

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty}(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

は絶対収束する．ゆえに，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1}(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

は収束し，

$$|f_{n_k}(x)| \le g_k(x) \to g(x) \quad (k \to \infty).$$

したがって，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して有限な

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

が存在する．f は可測関数の極限だから可測であり，

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x)| \le g(x).$$

ゆえに，$f \in L^p$ である．

また，

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{n_k}(x)| &= \left|\lim_{\ell\to\infty} f_{n_{\ell+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \\ &= \left|\lim_{\ell\to\infty} \sum_{j=k}^{\ell}(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))\right| \\ &\le \sum_{j=k}^{\infty}|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \quad \le \quad g(x) \end{aligned}$$

だから

$$|f(x) - f_{n_k}(x)|^p \le g(x)^p.$$

ルベーグの優収束定理（定理 3.6）により

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p^p &= \lim_{k\to\infty} \int |f(x) - f_{n_k}(x)|^p\, dx \\ &= \int \lim_{k\to\infty} |f(x) - f_{n_k}(x)|^p\, dx \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

これから (9.2) が示されたことになる．

次に，関数の**合成積** (convolution) または**たたみ込み積**と呼ばれる算法について説明する．f, $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$h(x) = \int f(x-y)g(y)\, dy = \int f(y)g(x-y)\, dy$$

はほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ で有限な値をとり $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ である．このことは，たとえば，

$$\varphi(x, y) = |f(x-y)||g(y)|$$

にフビニの定理（定理 7.2）を適用することによって分かる．この関数 $h(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成積**または**たたみ込み積**といい，

$$f * g(x)$$

等と書く．また

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

が成り立つことも同時に導かれる．

さらに，一般に次の定理が成り立つ．

定理 9.2. $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ならば，合成積 $f * g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ であって

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1 \tag{9.3}$$

が成り立つ．これを**ハウスドルフ・ヤングの不等式**という．

証明． $p = \infty$ の場合は明らか．$1 < p < \infty$ の場合について証明する．

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}} \cdot |g(y)|^{\frac{1}{q}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

と考えて，ヘルダーの不等式 (8.4) を用いるために次の評価を行う．フビニの定理（定理 7.2）を用いると，

$$\begin{aligned} \int dx \int |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy &= \int \left(\int |f(x-y)|^p\, dx \right) |g(y)|\, dy \\ &= \|f\|_p^p \cdot \int |g(y)|\, dy \\ &= \|f\|_p^p \cdot \|g\|_1 \\ &< \infty \end{aligned} \tag{9.4}$$

となるから，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\int \left(|f(x-y)||g(y)|^{1/p} \right)^p dy < \infty.$$

また，$g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ だから

$$\int \left(|g(y)|^{1/q} \right)^q dy < \infty.$$

よって，ヘルダーの不等式 (8.4) が適用でき，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned} \left| \int f(x-y)g(y)\, dy \right|^p &\leq \left(\int |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}} \cdot |g(y)|^{\frac{1}{q}}\, dy \right)^p \\ &\leq \int |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy \cdot \left(\int |g(y)|\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

を得る．

したがって，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して，合成積 $f * g(x)$ が定義される．この不等式の両辺を x で積分して (9.4) を用いると

$$\|f * g\|_p^p \leq \|f\|_p^p \cdot \|g\|_1^{1+\frac{p}{q}}.$$

この両辺の p 乗根をとれば，

$$\begin{aligned}&f*g \in L^p,\\&\|f*g\|_p \le \|f\|_p \cdot \|g\|_1\end{aligned}$$

が導かれる．

定理 9.3. L^∞ はノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して完備である．

証明. $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ を L^∞ のコーシー列とする．すなわち

$$\lim_{j,k\to\infty} \|f_j - f_k\|_\infty = 0$$

とする．このとき，任意の自然数 m に対して

$$\lim_{j,k\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \mathbf{R}^n : |f_j(x) - f_k(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$$

すなわち，ある零集合 $\mathcal{N}_m \subset \mathbf{R}^n$ が存在して

$$\limsup_{j,k\to\infty} |f_j(x) - f_k(x)| \le \frac{1}{m}, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{N}_m$$

となる．

$$\mathcal{N} = \bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{N}_m$$

も零集合であって

$$\lim_{j,k\to\infty} |f_j(x) - f_k(x)| = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{N}.$$

これは，$x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{N}$ のとき数列 $\{f_j(x)\}_{j=1}^\infty$ が複素数の集合 $\mathbf{C}$ のコーシー列であることを意味する．$\mathbf{C}$ は完備であるから，極限値

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x)$$

が存在する．そこで

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x), & x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{N} \\ 0, & x \in \mathcal{N} \end{cases}$$

とおけば，

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_\infty = 0$$

が成り立ち，L^∞ の完備性が証明された．

$\mathbf{R}^n$ で連続で，ある有界集合の外では恒等的に 0 となる関数の全体を $C_0(\mathbf{R}^n)$ と書く．

定理 9.4. 関数空間 $C_0(\mathbf{R}^n)$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, のなかで，ノルム $\|\cdot\|_p$ に関して稠密である．すなわち，任意の $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ と任意の正数 ε に対して

$$\|g - f\|_p < \varepsilon$$

となる $g \in C_0(\mathbf{R}^n)$ が存在する．

証明．$f \in L^p$ とする．$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, $f_1(x) = \mathrm{Re}\, f(x)$, $f_2(x) = \mathrm{Im}\, f(x)$ とおくと，

$$f_1^+,\ f_1^-,\ f_2^+,\ f_2^- \in L^p$$

となる．よって，$f \geq 0$ として考えても一般性は失わない．

$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．$S_m = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < m\}$ とおくと，

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p\, dx < \infty$$

より，自然数 m を

$$\int_{\mathbf{R}^n - S_m} |f(x)|^p\, dx < \varepsilon^p$$

となるようにとれる．この m に対して，

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in S_m, \\ 0 & \text{if } x \in {S_m}^c \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \|f_m - f\|_p &= \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f_m(x) - f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}^n - S_m} |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

ところで，$f_m \geq 0$ より，定理 2.6 が適用でき，$f_m(x)$ は非負単関数の単調増加列の極限として表せることに注意．ゆえに，単関数 $g(x)$ を，

$$f_m(x) \geq g(x) \geq 0, \quad \int_{\mathbf{R}^n} (f_m(x) - g(x))^p\, dx < \varepsilon^p$$

となるようにとれる．よって，

$$\|f_m - g\|_p < \varepsilon.$$

また，$g(x)$ は，

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}(x) \quad (\alpha_j > 0, \quad E_j \subset S_m)$$

と書ける．定理 1.15 より，各 E_j に対し，

$$F_j \subset E_j \subset G_j, \quad \mu(G_j - F_j) < \left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j}\right)^p$$

を満たすような閉集合 F_j，開集合 G_j が存在する．S_m は開集合だから，$G_j \subset S_m$ とできる．
$h_j(x)$ を $\mathbf{R}^n$ 上で $0 \leq h_j(x) \leq 1$ となる連続関数で，

$$h_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in F_j, \\ 0 & \text{if } x \in {G_j}^c \end{cases}$$

とする．たとえば, 次のような関数を考えればよい：

$$h_j(x) = \frac{d(x, G_j^c)}{d(x, G_j^c) + d(x, F_j)}.$$

このとき，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{E_j}(x) - h_j(x)|^p \, dx &\leq \int_{G_j \setminus F_j} 1^p \, dx \\ &= \mu(G_j \setminus F_j) \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j}\right)^p.\end{aligned}$$

よって，

$$\|\chi_{E_j} - h_j\|_p < \frac{\varepsilon}{k\alpha_j}.$$

$h(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j h_j(x)$ とおくと，$h \in C_0(\mathbf{R}^n)$ で，

$$\begin{aligned}\|g - h\|_p &\leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \|\chi_{E_j} - h_j\|_p \\ &< \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\|f - h\|_p &\leq \|f - f_m\|_p + \|f_m - g\|_p + \|g - h\|_p \\ &< 3\varepsilon.\end{aligned}$$

10 ルベーグ空間の共役空間

(Ω, μ) を σ 有限な測度空間とする． この節では，$1 \leq p < \infty$ に対して, バナッハ空間 $L^p(\Omega)$ の共役空間を特徴付ける，$q = p/(p-1)$ とおくと, and

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

が成り立つ．このとき，次の定理が知られている ([10, Theorem 4.14.1], [9, Theorem 6.15]):

定理 10.1. (Ω, μ) を σ 有限な測度空間, $1 < p < \infty$ とする．

(i) 任意の関数 $v \in L^q(\Omega)$ に対して，線形汎関数 f_v を，次式で定義できる：

$$f_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x) \, d\mu, \quad u \in L^p(\Omega),$$

このとき，

$$\begin{aligned}&f_v \in (L^p(\Omega))^*, \\ &\|f_v\| = \|v\|_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

が成り立つ．

(ii) 逆に，任意の汎関数 $f \in (L^p(\Omega))^*$ は，ある関数 $v \in L^q(\Omega)$ によって，$f = f_v$ と表される．

すなわち，$L^p(\Omega)$ の共役空間は，$L^q(\Omega)$ と同一視できる．

第 II 部

関数解析の速成コース

第 II 部では，後の楕円型境界値問題を考える際に非常に重要となるの関数解析の基本的な事項，概念，定理について説明する．関数解析は，線形代数及び微分積分の「無限次元版」である．より具体的に，それらの対照表を作れば，次のようになる：

線形代数	微分方程式	関数解析
有限次元ベクトル	関数	無限次元ベクトル
行列	積分核	線形作用素
連立一次方程式	微分方程式	線形方程式
単位行列	ディラック超関数	恒等作用素
逆行列	グリーン関数	逆作用素

また，登場する関数についての対照表を作れば，次のようになる：

分野	定義域	値域（完備）
微積分	区間	実数体
関数論	複素領域	複素数体
関数解析	区間	バナッハ空間

尚，関数解析における 3 大定理は，次の 3 定理である：

定理 10.2 (ハーン・バナッハの定理)**.** X を複素ベクトル空間，$p(x)$ を X 上の実汎関数であって，次の条件を満たすとする：

$$\begin{aligned} &p(x) \geq 0, \quad \forall x \in X. \\ &p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X. \\ &p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

M を X の部分空間，$f(x)$ を M 上の複素線形汎関数であって，次の条件を満たすとする：

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in M.$$

このとき，X 上の複素線形汎関数 $F(x)$ であって，次の条件を満たすものが存在する：

$$\begin{aligned} &F(x) = f(x), \quad \forall x \in M. \\ &|F(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

定理 10.3 (一様有界性の原理)**.** バナッハ空間 X 上の有界線形作用素の空間 $\mathcal{B}(X,X)$ 内の作用素列 $\{T_n\}$ が各点 $x \in X$ ごとに有界ならば，そのノルムの列 $\{\|T_n\|\}$ は一様に有界である：

$$\sup_n \|T_n x\| < \infty, \quad \forall x \in X \implies \sup_n \|T_n\| < \infty.$$

定理 10.4 (バナッハの開写像定理)**.** X, Y をバナッハ空間とし，T を X から Y への有界線形作用素とする．もし T の値域 $R(T)$ が Y 全体ならば，T は X の開集合を Y の開集合に写す．

これらの定理についての対照表を作れば，次のようになる：

ツォルンの補題	ハーン・バナッハの定理	分離定理
ベールの定理	一様有界性の原理	バナッハ・シュタインハウスの定理
ベールの定理	開写像定理	閉グラフ定理

11　ツォルンの補題

集合 X における関係 $\leqq$ で，次の性質を持つものを X の**順序関係**という：

$$\begin{aligned}
&x \leqq x, \\
&x \leqq y \text{ かつ } y \leqq x \text{ ならば } x = y, \\
&x \leqq y \text{ かつ } y \leqq z \text{ ならば } x \leqq z.
\end{aligned}$$

順序関係を備えている集合 $(X, \leqq)$ を**順序集合**という．$x \leqq y$ を $y \geqq x$ とも書く．

順序集合 $(X, \leqq)$ において，X の任意の元 x, y に対して，$x \leqq y$ または $x \geqq y$ のいずれかが成り立つとき，X におけるこの順序関係を**全順序関係**といい，全順序関係を備えた集合 $(X, \leqq)$ を**全順序集合**という．

順序集合 $(X, \leqq)$ の元 a に対して，

$$a \leqq x \text{ かつ } x \neq a \text{ となる } x \text{ が存在しない}$$

ならば，a を X の**極大元**という．同様に，順序集合 $(X, \leqq)$ の元 b に対して，

$$b \geqq x \text{ かつ } x \neq b \text{ となる } x \text{ が存在しない}$$

ならば，b を X の**極小元**という．

順序集合 $(X, \leqq)$ の部分集合 A に対して，a が A の**最大元**であるとは，

$$a \in A \text{ かつ } \text{“}x \in A \implies x \leqq a\text{”}$$

が成り立つものである．同様に，順序集合 $(X, \leqq)$ の元 b に対して，b が A の**最小元**であるとは，

$$b \in A \text{ かつ } \text{“}x \in A \implies x \geqq b\text{”}$$

が成り立つものである．

また，X の元 b が，条件

$$x \in A \implies x \leqq b$$

をみたすとき，b を A の**上界**といい，A の上界の最小元 s が存在するとき，s を A の**上限**という．このとき，記号で

$$s = \sup A$$

と表す．

また，X の元 c が，条件

$$x \in A \implies x \geqq c$$

をみたすとき，c を A の**下界**といい，A の下界の最大元 t が存在するとき，t を A の**下限**という．このとき，記号で

$$t = \inf A$$

と表す．

公理 (選択公理)**.** 集合族 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda, A_\lambda \neq \emptyset\}$ に対して，写像 $f : \Lambda \to \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ で，$\lambda \in \Lambda$ ならば $f(\lambda) \in A_\lambda$ となるものが少なくとも 1 つ存在する．

次のツォルンの補題は，選択公理と同値な命題である．

補題 11.1 (ツォルンの補題)**.** 順序集合 $(X, \leqq)$ において，X の任意の全順序部分集合が上界を持つならば，X には少なくとも一つ極大元が存在する．

12　距離空間の完備化

カントールの考えに従って，与えられた距離空間 (X, d) から完備化された距離空間 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ を構成する．直積空間 $X \times X$ 上の非負関数 $d(x, y)$ が次の 3 条件を満たすとき，**距離**という：

(M1) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ 　(**正値性**).

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ 　(**対称性**).

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x,\ y,\ z \in X$ 　(**三角不等式**).

距離空間 (X, d) の点列を $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ と表すことにする．距離空間 (X, d) の完備化の基本的なアイデアは，考えられうるすべてのコーシー列を考えて，それらの極限値を，元の距離空間に付け加える．ただし，同じ極限値に収束するコーシー列は，同一視する．

以下では，証明は 5 段階に分けて行われる．

Step 1: 距離空間 (X, d) のコーシー列の全体の集合を F とする．このとき，任意の $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in F$ に対して，$\{d(x_n, y_n)\}$ が収束することを示す．

今，任意の $\{x_n\}, \{y_n\} \in F$ に対して，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \quad \text{such that } n, m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2},\ d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{12.1}$$

が成り立っている．任意の $n,\ m \in \mathbf{N}$ に対して，

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$$

より，

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m).$$

また，同様にして，

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m).$$

したがって，

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m). \tag{12.2}$$

よって，$n, m \geq N$ とすると，(12.1) 式より，

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

となり，$\{d(x_n, y_n)\}$ は完備距離空間 $(\mathbf{R}, d^{(1)})$ のコーシー列で，収束する．よって，

$$d^*(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

と $d^*(\{x_n\}, \{y_n\})$ を定義する．

Step 2: $d^* : F \times F \to \mathbf{R}$ を使って，F 上の同値関係“$\sim$”を次のように定義する：
$\{x_n\}, \{x_n{}'\} \in F$ に対して，$d^*(\{x_n\}, \{x_n{}'\}) = 0$ のとき，

$$\{x_n\} \sim \{x_n{}'\}.$$

もとの d が反射律，対称律，推移律をみたしていたのでこれが同値関係となることは明らかである．

さらに，$\{x_n\} \sim \{x_n{}'\}, \{y_n\} \sim \{y_n{}'\}$ とすると，

$$d^*(\{x_n\}, \{y_n\}) = d^*(\{x_n{}'\}, \{y_n{}'\}) \tag{12.3}$$

であることも，(12.2) 式より容易にわかる．

Step 3: $\tilde{X}$ と $\tilde{X}$ 上の距離関数 $\tilde{d}$ を定義する．
$\tilde{X} = F/\sim$ とし，$\{x_n\} \in F$ の同値類が表す $\tilde{X}$ の元を $[\{x_n\}]$ とする．さらに，

$$\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbf{R}$$

を

$$\tilde{d}([\{x_n\}], [\{y_n\}]) = d^*(\{x_n\}, \{y_n\}), \quad [\{x_n\}], [\{y_n\}] \in \tilde{X}$$

と定義する．ここで，(12.3) 式より，右辺は代表元の取り方によらない．このようにして $\tilde{X}$ 上の距離関数 $\tilde{d}$ が定義できた．

Step 4: 写像 $\iota : X \to \tilde{X}$ を定義する．
$x \in X$ に対し，$x_n = x$ $(n \in \mathbf{N})$ とおくと，$\{x_n\}$ は (X, d) のコーシー列である．すなわち，$\{x_n\} \in F$．このコーシー列を $\tilde{x}$ とし，$\tilde{x}$ の同値類 $[\tilde{x}]$ を対応させる写像を ι とする．

Step 5: $((\tilde{X}, \tilde{d}), \iota)$ が次の完備化の 3 条件をみたすことを示す：

$[C_1]$ $(\tilde{X}, \tilde{d})$ は完備．

$[C_2]$ ι は (X, d) から $(\tilde{X}, \tilde{d})$ への等長写像，すなわち，

$$d(x, y) = \tilde{d}(\iota(x), \iota(y)), \quad \forall x, y \in X.$$

$[C_3]$ $\iota(X)$ は $(\tilde{X}, \tilde{d})$ で稠密．

条件 $[C_2]$ に関して：定義より明らか．

条件 $[C_3]$ に関して：まず，$\{x_n\} \in F$ に対して，

$$\lim_{m\to\infty} \tilde{d}([\{x_n\}], \iota(x_m)) = 0 \tag{12.4}$$

が成り立つことを示す．

$\{x_n\}$ は (X,d) のコーシー列 なので，

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \text{s.t.} \quad n, m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

このとき，$m \geq N$ を固定すると，

$$\begin{aligned}
\tilde{d}([\{x_n\}], \iota(x_m)) &= d^*(\{x_n\}, \tilde{x_m}) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって，(12.4) 式が成り立つ．

このことから，任意の $[\{x_n\}] \in \tilde{X}$ は $\{\iota(x_m) : m \in \mathbf{N}\} \subset \iota(X)$ の極限点となるので条件 $[C_3]$ をみたす．

条件 $[C_1]$ に関して：$\{\xi_n : n \in \mathbf{N}\}$ を $(\tilde{X}, \tilde{d})$ のコーシー列とする．$\iota(X)$ は $(\tilde{X}, \tilde{d})$ で稠密なので，$\{x_n\} \subset X$ で，

$$\tilde{d}(\xi_n, \iota(x_n)) < \frac{1}{n} \tag{12.5}$$

となるものを選択公理 (p.70) より選ぶことができる．

このとき，

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n'}) &= \tilde{d}(\iota(x_n), \iota(x_{n'})) \\
&\leq \tilde{d}(\iota(x_n), \xi_n) + \tilde{d}(\xi_n, \xi_{n'}) + \tilde{d}(\xi_{n'}, \iota(x_{n'})) \\
&< \frac{1}{n} + \tilde{d}(\xi_n, \xi_{n'}) + \frac{1}{n'}
\end{aligned}$$

より，$\{x_n\}$ は (X,d) のコーシー列で，さらに (12.4) 式，(12.5) 式より，

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\xi_n, [\{x_m\}]) &\leq \tilde{d}(\xi_n, \iota(x_n)) + \tilde{d}(\iota(x_n), [\{x_m\}]) \\
&< \frac{1}{n} + \tilde{d}(\iota(x_n), [\{x_m\}]) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

よって，$(\tilde{X}, \tilde{d})$ のコーシー列 $\{\xi_n : n \in \mathbf{N}\}$ が $[\{x_m\}] \in \tilde{X}$ に収束するので，$(\tilde{X}, \tilde{d})$ は完備距離空間である．

13 ベールのカテゴリー定理

位相空間論で知られているベールのカテゴリー定理を証明する：

定理 13.1 (ベールの定理)**.** (X,d) を空でない完備距離空間，F_n を X の閉集合 $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．さらに，

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

とする．このとき，少なくとも 1 つの F_n は X の開球を含む．すなわち

$$B(a,r) \subset F_n \qquad a \in X,\ r > 0$$

となる自然数 n が存在する．ここで，$B(a,r)$ は中心 a, 半径 r の開球である．

証明． 背理法で示す．そこで任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$F_n \text{は } X \text{ の開球を含まない}$$

と仮定する．まず，以下をみたすような開球の列 $\{B_n\}$ がつくれることを帰納法で示す．

① $\quad B_1 \supset B_2 \supset \dots$

② $\quad \overline{B_n} \cap F_n = \emptyset$

③ $\quad \rho_n \leq \dfrac{1}{n}$

ここで ρ_n は B_n の半径を表す．

$n = 1$ の場合．$X \neq \emptyset$ だから X の開球は存在することに注意する．帰納法の仮定より，F_1 は開球を含まないので，$F_1 \neq X$. よって

$$u_1 \in X \setminus F_1$$

が存在する．F_1 は閉集合なので

$$d_1 := d(u_1, F_1) = \inf_{\alpha \in F_1} \{d(u_1, \alpha)\} > 0$$

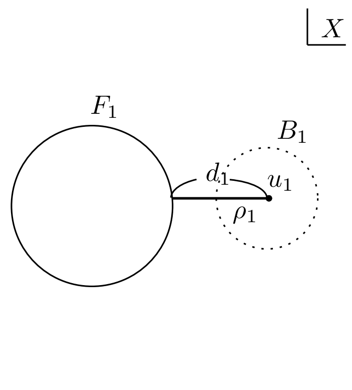
となる．よって

$$B_1 := B(u_1, \rho_1), \quad \rho_1 := \min\left(1, \frac{d_1}{2}\right)$$

とおくと

$$\overline{B_1} \cap F_1 = \emptyset, \quad \rho_1 \leq 1$$

となるので，$n = 1$ のときは成立する．



$n = k$ の場合：①〜③ をみたす開球 $B_1, B_2, \dots, B_k$ がすでに構成できたとする．帰納法の仮定より F_{k+1} は開球を含まないから，$B_k - F_{k+1} \neq \emptyset$. よって

$$u_{k+1} \in B_k \setminus F_{k+1}$$

となるものが存在する．u_{k+1} は閉集合 F_{k+1} には属さないので

$$d_{k+1} := d(u_{k+1}, F_{k+1}) > 0$$

であり，かつ，閉集合 $X \setminus B_k$ にも属さないから

$$\delta_{k+1} := d(u_{k+1}, X \setminus B_k) > 0$$

である．そこで

$$\begin{aligned} B_{k+1} &:= B(u_{k+1}, \rho_{k+1}) \\ \rho_{k+1} &:= \min\left\{\frac{1}{k+1}, \frac{d_{k+1}}{2}, \delta_{k+1}\right\} \end{aligned}$$

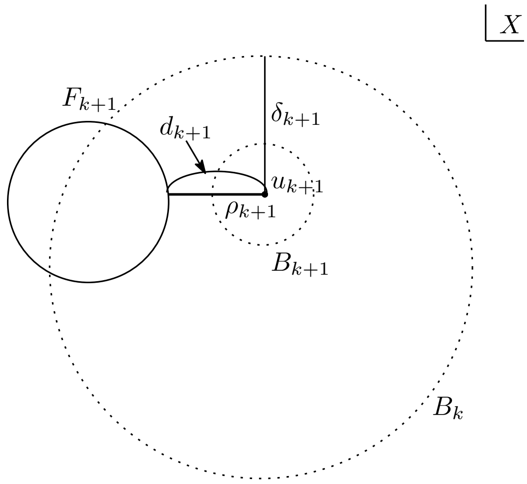
とおけば

① $B_1 \supset \ldots \supset B_k \supset B_{k+1}$

② $\overline{B_{k+1}} \cap F_{k+1} = \emptyset$

③ $\rho_{k+1} \leq \dfrac{1}{k+1}$

となるので，求める $\{B_n\}$ が構成された．



①, ③ より任意の $\ell > m \in \mathbf{N}$ に対して，B_ℓ の中心 u_ℓ と B_m の中心 u_m の距離は

$$d(u_m, u_\ell) \leq \rho_m \leq \frac{1}{m} \to 0 \quad (m \to 0)$$

となる．よって，$\{u_m\}$ は，X のコーシー列をなす．X は完備なので，極限

$$u := \lim_{m\to\infty} u_m$$

が存在して

$$u \in X \tag{13.1}$$

となる．ところが，番号 N を任意に固定するとき

$$u_n \in B_N, \quad \forall n \geq N$$

だから，$n \to \infty$ とすると

$$u \in \overline{B_N}$$

となる．② より $\overline{B_N} \cap F_N = \emptyset$ なので

$$u \notin F_N$$

となる．N は任意だったので

$$u \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N = X$$

となるが，これは (13.1) に矛盾する．

14　バナッハの不動点定理

まず，微分積分学における不動点定理を証明する：

定理 14.1 (不動点定理)**.** $[a,b]$ を有界閉区間，$f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする．このとき，

$$f([a,b]) \subset [a,b]$$

をみたせば

$$f(x^*) = x^*$$

となるような $x^* \in [a,b]$ が存在する．

証明. 実は，中間値の定理から従う．

$$\varphi(x) := x - f(x)$$

とおく．$f([a,b]) \subset [a,b]$ より

$$\varphi(a) = a - f(a) \leq 0$$

となる．

(1) $\varphi(a) = 0$ の場合は

$$x^* := a$$

とすればよい．

(2) $\varphi(a) < 0$ の場合は

$$\varphi(b) = b - f(b) \geq 0$$

となる．このとき，$\varphi(b) = 0$ であるならば

$$x^* := b$$

とすればよく，また，$\varphi(b) > 0$ であるならば，中間値の定理より

$$\varphi(x^*) = 0$$

となるような $a < x^* < b$ が存在する．

関数解析では，中間値の定理が無いので，不動点定理を証明する際，有名なバナッハの不動点定理（縮小写像の原理) で代用する：

定理 14.2 (バナッハの不動点定理)**.** 完備な距離空間 (X,d) から (X,d) への写像 F が条件

$$0<\exists k<1:\quad d\left(F(x),F(y)\right)\le kd(x,y),\quad \forall x,y\in X, \tag{14.1}$$

を満たすとする．このとき，写像 F はただ一つの不動点 z を持つ：$F(z)=z$.

証明. ① 任意の点 $x_0\in X$ を取り，

$$x_1=F(x_0),\quad x_2=F(x_1),\ \ldots,\ x_{n+1}=F(x_n)$$

とおく．このとき，三角不等式により，

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+1},x_n\right) &= d\left(F(x_n),F(x_{n-1})\right) \\ &\le kd\left(x_n,x_{n-1}\right) \\ &\le k^2d\left(x_{n-1},x_{n-2}\right) \\ &\quad \ldots \\ &\le k^nd\left(x_1,x_0\right). \end{aligned}$$

したがって，$n>m$ に対して，

$$\begin{aligned} d\left(x_n,x_m\right) &\le d\left(x_n,x_{n-1}\right)+d\left(x_{n-1},x_{n-2}\right)+\ldots+d\left(x_{m+1},x_m\right) \\ &\le \left(k^{n-1}+k^{n-2}+\ldots+k^m\right)d\left(x_1,x_0\right) \\ &\le \frac{k^m}{1-k}d\left(x_1,x_0\right) \end{aligned}$$

だから，点列 $\{x_j\}$ はコーシー列である．距離空間 (X,d) は完備だから，

$$\exists z\in X\quad \text{such that } x_n\longrightarrow z.$$

このとき，条件 (14.1) から，写像 F は（一様）連続だから，

$$z=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}F(x_{n-1})=F(z).$$

したがって，写像 F は不動点 z を持つことが分かった．

② 不動点の一意性を示す：$F(z)=z$, $F(z')=z'$ とすると，条件 (14.1) から，

$$d(z,z')=d\left(F(z),F(z')\right)\le kd(z,z').$$

ここで，$0<k<1$ に注意すれば，

$$d(z,z')=0$$

となり，$z=z'$ を得る．

以上で，定理 14.2 が証明された．

バナッハの不動点定理 14.2 は，次のように拡張される：

系 14.1. バナッハ空間 X から X への写像 F に対して，写像 F^n, $n\ge 2$, を

$$F^nx=F(F^{n-1}x),\quad x\in X$$

と定義する．ある $n_0\in\mathbf{N}$ に対して，写像 F^{n_0} が条件

$$0<\exists k<1:\quad d\left(F^{n_0}(x),F^{n_0}(y)\right)\le kd(x,y),\quad \forall x,y\in X,$$

を満たすとする．このとき，写像 F はただ一つの不動点 z を持つ：$F(z)=z$.

証明. ① 不動点の一意性を示す：$Fz = z$, $Fz' = z'$, z, $z' \in X$ を 2 つの不動点とすると，

$$F^{n_0}(z) = Fz = z, \quad F^{n_0}(z') = Fz' = z'.$$

したがって，定理 14.2 に示したように，写像 F^{n_0} に対する不動点の一意性より，$z = z'$.

② 不動点の存在を示す：写像 F^{n_0} は縮小写像だから，定理 14.2 から，不動点 x_0 を持つ：

$$F^{n_0}(x_0) = x_0.$$

ところで，両辺に写像 F を施すと，

$$F^{n_0}(Fx_0) = F(F^{n_0}(x_0)) = Fx_0.$$

よって，点 Fx_0 も写像 F^{n_0} の不動点である．写像 F^{n_0} に対する不動点の一意性から，

$$Fx_0 = x_0.$$

以上で，系 14.1 が証明された．

14.1 常微分方程式の初期値問題への応用

バナッハの不動点定理の系 14.1 の典型的な応用として，次の常微分方程式の初期値問題（コーシー問題）の基本定理を証明する：

定理 14.3. ρ, r を正の数とし，点 (a, b) を中心とする閉矩形

$$D = \{(t, y) : |t - a| \leq r,\ |y - b| \leq \rho\}$$

を考える．与えられた関数 $f(x, y)$ は D で連続，変数 y についてリプシッツ連続とする．すなわち，定数 L が存在して

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|\,, \quad \forall\,(t, y_1), (t, y_2) \in D$$

が成り立つ．このとき，閉区間

$$\begin{aligned} &I = [a - c, a + c], \\ &c = \min\left\{r, \frac{\rho}{M}\right\}, \\ &M = \max\left\{|f(t, y)| : (t, y) \in D\right\} \end{aligned}$$

において，初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(a) = b \end{cases} \tag{14.2}$$

の解 $y(t)$ は存在して一意的である．

証明. 閉区間 I 上の連続関数の空間を X として，そのノルムは最大値ノルムとする：

$$\begin{aligned} &X = C(I), \\ &\|x\| = \max\left\{|x(t)| : t \in I\right\}. \end{aligned}$$

最大値ノルムの収束は一様収束だから，X はバナッハ空間になることに注意.

このとき，X から X への写像 F を次のように定義することができる：

$$X \ni x(t) \longmapsto Fx(t) = b + \int_a^t f(s, x(s))ds.$$

さらに，不動点定理 14.2 の証明と同様にして，任意の自然数 n に対して，不等式

$$\|F^n(x_1) - F^n(x_2)\| \leq \frac{c^n L^n}{n!}\|x_1 - x_2\|$$

が成り立つことがわかる．十分大きな $n_0 \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\frac{c^{n_0} L^{n_0}}{(n_0)!} < 1$$

とできるので，写像 F^{n_0} は縮小写像の条件

$$0 < \exists k < 1 : \quad \|F^{n_0}(x) - F^{n_0}(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

を満たす．したがって，系 14.1 が適用できて，写像 F 自身がただ一つの不動点 y を持つ：

$$y(t) = Fy(t) = b + \int_a^t f(s, y(s))ds$$

以上により，初期値問題 (14.2) に対する解の一意存在定理が証明された．

15 ベクトル空間とノルム空間

集合 X は，次の諸条件を満たすとき，実数体または複素数体 $\mathbf{K}$ 上の**線形空間**または**ベクトル空間**という：

(i) 任意の $x, y \in X$ に対して，**和** $x + y \in X$ が定義されて，

(a) $x + y = y + x$.

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(c) ゼロベクトル $0 \in X$ が存在して，

$$x + 0 = x, \quad \forall x \in X.$$

(d) 各元 $x \in X$ に対して，逆元 $-x \in X$ が存在して，

$$x + (-x) = 0.$$

(ii) 任意の $x \in X$, $\alpha \in \mathbf{K}$ に対して，**スカラー倍** $\alpha x \in X$ が定義されて，

(a) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

(b) $1x = x$.

(c) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(d) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

X の元は **ベクトル**と呼ばれ，$\mathbf{K}$ の元は **スカラー**と呼ばれる． $\mathbf{K}$ をベクトル空間 X の係数体という．$\mathbf{K}=\mathbf{R}$ あるいは $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ に応じて，ベクトル空間を，実ベクトル空間あるいは複素ベクトル空間という．

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ に対して，$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{K})$ の形のベクトルを一次結合あるいは線形結合という．ベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は，次の条件を満たすとき，一次独立あるいは線形独立という：

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

ベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は一次独立でないとき，一次従属あるいは線形従属という．

ベクトル空間 X が，n 個の一次独立なベクトルを含み，$n+1$ 以上の一次独立なベクトルを含まないとき，X は n 次元であるといい，$\dim X = n$ と表す． X の一次独立なベクトルが有限でないとき，X は無限次元という．

例 15.1. $L^p(\mathbf{R}^n)$ は無限次元である．

n 次元ベクトル空間 X の n 個の一次独立なベクトル $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を，X の **基底**という．このとき，任意のベクトル $x \in X$ は，

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

と，一意的に表される．スカラー $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を，ベクトル x の成分という．

部分集合 $M \subset X$ は， X での和とスカラー倍の演算に関してベクトル空間になるとき，M を X の**部分空間**という．従って，部分集合 M は次の条件を満たすとき，部分空間になる：

$$x, y \in M,\ \alpha \in \mathbf{K} \implies x + y \in M,\ \alpha x \in M.$$

X の部分集合 A に対して，A を含む最小の部分空間 $[A]$ が存在する．実際，部分空間 $[A]$ は，A を含むすべての部分空間の交わり，あるいは A の任意の有限個の元の一次結合の全体で与えられる．部分空間 $[A]$ を，集合 A によって**生成される部分空間**という．

M, N を X の 2 つの部分空間とする．和集合 $M \cup N$ によって生成される部分空間を，M と N の和といい，$M+N$ で表す．もし $M \cap N = \{0\}$ の場合は，和 $M+N$ は M と N の**直和**といい，

$$M \dot{+} N$$

で表す．直和 $M \dot{+} N$ の任意の元 x は，

$$x = y + z, \quad y \in M,\ z \in N$$

という形に一意的に表される．

部分集合 $A \subset X$ が次の条件を満たすとき，**凸**であるという：

$$x, y \in A \implies \alpha x + (1-\alpha) y \in A, \quad 0 < \forall \alpha < 1.$$

ベクトル空間 X 上の実数値関数 $\|\cdot\|$ が，次の 3 条件（ノルムの公理）を満たすとき，**ノルム**と呼ばれる：

(N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$, $\forall x \in X$.

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, \forall y \in X$ (**三角不等式**).

このとき，$(X, |\cdot|)$ は**ノルム空間**であるという．

例 15.2. $L^p(\mathbf{R}^n)$ はノルム空間である．

16　ノルム空間の位相

ノルム空間 X の位相は，距離

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

によって定義される．実際，$d(x,y)$ は，**距離の公理**を満たすことが分かる．

ノルム空間 X における収束

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

は，

$$s-\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

あるいは，単に，

$$x_n \longrightarrow x$$

と表記される．このとき，点列 $\{x_n\}$ は x に**強収束する**という．

定理 16.1. ノルム空間 X において，ベクトル演算やノルムは連続である：

(1) $x_n \to x$, $y_n \to y$ ならば，$x_n + y_n \to x + y$.

(2) $x_n \to x$, $\alpha_n \to \alpha$ ならば，$\alpha_n x_n \to \alpha x$.

(3) $x_n \to x$ ならば，$\|x_n\| \to \|x\|$.

証明. (1) については，

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \quad \longrightarrow 0.$$

(2) については，

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \le |\alpha_n - \alpha|\ \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\ \|x\| + |\alpha|\ \|x_n - x\| \quad \longrightarrow 0.$$

(3) については，三角不等式より，

$$|\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\| \quad \longrightarrow 0.$$

以上で，定理 16.1 が証明された．

定義 16.1. X の点列 $\{x_n\}$ は，次のコーシーの条件を満たすとき，**コーシー列**と呼ばれる：

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

ノルム空間 X の任意のコーシー列が，X の点に強収束するとき，X は**完備**であるという．完備なノルム空間を，**バナッハ空間**と呼ぶ．

例 16.1. 定理 9.1, 9.3 で示したように，$L^p(\mathbf{R}^n)$ はバナッハ空間である．

X と Y が同じ係数体上のノルム空間とすると，直積空間 $X\times Y$ は，ノルム

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$$

によって，ノルム空間になる．さらに，X と Y がバナッハ空間ならば，直積空間 $X\times Y$ もバナッハ空間になる．

X 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は，次の条件を満たすとき，**同値である**という：

$$\exists c,\ C > 0: \quad c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

同値なノルムは，ベクトル空間 X に同じ位相を定めることに注意.

$x \in X$ と $r > 0$ に対して，

$$B(x,r) := \{y \in X : \|y - x\| < r\}$$

を，中心 x, 半径 r の**開球**という．以下では，点 x の**近傍**ということもある.

定義 16.2. 部分集合 $G \subset X$ が次の条件を満たすとき，**開集合**という：

$$\forall x \in G,\ \exists r = r(x) > 0 \quad \text{such that } B(x,r) \subset G.$$

定理 16.2. ノルム空間 X の開集合について，次の性質が成り立つ：

(G1) $\emptyset$, X は開集合.

(G2) 任意の有限個の開集合の共通部分も開集合.

(G3) 任意の開集合の族の和集合も開集合.

定義 16.3. 部分集合 $F \subset X$ の補集合 $F^c = X \setminus F$ が開集合のとき，F を**閉集合**という.

定理 16.3. ノルム空間 X の閉集合について，次の性質が成り立つ：

(F1) $\emptyset$, X は閉集合.

(F2) 任意の有限個の閉集合の和集合も閉集合.

(F3) 任意の閉集合の族の共通部分も閉集合.

定義 16.4. M を X の部分集合とする．点 $x \in X$ の任意の近傍の中に，x と異なる M の点が少なくとも一つ存在するとき，点 x を M の**集積点**という.

次の集積点に関する判定条件は，非常に有用である：

定理 16.4. M を X の部分集合とする．点 $x \in X$ が M の集積点であるための必要十分条件は，x に収束する M の点列 $\{x_n\}$ が存在することである：

$$\exists \{x_n\} \subset M \quad \text{such that } x_n \ne x,\ \|x_n - x\| \to 0. \tag{16.1}$$

証明. (1) 必要性：点 x の近傍として $B(x, 1/n)$, $n \in \mathbf{N}$, を取れば,

$$\exists x_n \in M \quad \text{such that } x_n \in B\left(x, \tfrac{1}{n}\right),\ x_n \ne x.$$

したがって，条件 (16.1) が成り立つ.

(2) 十分性：逆に，点 x の任意の近傍 $B(x,\varepsilon)$ に対して，条件 (16.1) より，n 十分大ならば,

$$\exists x_n \in M \quad \text{such that } x_n \in B(x,\varepsilon),\ x_n \ne x.$$

したがって，点 $x \in X$ は M の集積点である.

以上で，定理 16.4 が証明された.

次の閉集合に関する判定条件は，非常に有用である：

定理 16.5. F を X の部分集合とする．F が閉集合であるための必要十分条件は，F の集積点がすべて F に属することである．

証明. (1) 必要性：F を閉集合，x を F の任意の集積点とする．もし $x \notin F$ ならば，補集合 F^c は開集合だから，ある近傍 $B(x,r)$ が存在して，

$$B(x,r) \cap F = \emptyset.$$

これは，x が F の集積点であることに矛盾する．従って，$x \in F$.

(2) 十分性：補集合 F^c が開集合であることを示す．

x_0 を補集合 F^c の任意の点とする．x_0 は F の集積点ではないから，ある近傍 $B(x_0,r)$ が存在して，

$$B(x_0,r) \cap F = \emptyset.$$

したがって，

$$B(x_0,r) \subset F^c.$$

これより，点 x_0 は F^c の内点である．よって，補集合 F^c は開集合である．

以上で，定理 16.5 が証明された．

定理 16.6. F を X の部分集合とする．F が閉集合であるための必要十分条件は，F の点列が収束すれば，その極限点がすべて F に属することである．

証明. (1) 必要性：F を閉集合とする．$x_n \in F$, $x_n \to x_0$ とすると，x_0 は F の点か F の集積点である．したがって，定理 16.5 より，$x_0 \in F$.

(2) 十分性：x_0 を F の任意の集積点とする．このとき，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\exists x_n \in F \quad \text{such that } x_n \in B\left(x_0, \tfrac{1}{n}\right), \, x_n \neq x_0.$$

従って，点 x_0 は F の点列 $\{x_n\}$ の極限点だから，仮定より，F に属する．定理 16.5 より，F は閉集合である．

以上で，定理 16.6 が証明された．

定義 16.5. A を X の部分集合とする．A の集積点の全体を A^d で表す．集合

$$\overline{A} := A \cup A^d$$

を，A の**閉包**という．

注意 16.1. (1) 定義 16.5 から，明らかに

$$\begin{aligned} &A \subset \overline{A}, \\ &A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}. \end{aligned}$$

(2) 集合 F が閉ならば，定理 16.5 より，$F^d \subset F$. したがって，$\overline{F} = F$ である．

次の定理は，集合の閉包に関する特徴付けを与えている：

定理 16.7. A を X の部分集合とする．A の閉包 $\overline{A}$ は，A を含む最小の閉集合である．

証明. (1) A の閉包 $\overline{A}$ は閉集合であることを示す．そのために，定理 16.5 を使う．
x を $\overline{A}$ の任意の集積点とすると，x の任意の近傍 $B(x,r)$ に対して，x と異なる点 y で

$$y \in B(x,r) \cap \overline{A}$$

をみたすものが存在する．$y \in \overline{A}$ より，

$$r' := r - \|y - x\|$$

とおくと，

$$\begin{aligned} B(y,r') &\subset B(x,r), \\ B(y,r') \cap A &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

である．よって，$B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ だから，$x \in \overline{A}$ である．
(2) F を A を含む任意の閉集合とすると．$A \subset F$. したがって，注意 16.1 から

$$\overline{A} \subset \overline{F} = F.$$

以上で，定理 16.7 が証明された．

定理 16.1 と定理 16.7 より，

定理 16.8. X をノルム空間，M を X 部分空間とする．このとき，M の 閉包 $\overline{M}$ は X の部分空間である．

定義 16.6. ノルム空間 X の部分集合 A が，$\overline{A} = X$ を満たすとき，集合 A は X で**稠密**であるという．

例 16.2. 有理数の全体 $\mathbf{Q}$ は，1 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ で稠密である．

例 16.3. ワイエルストラスの多項式近似定理（定理 54.1）によって，実数値係数の多項式の全体 $P(x)$ は，実数値連続関数の空間 $C[a,b]$ において稠密である．

例 16.4. 定理 9.4 において示したように，関数空間 $C_0(\mathbf{R}^n)$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, のなかで，ノルム $\|\cdot\|_p$ に関して稠密である．

定義 16.7. ノルム空間 X に稠密な可算集合が存在するとき，X は**可分**であるという．

例 16.5. 例 16.2 において，有理数の全体 $\mathbf{Q}$ は可算集合だから，1 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}$ は可分である．

例 16.6. 例 16.3 において，有理数係数の多項式の全体 $Q(x)$ は可算集合であって，実数値係数の多項式の全体 $P(x)$ において稠密である．従って，実数値連続関数の空間 $C[a,b]$ は可分である．

例 16.7. $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, は可分である．

17　ハーン・バナッハの定理

X をノルム空間とする．このとき，$X^* := \mathcal{B}(X, \mathbf{K})$ を X の**共役空間**という．この節では共役空間 X^* について調べる．
まず，最も基本的なハーン・バナッハの定理の実ベクトル空間の場合を示す：

定理 17.1 (ハーン・バナッハの定理)**.** X を実ベクトル空間，$p(x)$ を X 上の実汎関数であって，次の条件を満たすとする：

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X.$$
$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \forall x \in X,\ \forall \alpha \geq 0.$$

M を X の部分空間，$f(x)$ を M 上の実線形汎関数であって，次の条件を満たすとする：

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in M.$$

このとき，X 上の実線形汎関数 $F(x)$ であって，次の条件を満たすものが存在する：

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in M.$$
$$F(x) \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

証明. まず，証明の方針を述べる．

$$\Phi := \left\{ \varphi : \begin{array}{l} \varphi \text{ は線形汎関数で，} D(\varphi) \supset M, \\ \varphi(x) = f(x),\ \forall x \in M, \\ \varphi(x) \leq p(x),\ \forall x \in D(\varphi) \end{array} \right\}$$

とする．ただし，$D(\varphi)$ は φ の定義域を表す．$\varphi, \psi \in \Phi$ に対して，Φ における順序 $\varphi \subset \psi$ を入れる：

$$\varphi \subset \psi \iff D(\varphi) \subset D(\psi) \quad \text{かつ} \quad \varphi(x) = \psi(x),\ \forall x \in D(\varphi).$$

このとき，Φ の全順序部分集合 Ψ は，Φ において上界をもつことが示されることから，ツォルンの補題（補題 11.1）より，Φ の極大元 F が存在することがわかる．さらに，$D(F) = X$ が示され，この定理の証明が完了する．

$f \in \Phi$ より $\Phi \neq \emptyset$ である．Φ における関係 $\subset$ は，$\varphi, \psi, \chi \in \Phi$ に対して

$$\begin{array}{lll} \varphi \subset \varphi & \text{（反射律）} & \\ \varphi \subset \psi, \psi \subset \varphi \text{ ならば } \varphi = \psi & & \text{（反対称律）} \\ \varphi \subset \psi, \psi \subset \chi \text{ ならば } \varphi \subset \chi & & \text{（推移律）} \end{array}$$

をみたすことから，Φ における順序になる．

そこで，次の主張を示す：

主張 17.1. Φ の全順序部分集合 Ψ は，Φ において上界をもつ．

汎関数 g を次のように定義する．定義域を

$$D(g) := \bigcup_{\psi \in \Psi} D(\psi)$$

と定める．このとき，任意の $x \in D(g)$ に対して，$x \in D(\psi)$ となる $\psi \in \Psi$ が存在するので，その ψ でもって

$$g(x) := \psi(x), \quad \forall x \in D(\psi)$$

と定めたい．そこで，g は ψ の選び方によらないことを示す．

$\psi_1, \psi_2 \in \Psi, x \in D(\psi_1) \cap D(\psi_2)$ とする．Ψ は全順序より

$$\psi_1 \subset \psi_2 \text{or} \quad \psi_2 \subset \psi_1$$

が成り立つ．$\psi_1 \subset \psi_2$ とする．このとき

$$\psi_1(x) = \psi_2(x), \quad \forall x \in D(\psi_1) \cap D(\psi_2)$$

となる．

$\psi_2 \subset \psi_1$ の場合についても同様．したがって，g の定義は ψ によらないことがわかった．

この g は線形である．なぜなら，$x_1, x_2 \in D(g)$ に対して

$$x_1 \in D(\psi_1),\ x_2 \in D(\psi_2)$$

となる $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$ が存在する．上と同様にして，Ψ は全順序より

$$\psi_1 \subset \psi_2 \quad \text{or} \quad \psi_2 \subset \psi_1$$

である．$\psi_1 \subset \psi_2$ とする．このとき，$x_1, x_2 \in D(\psi_2)$ となるから，ψ_2 の線形性より g の線形性が出る．

$\psi_2 \subset \psi_1$ についても同様．

さらに，g の定義の仕方から

$$\begin{aligned} &f \subset g, \\ &g(x) \leq p(x), \quad x \in D(g) \end{aligned}$$

が成り立つ．

以上より，$g \in \Phi$ となり，g の定義の仕方から，g は Ψ の上界である．これで 主張 17.1 が示された．

したがって，ツォルンの補題（補題 11.1）より，Φ の極大元が少なくとも 1 つ存在する．その 1 つを F とする．このとき，極大元の定義より

$$f \subset F, \quad F \in \Phi$$

は成立しているので，あとは次の主張を示せばよい：

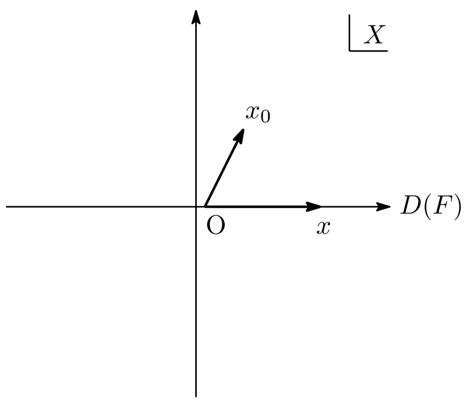
主張 17.2.

$$D(F) = X$$

背理法で示す．$D(F) \neq X$ とする．$x_0 \in X - D(F)$ をとって

$$L := \{x + sx_0 : x \in D(F),\ s \in \mathbf{R}\}$$

とおくと (常套手段！)，L は X の部分空間になる．



このとき，任意の $y \in L$ に対して

$$y = x + s\,x_0$$

と一意に書ける．そこで，任意の $c \in \mathbf{R}$ に対して，L 上の汎関数を

$$\varphi_c(x + s\,x_0) := F(x) + s\,c, \quad x + sx_0 \in L$$

と定めると，φ_c は線形で，

$$f \subset \varphi_c$$

となる．

以下，

$$\varphi_c(x + sx_0) = F(x) + s\,c \le p(x + sx_0), \quad x + s\,x_0 \in L \tag{17.1}$$

をみたす c の存在を示せば，$F \in \Phi$, $F \subset \varphi_c$, $F \neq \varphi_c$ となる．しかし，これは F の極大性に矛盾し，背理法が完了する．

そのために，(17.1) と同値なものを考える．

(1) $s = 0$ の場合：$F \in \Phi$ であることから，(17.1) はどんな $c \in \mathbf{R}$ についても成立する．

(2) $s > 0$ の場合：(17.1) は

$$\begin{aligned}
F(x) + s\,c \le p(x + sx_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s}F(x) + c \le \frac{1}{s}p(x + sx_0) \\
&\Longleftrightarrow \quad c \le p\left(\frac{x}{s} + x_0\right) - F\left(\frac{x}{s}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad c \le p\left(y + x_0\right) - F\left(y\right), \quad \forall y \in D(F) \\
&\Longleftrightarrow \quad c \le \inf_{y \in D(F)} \{p(y + x_0) - F(y)\}
\end{aligned}$$

(3) $s < 0$ の場合：(17.1) は

$$\begin{aligned}
F(x) + sc \le p(x + sx_0) \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{s}F(x) - c \le -\frac{1}{s}p(x + sx_0) \\
&\Longleftrightarrow \quad F\left(-\frac{x}{s}\right) - p\left(-\frac{x}{s} - x_0\right) \le c \\
&\Longleftrightarrow \quad F(z) - p(z - x_0) \le c, \quad \forall z \in D(F) \\
&\Longleftrightarrow \quad \sup_{z \in D(F)} \{F(z) - p(z - x_0)\} \le c
\end{aligned}$$

したがって，(17.1) をみたす c が存在するための条件は

$$\sup_{z \in D(F)} \{F(z) - p(z - x_0)\} \le \inf_{y \in D(F)} \{p(y + x_0) - F(y)\} \tag{17.2}$$

が成立することと同値である．これを示す．

そこで，任意に

$z \in D(F)$ を固定する．このとき

$$\begin{aligned}
F(y + z) \quad &\le \quad p(y + z) \\
&= \quad p(y + x_0 + z - x_0) \\
&\le \quad p(y + x_0) + p(z - x_0), \quad \forall y \in D(F)
\end{aligned}$$

が成立する．

$F(y+z) = F(y) + F(z)$ であるから

$$F(y) + F(z) \le p(y + x_0) + p(z - x_0), \quad \forall y \in D(F).$$

よって

$$F(z) - p(z - x_0) \le p(y + x_0) - F(y), \quad \forall y \in D(F)$$

となる．このとき，この両辺の y についての下限をとれば

$$F(z) - p(z - x_0) \le \inf_{y \in D(F)} \{p(y + x_0) - F(y)\}$$

となり，さらに，この両辺において，固定していた z についての上限をとれば

$$\sup_{z \in D(F)} \{F(z) - p(z - x_0)\} \le \inf_{y \in D(F)} \{p(y + x_0) - F(y)\}$$

となり，(17.2) が示され，主張 17.2 が成立する．

次に複素ベクトル空間の場合を示す．

定理 17.2 (ハーン・バナッハの定理)**.** X を複素ベクトル空間，$p(x)$ を X 上の実汎関数であって，次の条件を満たすとする：

$$\begin{aligned} &p(x) \ge 0, \quad \forall x \in X. \\ &p(x+y) \le p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X. \\ &p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

M を X の部分空間，$f(x)$ を M 上の複素線形汎関数であって，次の条件を満たすとする：

$$|f(x)| \le p(x), \quad \forall x \in M.$$

このとき，X 上の複素線形汎関数 $F(x)$ であって，次の条件を満たすものが存在する：

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x), \quad \forall x \in M. \\ |F(x)| &\le p(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

証明. α の範囲を実数に限れば，X は実ベクトル空間とみなせる．そこで，X を実ベクトル空間とし，M で定義された実数値汎関数を

$$g(x) := \mathrm{Re}\ f(x), \quad x \in M$$

と定めれば，M 上実数値線形汎関数となる．さらに

$$g(x) \le |f(x)| \le p(x), \quad x \in M$$

が成立する．したがって，実ベクトル空間のハーン・バナッハの定理（定理 17.1）より

$$\begin{aligned} G(x) &= g(x), \quad x \in M \\ G(x) &\le p(x), \quad x \in X \end{aligned}$$

となる X 上の実数値線形汎関数 G が存在する．このとき，X 上の複素数値汎関数 F を

$$F(x) := G(x) - iG(ix), \quad x \in X$$

と定める．以下，この F が求めるものであることを示す．

まず，F が f の拡張であることを示す．$x \in M$ に対して

$$
\begin{aligned}
F(x) &= g(x) - ig(ix) \\
&= \mathrm{Re}\, f(x) - i\mathrm{Re}\, f(ix) \\
&= \mathrm{Re}\, f(x) + i\mathrm{Im}\, f(x) \\
&= f(x), \quad x \in M
\end{aligned}
$$

となるので，$f \subset F$ である．

次に，F が複素線形であることを示す．F が

$$
F(x+y) = F(x) + F(y), \quad x, y \in X
$$
$$
F(\alpha x) = \alpha F(x), \quad \alpha \in \mathbf{R},\ x \in X
$$

をみたすことは，G の実線形性より明らか．さらに $x \in X$ に対して

$$
\begin{aligned}
F(ix) &= G(ix) - iG(-x) \\
&= G(ix) + iG(x) \\
&= i\{-iG(ix) + G(x)\} \\
&= i\,F(x)
\end{aligned}
$$

となるので，F の複素線形性が示された．

最後に

$$
|F(x)| \leq p(x), \quad x \in X
$$

を示す．

$F(x) = |F(x)|e^{i\theta}$ と表して

$$
\begin{aligned}
|F(x)| &= F(x)e^{-i\theta} \\
&= F(e^{-i\theta}x) \\
&= G(e^{-i\theta}x) - iG(ie^{-i\theta}x)
\end{aligned}
$$

となるが，最左辺 $|F(x)|$ は実数値なので

$$
G(ie^{-i\theta}x) = 0
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
|F(x)| &= G(e^{-i\theta}x) \\
&\leq p(e^{-i\theta}x) \\
&= |e^{-i\theta}|p(x) \\
&= p(x)
\end{aligned}
$$

となる．

18 分離定理

ノルム空間 X の共役空間 $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbf{C})$ について，次の結果が成り立つ：

定理 18.1. X をノルム空間，M を X の部分空間，$f(x)$ を M 上の有界線形汎関数とする．このとき，X 上の有界線形汎関数
$F \in X^*$ であって，次の条件を満たすものが存在する：

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in M.$$
$$\|F\| = \|f\|.$$

証明. ① まず，

$$p(x) := \|f\|\,\|x\|, \quad \forall x \in X$$

とおくと

$$\begin{aligned}
p(x) &\geq 0, \quad \forall x \in X. \\
p(x+y) &= \|f\|\,\|x+y\| \\
&\leq \|f\|\,\|x\| + \|f\|\,\|y\| \\
&= p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in X. \\
p(\alpha x) &= \|f\|\,\|\alpha x\| = |\alpha| p(x), \quad \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbf{C}.
\end{aligned}$$

また，明らかに

$$|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = p(x), \quad \forall x \in M.$$

② したがって，定理 17.2 より，X 上の複素線形汎関数 $F(x)$ であって，次の条件を満たすものが存在する：

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in M.$$
$$|F(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X.$$

よって，

$$|F(x)| \leq \|f\|\,\|x\|, \quad \forall x \in X$$

だから

$$\|F\| \leq \|f\|.$$

一方，$F(x)$ は $f(x)$ の拡張だから，

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in M \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \|F\|.$$

以上より，定理 18.1 が証明できた．

さらに，共役空間 $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbf{C})$ は豊富な元からなることが，次の定理から分かる：

定理 18.2. X をノルム空間とする．X の任意の元 $x_0 \neq 0$ に対して，有界線形汎関数 $F \in X^*$ であって，次の条件を満たすものが存在する：

$$F(x_0) = \|x_0\|.$$
$$\|F\| = 1.$$

証明. ① まず，

$$M := \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbf{C}\}.$$
$$f(\alpha x_0) := \alpha \|x_0\|, \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}$$

とおくと，

$$\|f\| = \sup_{\alpha \neq 0} \frac{|f(\alpha x_0)|}{\|\alpha x_0\|} = 1.$$

② したがって，定理 18.1 より，X 上の複素線形汎関数 $F(x)$ であって，次の条件を満たすものが存在する：

$$F(\alpha x_0) = f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|, \quad \forall \alpha \in \mathbf{C}.$$
$$\|F\| = \|f\| = 1.$$

よって，$\alpha = 1$ として

$$F(x_0) = \|x_0\|.$$

以上より，定理 18.2 が証明できた．

特に，共役空間 $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbf{C})$ は相異なる 2 点を分離することが，次の定理から分かる：

系 18.1 (分離定理)**.** X をノルム空間とする．X の任意の相異なる元 x, y に対して，有界線形汎関数 $F \in X^*$ であって，条件 $F(x) \neq F(y)$ を満たすものが存在する．

証明. $x - y \neq 0$ だから，定理 18.2 より，有界線形汎関数 $F \in X^*$ であって，次の条件を満たすものが存在する：

$$F(x) - F(y) = F(x - y) = \|x - y\| > 0.$$
$$\|F\| = 1.$$

系 18.2. X をノルム空間とする．X の任意の元 x に対して，公式

$$\|x\| = \sup_{\substack{F \in X^* \\ F \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|F\|}$$

が成り立つ．

証明. ① まず，

$$|F(x)| \leq \|F\| \, \|x\|, \quad \forall F \in X^*$$

だから

$$\sup_{\substack{F \in X^* \\ F \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \leq \|x\|.$$

② 一方，定理 18.2 より，各 $x(\neq 0) \in X$ に対して，有界線形汎関数 $G \in X^*$ で 次の条件を満たすものが存在する：

$$G(x) = \|x\|.$$
$$\|G\| = 1.$$

よって，

$$\sup_{\substack{F \in X^* \\ F \neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \geq \|x\|.$$

以上より，系 18.2 が証明できた．

19　有限次元ノルム空間

X 上の 2 つのノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は，次の条件を満たすとき，**同値である**という：

$$\exists c,\ C > 0:\quad c\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C\|x\|_1,\quad \forall x \in X.$$

有限次元ノルム空間は，同値を除いて，一意的であることを示す．より詳しく，次の定理を証明する：

定理 19.1. X を $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 上の n 次元ノルム空間とすると，X は $\mathbf{K}^n$ とノルム空間として同値である．

証明. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ の場合に定理を証明する．

$\|\cdot\|$ を X の任意のノルムとする．$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を X の基底とすると，任意の元 $x \in X$ は

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

と表されるので，新しいノルムを

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|$$

で，定義することができる．$\|\cdot\|_\infty$ がノルムの公理を満たすことは，容易に分かる．

以下，この 2 つのノルム $\|\cdot\|, \|\cdot\|_\infty$ が同値であることを示せば良い：

$$\exists a > 0:\quad \|x\| \le a\|x\|_\infty,\quad \forall x \in X, \tag{19.1}$$
$$\exists b > 0:\quad \|x\|_\infty \le b\|x\|,\quad \forall x \in X. \tag{19.2}$$

Step 1: まず，不等式 (19.1) は，

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n\| \\
&\le \|x_1e_1\| + \|x_2e_2\| + \ldots + \|x_ne_n\| \\
&= |x_1|\|e_1\| + |x_2|\|e_2\| + \ldots + |x_n|\|e_n\| \\
&\le (\|e_1\| + \|e_2\| + \ldots + \|e_n\|)\,\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

したがって，

$$a := \|e_1\| + \|e_2\| + \ldots + \|e_n\|$$

として成立する．

Step 2: 次に，不等式 (19.2) を背理法で示す．不等式が成立しないと仮定すると，

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \exists x_k \in X\quad \text{such that } \|x_k\|_\infty > k\|x_k\|.$$

そこで，

$$y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}$$

とおくと，

$$\|y_k\|_\infty = 1,\quad \|y_k\| < \frac{1}{k}.$$

特に，

$$\|y_k\| \longrightarrow 0\quad (k \to \infty). \tag{19.3}$$

一方，

$$y_k = \alpha_1^{(k)}e_1 + \alpha_2^{(k)}e_2 + \ldots + \alpha_n^{(k)}e_n$$

と仮定すると，

$$1 = \|y_k\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |\alpha_j^{(k)}|.$$

したがって，各数列 $\{\alpha_j^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ は，$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ の有界数列である．ボルツァーノ・ワイエルストラスの定理から，$\{\alpha_j^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ の適当な部分列 $\{\alpha_j^{(k_\ell)}\}_{\ell=1}^\infty$ は $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ での収束列である：

$$\alpha_j^{(k_\ell)} \longrightarrow \alpha_j \quad (\ell \to \infty).$$

そこで，

$$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

とおくと，

$$\|y_{k_\ell} - y\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |\alpha_j^{(k_\ell)} - \alpha_j| \longrightarrow 0 \quad (\ell \to \infty).$$

したがって，不等式 (19.1) から

$$\|y_{k_\ell} - y\| \longrightarrow 0 \quad (\ell \to \infty). \tag{19.4}$$

さらに，

$$\|y\|_\infty = \lim_{\ell\to\infty} \|y_{k_\ell}\|_\infty = 1.$$

特に，$y \neq 0$.

ところが，一方，(19.3) と (19.4) から，$y = 0$ が従い，矛盾である．

以上より，定理 19.1 が証明された．

系 19.1. X をノルム空間とする．X の任意の有限次元部分空間 Y は閉部分空間である．

証明. 有限次元部分空間 Y が閉であることを示すには，

$$x_k \in Y, \quad x_k \longrightarrow x \tag{19.5}$$

と仮定して，$x \in Y$ を示せばよい．

$n = \dim Y$ として，$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を Y の基底とすると，任意の元 $x \in Y$ は

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad \alpha_j \in \mathbf{K},$$

と表される．したがって，

$$x_k = \alpha_1^{(k)} e_1 + \alpha_2^{(k)} e_2 + \ldots + \alpha_n^{(k)} e_n, \quad \alpha_j^{(k)} \in \mathbf{K}$$

と表されて，ノルムの同値性から，

$$\|x_k - x_\ell\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |\alpha_j^{(k)} - \alpha_j^{(\ell)}| \longrightarrow 0 \quad (k, \ell \to \infty).$$

ところで，$\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は完備だから，

$$\exists \alpha_j \in \mathbf{K} \quad \text{such that } \alpha_j^{(k)} \longrightarrow \alpha_j \quad (k \to \infty).$$

そこで，

$$y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \in Y$$

とおくと，

$$\|x_k - y\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |\alpha_j^{(k)} - \alpha_j| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

再び，ノルムの同値性から，

$$\|x_k - y\| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty).$$

ところで，(19.5) と極限の一意性から

$$x = y \in Y$$

を得る．

以上より，系 19.1 が証明された．

20 ヒルベルト空間

複素（または実）線形空間 X が，次の条件を満たすとき，**前ヒルベルト** (pre-Hilbert) **空間**または**内積空間**と呼ぶ：順序付きの組 x と y に対して，複素数（または実数）(x,y) が対応し，以下の条件を満たす：

(I1) $(y,x) = \overline{(x,y)}$.

(I2) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y), \quad \alpha \in \mathbf{C}$ (or $\alpha \in \mathbf{R}$).

(I3) $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$.

(I4) $(x,x) \geq 0$; $(x,x) = 0 \iff x = 0$.

ここで，$\overline{(x,y)}$ は，(x,y) の複素共役数を表す．したがって，実数係数の場合，条件 (I1) は $(y,x) = (x,y)$ と簡単になる．数 (x,y) は，x と y の**内積**または**スカラー積**と呼ばれる．

条件 (I1), (I2), (I3) から，容易に，次のことが従う：

(i) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z), \quad \alpha,\, \beta \in \mathbf{C}$.

(ii) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z), \quad \alpha,\, \beta \in \mathbf{C}$.

重要な性質を，命題としてまとめておく：

命題 20.1. (1) シュワルツの不等式が成り立つ：

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)\,(y,y).$$

ここで，等号は，x と y が線形従属の場合に限って成立する．

(2) $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ は，ノルムの公理 (N1), (N2), (N3) を満たす．したがって，内積空間はノルム空間である．

(3) 内積 (x,y) は，x と y の連続関数である：

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0,\ \|y_n - y\| \longrightarrow 0 \implies (x_n, y_n) \longrightarrow (x,y).$$

(4) 中線定理が成り立つ：

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{20.1}$$

証明. (1) まず，$(x,y)\neq 0$ としてよいことに注意.

任意の複素数 α に対して，内積の公理から，

$$(\alpha x+y,\alpha x+y)=|\alpha|^2\|x\|^2+2\,\mathrm{Re}\,\alpha(x,y)+\|y\|^2\geq 0.$$

ここで，$\alpha=t\,\overline{(x,y)}$, $\forall t\in\mathbf{R}$ とおけば

$$t^2|(x,y)|^2\|x\|^2+2t|(x,y)|^2+\|y\|^2\geq 0,\quad \forall t\in\mathbf{R}.$$

これより，判別式を計算して，シュワルツの不等式

$$|(x,y)|^2\leq (x,x)\,(y,y)$$

が得られる.

(2) (N1) は (I4) から，(N2) は (I1), (I2) から従う.

(N3) はシュワルツの不等式を用いることによって得られる：

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+2\mathrm{Re}\,(x,y)+\|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$

以上により，$\|x\|=(x,x)^{1/2}$ がノルムであることが分かった.

(3) シュワルツの不等式を用いると，

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x,y)| &= |(x_n,y_n)-(x,y_n)+(x,y_n)-(x,y)|\\ &= |(x_n-x,y_n)+(x,y_n-y)|\\ &= |(x_n-x,y_n)-(x_n-x,y)+(x_n-x,y)+(x,y_n-y)|\\ &= |(x_n-x,y_n-y)+(x_n-x,y)+(x,y_n-y)|\\ &\leq \|x_n-x\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|+\|x\|\|y_n-y\|\longrightarrow 0\quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

(4) (1) や (2) と同様な計算により

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+2\mathrm{Re}\,(x,y)+\|y\|^2,\\ \|x-y\|^2 &= \|x\|^2-2\mathrm{Re}\,(x,y)+\|y\|^2\end{aligned}$$

だから，和をとると，(20.1) が得られる.

以上で，命題 20.1 が証明された.

注意 20.1. 逆に，実ノルム空間 X のノルムが，条件 (20.1) を満たすとき，

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$$

とおくと，内積の公理 (I1), (I2), (I3), (I4) を満たし，X は実内積空間になる.

複素ノルム空間 X のノルムが，条件 (20.1) を満たす場合は，

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right),\quad i=\sqrt{-1}$$

とおけば，X は複素内積空間になる.

定義 20.1. 前ヒルベルト空間が，内積から誘導されるノルムに関して完備なとき，ヒルベルト空間という．

例 20.1. $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

と定義すると，$L^2(\mathbf{R}^n)$ はヒルベルト空間である。

X と Y が同じ係数体上の内積空間とすると，直積空間 $X \times Y$ は，内積

$$(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) = (x_1, x_2) + (y_1, y_2)$$

によって，内積空間になる．さらに，X と Y がヒルベルト空間ならば，直積空間 $X \times Y$ もヒルベルト空間になる．

21 準ノルム空間

X を，実数体または複素数体 $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間とする．X 上の実数値関数 $p(\cdot)$ が，次の 3 条件を満たすとき，セミノルムと呼ばれる：

(S1) $0 \leq p(x) < \infty, \quad x \in X.$

(S2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \alpha \in \mathbf{K}, x \in X.$

(S3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X.$

$\{p_i\}$ を X 上の可算個のセミノルムの族であって，条件

(21.1) $$p_1(x) \leq p_2(x) \leq \ldots \leq p_i(x) \leq \ldots, \quad x \in X,$$

を満たしているとする．このとき，

$$V_{ij} = \left\{ x \in X : p_i(x) < \frac{1}{j} \right\}, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

と定義すれば，可算集合の族

$$x + V_{ij} = \{x + y : y \in V_{ij}\}$$

は，点 x の基本近傍系の公理を満たすことが分かる．したがって，X は第 1 可算公理を満たす位相空間になる．

さらに，次の分離条件 (21.2) を仮定すれば，距離空間になる：

定理 21.1. $\{p_i\}$ を X 上の可算個のセミノルムの族であって，条件 (21.1) を満たしているとし，次を仮定する：

(21.2) 任意のゼロでない元 $x \in X$ に対して，$p_i(x) > 0$ となるセミノルム p_i が存在する．

このとき，位相空間 X は，距離

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x - y))}{1 + p_i(x - y)}, \quad x, y \in X$$

によって，距離空間になる．また，

$$|x| = \rho(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x)}{1+p_i(x)}, \quad x \in X, \tag{21.3}$$

と定義すれば，$|x|$ は，次の性質を持つ：

(Q1) $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(Q2) $|x+y| \leq |x| + |y|, \forall x, \forall y \in X$ （**三角不等式**）.

(Q3) $\alpha_n \to 0$ in $\mathbf{K}$ ならば $|\alpha_n x| \to 0, \forall x \in X$.

(Q4) $|x_n| \to 0$ ならば $|\alpha x_n| \to 0, \forall \alpha \in \mathbf{K}$.

$|x|$ は，X の**準ノルム**と呼ばれ，位相空間 X を**準ノルム空間**という．

定理 21.1 は，次のように再定式化される：

定理 21.2. 条件 (21.1) 及び 条件 (21.2) をみたす，可算個のセミノルムの族 $\{p_i\}$ によって位相を与えられる線形空間 X は，公式 (21.3) によって定義される準ノルム $|\cdot|$ に関して，準ノルム空間になる．

準ノルム空間 X において，収束

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$$

は，$s - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ あるいは $x_n \to x$ と表記され，点列 $\{x_n\}$ は x に**強収束する**という．

X の点列 $\{x_n\}$ は，次のコーシーの条件を満たすとき，コーシー列と呼ばれる：

$$\lim_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0.$$

準ノルム空間 X の任意のコーシー列が，X の点に強収束するとき，X は完備である，という．完備な 準ノルム空間を，**フレッシェ空間**と呼ぶ．

条件 (21.1) 及び 条件 (21.2) をみたす，可算個のセミノルムの族 $\{p_i\}$ に対する言葉で述べると，以下のように定式化される：

(1) 点列 $\{x_n\}$ が点 x に強収束するための必要十分条件は，任意のセミノルム p_i と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，整数 $N = N(i,\varepsilon)$ が存在して，

$$n \geq N \Longrightarrow p_i(x_n - x) < \varepsilon.$$

(2) 点列 $\{x_n\}$ がコーシー列であるための必要十分条件は，任意のセミノルム p_i と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，整数 $N = N(i,\varepsilon)$ が存在して，

$$m, n \geq N \Longrightarrow p_i(x_m - x_n) < \varepsilon.$$

X を準ノルム空間とする．X の線形部分空間が，X の閉集合であるとき，閉部分空間という．例えば，部分空間の閉包は閉部分空間である．実際，集合 M の閉包 $\overline{M}$ の元は，M の点列の極限であるから，$x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x_n \in M$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, $y_n \in M$ とすると，

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n),$$
$$\alpha x = \lim_{n\to\infty} \alpha x_n, \quad \alpha \in \mathbf{K}$$

が従い，$x + y \in \overline{M}$ かつ $\alpha x \in \overline{M}$ を得る．

22　有界作用素

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とする．X のある部分集合 D の任意の点 x に，Y の点 Tx を対応させる写像 T を X から Y への作用素[3]という．D を作用素 T の**定義域**といい，$D(T)$ で表す．また，作用素 T の像 $\{Tx : x \in D(T)\}$ を T の**値域**といい，$R(T)$ で表す．X から Y への作用素 T の定義域 $D(T)$ が X の部分空間であり，T が，ベクトル演算を保存する，すなわち，条件

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K},\ \forall x_1, x_2 \in D(T)$$

を満たすとき，T を X から Y への**線形作用素**という．

線形作用素 T の定義される $x \in X$ の集合 $D(T)$ を T の**定義域**という．また，作用素 T の像 $R(T) = \{Tx : x \in D(T)\}$ を T の**値域**という．

$x_0 \in D(T)$ とする．x_0 に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対して，点列 $\{Tx_n\}$ が Tx_0 に収束するとき，作用素 T は点 x_0 で**連続である**という：

$$x_n \in D(T) \longrightarrow x_0 \quad \text{in } X \implies Tx_n \longrightarrow Tx_0 \quad \text{in } Y.$$

じつは，これは，次の条件と同値である：

$$\exists M > 0 : \quad \|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X, \quad \forall x \in D(T).$$

このとき，作用素 T は**有界である**という．言い換えれば，線形作用素に対しては，連続性と有界性の条件は同値になる．より詳しく，次の定理が成り立つ：

定理 22.1. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$ からノルム空間 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ への線形作用素 T に対して，次の３条件は同値である：

(1) 作用素 T は原点 0 で連続である．

(2) 作用素 T は有界である．

(3) 作用素 T はすべての点 $x_0 \in D(T)$ で連続である．

証明. ① (1) $\implies$ (2): 作用素 T が原点 0 で連続ならば，

$$\exists \delta > 0 \text{ such that } x \in D(T),\ \|x\|_X < \delta \implies \|Tx\|_Y < 1. \tag{22.1}$$

そこで，任意のゼロでない元 $x \in D(T)$ に対して，

$$z = \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|_X}$$

とおくと，

$$z \in D(T), \quad \|z\|_X = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

よって，仮定 (22.1) より，

$$\|Tz\|_Y < 1.$$

これを書き直すと，

$$\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|_X} \|Tx\|_Y < 1.$$

[3]集合 X から Y への写像 f といえば，f は X 全体で定義されているとするのが一般的である．しかし，作用素の場合には，X から Y へといっても，定義域は X 全体とは限らないとするのが習慣である．また，作用素の場合，T による x の像を $T(x)$ とは書かずに，Tx と書くのも習慣による．

したがって,
$$\|Tx\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_X, \quad \forall x \in D(T)$$
だから,T は有界である.

② (2) $\Longrightarrow$ (3): T が有界作用素ならば,
$$\exists M > 0: \quad \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in D(T).$$
特に,任意の点 $x_0 \in D(T)$ において,
$$\|Tx_n - Tx_0\|_Y = \|T(x_n - x_0)\|_Y \leq M\|x_n - x_0\|_X.$$
したがって,作用素 T はすべての点 $x_0 \in D(T)$ で連続である.

③ (3) $\Longrightarrow$ (1): 自明.

以上より,定理 22.1 が証明できた.

X から Y への有界線形作用素 T で,
$$D(T) = X$$
となるもの全体を $\mathcal{B}(X,Y)$ と書く.特に $X = Y$ の場合は $\mathcal{B}(X,X)$ の代わりに $\mathcal{B}(X)$ と書き,$T \in \mathcal{B}(X)$ を X 上の有界線形作用素という.以下,特に断らない限り,有界線形作用素といったらその定義域は X 全体であるとする.

$\mathcal{B}(X,Y)$ の元に対して,次のようにベクトル演算を定義する:
$$\begin{aligned}(T+S)x &= Tx + Sx, \quad \forall x \in X,\\ (\alpha T)x &= \alpha(Tx), \quad \forall \alpha \in \mathbf{K},\ \forall x \in X.\end{aligned}$$

さらに,$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ に対して,
$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$
を**作用素ノルム**という. 実際,$\|T\|$ はノルムの公理を満たす:

(N1) $\|T\| \geq 0$; $\|T\| = 0 \Longleftrightarrow T = 0$.

(N2) $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|, \quad \forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

(N3) $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|, \quad \forall T, \forall S \in \mathcal{B}(X,Y)$(三角不等式).

従って,$\mathcal{B}(X,Y)$ は,ノルム空間になる.

注意 22.1. ① 作用素ノルム $\|T\|$ は次の公式を満たす:
$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\\ &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y\\ &= \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y.\end{aligned}$$

② また,
$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\\ &= \inf\left\{M : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X,\ \forall x \in X\right\}.\end{aligned}$$

例 **22.1.** 実数値連続関数 $K(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$ に対して，実数値連続関数の空間 $X = C[a,b]$ における線形作用素 T を次のように定義する：

$$Tx(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds, \quad \forall x \in X.$$

このとき，

$$\|Tx\| = \max_{a \le t \le b} |Tx(t)| \le \max_{a \le t \le b} \int_a^b |K(t,s)||x(s)|\,ds \le M(b-a)\,\|x\|.$$

ただし，

$$M = \max_{a \le t,s \le b} |K(t,s)|.$$

よって，T は有界作用素であって，

$$\|T\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le M(b-a)$$

を満たす．

例 **22.2.** $X = Y = C[a,b]$ における線形作用素 T を次のように定義する：

$$D(T) = C^1[a,b] \subset X,$$
$$Tx(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \forall x \in D(T).$$

このとき，T は有界作用素ではない．

実際，

$$x_n(t) = \frac{\sin nt}{n} \in D(T), \quad n \in \mathbf{N},$$

と取れば，

$$\|x_n\| \le \frac{1}{n}$$

であるが，十分大きな n に対して，

$$\|Tx_n\| = \|\cos nt\| = 1.$$

ノルム空間 X から X への有界線形作用素からなる空間 $\mathcal{B}(X,X)$ の元 T, S に対して，その積 TS を次式で定義する：

$$(TS)x = T(Sx), \quad \forall x \in X.$$

このとき，TS は X から X 自身への線形作用素であって，

$$\begin{aligned}\|(TS)x\|_X = \|T(Sx)\|_X &\le \|T\|\,\|Sx\|_X \\ &\le \|T\|\,\|S\|\,\|x\|_X, \quad \forall x \in X\end{aligned}$$

だから，

$$\|TS\| \le \|T\|\,\|S\|$$

となり，有界作用素である．

X の各要素に自分自身を対応させる作用素 I が定義できる．これを X 上の恒等作用素という．このとき，任意の $T \in B(X,X)$ に対して

$$TI = IT = T$$

が成り立つ．

23 逆作用素

まず，次の補題に注意：

補題 23.1. ノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X)$ からノルム空間 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ への線形作用素 T に対して，次の２条件は同値である：

(1) 作用素 T は単射である．

(2) $Tx = 0 \implies x = 0$.

T が単射のとき，対応 $Tx \mapsto x$ によって定まる Y から X への作用素を T の**逆作用素**といい，T^{-1} で表す．定義から，

$$D(T^{-1}) = R(T), \quad R(T^{-1}) = D(T),$$

かつ

$$\begin{aligned} T^{-1}(Tx) &= x, \quad \forall x \in D(T), \\ T(T^{-1}y) &= y, \quad \forall y \in R(T). \end{aligned}$$

T の線形性より，$D(T^{-1})$ は Y の部分空間である．さらに，このとき，逆作用素 T^{-1} が線形であることも容易に分かる：

$$T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^{-1} y_1 + \alpha_2 T^{-1} y_2, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K},\ \forall y_1, y_2 \in D(T^{-1}).$$

簡単な例を２つ挙げる：

例 23.1. 実数値連続関数の空間 $X = Y = C[a,b]$ における線形作用素 T を次のように定義する：

$$\begin{aligned} D(T) &= C^1[a,b] \subset X, \\ Tx(t) &= \frac{dx}{dt}, \quad x \in D(T). \end{aligned}$$

このとき，T は単射でない．実際，

$$x(t) \equiv 1 \implies Tx = 0.$$

よって，T の逆作用素は存在しない．

例 23.2. そこで，$X = Y = C[a,b]$ における線形作用素 S を次のように定義する：

$$\begin{aligned} D(S) &= \left\{ x \in C^1[a,b] : x(a) = 0 \right\}, \\ Sx(t) &= \frac{dx}{dt}, \quad x \in D(S). \end{aligned}$$

このとき，明らかに，S は単射である．よって，S の逆作用素 S^{-1} は存在する．

さらに，S は全射である．実際，任意の関数 $y \in C[a,b]$ に対して，

$$x(t) = \int_a^t y(s)\, ds$$

とおけば，$x \in D(S)$, $Sx = y$ である．

また，

$$(S^{-1}y)(t) = \int_a^t y(s)\, ds$$

だから，
$$\|S^{-1}y\| = \max_{a\le t\le b}\left|\int_a^t y(s)\,ds\right| \le (b-a)\|y\|, \quad \forall y\in X.$$
したがって，逆作用素 S^{-1} は $X=Y=C[a,b]$ における有界作用素である．

次の定理は，等比級数
$$(1-r)^{-1} = \frac{1}{1-r} = \sum_{j=0}^{\infty} r^j, \quad 0<\forall r<1,$$
の関数解析版で，**ノイマン級数**と呼ばれる：

定理 23.1. T をバナッハ空間 X 上の有界線形作用素とする．もし $\|T\|<1$ ならば，逆作用素 $(I-T)^{-1}$ が存在し，有界線形作用素である．

証明. 一般に
$$\|ST\| \le \|S\|\,\|T\|$$
だから，任意の $j\in\mathbf{N}$ に対して，
$$\|T^j\| \le \|T\|^j.$$
したがって，$\|T\|<1$ ならば，
$$\sum_{j=0}^{\infty}\|T^j\| \le \sum_{j=0}^{\infty}\|T\|^j = \frac{1}{1-\|T\|} < \infty.$$
ところで，$B(X,X)$ はバナッハ空間だから，$\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ は収束し，
$$\sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \ldots + T^j + \ldots \in B(X,X).$$
I は恒等作用素：$Ix=x$ for every $x\in X$ である．

さらに，任意の $N\in\mathbf{N}$ に対して，
$$\begin{aligned}(I-T)\left(\sum_{j=0}^{N} T^j\right) &= \left(\sum_{j=0}^{N} T^j\right)(I-T) \\ &= I - T^{N+1} \longrightarrow I, \quad N\to\infty.\end{aligned}$$
したがって，
$$(I-T)\left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j\right)(I-T) = I.$$
これより，$(I-T)x=0$ とすると，$x=Ix=(\sum_{j=0}^{\infty}T^j)(I-T)x=0$ となるので，$I-T$ は単射である．ゆえに，$(I-T)^{-1}$ が定義され，
$$(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \in B(X,X)$$
を得る．

以上より，定理 23.1 が証明できた．

24　有界作用素の空間

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間とする．このとき，前節で示したように，X から Y への有界線形作用素からなる空間 $\mathcal{B}(X,Y)$ はノルム空間になるが，さらに，完備性について，次の結果が成り立つ：

定理 24.1. X をノルム空間，Y をバナッハ空間とすると，$\mathcal{B}(X,Y)$ はバナッハ空間である．

証明. ① $\{T_n\}$ を $\mathcal{B}(X,Y)$ 内の任意のコーシー列 とする．このとき，

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

だから，$\{T_n x\}$ は Y におけるコーシー列である．Y の完備性から，

$$\exists y_x \in Y \quad \text{such that } T_n x \longrightarrow y_x \quad (n \to \infty).$$

そこで，$Tx := y_x$ とおく．明らかに，T は線形である．実際，

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x_1 + \beta \lim_{n\to\infty} T_n x_2 \\ &= \alpha T x_1 + \beta T x_2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K},\ \forall x_1, x_2 \in X. \end{aligned}$$

② $T_n \to T$ in $\mathcal{B}(X,Y)$ を示す．仮定より，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{such that } n, m \geq N \implies \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

このとき，三角不等式より，

$$\|T_m\| \leq \|T_N\| + \|T_m - T_N\| < \|T_N\| + \varepsilon \tag{24.1}$$

であることに注意．

さて，

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X < \varepsilon \|x\|_X, \quad \forall x \in X$$

において，$n \to \infty$ とすると，

$$m \geq N \implies \|Tx - T_m x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X, \quad \forall x \in X. \tag{24.2}$$

したがって，不等式 (24.1), (24.2) より

$$\|Tx\|_Y \leq \|Tx - T_m x\|_Y + \|T_m x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + (\|T_N\| + \varepsilon) \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

これより，

$$\|T\| \leq 2\varepsilon + \|T_N\| < \infty$$

だから，$T \in \mathcal{B}(X,Y)$. さらに，不等式 (24.2) より，

$$m \geq N \implies \|T - T_m\| \leq \varepsilon.$$

したがって，$T_m \to T$ in $\mathcal{B}(X,Y)$ を得る．

以上より，定理 24.1 が証明できた．

24.1 連続的変形の方法

第 IV 部の小節で，ディリクレ問題に対する存在定理を証明するために，ホモトピー変形の関数解析版である次の連続的変形の方法を用いる:

定理 24.2 (連続的変形の方法)**.** $\mathcal{B}$ をバナッハ空間，$\mathcal{V}$ を線形ノルム空間とする．$\mathcal{L}_0$ と $\mathcal{L}_1$ を $\mathcal{B}$ から $\mathcal{V}$ への 2 つの有界線型作用素としたとき，$0 \leq t \leq 1$ に対して有界線型作用素の族

$$\mathcal{L}_t = (1-t)\mathcal{L}_0 + t\,\mathcal{L}_1 : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V}$$

を考える．x にも t にも依らない正の定数 C が存在して，不等式

$$\|x\|_{\mathcal{B}} \leq C\,\|\mathcal{L}_t x\|_{\mathcal{V}} \quad \text{for all } x \in \mathcal{B} \tag{24.3}$$

が成立するとする．

このとき，作用素 $\mathcal{L}_1$ が $\mathcal{B}$ から $\mathcal{V}$ への全射写像であるための必要十分条件は，作用素 $\mathcal{L}_0$ が $\mathcal{B}$ から $\mathcal{V}$ への全射写像であることである．

証明. ([13, Chapter 5, Theorem 5.2]) ある $s \in [0,1]$ に対して，作用素 $\mathcal{L}_s$ が全射であるとする．不等式 (24.3) より，$\mathcal{L}_s$ は全単射であるから，逆作用素

$$\mathcal{L}_s^{-1} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{B}$$

が存在する．ここで，作用素ノルムが一様に有界

$$\left\|\mathcal{L}_s^{-1}\right\| \leq C$$

であることに注意する．

さて，区間 $[0,1]$ の任意の点を t とする．任意の $y \in \mathcal{V}$ に対して，等式

$$\mathcal{L}_t x = y$$

は，等式

$$\mathcal{L}_s x = \mathcal{L}_t x + (\mathcal{L}_s - \mathcal{L}_t)x = y + (s-t)\,(\mathcal{L}_1 x - \mathcal{L}_0 x)$$

と同値である．ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t x = y \iff\ & x = \mathcal{L}_s^{-1}\,(y + (s-t)\,(\mathcal{L}_1 x - \mathcal{L}_0 x)) \\ \iff\ & \left(I - (s-t)\mathcal{L}_s^{-1}\,(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0)\right) x = \mathcal{L}_s^{-1} y.\end{aligned}$$

そこで，$|t-s|$ が非常に小さく，条件

$$|s-t| < \delta := \frac{1}{C\,(\|\mathcal{L}_1\| + \|\mathcal{L}_0\|)}$$

を満たすならば，不等式

$$\begin{aligned}\left\|(s-t)\,\mathcal{L}_s^{-1}\,(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0)\right\| &\leq |s-t|\,\left\|\mathcal{L}_s^{-1}\right\|\,\|\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0\| \\ &\leq C\;|s-t|\,(\|\mathcal{L}_1\| + \|\mathcal{L}_0\|) = \frac{|s-t|}{\delta} \\ &< 1\end{aligned}$$

が成立する．このとき，作用素

$$\left(I - (s-t)\,\mathcal{L}_s^{-1}\,(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0)\right)$$

は，ノイマン級数

$$\left(I-(s-t)\,\mathcal{L}_s^{-1}\left(\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_0\right)\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(s-t)^n\left(\mathcal{L}_s^{-1}\right)^n\left(\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_0\right)^n.$$

によって与えられる逆作用素をもつ (定理 23.1).

したがって，$|t-s|<\delta$ をみたす任意の $t\in[0,1]$ に対して，

$$\mathcal{L}_t x=y \iff x=\left(I-(s-t)\mathcal{L}_s^{-1}\left(\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_0\right)\right)^{-1}\mathcal{L}_s^{-1}y.$$

区間 $[0,1]$ を長さが δ 以下の有限個の区間に分割することにより，ある点 $s\in[0,1]$ において作用素 $\mathcal{L}_s$ が全射でありさえすれば，すべての点 $t\in[0,1]$ において作用素 $\mathcal{L}_t$ が全射であることが分かる．

特に，$\mathcal{L}_1$ が $\mathcal{B}$ から $\mathcal{V}$ への全単射写像であるための必要十分条件は $\mathcal{L}_0$ が $\mathcal{B}$ から $\mathcal{V}$ への全単射写像であることである．

以上で，定理 24.2 が証明できた．

25 バナッハ・シュタインハウスの定理

この節では，超関数の理論で有用なバナッハ・シュタインハウスの定理を証明する．そのための準備として，次の定理を証明する：

定理 25.1 (一様有界性の原理)**.** バナッハ空間 X 上の有界線形作用素の空間 $\mathcal{B}(X,X)$ 内の作用素列 $\{T_n\}$ が各点 $x\in X$ ごとに有界ならば，そのノルムの列 $\{\|T_n\|\}$ は一様に有界である：

$$\sup_n\|T_n x\|<\infty,\quad \forall x\in X \implies \sup_n\|T_n\|<\infty.$$

証明. 証明には，ベールの定理（定理 13.1）を使う．

Step 1: 各 T_n に対して，

$$X_N^{(n)}:=\{x\in X:\|T_n x\|\leq N\},\quad N=1,2,\ldots,$$

とおくと，$X_N^{(n)}$ は閉集合である．実際，

$$\begin{aligned}&\{x_j\}\subset X_N^{(n)},\\&x_j\longrightarrow x_0\end{aligned}$$

と仮定すると，$\|T_n x_j\|\leq N$ だから

$$\|T_n x_0\|=\lim_{j\to\infty}\|T_n x_j\|\leq N.$$

よって，$x_0\in X_N^{(n)}$.

Step 2: そこで，

$$X_N:=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}X_N^{(n)}=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\{x\in X:\|T_n x\|\leq N\}$$

とおくと，X_N は閉集合かつ凸集合である．また，仮定

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\|T_n x\|<\infty,\quad \forall x\in X$$

から，

$$X = \bigcup_{N=1}^{\infty} X_N$$

と表されることが分かる．したがって，ベールの定理（定理 13.1）より，ある X_{n_0} は内点 x_0 を含む．そこで，ある $\varepsilon > 0$ に対して

$$B(x_0, \varepsilon) := \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subset X_{n_0}$$

と仮定してよい．このとき，

主張 25.1. $B(0, \varepsilon) = \{y \in X : \|y\| < \varepsilon\} \subset X_{n_0}$.

証明. $y \in B(0, \varepsilon)$ とする．まず，

$$\|(y + x_0) - x_0\| = \|y\| < \varepsilon$$

だから，$y + x_0 \in B(x_0, \varepsilon) \subset X_{n_0}$.

次に，

$$\|(-y + x_0) - x_0\| = \|-y\| < \varepsilon$$

だから，$-y + x_0 \in B(x_0, \varepsilon) \subset X_{n_0}$. また，$X_{n_0}$ の定義式より

$$y - x_0 = -(-y + x_0) \in X_{n_0}.$$

さらに，X_{n_0} は凸集合だから，

$$y = \frac{1}{2}(y + x_0) + \frac{1}{2}(y - x_0) \in X_{n_0}.$$

これで，主張が証明できた．

Step 3: 任意の $x \ (\neq 0) \in X$ に対して，主張より

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|} \in X_{n_0}.$$

よって，

$$\left\| T_n \left(\frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq n_0, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

だから，

$$\|T_n x\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} \|x\|, \quad \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

これより，

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|T_n\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon}.$$

以上より，定理 25.1 が証明できた．

定理 25.2 (バナッハ・シュタインハウスの定理)**.** バナッハ空間 X 上の有界線形作用素の空間 $\mathcal{B}(X, X)$ 内の作用素列 $\{T_n\}$ が各点 $x \in X$ ごとに極限

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x \tag{25.1}$$

が存在すれば，そのノルムの列 $\{\|T_n\|\}$ は一様に有界であって，作用素 T は，X 上の有界線形作用素である．

証明． ① 作用素 T が線形であることは，T_n の線形性から明らかである．

② 作用素 T の有界性を示せばよい：仮定 (25.1) より，

$$\sup_n \|T_n x\| < \infty, \quad \forall x \in X.$$

したがって，一様有界性の原理（定理 25.1）より，

$$\sup_n \|T_n\| < \infty.$$

さらに，

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \left(\liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\right) \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

これより，作用素 T の有界性

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$$

を得る．

以上より，定理 25.2 が証明できた．

26 バナッハの開写像定理

次の定理は，有界作用素について最も重要な定理の一つである：

定理 26.1 (開写像定理)**．** X, Y をバナッハ空間とし，T を X から Y への有界線形作用素とする．もし T の値域 $R(T)$ が Y 全体ならば，T は X の開集合を Y の開集合に写す．

証明． 証明を 3 段階に分ける．

第 1 段：次の補題を用いる．

補題 26.1． この定理の仮定の下，

$$T\left(B_X(0,1)\right) \supset B_Y(0,\eta) \tag{26.1}$$

となるような $\eta > 0$ が存在する．すなわち，$T\left(B_X(0,1)\right)$ は原点を内点として含む．ここで，$B_X(0,1)$ は原点中心，半径 1 の X の開球である．$B_Y(0,\eta)$ も同様である．

とりあえず，この補題 26.1 を認める．このとき

$$T\left(B_X(0,\alpha)\right) \supset B_Y(0,\eta\alpha), \quad \forall \alpha > 0 \tag{26.2}$$

が成り立つ．実際，任意に $y \in B_Y(0,\eta\alpha)$ をとる．このとき $\|y\|_Y < \eta\alpha$ であるから

$$\left\|\frac{y}{\alpha}\right\|_Y < \eta$$

となる．よって

$$\frac{y}{\alpha} \in B_Y(0,\eta).$$

(26.1) より $B_Y(0,\eta) \subset T\left(B_X(0,1)\right)$ であるから

$$\frac{y}{\alpha} \in T\left(B_X(0,1)\right)$$

となる．したがって

$$Tx = \frac{y}{\alpha}, \quad \|x\|_X < 1$$

となるような $x \in B_X(0,1)$ が存在する．これより

$$T(\alpha x) = y, \quad \|\alpha x\|_X < \alpha.$$

よって

$$y \in T\left(B_X(0,\alpha)\right)$$

となり (26.2) が示された．

さて，G を X の開集合とする．以下，$T(G)$ が Y の開集合であることを示す．

任意に $y_0 \in T(G)$ をとると

$$Tx_0 = y_0$$

となるような $x_0 \in G$ が存在する．G は開集合なので

$$B_X(x_0,\delta) \subset G \tag{26.3}$$

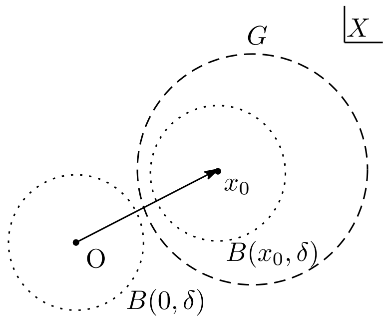
となるような $\delta > 0$ が存在する．

$$B_X(x_0,\delta) = x_0 + B_X(0,\delta)$$

と表せるので (26.3) は

$$x_0 + B_X(0,\delta) \subset G$$

となるような $\delta > 0$ が存在することと同値である．



したがって

$$T(x_0 + B_X(0,\delta)) \subset T(G),$$
$$y_0 + T\left(B_X(0,\delta)\right) \subset T(G).$$

(26.2) より

$$B_Y(0,\eta\delta) \subset T\left(B_X(0,\delta)\right)$$

だから

$$y_0 + B_Y(0,\eta\delta) \subset T(G),$$
$$B_Y(y_0,\eta\delta) \subset T(G)$$

となる．y_0 は $T(G)$ の任意の点だったので，これより $T(G)$ は Y の開集合である．

第 2 段：補題 26.1 を証明するために，次の補題を示す：

補題 26.2. $\overline{T(B_X(0,1))} \supset B_Y(0,\rho)$ となるような $\rho > 0$ が存在する．

証明． T は全射なので

$$
\begin{aligned}
Y &= TX \\
&= T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0,n)\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0,n)) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_X(0,n))}
\end{aligned}
$$

であるから，ベールの定理（定理 13.1）より

$$
\overline{T(B_X(0,n_0))} \supset B_Y(y_0,\delta) \tag{26.4}
$$

となるような $y_0 \in Y$, $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在する．任意に $y \in B_Y(0,\delta)$ をとる．$y = (y+y_0) - y_0$ と表すと

$$
y + y_0 \in B_Y(y_0,\delta), \quad y_0 \in B_Y(y_0,\delta).
$$

よって (26.4) より

$$
y_k \longrightarrow y + y_0, \quad y'_k \longrightarrow y_0 \quad (k \to \infty)
$$

となるような点列 $\{y_k\}$, $\{y'_k\} \subset T(B_X(0,n_0))$ が存在する．よって $\{y_k - y'_k\} \subset T(B_X(0,2n_0))$ であるから，$k \to \infty$ として

$$
y \in \overline{T(B_X(0,2n_0))}.
$$

したがって

$$
B_Y(0,\delta) \subset \overline{T(B_X(0,2n_0)}.
$$

よって

$$
B_Y\left(0,\frac{\delta}{2n_0}\right) \subset \overline{T(B_X(0,1))}.
$$

このとき，

$$
\rho := \frac{\delta}{2n_0}
$$

とおけばよい．これで，補題 26.2 が証明された．

第 3 段：最後に，補題 26.1 を証明する．

$$
\eta := \frac{\rho}{2}
$$

とおけばよいことを示す．すなわち，任意に $y \in B_Y(0,\rho)$ をとるとき

$$
Tx = y
$$

となるような $x \in B_X(0,2)$ が存在することを示す．

そこで，

$$
\varepsilon_k := 2^{-k} \quad (k = 0, 1, \ldots)
$$

とおく．補題 26.2 より

$$
y \in B_Y(0,\rho) \subset \overline{T(B_X(0,1))}
$$

が成り立つ．よって

$$\|y - Tx_0\|_Y < \varepsilon_1 \rho$$

となるような $x_0 \in B_X(0,1)$ が存在する．このとき，再び先の補題より

$$y - Tx_0 \in B_Y(0, \varepsilon_1 \rho) \subset \overline{T(B_X(0, \varepsilon_1))}$$

が成り立つ．よって

$$\|(y - Tx_0) - Tx_1\|_Y < \varepsilon_2 \rho$$

となるような $x_1 \in B_X(0, \varepsilon_1)$ が存在する．

以下，この作業を繰り返して

$$\|(y - Tx_0 - \ldots - Tx_{k-1}) - Tx_k\|_Y < \varepsilon_{k+1} \rho \tag{26.5}$$

となるような $x_k \in B_X(0, \varepsilon_k)$ が存在する．このようにして点列 $\{x_k\}$ を得る．このとき，任意の $N \in \mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} \|x_k\|_X &< \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k \\ &\longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \quad (N \to \infty) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

となるので

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

は絶対収束する．その収束値を x とすると，$\|x\|_X < 2$ であるので

$$x \in B_X(0, 2).$$

また，T の連続性より

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k\right) \\ &= T\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} x_k\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{k=0}^{N} x_k\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} Tx_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Tx_k \end{aligned}$$

なので，(26.5) で $k \to \infty$ とすると

$$\|y - Tx\|_Y \longrightarrow 0.$$

よって，$y = Tx$ となる．以上から，この補題 26.1 は示された．

次の定理は，偏微分方程式論において極めて有用な定理である：

系 26.1. X, Y をバナッハ空間とし，T を X から Y への有界線形作用素とする．T が全単射ならば，T の逆作用素 T^{-1} も有界である．

証明. 逆作用素 T^{-1} の連続性（有界性）を示すには，T^{-1} の逆写像が開写像であることを調べればよい．ところが，$(T^{-1})^{-1} = T$ は，定理 26.1 より，開写像である．

27 閉作用素

有界作用素の拡張として，閉作用素を定義する．
標語的に言えば，

関数解析学	微分方程式論
有界作用素	積分作用素
閉作用素	微分作用素

定義 27.1. X, Y をバナッハ空間とし，T を X から Y への線形作用素とする．また，T の定義域を $D(T)$ とする．T が**閉作用素** (closed operator) であるとは，T の**グラフ**

$$G(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$

が積空間 $X \times Y$ で閉部分空間であるときをいう．言い換えると，任意の $x_n \in D(T)$ に対して，

$$\begin{aligned} x_n &\longrightarrow x \quad \text{in } X, \\ Tx_n &\longrightarrow y \quad \text{in } Y \end{aligned}$$

を満たすならば，

$$x \in D(T), \quad Tx = y$$

となることである．
特に，$D(T)$ が X の閉部分空間となる X から Y への有界線形作用素 T は閉作用素である．

例 27.1. 例 22.2 において見たように，$X = Y = C[a, b]$ における線形作用素 T を

$$\begin{aligned} D(T) &= C^1[a, b] \subset X, \\ Tx(t) &= \frac{dx}{dt}, \quad \forall x \in D(T) \end{aligned}$$

と定義すると，T は有界作用素ではない．
T が閉作用素であることを示す．$x_n \in D(T)$, $x_n \to x$, $Tx_n \to y$, すなわち，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| &= \lim_{n\to\infty} \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x(t)| = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - y\| &= \lim_{n\to\infty} \max_{a \le t \le b} \left| \frac{dx_n(t)}{dt} - y(t) \right| = 0 \end{aligned}$$

とする．

$$x_n(t) = x_n(a) + \int_a^t \frac{dx_n(s)}{ds}\, ds, \quad a \le t \le b,$$

において，$n \to \infty$ とすると，

$$x(t) = x(a) + \int_a^t y(s)\,ds, \quad a \leq t \leq b.$$

$y \in C[a,b]$ だから，$x \in C^1[a,b]$ であり，

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t), \quad a \leq t \leq b.$$

すなわち，

$$x \in D(T), \quad Tx = \frac{dx}{dt} = y$$

となり，T は閉作用素である．

28　バナッハの閉グラフ定理

次の定理は，閉作用素について最も重要な定理である：

定理 28.1 (閉グラフ定理)**.** X, Y をバナッハ空間とし，T を X から Y への閉作用素とする．もし T の定義域 $D(T)$ が X 全体ならば，T は有界作用素である．

証明. T のグラフ

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$

は，バナッハ空間 $X \times Y$ の閉部分空間であるから，それ自身バナッハ空間である．そこで，次の線形作用素 J を考える：

$$\begin{aligned} J : G(T) &\longrightarrow X \\ (x, Tx) &\longmapsto x \end{aligned}$$

ここで，仮定より $D(T) = X$ だから，J は 全単射かつ有界である．

したがって，系 26.1 より，逆作用素 J^{-1} は有界である．すなわち，

$$\exists M > 0 : \quad \|(x, Tx)\| = \|J^{-1}x\| \leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

これより，

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &\leq \|(x, Tx)\| \\ &\leq M\|x\|_X, \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

が従い，T は有界作用素である．

系 26.1 は，次のように一般化される：

系 28.1. X, Y をバナッハ空間とし，T を X から Y への閉作用素とする．T が全単射ならば，T の逆作用素 T^{-1} も有界である．

証明. グラフ $G(T)$ とグラフ $G\left(T^{-1}\right)$ が同相であることは，次の関係式から分かる：

$$\begin{aligned} &G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}, \\ &G\left(T^{-1}\right) = \left\{\left(y, T^{-1}y\right) : y \in R(T)\right\} = \{(Tx, x) : x \in D(T)\right\}. \end{aligned}$$

したがって，逆作用素 T^{-1} も閉作用素である．

さらに，仮定から

$$D\left(T^{-1}\right) = R(T) = Y$$

だから，定理 28.1 より，T^{-1} は有界作用素である．

29　ヒルベルト空間における共役作用素

ヒルベルト空間 X からヒルベルト空間 Y への線形作用素 T の定義域 $D(T)$ が X で稠密であるとする．このとき，Y^* の元 g で

$$g(Tx) = f(x), \quad \forall x \in D(T) \tag{29.1}$$

となる $f \in X^*$ が存在するようなものの全体を定義域 $D(T^*)$ とし，

$$T^* g = f \in X^*$$

と Y^* から X^* への線形作用素 T^* を定める．この作用素 T^* を T の**共役作用素**という．

ここで，$g \in Y^*$ に対して，等式 (29.1) をみたす $f \in X^*$ は一意に定まることを示す．$f_1, f_2 \in X^*$ に対して等式 (29.1) が成り立つとする：

$$g(Tx) = f_1(x) = f_2(x), \quad \forall x \in D(T). \tag{29.2}$$

定義域 $D(T)$ は X で稠密だから，任意の $x \in X$ に対して，$x_n \to x$ となるような点列 $x_n \in D(T)$ が存在する．このとき，等式 (29.2) と f_1, f_2 の連続性により，

$$f_1(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = f_2(x).$$

ここで，x は X の任意の点だから，$f_1 = f_2$ となり一意に定まることが示せた．

T が有界線形作用素で，$D(T) = X$ の場合，任意の $g \in Y^*$ に対して，

$$f(x) = g(Tx)$$

とおくと，$f \in X^*$ となる．すなわち，(29.1) をみたす f が存在するから，$D(T^*) = Y^*$ である．

また，後出のリースの定理（定理 32.2）より，$f \in X^*$ に対して，

$$f(x) = (x, \xi), \quad \forall x \in X$$

となる $\xi \in X$ がただ一つ存在する．同様に，$g \in Y^*$ に対して，

$$g(y) = (y, \eta), \quad \forall y \in Y$$

となる $\eta \in Y$ がただ一つ存在する．よって，(29.1) は，

$$(Tx, \eta) = (x, \xi), \quad \forall x \in D(T)$$

となる．$\xi = T^*\eta$ だから，

$$(Tx, \eta) = (x, T^*\eta), \quad \forall x \in D(T),\ \forall \eta \in D(T^*).$$

特に，

$$D(T^*) = D(T), \quad Tx = T^*x, \quad \forall x \in D(T)$$

が成り立つとき，T を**自己共役作用素**という．

30 ヒルベルト空間における強収束と弱収束

ヒルベルト空間における２つの収束性を定義する：

定義 30.1. X をヒルベルト空間とする．

$$\|\varphi_j - \varphi\| \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は φ に**強収束する**という．記号では，

$$\varphi_j \longrightarrow \varphi$$

とかく．

また，すべての $\psi \in X$ に対して，

$$(\varphi_j, \psi) \longrightarrow (\varphi, \psi) \quad (j \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ は φ に**弱収束する**という．記号では，

$$\varphi_j \rightharpoonup \varphi$$

とかく．

注意 30.1. 共鳴定理（定理 33.1）より，弱収束列は有界であることに注意．すなわち，

$$\varphi_j \rightharpoonup \varphi \Longrightarrow \sup_j \|\varphi_j\| < \infty.$$

31 直交補空間

X を内積空間とする．X の２つの元 x, y が，条件

$$(x, y) = 0$$

を満たすとき，x と y は**直交する**といい，

$$x \perp y$$

と表す．

次の事実は，容易に分かる：

$$\begin{aligned} x \perp y &\iff y \perp x. \\ x \perp x &\iff x = 0. \end{aligned}$$

内積空間 X の部分集合 A に対して，その**直交補空間** $A^{\perp}$ を，次式で定義する：

$$A^{\perp} := \{x \in X : (x, y) = 0,\ \forall y \in A\}.$$

言い換えれば，$A^{\perp}$ は，集合 A のすべての元と直交する X の元の全体である．

次の性質は，定義から容易に従う：

(1) 直交補空間 $A^{\perp}$ は部分空間である．

(2) $A \subset B \implies B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

(3) $A \cap A^{\perp} = \{0\}$.

(4) 直交補空間 $A^{\perp}$ は閉じている．

より詳しく，

命題 31.1. 内積空間 X の部分集合 A に対して，

$$A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}.$$

ただし，$\overline{A}$ は，A の閉包である．

証明. まず，$A \subset \overline{A}$ だから，

$$A^{\perp} \supset \overline{A}^{\perp}.$$

逆に，$u \in A^{\perp}$ とすると，

$$\forall w \in \overline{A}, \quad \exists \{w_n\} \subset A \quad \text{such that } w_n \longrightarrow w$$

であり，内積の連続性（命題 20.1 (3)）より，

$$(u, w) = \lim_{n \to \infty} (u, w_n) = 0.$$

よって，

$$u \in \overline{A}^{\perp}.$$

すなわち，

$$A^{\perp} \subset \overline{A}^{\perp}.$$

注意 31.1. $[A]$ を，集合 A によって生成される部分空間とすると，実は

$$A^{\perp} = \overline{A}^{\perp} = [A]^{\perp}.$$

命題 31.2. 内積空間 X の部分集合 A に対して，

$$A^{\perp\perp} = \overline{[A]}.$$

証明. 明らかに $A \subset A^{\perp\perp}$ であり，$A^{\perp\perp}$ は閉部分空間だから，$\overline{[A]} \subset A^{\perp\perp}$. ところが，命題 31.1 と注意 31.1 より，

$$A^{\perp\perp} = [A]^{\perp\perp} = \overline{[A]}^{\perp\perp}.$$

よって，

$$\overline{[A]} \subset \overline{[A]}^{\perp\perp}.$$

もし，$\overline{A} \subsetneq (\overline{A}^{\perp})^{\perp}$ とすると，

$$\exists w \ (\neq 0) \in \overline{A}^{\perp} \quad \text{such that } w \perp \overline{A}.$$

この事実は，正確には，後出の定理 32.1 を用いて証明される．

このとき，w は自分自身と直交するからゼロベクトルとなり，矛盾:

$$0 < \|w\|^2 = (w, w) = 0.$$

したがって，

$$\overline{A} \supset (\overline{A}^{\perp})^{\perp}.$$

命題 31.3. T をヒルベルト空間 H から H への有界線形作用素とすると，

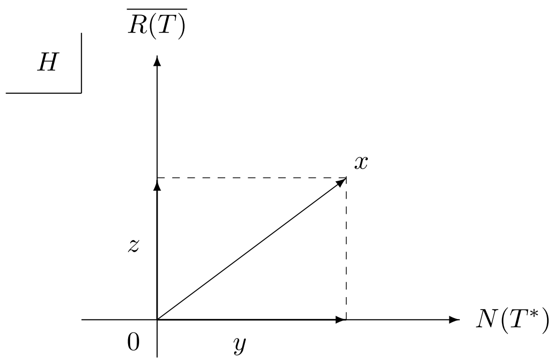
$$H = N(T^*) \oplus \overline{R(T)}.$$

すなわち，任意の $x \in H$ は，

$$x = y + z, \quad y \in N(T^*), \quad z \in \overline{R(T)}$$

と一意的に直交分解できる．ここで，T^* は，T の共役作用素であり，

$$\begin{aligned} N(T^*) &= \{x : T^*x = 0\}, \\ R(T) &= \{Tx : x \in H\}. \end{aligned}$$



証明. T は有界線形作用素だから，T^* も有界線形作用素であり，$N(T^*)$ は H の閉部分空間である．よって，後出の射影定理（定理 32.1）より，$N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$ を証明すればよい．

$z \in R(T)$ とすると，$z = Tx$ となる $x \in H$ が存在する．任意の $y \in N(T^*)$ に対して，

$$(z, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) = 0$$

だから，$z \in N(T^*)^\perp$ となる．すなわち，$R(T) \subset N(T^*)^\perp$ だから，

$$\overline{R(T)} \subset N(T^*)^\perp.$$

一方，

$$\begin{aligned} w \in R(T)^\perp \quad &\Longrightarrow \quad 0 = (w, Tu) = (T^*w, u), \quad \forall u \in H \\ &\Longrightarrow \quad T^*w = 0 \end{aligned}$$

より，

$$R(T)^\perp \subset N(T^*).$$

したがって，命題 31.2 より

$$\overline{R(T)} = R(T)^{\perp\perp} \supset N(T^*)^\perp.$$

以上より，

$$N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}.$$

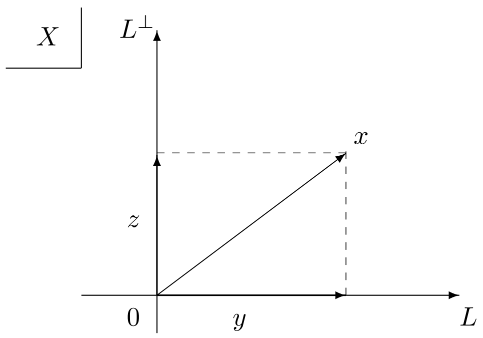
32　リースの定理とラックス・ミルグラムの定理

直交性に関して，ヒルベルト空間 X の中に閉部分空間 L が与えられたとき，L と L に直交する閉部分空間 $L^{\perp}$ に X が分解される重要な定理がある．この定理は，後のリースの定理の証明の際に用いられる．

定理 32.1 (射影定理)**.** L を ヒルベルト空間 X の閉部分空間とする．このとき，任意の $x \in X$ は，

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^{\perp}$$

と一意的に直交分解できる．x を y に対応させる作用素を L 上への射影作用素といい，$P(L)$ で表す．



証明. まず

$$\delta = \inf_{\xi \in L} \|x - \xi\|, \quad \forall x \notin L$$

とおくと，

$$\|x - \xi_n\| \longrightarrow \delta, \quad \xi_n \in L \tag{32.1}$$

となる点列 $\{\xi_n\}$ が存在する．中線定理（命題 20.1 (4)）より，

$$\|(x - \xi_n) + (x - \xi_m)\|^2 + \|(x - \xi_n) - (x - \xi_m)\|^2 = 2\|x - \xi_n\|^2 + 2\|x - \xi_m\|^2. \tag{32.2}$$

$\frac{1}{2}(\xi_n + \xi_m) \in L$ だから，δ の定義より，

$$\delta \leq \left\| x - \frac{\xi_n + \xi_m}{2} \right\|. \tag{32.3}$$

よって，(32.2), (32.3) より，

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad \|\xi_n - \xi_m\|^2 \quad &= \quad 2\|x - \xi_n\|^2 + 2\|x - \xi_m\|^2 - 4\left\| x - \frac{\xi_n + \xi_m}{2} \right\|^2 \\ &\leq \quad 2\|x - \xi_n\|^2 + 2\|x - \xi_m\|^2 - 4\delta^2 \ (\equiv \alpha_{n,m}). \end{aligned}$$

(32.1) を考慮すると，n, $m \to \infty$ のとき，$\alpha_{n,m} \to 0$.

ゆえに，

$$\|\xi_n - \xi_m\| \longrightarrow 0$$

となり，$\{\xi_n\}$ はある $y \in X$ に収束する．L は閉だから，$y \in L$. また，

$$\|x-\xi_n\| \longrightarrow \|x-y\|$$

だから，(32.1)より，

$$\delta = \|x-y\|.$$

ここで，$z = x-y$ とおき，$z \in L^\perp$ を示す．

$\xi \in L$ に対して，

$$\varphi(t) = \|z-\gamma t\xi\|^2, \quad t \in \mathbf{R}$$

とおく．ただし，$\gamma = (z,\xi)$ である．$y+\gamma t\xi \in L$ だから，δ の定義より，

$$\delta^2 = \varphi(0) \le \varphi(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

一方，

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \|z\|^2 - \overline{\gamma}(z,\xi)t - \gamma(\xi,z)t + |\gamma|^2\|\xi\|^2t^2 \\ &= \|z\|^2 - 2|\gamma|^2t + |\gamma|^2\|\xi\|^2t^2.\end{aligned}$$

もし，$\gamma \ne 0$ ならば，$t > 0$ が十分小さいとき，

$$\varphi(t) < \varphi(0) = \delta^2$$

となり，矛盾である．

よって，$\gamma = 0$. すなわち，

$$(z,\xi) = (x-y,\xi) = 0, \quad \forall\xi \in L$$

となり，$z \in L^\perp$. このようにして，

$$x = y+z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp$$

と直交分解できることが示せた．

直交分解の一意性に関しては，

$$x = y+z = y'+z', \quad y,y' \in L, \quad z,z' \in L^\perp$$

と分解されているとすると，

$$y-y' = z'-z.$$

$z'-z \in L^\perp$ より，

$$\|y-y'\|^2 = (z'-z, y-y') = 0.$$

よって，$y = y'$. これより，$z = z'$. したがって，分解は一意的であることが示せた．

ヒルベルト空間論で最も基本的な定理は，リースの表現定理である．直観的には，ヒルベルト空間における有界線形汎関数は超平面に対応し，その法線ベクトルとの内積（1次結合式）で表現できることを主張している：

定理 32.2 (リースの表現定理). X をヒルベルト空間とし，f を X 上の有界線形汎関数とする．このとき，

(32.4)
$$f(x) = (x,y), \quad \forall x \in X$$

となる $y \in X$ がただ一つ存在する．さらに，

(32.5)
$$\|f\| = \|y\|.$$

証明. (32.4) に関して：$f = 0$ のときは，$y = 0$ ととればよい．
そこで $f \neq 0$ のときを考える．

$$N = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

とすれば，N は X の閉部分空間である．実際，$x_n \in N$，$x_n \to x$ とすれば，$f(x)$ の連続性より，

$$f(x_n) \longrightarrow f(x).$$

$x_n \in N$ より，$f(x_n) = 0$ だから $f(x) = 0$ となり，$x \in N$ となる．よって，N は閉である．$N \neq X$ だから，定理 32.1 より，

$$X = N \oplus N^{\perp}$$

と直交分解できる．
$N^{\perp}$ の元 $y_0 \neq 0$ をとると，任意の $x \in X$ に対して，

$$f(y_0)x - f(x)y_0 \in N$$

だから，

$$(f(y_0)x - f(x)y_0, y_0) = 0.$$

ゆえに，

$$f(y_0)(x, y_0) - f(x)\|y_0\|^2 = 0.$$

両辺を $\|y_0\|^2$ で割ると，

$$f(x) = \left(x, \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0\right).$$

よって，

$$y = \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0$$

とおけば，

$$f(x) = (x, y), \quad \forall x \in X.$$

一意性に関しては，$f(x) = (x, y) = (x, y')$ とすると，

$$(x, y - y') = 0.$$

ここで，$x = y - y'$ とおくと，$y = y'$ となり一意性が示せる．
(32.5)に関して：$\|x\| = 1$ に対して，シュワルツの不等式（命題 20.1 (1)）より，

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| = \|y\|.$$

よって，

$$\|f\| \leq \|y\|. \tag{32.6}$$

また，$f(x) = (x, y)$ において，$x = y/\|y\|$ ととれば，

$$\|y\| = \frac{f(y)}{\|y\|} = f(x) \leq \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|. \tag{32.7}$$

したがって，(32.6), (32.7) より，

$$\|f\| = \|y\|.$$

以上より，定理 32.2 が証明できた．

次のラックス・ミルグラムの定理は，リースの表現定理における内積を双 1 次形式に置き換えた拡張版である．偏微分方程式の超関数解の存在定理を証明する際に，リースの表現定理は，ラプラス作用素の場合にしか適用できない．それに対して，ラックス・ミルグラムの定理は，より一般の楕円型境界値問題の場合に適用できる強力な定理である：

定理 32.3 (ラックス・ミルグラムの定理)**.** X をヒルベルト空間とする．また，$B(\cdot,\cdot)$ を $X\times X$ から $\mathbf{C}$ への双 1 次形式 (sesqui-linear), すなわち，

$$B(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha B(x_1,y)+\beta B(x_2,y),\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbf{C},\ \forall x_1,x_2,y\in X,$$
$$B(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\overline{\alpha}B(x,y_1)+\overline{\beta}B(x,y_2),\quad \forall\alpha,\beta\in\mathbf{C},\ \forall x,y_1,y_2\in X$$

とし，さらに，

$$|B(x,y)|\le c_1\|x\|\,\|y\|,\quad \forall x,y\in X \tag{32.8}$$
$$|B(x,x)|\ge c_2\|x\|^2,\quad \forall x\in X \tag{32.9}$$

を満たすような定数 $c_1>0$, $c_2>0$ が存在するとする．このとき，任意の $f\in X^*$ に対して，

$$B(x,\widetilde{y})=f(x),\quad \forall x\in X$$

となる $\widetilde{y}\in X$ がただ一つ存在する．

証明． 今，$y\in X$ を固定すると，

$$X\ni x\longmapsto F_y(x)=B(x,y)\in\mathbf{C}$$

で，(32.8)より，

$$|F_y(x)|=|B(x,y)|\le c_1\|x\|\,\|y\|.$$

ここで，$x\to 0$ とすると $F_y(x)\to 0$ だから，$F_y(x)$ は連続線形汎関数である．したがって，リースの表現定理（定理 32.2）より，

$$B(x,y)=F_y(x)=(x,z),\quad \forall x\in X$$

となるような $z\in X$ がただ一つ存在する．よって，$z=Ty$ とおくと，

$$B(x,y)=(x,T(y)).$$

このとき，X から X への作用素 T は線形で，(32.8) において $x=Ty$ とすると，

$$\|Ty\|\le c_1\|y\|.$$

また，(32.9) より，

$$c_2\|y\|^2\le|B(y,y)|=|(y,Ty)|\le\|y\|\,\|Ty\|.$$

したがって，

$$c_2\|y\|\le\|Ty\|\le c_1\|y\|. \tag{32.10}$$

このことから T は単射で，$T(X)$ は X の閉部分空間であることがわかる．実際，$T(X)$ が X の閉部分空間であることは，$\{Ty_n\}\subset X$, $Ty_n\to z$ とするとき，

$$z=Ty\in T(X)$$

となる $y \in X$ が存在することを示せばよい．
(32.10) の左の不等式より，

$$c_2\|y_n - y_m\| \le \|T(y_n - y_m)\| \longrightarrow 0$$

だから，

$$\exists y \in X: \quad y_n \longrightarrow y.$$

よって，(32.10) の右の不等式より，T は連続だから，

$$Ty_n \longrightarrow Ty$$

となる．以上より，$z = Ty \in T(X)$ となるので，$T(X)$ は X の閉部分空間である．

主張 32.1. $T(X) = X$.

証明. $T(X) \neq X$ とする．$T(X)$ は閉部分空間だから $X = T(X) \oplus T(X)^{\perp}$ なので，$z \in T(X)^{\perp}$ となるような $z \neq 0$ が存在する．このとき，

$$(z, T(y)) = 0, \quad \forall y \in X.$$

ここで，$y = z$ とすると，

$$|(z, T(z))| = |B(z, z)| \ge c_2\|z\|^2 > 0$$

となり矛盾である．

この主張より，作用素 T は全単射だから，逆作用素が存在して，

$$f(x) = (x, y_f) = B(x, T^{-1}y_f), \quad y_f \in X$$

となり，$\widetilde{y} = T^{-1}y_f$ ととればよい．
以上より，定理 32.3 が証明できた．

33 共鳴定理

ゲルファントによる次の定理は，バナッハ・シュタインハウスの定理 25.2 のヒルベルト空間版である：

定理 33.1 (共鳴定理)**.** H をヒルベルト空間，B を部分集合とする．このとき，B が弱有界ならば強有界である．すなわち，

$$\sup_{x_\alpha \in B} |(x_\alpha, x)| < \infty, \quad \forall x \in H \Longrightarrow \sup_{x_\alpha \in B} \|x_\alpha\| < \infty.$$

証明. 証明には，ベールの定理（定理 13.1）を使う．
Step 1: 各 x_α に対して，

$$H_n^\alpha := \{x \in H : |(x_\alpha, x)| \le n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

とおくと，H_n^α は閉集合である．実際，

$$\{x_j\} \subset H_n^\alpha,$$
$$x_j \longrightarrow x_0$$

と仮定すると，$|(x_\alpha, x_j)| \leq n$ だから

$$|(x_\alpha, x_0)| = \lim_{j\to\infty} |(x_\alpha, x_j)| \leq n.$$

よって，$x_0 \in H_n^\alpha$.

Step 2: そこで，

$$H_n := \bigcap_{x_\alpha \in B} H_n^\alpha = \bigcap_{x_\alpha \in B} \{x \in H : |(x_\alpha, x)| \leq n\}$$

とおくと，H_n は閉集合かつ凸集合である．また，仮定

$$\sup_{x_\alpha \in B} |(x_\alpha, x)| < \infty, \quad \forall x \in H$$

から，

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$$

と表されることが分かる．したがって，ベールの定理（定理 13.1）より，ある H_{n_0} は内点 x_0 を含む．そこで，ある $\varepsilon > 0$ に対して

$$B(x_0, \varepsilon) := \{x \in H : \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subset H_{n_0}$$

と仮定してよい．このとき，

主張 33.1. $B(0, \varepsilon) = \{y \in H : \|y\| < \varepsilon\} \subset H_{n_0}$.

証明. $y \in B(0, \varepsilon)$ とする．まず，

$$\|(y + x_0) - x_0\| = \|y\| < \varepsilon$$

だから，$y + x_0 \in B(x_0, \varepsilon) \subset H_{n_0}$.

次に，

$$\|(-y + x_0) - x_0\| = \|-y\| < \varepsilon$$

だから，$-y + x_0 \in B(x_0, \varepsilon) \subset H_{n_0}$. また，明らかに

$$y - x_0 = -(-y + x_0) \in H_{n_0}.$$

さらに，H_{n_0} は凸集合だから，

$$y = \frac{1}{2}(y + x_0) + \frac{1}{2}(y - x_0) \in H_{n_0}.$$

これで，主張が証明できた．

Step 3: 任意の $x\ (\neq 0) \in H$ に対して，主張より

$$\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{x}{\|x\|} \in H_{n_0}.$$

よって，

$$\left|\left(x_\alpha, \frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq n_0, \quad \forall x_\alpha \in B$$

だから，

$$|(x_\alpha, x)| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon}\|x\|, \quad \forall x_\alpha \in B.$$

特に，$x := x_\alpha$ と選べば，

$$\sup_{x_\alpha \in B} \|x_\alpha\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon}.$$

以上より，定理 33.1 が証明できた．

34　ヒルベルト空間の弱コンパクト性定理

ヒルベルト空間の弱コンパクト性定理は，実数に対するボルツァーノ・ワイエルストラスの定理のヒルベルト空間版である：

実数論	数列	ボルツァーノ・ワイエルストラスの定理
ヒルベルト空間論	点列	弱コンパクト性定理

定理 34.1 (弱コンパクト性定理)**.** (i) $\{x_n\}$ をヒルベルト空間 X の点列とし，$\{\|x_n\|\}$ は有界列であるとする．このとき，$\{x_n\}$ の適当な部分列 $\{x_{n'}\}$ が存在して $\{x_{n'}\}$ は弱収束する．

(ii) ヒルベルト空間 X の点列 $\{x_n\}$ が $x_0 \in X$ に弱収束し，かつ

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$$

を満たすとすると，$\{x_n\}$ は x_0 に強収束する．

証明. (ii) 内積の定義より，

$$\begin{aligned}\|x_n - x_0\|^2 &= (x_n - x_0, x_n - x_0) \\ &= \|x_n\|^2 - (x_n, x_0) - (x_0, x_n) + \|x_0\|^2.\end{aligned}$$

$n \to \infty$ とすると，仮定から

$$\|x_n - x_0\|^2 \longrightarrow \|x_0\|^2 - 2(x_0, x_0) + \|x_0\|^2 = 0.$$

(i) L をヒルベルト空間 X の閉部分空間とする．任意の $z \in X$ に対して，$y = P(L)z$ とおけば，$x_n \in L$ に対して，

$$(x_n, z) = (P(L)x_n, z) = (x_n, P(L)z) = (x_n, y)$$

となるから，X を可分なヒルベルト空間として考えてよい．また，$\|x_n\| \leq 1$ としても一般性を失わない．

さて，$\{y_m\}$ を X の稠密な部分集合とする．

$$|(x_n, y_m)| \leq \|x_n\|\,\|y_m\| \leq \|y_m\|$$

より，各 y_m に対して $\{(x_n, y_m)\}_{n=1,2,\ldots}$ は有界列である．以下，対角線論法により，適当な部分列 $\{x_{n'}\}$ を選んで，すべての y_m に対して有限な $\lim_{n\to\infty}(x_{n'}, y_m)$ が存在するようにする．ボルツァーノ・ワイエルストラスの定理より，有界列 $\{(x_n, y_1)\}_{n=1,2,\ldots}$ から収束する部分列

$$(x_{11}, y_1),\ (x_{21}, y_1),\ (x_{31}, y_1),\ \ldots$$

を選ぶ．

同じく有界列

$$(x_{11}, y_2),\ (x_{21}, y_2),\ (x_{31}, y_2),\ \ldots$$

から収束する部分列

$$(x_{12}, y_2),\ (x_{22}, y_2),\ (x_{32}, y_2),\ \ldots$$

を選ぶ．

以下同様にして，有界列

$$(x_{1,h-1}, y_h),\ (x_{2,h-1}, y_h),\ (x_{3,h-1}, y_h),\ \ldots$$

から収束する部分列

$$(x_{1,h}, y_h),\ (x_{2,h}, y_h),\ (x_{3,h}, y_h),\ \ldots$$

を選ぶ．そして，$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n'}\}$ を

$$x_{n'} = x_{n,n}$$

と対角線的に選ぶとき，すべての m に対して，

$$(x_{1'}, y_m),\ (x_{2'}, y_m),\ (x_{3'}, y_m),\ \ldots$$

は収束列である．

ところで，$\{y_m\}$ は X においてノルムの意味で稠密だから，任意の $y \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|y - y_{m_0}\| < \varepsilon$$

となる y_{m_0} が存在する．ゆえに，

$$\begin{aligned}
& |(x_{n'}, y) - (x_{k'}, y)| \\
= \ & |(x_{n'}, y) - (x_{n'}, y_{m_0}) + (x_{n'}, y_{m_0}) - (x_{k'}, y_{m_0}) + (x_{k'}, y_{m_0}) - (x_{k'}, y)| \\
\leq \ & \|x_{n'}\|\, \|y - y_{m_0}\| + |(x_{n'} - x_{k'}, y_{m_0})| + \|x_{k'}\|\, \|y_{m_0} - y\| \\
< \ & 2\varepsilon + |(x_{n'} - x_{k'}, y_{m_0})|.
\end{aligned}$$

右辺第 2 項は $n', k' \to \infty$ のとき 0 に収束するので，$\{(x_{n'}, y)\}$ は収束する．ここで，

$$f(y) = \lim_{n' \to \infty} (y, x_{n'}), \quad \forall y \in X$$

とおけば，f は X 上の有界線形汎関数になる．よって，リースの表現定理（定理 32.2）より，

$$f(y) = (y, x_0), \quad \forall y \in X$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．

ゆえに，$\{x_{n'}\}$ は x_0 に弱収束する．

35 完全連続（コンパクト）作用素

まず，この後でも非常に重要な役割をもつ完全連続（コンパクト）作用素を定義する．

定義 35.1. X, Y をヒルベルト空間とし，X から Y への線形作用素を T とする．このとき，X の任意の有界列 $\{x_n\}$ に対して，点列 $\{Tx_n\}$ が Y のある元に収束するような部分列をもつとき，T は**完全連続**（または**コンパクト**）であるという．

定理 35.1. 完全連続作用素 T は有界作用素である．

証明. 背理法により示す．T が有界でないとすると，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\|Tx_n\|_Y > n\|x_n\|_X$$

となる X の点列 $\{x_n\}$ が存在する．そこで，

$$z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_X} \in X$$

とおくと，

$$\|z_n\|_X = 1, \quad \|Tz_n\|_Y > n.$$

したがって，点列 $\{Tz_n\}$ のいかなる部分列も Y で収束しないから，T の完全連続性に矛盾する．よって，T は有界である．

次の完全連続性の判定条件は，非常に使いやすい：

定理 35.2. 線形作用素 T が完全連続であるための必要十分条件は，

$$x_n \rightharpoonup 0 \Longrightarrow Tx_n \to 0 \tag{35.1}$$

である．

証明. (1) 必要性：$x_n \rightharpoonup 0$ とすると，共鳴定理（定理 33.1）によって，

$$\exists M > 0 : \quad \|x_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

したがって，T の完全連続性によって，部分列 $\{x_{n'}\}$ が存在し，$\{Tx_{n'}\}$ は収束列である．

一方，$x_n \rightharpoonup 0$ から，

$$(Tx_n, y) = (x_n, T^*y) \longrightarrow 0, \quad \forall y \in Y.$$

すなわち，$Tx_n \rightharpoonup 0$ だから，点列 $\{Tx_n\}$ の集積点は 0 のみである．

以上から，$Tx_n \to 0$ を得る．

(2) 十分性：任意の有界列 $\{x_n\}$ に対して，ヒルベルト空間の弱コンパクト性定理（定理 34.1）によって，部分列 $\{x_{n'}\}$ と x_0 が存在して

$$x_{n'} \rightharpoonup x_0.$$

したがって，仮定 (35.1) より，

$$Tx_{n'} \longrightarrow Tx_0.$$

これは，T の完全連続性を示している．

以上で，定理 35.2 が証明された．

定理 35.3. 完全連続作用素列 T_n が作用素ノルムの意味で有界線形作用素 T に収束すれば，T も完全連続である．

証明. 条件 (35.1) が満たされることを調べればよい．$x_n \rightharpoonup 0$ とすると，共鳴定理（定理 33.1）によって，

$$\exists M > 0 : \quad \|x_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

ところで，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbf{N}$ が存在して，

$$\|T - T_N\| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

このとき，

$$
\begin{aligned}
\|Tx_n\| &\le \|Tx_n - T_N x_n\| + \|T_N x_n\| \\
&\le \|T - T_N\|\,\|x_n\| + \|T_N x_n\| \\
&< \varepsilon + \|T_N x_n\|.
\end{aligned}
\tag{35.2}
$$

したがって，T_N の完全連続性によって，不等式 (35.2) において極限移行すれば，

$$\limsup_{n\to\infty} \|Tx_n\| \le \varepsilon.$$

ここで，ε は任意だから，

$$Tx_n \longrightarrow 0.$$

以上で，定理 35.3 が証明された．

定理 35.4. (1) T, S が完全連続作用素ならば，線形結合 $\alpha T + \beta S$ も完全連続である．

(2) 2 つの有界線形作用素 T, S のいずれか一方が完全連続作用素ならば，積 TS も完全連続である．

証明. 定理 35.2 より，$\alpha T + \beta S$ と TS に対して，条件 (35.1) が満たされることを調べればよい．これは容易である．

定理 35.5. T が完全連続作用素ならば，共役作用素 T^* も完全連続である．

証明. 条件 (35.1) が満たされることを調べればよい．

$x_n \rightharpoonup 0$ とする．まず，共鳴定理（定理 33.1）によって，

$$\exists M > 0 : \quad \|x_n\| \le M, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

ところで，定理 35.4 より，TT^* は完全連続だから，

$$TT^* x_n \longrightarrow 0.$$

したがって，

$$\|T^* x_n\|^2 = (T^* x_n, T^* x_n) = (TT^* x_n, x_n) \le \|TT^* x_n\|\,\|x_n\| \le M\|TT^* x_n\| \ \longrightarrow 0.$$

以上で，定理 35.5 が証明された．

36　ヒルベルト・シュミットの積分核

定理 36.1. ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 Ω をルベーグ可測集合とし，$K(x, y)$ を $\Omega \times \Omega$ 上のルベーグ可測関数とする．関数 $K(x, y)$ は，

$$\iint_{\Omega\times\Omega} |K(x, y)|^2 \, dx \, dy < \infty,$$

すなわち，

$$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$$

とする．このとき，積分作用素 K を，

$$Kf(x) := \int_\Omega K(x, y) f(y) \, dy, \quad f \in L^2(\Omega)$$

と定義すると，

$$K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は完全連続である．

証明． 定理 36.1 の証明を，次の 2 つのステップに分ける．

Step 1: まず，作用素 K は連続であることを示そう．フビニの定理 （定理 7.2）より，

$$\int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy < \infty \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \tag{36.1}$$

すなわち，

$$K(x,\cdot) \in L^2(\Omega) \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

したがって，シュワルツの不等式 (8.1) より，

$$|Kf(x)|^2 \leq \left(\int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy\right)\left(\int_\Omega |f(y)|^2\,dy\right) \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

再び，フビニの定理（定理 7.2）より，

$$\int_\Omega |Kf(x)|^2\,dx \leq \left(\iint_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2\,dx\,dy\right)\left(\int_\Omega |f(y)|^2\,dy\right)$$

となるから，

$$\|Kf\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(\iint_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2\,dx\,dy\right)\|f\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

を得る．このことより，作用素

$$K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は作用素ノルム

$$\|K\| \leq \left(\iint_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}$$

をもち，有界（連続）であることが示せた．

Step 2: 次に，作用素 K が完全連続であることを示そう．このために，共鳴定理 33.1 を用いる．

さて，$\{f_j\}$ を 0 に弱収束するヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ の任意の関数列とする：

$$f_j \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (j \to \infty). \tag{36.2}$$

このとき，共鳴定理（定理 33.1）より，

$$\|f_j\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{36.3}$$

をみたす定数 $M > 0$ が存在する．したがって，Step 1 と同様の議論により，不等式

$$|Kf_j(x)|^2 \leq \int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy \cdot M^2$$

を得る．しかし，右辺は j によらず x について可積分であり，

$$\int_\Omega\int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy\,dx \cdot M^2 = M^2\,\|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)}\,.$$

さらに，(36.1) より，

$$K(x,\cdot) \in L^2(\Omega) \quad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

であるから，

$$\begin{aligned} Kf_j(x) &= \int_\Omega K(x,y) f_j(y)\,dy \\ &= (K(x,\cdot), f_j)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

したがって，ルベーグの優収束定理（定理 3.6）より，

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega |Kf_j(x)|^2\,dx = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} |Kf_j(x)|^2\,dx = 0,$$

すなわち，

$$Kf_j \longrightarrow 0 \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (j \to \infty).$$

これは，作用素 K が完全連続であることを示している．
　定理 36.1 の証明終わり．

注意 36.1 ((36.1)に関して)．可測関数 $f(x)$ が，

$$\int_\Omega |f(x)|\,dx < \infty$$

をみたすならば，$f(x)$ は Ω のほとんどいたるところで有限値をとる．すなわち，

$$\mu(E) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| = +\infty\}) = 0.$$

実際，任意の正の整数 n に対して，

$$\infty > \int_\Omega |f(x)|\,dx \geq \int_E |f(x)|\,dx \geq \int_E n\,dx = n\,\mu(E)$$

である．よって，$n \to \infty$ とすると，

$$\mu(E) = 0$$

となる．したがって，このことを関数

$$f(x) := \int_\Omega |K(x,y)|^2\,dy$$

に適用すると，フビニの定理（定理 7.2）より (36.1) が得られる．

注意 36.2 ((36.3) に関して)．0 に弱収束する $L^2(\Omega)$ の任意の関数列 $\{f_j\}$ は有界である．すなわち，

$$f_j \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (j \to \infty) \Longrightarrow \exists M > 0 : \quad \|f_j\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

実際，$g \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$|(f_j, g)| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \sup_j |(f_j, g)| < \infty.$$

このとき，共鳴定理（定理 33.1）より，

$$\|f_j\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\|g\| \leq 1} |(f_j, g)| \leq M, \quad j = 1, 2, \ldots$$

をみたす $M > 0$ が存在する．

定理 36.2. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 Ω をルベーグ可測集合とし，$K(x,y)$ を $\Omega \times \Omega$ 上のルベーグ可測関数とする．

$$|K(x,y)| \leq \frac{M}{|x-y|^{n-\delta}} \quad \text{on } \Omega \times \Omega. \tag{36.4}$$

をみたす定数 $M > 0$ と $\delta > 0$ が存在すると仮定する．このとき

$$Kf(x) := \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy, \quad f \in L^2(\Omega)$$

で積分作用素 K を定義すると，作用素

$$K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は完全連続である．

証明． 定理 36.2 の証明を，次の 4 つのステップに分ける．

Step 1: まず，次のシューアの補題を証明する：

補題 36.1 (シューア)．$\mathbf{R}^n$ の部分集合 Ω をルベーグ可測集合とし，$K(x,y)$ を $\Omega \times \Omega$ 上のルベーグ可測関数とする．関数 $K(x,y)$ は次の 2 つの条件をみたすと仮定する：

$$K(x) = \int_\Omega |K(x,y)|\, dy \in L^\infty(\Omega),$$
$$H(y) = \int_\Omega |K(x,y)|\, dx \in L^\infty(\Omega).$$

このとき，

$$Kf(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy, \quad f \in L^2(\Omega),$$

で定義される作用素 K は，$L^2(\Omega)$ で有界で，その作用素ノルムは

$$\|K\| \leq \sqrt{\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} K(x)} \sqrt{\operatorname{ess\,sup}_{y\in\Omega} H(y)}$$

と評価される．

証明． シュワルツの不等式 (8.1) より，

$$\begin{aligned}
|Kf(x)| &\leq \int_\Omega |K(x,y)|^{1/2} \cdot |K(x,y)|^{1/2} |f(y)|\, dy \\
&\leq \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, dy \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, |f(y)|^2\, dy \right)^{1/2} \\
&\leq (\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} K(x))^{1/2} \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, |f(y)|^2\, dy \right)^{1/2} \quad \text{a.e. } x \in \Omega.
\end{aligned}$$

したがって，フビニの定理（定理 7.2）より，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Kf(x)|^2\, dx &\leq (\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} K(x)) \int_\Omega |f(y)|^2 \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, dx \right) dy \\
&\leq (\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} K(x)) \left(\operatorname{ess\,sup}_{y\in\Omega} H(y) \right) \int_\Omega |f(y)|^2\, dy.
\end{aligned}$$

したがって，$Kf(x) \in L^2(\Omega)$ であり，

$$\|K\| \leq \sqrt{\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} K(x)} \sqrt{\operatorname{ess\,sup}_{y\in\Omega} H(y)}.$$

補題 36.1 の証明終わり．

Step 2: 正の整数 j に対して，

$$K_j(x,y) = \begin{cases} K(x,y) & \text{if } |x-y| \geq 1/j, \\ 0 & \text{if } |x-y| < 1/j \end{cases}$$

とする．このとき，積分核 $K_j(x,y)$ は $\Omega \times \Omega$ で有界で，

$$K_j(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

よって，定理 36.1 を積分核 $K_j(x,y)$ に適用すると，

$$K_j f(x) = \int_\Omega K_j(x,y) f(y)\, dy, \ f \in L^2(\Omega),$$

によって定義される作用素 K_j はすべて完全連続である．

Step 3: 次に，

$$\|K_j - K\| \longrightarrow 0 \tag{36.5}$$

であることを示そう．

シューアの補題（補題 36.1）を作用素 $K - K_j$ に適用する．ここで，

$$Kf(x) - K_j f(x) = \int_{\Omega \cap \{|x-y|<1/j\}} K(x,y) f(y)\, dy$$

であることに注意する．仮定条件 (36.4) より，

$$\int_{\Omega \cap \{|x-y|<1/j\}} |K(x,y)|\, dx \leq M \int_{\{|x-y|<1/j\}} \frac{1}{|x-y|^{n-\delta}}\, dx,$$
$$\int_{\Omega \cap \{|x-y|<1/j\}} |K(x,y)|\, dy \leq M \int_{\{|x-y|<1/j\}} \frac{1}{|x-y|^{n-\delta}}\, dy.$$

さらに，極座標変換を行うと，

$$\begin{aligned}\int_{\{|x-y|<1/j\}} \frac{1}{|x-y|^{n-\delta}}\, dx &\leq \int_0^{1/j} \int_{\Sigma_n} r^{n-1} \frac{1}{r^{n-\delta}}\, dr\, d\sigma \\ &= |\Sigma_n| \int_0^{1/j} r^{\delta-1}\, dr \\ &= \frac{|\Sigma_n|}{\delta} \frac{1}{j^\delta}\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$|\Sigma_n| := \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

は，n 次元単位球 Σ_n の表面積である．

以上まとめると，不等式

$$\int_{\{|x-y|<1/j\}} \frac{1}{|x-y|^{n-\delta}}\, dx \leq \frac{\omega_n}{\delta} \frac{1}{j^\delta}$$

を得る．したがって，シューアの補題（補題 36.1）より，示すべき (36.5) が得られる：

$$\|K - K_j\| \leq \frac{M\omega_n}{\delta} \frac{1}{j^\delta} \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty).$$

Step 4: 最後に，作用素 K が完全連続であることを示す．$\{f_n\}$ を 0 に弱収束するヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ の任意の関数列とする：

$$f_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (n \to \infty).$$

このとき，共鳴定理（定理 33.1）より，

$$\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \leq M, \quad n = 1, 2, \ldots$$

となるような定数 $M > 0$ が存在する．よって，不等式

$$\begin{aligned}\|Kf_n\|_{L^2(\Omega)} &= \|Kf_n - K_j f_n + K_j f_n\|_{L^2(\Omega)} = \|(K - K_j)f_n + K_j f_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|K - K_j\| \cdot \|f_n\|_{L^2(\Omega)} + \|K_j f_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|K - K_j\| \cdot M + \|K_j f_n\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{36.6}$$

を得る．(36.5) より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|K - K_j\| < \varepsilon$$

となるような正の整数 j を選ぶことができる．したがって，(36.6) において，（正の整数 j を固定して） $n \to \infty$ とすると，K_j は完全連続であるから，

$$\limsup_{n \to \infty} \|Kf_n\| \leq \varepsilon \cdot M$$

となる．これより，

$$Kf_n \longrightarrow 0 \quad \text{in } L^2(\Omega) \quad (n \to \infty)$$

である．

以上まとめると，作用素 K が完全連続であることが示された．

定理 36.2 の証明終わり．

注意 36.3. $\Omega = (a, b)$ とする．このとき，積分核

$$K(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{1-\delta}}, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}$$

は，空間 $L^2(\Omega \times \Omega)$ に属さないことに注意する．実際，$2\delta - 1 < 0$ より，

$$\int_a^b \frac{1}{|x - y|^{2-2\delta}}\, dy = +\infty, \quad \forall x \in (a, b)$$

である．

37 レリッヒの定理

ソボレフ空間の完全連続性（コンパクト性）に関するレリッヒの定理は，実数列に対するボルツァーノ・ワイエルストラスの定理，連続関数列に対するアスコリ・アルツェラの定理と次のように密接に関係している：

主題	列	コンパクト性定理
実数論	数列	ボルツァーノ・ワイエルストラスの定理
微積分学	連続関数列	アスコリ・アルツェラの定理
超関数論	超関数列	レリッヒの定理

ソボレフ空間の完全連続性（コンパクト性）に関する定理をあげる．この定理は，楕円型境界値問題の固有値分布を調べるときなどに用いられる．以下の証明は，ニーレンバーグのアイデアによる：

定理 37.1 (レリッヒ)**.** Ω をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の有界領域とする．任意の有界列 $\{f_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ に対して，適当な部分列 $\{f_{j_p}\}$ が存在して，$L^2(\Omega)$ での収束列になっている．すなわち，埋め込み写像

$$H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

が完全連続である．

証明. レリッヒの定理を証明するために，2 つの段階に分ける．

Step 1: 最初に，古典的なポテンシャル論の補題をあげる ([13, Lemma 4.2])：

補題 37.1. u を Ω で有界で，局所的にヘルダー連続関数であるとする．u のニュートンポテンシャルを，

$$v(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \int_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy, \quad n \geq 3 \tag{37.1}$$

と定義すると，

$$\begin{cases} v \in C^2(\Omega), \\ \Delta v = u \quad \text{in } \Omega \end{cases} \tag{37.2}$$

である．ここで，

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

は n 次元単位球 Σ_n の表面積とする．

Step 2: $u \in C_0^1(\Omega)$ に対して，

$$v(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \int_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy$$

を考える．

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\sum_i (x_i - y_i)^2\right)^\alpha\right\} = \alpha \left(\sum_i (x_i - y_i)^2\right)^{\alpha-1} \cdot 2(x_j - y_j),$$
$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left\{\left(\sum_i (x_i - y_i)^2\right)^\alpha\right\} = \alpha \left(\sum_i (x_i - y_i)^2\right)^{\alpha-1} \cdot 2(y_j - x_j)$$

より，

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{n-2}}\,dy\right)\\ &= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)u(y)\,dy\\ &= -\frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)u(y)\,dy.\end{aligned}$$

よって，部分積分すると，

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy.$$

同様にして，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial {x_j}^2}(x) &= \frac{1}{(2-n)\omega_n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy\\ &= \frac{1}{\omega_n}\int_\Omega \frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy, \quad 1 \leq j \leq n.\end{aligned}$$

したがって，(37.2) より，任意の $u \in C_0^1(\Omega)$ を

$$u(x) = \Delta v(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}\right)\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy \tag{37.3}$$

と表すことができる．

この表現式は，ソボレフ空間 $H_0^1(\Omega)$ において極限移行すると，任意の $u \in H_0^1(\Omega)$ に対しても成り立つ．

ところで，(37.3) の積分核は，不等式

$$\left|\frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}\right| \leq \frac{1}{|x-y|^{n-1}}$$

をみたす．よって，積分作用素

$$K_j f(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_\Omega \frac{x_j-y_j}{|x-y|^n}\,f(y)\,dy, \quad f \in L^2(\Omega)$$

を定義するならば，$\delta := 1$ として定理 36.2 を適用すると，写像

$$K_j : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は完全連続である．

したがって，

$$u(x) = \sum_{j=1}^n K_j\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}\right), \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

で定義される埋め込み写像

$$H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は完全連続である．

関数解析の一般的な定理で，完全連続作用素と有界（連続）作用素の合成写像は，完全連続になることに注意．

定理 37.1 の証明終わり．

38　ヒルベルト・シュミットの理論

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とし，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線形作用素 H が完全連続な自己共役作用素であるとする．このとき，次の方程式を考える．

$$(I-\lambda H)u = f \quad \text{in } \mathcal{H}. \tag{38.1}$$

まず，

$$H\varphi = \mu\varphi, \quad \varphi \neq 0$$

であるとき，μ を H の固有値，φ を固有値 μ に対する H の固有解という．

命題 38.1. (i) (a) H の固有値はすべて実数である．(b) 任意の 0 でない固有値 μ_0 に対応する固有解の集合は有限次元である．(c) 相異なる固有値に対応する固有解は直交する．

(ii) 固有値の集合は，0 以外には集積点をもたない．

証明． (i)(a): H は自己共役作用素だから，

$$H\varphi = \mu\varphi, \quad \varphi \neq 0$$

とすると，

$$\begin{aligned} \mu(\varphi,\varphi) &= (H\varphi,\varphi) \\ &= (\varphi, H\varphi) \\ &= (\varphi, \mu\varphi) \\ &= \overline{\mu}(\varphi,\varphi). \end{aligned}$$

したがって，

$$\mu = \overline{\mu}.$$

(c) 次に，

$$H\varphi_1 = \mu_1\varphi_1, \quad H\varphi_2 = \mu_2\varphi_2, \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

とすると，μ_1, μ_2 は実数だから，

$$\begin{aligned} \mu_1(\varphi_1,\varphi_2) &= (H\varphi_1,\varphi_2) \\ &= (\varphi_1, H\varphi_2) \\ &= \mu_2(\varphi_1,\varphi_2) \end{aligned}$$

したがって，

$$(\varphi_1,\varphi_2) = 0.$$

(b) 背理法で示す．任意の 0 でない固有値 μ_0 に対応する固有解の集合は無限次元であるとすると，

$$\exists\{\varphi_j\} \subset \mathcal{H} \quad \text{such that } H\varphi_j = \mu_0\varphi_j,\, (\varphi_i,\varphi_j) = \delta_{ij}.$$

このとき，$\|\varphi_j\| = 1$ より，

$$\begin{aligned} \|H\varphi_j - H\varphi_k\| &= \|\mu_0\varphi_j - \mu_0\varphi_k\| \\ &= |\mu_0|\|\varphi_j - \varphi_k\| \\ &= \sqrt{2}|\mu_0| > 0. \end{aligned}$$

これは，作用素 H の完全連続性に矛盾する．

(ii) 背理法で示す．

$$H\varphi_j = \mu_j \varphi_j, \quad \mu_j \longrightarrow \mu_0 \neq 0$$

と仮定する．ここで，(i) の (b), (c) より，

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$$

としてよい．このとき，$\|\varphi_j\| = 1$ より，

$$\begin{aligned}\|H\varphi_j - H\varphi_k\| &= \|\mu_j\varphi_j - \mu_k\varphi_k\| \\ &= \sqrt{|\mu_j|^2 + |\mu_k|^2} \\ &\longrightarrow \sqrt{2}\,|\mu_0| > 0 \quad (j, k \to \infty).\end{aligned}$$

これは，H の完全連続性に矛盾する．

補題 38.1 (ヒルベルト)**.** H を 0 でない完全連続な自己共役作用素であるとすると，H は 0 でない固有値をもつ [4]．

証明. まず，

$$\|H\| = \sup_{\|f\|=1} |(Hf, f)|$$

を示す．

$$N_H := \sup_{\|f\|=1} |(Hf, f)|$$

とおくと，シュワルツの不等式 (命題 20.1 (1)）より，

$$N_H \leq \|H\|$$

となるので，以下では $\|H\| \leq N_H$ を示す．

任意の $\lambda \in \mathbf{R}$, 任意の f, $g \in \mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}(H(\lambda f + g), \lambda f + g) &\leq N_H\|\lambda f + g\|^2, \\ -(H(\lambda f - g), \lambda f - g) &\leq N_H\|\lambda f - g\|^2.\end{aligned}$$

辺々加えると，中線定理（命題 20.1 (4)）より，

$$2\lambda\left\{(Hf, g) + (Hg, f)\right\} \leq 2N_H\left(\lambda^2\|f\|^2 + \|g\|^2\right).$$

そこで，$g = Hf$ とおくと，$H = H^*$ だから，

$$4\lambda\|Hf\|^2 \leq 2N_H\left(\lambda^2\|f\|^2 + \|Hf\|^2\right).$$

$\lambda > 0$ とすれば，

$$\|Hf\|^2 \leq \frac{1}{2}N_H\left(\lambda\|f\|^2 + \frac{1}{\lambda}\|Hf\|^2\right).$$

よって，

$$\lambda := \frac{\|Hf\|}{\|f\|}, \quad f \neq 0$$

ととれば，

$$\|Hf\|^2 \leq N_H\|Hf\|\|f\|, \quad f \neq 0.$$

[4] 0 以外に固有値をもたなければ，作用素として 0 である．

よって，

$$\|Hf\| \le N_H \|f\|$$

だから，

$$\|H\| \le N_H.$$

さて，$H \neq 0$ だから，

$$\mu := \sup_{\|f\|=1} |(Hf, f)| = \|H\| > 0.$$

このとき，

$$\text{(a)}\ \|f_j\| = 1, \quad (Hf_j, f_j) \longrightarrow \mu \quad (j \to \infty)$$

または，

$$\text{(b)}\ \|f_j\| = 1, \quad (Hf_j, f_j) \longrightarrow -\mu \quad (j \to \infty)$$

となる $\{f_j\}$ を選ぶことができる．

(a) の場合，

$$\begin{aligned} 0 \le \|Hf_j - \mu f_j\|^2 &= \|Hf_j\|^2 - 2\mu(Hf_j, f_j) + \mu^2 \\ &\le \|H\|^2 - 2\mu(Hf_j, f_j) + \mu^2 \\ &= 2\mu^2 - 2\mu(Hf_j, f_j) \\ &\quad \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty). \end{aligned}$$

よって，

$$Hf_j - \mu f_j \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty).$$

一方，H は完全連続だから $\{Hf_j\}$ は収束列としてよい．よって，

$$\mu f_j = Hf_j - (Hf_j - \mu f_j)$$

は収束列だから，$\mu > 0$ より $\{f_j\}$ 自身が収束列である．$f_j \to f_0$ とすると，H の連続性と $\|f_j\| = 1$ に注意して，

$$Hf_j \longrightarrow Hf_0, \quad \|f_0\| = 1.$$

以上より，

$$Hf_j - \mu f_j \longrightarrow Hf_0 - \mu f_0 = 0,$$

すなわち，

$$Hf_0 = \mu f_0, \quad \|f_0\| = 1$$

だから，$\mu = \|H\|$ は H の固有値である．

(b) の場合は，同様にして $-\mu = -\|H\|$ が H の固有値となる．

39　ヒルベルト・シュミットの展開定理

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とし，H を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への完全連続な自己共役作用素とする．H の各固有値 μ_p の固有空間において正規直交基底 $\{\varphi_{j_p}\}$ をとる．

次に，固有値の列 $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ $(\mu_j \neq 0)$ を絶対値の大きい順に並べる：

$$|\mu_1| \ge |\mu_2| \ge \ldots \ge |\mu_j| \ge \ldots \longrightarrow 0.$$

ただし，各 μ_j は対応する固有空間の次元だけ重複して並べて，各 μ_j に対応する固有空間の正規直交基底 φ_j を対応させる：

$$H\varphi_j = \mu_j \varphi_j.$$

ここで，相異なる固有値に対応する固有解は直交することに注意する．

定理 39.1 (ヒルベルト・シュミットの展開定理)**.** 任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して，

$$Hf = \sum_{j=1}^{\infty} (Hf, \varphi_j)\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (f, \varphi_j)\varphi_j.$$

すなわち，作用素 H は，次の無限次行列の形で与えられる：

$$H \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \text{\Large 0} & \\ & \mu_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu_j & \\ & \text{\Large 0} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

特に，$N(H) = \{x : Hx = 0\} = \{0\}$ ならば，

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)\varphi_j.$$

すなわち，正規直交基底 $\{\varphi_j\}$ は完全である．

注意 39.1. $H = H^*$ だから，命題 31.3 より

$$\mathcal{H} = N(H) \oplus \overline{R(H)}.$$

したがって，定理 39.1 の主張するところは，

> 固有値 0 に対応する固有空間 $N(H)$ と 0 以外の固有値 $\{\mu_j\}$ に対応する固有解 $\{\varphi_j\}$ を合せれば $\mathcal{H}$ 全体を張る．

証明. まず，

$$Sf = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f, \varphi_i)\varphi_i, \quad f \in \mathcal{H}$$

とおくと，S は完全連続な自己共役作用素であることを示す．

$\{\varphi_j\}$ は正規直交基底だから，

$$\begin{aligned} \|Sf\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 |(f, \varphi_i)|^2 \\ &\leq \left(\sup_i |\mu_i|\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} |(f, \varphi_i)|^2 \\ &\leq \left(\sup_i |\mu_i|\right)^2 \|f\|^2 \quad \text{（ベッセルの不等式）}. \end{aligned}$$

よって，S は有界作用素である．ところで，任意の $N \in \mathbf{N}$ に対して，

$$S_N f = \sum_{i=1}^{N} \mu_i (f, \varphi_i)\varphi_i, \quad f \in \mathcal{H}$$

はヒルベルト空間の弱コンパクト性（定理 34.1）から完全連続である．

さらに，

$$\begin{aligned}\|S_N f - Sf\|^2 &= \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu_i^2 |(f,\varphi_i)|^2 \\ &\le \left(\sup_{i\ge N+1}|\mu_i|\right)^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2 \\ &\le \left(\sup_{i\ge N+1}|\mu_i|\right)^2 \|f\|^2\end{aligned}$$

だから，

$$\|S_N - S\| \le \sup_{i\ge N+1}|\mu_i|.$$

したがって，$\mu_i \to 0$ だから，

$$S_N \longrightarrow S.$$

以上より，定理 35.3 が使えて，作用素 S は完全連続である．

次に，$R = H - S$ は完全連続な自己共役作用素で，0 以外の固有値をもたないことを，背理法で示す．

$$R\psi = \mu\psi, \quad \mu \ne 0$$

とする．ところで，

$$R\varphi_j = H\varphi_j - S\varphi_j = \mu_j\varphi_j - \mu_j\varphi_j = 0.$$

すなわち，

$$R\varphi_j = 0\cdot\varphi_j, \quad j = 1,2,\ldots$$

だから，$\{\varphi_j\}$ は R の固有値 0 に対する固有解である．よって，

$$(\psi,\varphi_j) = 0, \quad j = 1,2,\ldots$$

だから，

$$H\psi = S\psi + R\psi = R\psi = \mu\psi.$$

したがって，μ は H の固有値 $\{\mu_j\}$ のどれかと一致する．そこで，$\mu = \mu_i$ とすると，

$$(\psi,\varphi_j) = 0, \quad j = 1,2,\ldots$$

より，

$$\psi = 0.$$

これは矛盾である．

以上より，R は 0 以外の固有値をもたない．

したがって，補題 38.1 より $R = 0$. すなわち，

$$Hf = Sf = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(f,\varphi_i)\varphi_i, \quad f \in \mathcal{H}.$$

さらに，$N(H) = \{0\}$ ならば，

$$\begin{aligned}H\left(f - \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i\right) &= Hf - \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(f,\varphi_i)\varphi_i \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって，

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)\varphi_i.$$

40　リース・シャウダーの理論

リース・シャウダーの理論は，一般のバナッハ空間で成り立つが，ここではヒルベルト空間に限定して話を進める．

まず，フレドホルム作用素を定義する．

定義 40.1. X, Y をヒルベルト空間とし，T を X から Y への閉作用素とする．次の 3 条件を満たすとき，T を**フレドホルム作用素**という：

(i) $\dim N(T) < \infty$.

(ii) $R(T)$ は Y の閉部分空間.

(iii) $\operatorname{codim} R(T) < \infty$.

ここで，

$$N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\},$$
$$R(T) = \{Tx : x \in D(T)\}$$

であり，$\operatorname{codim} R(T) = m$ は，$R(T)$ に属さない m 個の一次独立な元 y_1, ..., y_m が存在し，$\{y_1, \dots, y_m\}$ と $R(T)$ が Y を張るという代数的な条件である．更に、条件 (3) から条件 (2) が従うことが知られている．

フレドホルム作用素 T に対して，

$$\operatorname{ind} T := \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T)$$

を T の**指数** (index) という．

定理 40.1 (リース・シャウダーの定理)**.** X をヒルベルト空間とし，T が X から X への完全連続作用素であるとする．このとき，

$$\operatorname{ind}(I - T) = 0.$$

この定理を証明するために，以下の準備をする：

補題 40.1.

$$R(I - T) = X \Longrightarrow N(I - T) = \{0\}.$$

証明 (補題 40.1)**.** $S = I - T$ とおき，

$$M_n = \{f \in X : S^n f = 0\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

と定義する．ただし，$S^0 = I$ である．明らかに，

$$M_0 = \{0\} \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \dots.$$

このとき，

主張 40.1.

$$M_n = M_{n+1}$$

となるような $n \in \mathbf{N}$ が存在する．

証明. 背理法により示す．そこで，

$$M_n \neq M_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

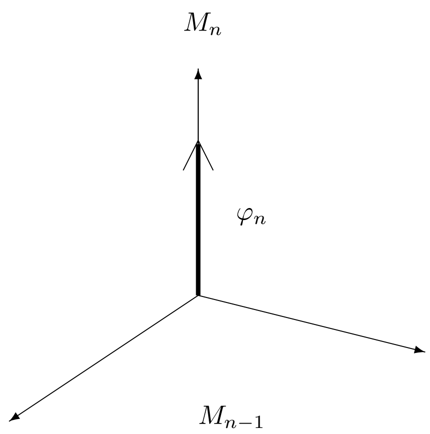
と仮定する．作用素 $S = I - T$ は連続だから，

$$\{f_j\} \subset M_n,\ f_j \longrightarrow f \Longrightarrow S^n f_j \longrightarrow S^n f = 0.$$

よって，M_n は X の閉部分空間となる．したがって，定理 32.1 より，

$$\begin{cases} \varphi_n \perp M_{n-1}, \\ \|\varphi_n\| = 1 \end{cases}$$

となるような $\varphi_n \in M_n$, $n \in \mathbf{N}$ が存在する．



このとき，$n > m$ とすると，

$$\begin{aligned} T\varphi_n - T\varphi_m &= (I-S)\varphi_n - (I-S)\varphi_m \\ &= \varphi_n - (S\varphi_n + \varphi_m - S\varphi_m). \end{aligned}$$

ところで，

$$\begin{aligned} S^{n-1}(S\varphi_n + \varphi_m - S\varphi_m) &= S^n\varphi_n + S^{n-1}\varphi_m - S^n\varphi_m \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから，

$$S\varphi_n + \varphi_m - S\varphi_m \in M_{n-1}.$$

よって，$\varphi_n \perp M_{n-1}$ に注意すると，

$$\|T\varphi_n - T\varphi_m\|^2 = \|\varphi_n\|^2 + \|S\varphi_n + \varphi_m - S\varphi_m\|^2 \geq 1.$$

これは，$\{T\varphi_n\}$ のいかなる部分列も収束しないことを意味している．
以上より，

$$\begin{cases} \|\varphi_n\| = 1, \\ \|T\varphi_n - T\varphi_m\| \geq 1, \quad n > m \end{cases}$$

となり，T の完全連続性に矛盾する．

さらに，

主張 40.2.

$$M_{n+1} = M_{n+2} = M_{n+3} = \dots.$$

証明. 実際，

$$M_{n+1} \subsetneqq M_{n+2}$$

ならば，

$$\begin{cases} S^{n+1}f \neq 0, \\ S^{n+2}f = 0, \end{cases}$$

となるような $f \in X$ が存在する．これは，

$$Sf \in M_{n+1}, \quad Sf \notin M_n$$

を意味していて，主張 40.1 に反する．

さて，$N(S) = \{0\}$ でないと仮定すると，

$$u_1 \neq 0, \quad Su_1 = 0$$

となるような $u_1 \in X$ が存在する．仮定より，$R(S) = X$ だから，

$$u_1 = Su_2$$

となるような $u_2 \in X$ が存在する．
以下，この操作を続けると，

$$u_{n-1} = Su_n$$

となるような $u_n \in X$ が存在する．これより，

$$\begin{aligned} &u_1 \notin M_0, \quad u_1 \in M_1. \\ &u_2 \notin M_1, \quad u_2 \in M_2. \\ &\quad \vdots \\ &u_n \notin M_{n-1}, \quad u_n \in M_n. \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

これは，主張 40.2 に反する．
以上より，

$$R(S) = X \Longrightarrow N(S) = \{0\}.$$

これで，補題 40.1 が証明できた．

補題 40.2.

$$N(I - T) = \{0\} \Longrightarrow R(I - T) = X.$$

証明 (補題 40.2)．次の 2 つの主張により補題 40.2 を証明する．補題 40.1 の証明と同様に，$S=I-T$ とおく．まず，

主張 40.3. $R(S)$ は閉部分空間である．

証明．実際，

$$Su_n \longrightarrow f \quad \text{in } X \tag{40.1}$$

とすると，$\{u_n\}$ は X の有界列である．もし $\{u_n\}$ が有界列でなければ，

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

とおき，(40.1) に注意すると，

$$\begin{cases} \|v_n\| = 1, \\ Sv_n = \frac{Su_n}{\|u_n\|} \longrightarrow 0. \end{cases}$$

ところで，T は完全連続だから，$\{Tv_{n_k}\}$ がコーシー列となるような $\{v_n\}$ の部分列 $\{v_{n_k}\}$ が存在する．よって，

$$v_{n_k} = Sv_{n_k} + Tv_{n_k}$$

もコーシー列となる．

$$v_{n_k} \longrightarrow v \quad \text{in } X$$

とすると，

$$\|v\| = \lim_{n_k\to\infty} \|v_{n_k}\| = 1.$$

一方，

$$Sv = \lim_{n_k\to\infty} Sv_{n_k} = 0$$

だから，$N(S)=\{0\}$ より，

$$v = 0$$

となり，これは矛盾．

したがって，$\{u_n\}$ は有界列だから，$\{Tu_{n_k}\}$ がコーシー列となるような部分列 $\{u_{n_k}\}$ が存在する．よって，

$$u_{n_k} = Su_{n_k} + Tu_{n_k}$$

もコーシー列となる．そこで，

$$u_{n_k} \longrightarrow u \quad \text{in } X$$

とすると，

$$Su = \lim_{n_k\to\infty} Su_{n_k} = f.$$

すなわち，

$$f \in R(S).$$

次に，

主張 40.4. $\overline{R(S)} = X$.

証明． 実際，

$$
\begin{aligned}
N(S)=\{0\} &\iff \overline{R(S^*)}=X \quad （命題 31.3 と S^{**}=S から，X=N(S)\oplus\overline{R(S^*)} より）\\
&\implies R(S^*)=X \quad （定理 35.5 から，T^* は完全連続だから，主張 40.3 より）\\
&\implies N(S^*)=\{0\} \quad （T^* は完全連続だから，補題 40.1 より）\\
&\implies \overline{R(S)}=X \quad （命題 31.3 から，X=N(S^*)\oplus\overline{R(S)} より）.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$N(S)=\{0\}\Longrightarrow\overline{R(S)}=X.$$

以上，主張 40.3, 主張 40.4 より，

$$N(S)=\{0\}\Longrightarrow R(S)=X.$$

これで，補題 40.2 が証明できた．

注意 40.1. 共役作用素の定義（第 29 節を参照）より T の共役作用素

$$T^*:X\longrightarrow X$$

が存在して，命題 31.3 より

$$X=R(T)\oplus N(T^*).$$

よって，

$$\mathrm{codim}\ R(T)=\dim N(T^*)$$

だから，

$$\mathrm{ind}\ T=\dim N(T)-\dim N(T^*).$$

さらに，$T^{**}=T$ より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ind}\ T^* &= \dim N(T^*)-\dim N(T)\\
&= -\,\mathrm{ind}\ T.
\end{aligned}
$$

以上の準備の下で，リース・シャウダーの定理を証明する．

証明 (定理 40.1)**. Step 1**: $\dim N(I-T)<\infty$ を背理法により示す．$\dim N(I-T)=\infty$ とすると，$N(I-T)$ の基底として無限個の基底が得られる．これらにグラム・シュミットの直交化法を行うと，

$$(x_n,x_m)=\delta_{nm}$$

となるような $\{x_n\}\subset N(I-T)$ が存在する．よって，

$$\|Tx_n-Tx_m\|=\|x_n-x_m\|\geq\sqrt{2}.$$

これは，T の完全連続性に矛盾する．

Step 2: $R(I-T)$ は閉部分空間であることを示す．
$S=I-T$ とおいて，

$$S_1=S|_{N(S)^\perp}$$

を考える．このとき，$x\in N(S)^\perp$, $S_1x=0$ とすると，

$$Sx=0,\quad x\in N(S).$$

よって，

$$x \in N(S) \cap N(S)^{\perp} = \{0\}$$

となり，

$$N(S_1) = \{0\}. \tag{40.2}$$

さらに，

$$D(S) = N(S) \oplus (N(S)^{\perp} \cap D(S))$$

だから，

$$R(S) = S(D(S)) = S(N(S)^{\perp} \cap D(S)) = R(S_1). \tag{40.3}$$

したがって，(40.2), (40.3), 主張 40.3 より，

$$R(S_1) = R(S) = R(I - T)$$

は閉部分空間である．

Step 3: 注意 40.1 より，

$$\dim N(I - T^*) = \dim N(I - T)$$

を示せばよい．

$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ を $N(I-T)$ の正規直交基底，$\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$ を $N(I-T^*)$ の正規直交基底とする．

(a) $m > n$ ならば，

$$\begin{aligned} \widetilde{S} &= I - \left(T - \sum_{i=1}^{n} (\cdot, \varphi_i)\psi_i \right) \\ &= S + \sum_{i=1}^{n} (\cdot, \varphi_i)\psi_i \end{aligned}$$

とおく．ここで，

$$T - \sum_{i=1}^{n} (\cdot, \varphi_i)\psi_i$$

は完全連続であることに注意する．

さて，

$$\begin{aligned} \widetilde{S}f = 0 &\implies Sf + \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\psi_i = 0 \\ &\implies \begin{cases} Sf = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\psi_i = 0 \end{cases} \quad (Sf \perp \psi_i \text{ より}) \\ &\implies \begin{cases} Sf = 0 \\ (f, \varphi_i) = 0, \quad 1 \le i \le n \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} f \in N(S) \\ (f, \varphi_i) = 0, \quad 1 \le i \le n \end{cases} \\ &\implies f = 0. \end{aligned}$$

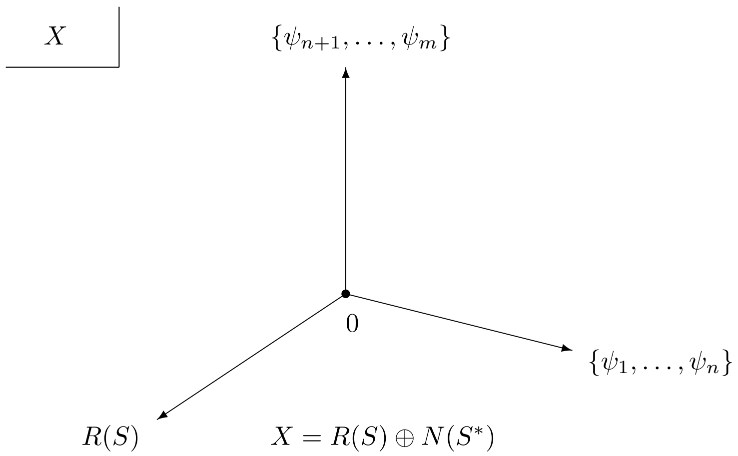
したがって，補題 40.2 が適用できて，

$$R(\widetilde{S}) = X.$$

これは，

$$\{\psi_{n+1}, \ldots, \psi_m\} \perp R(\widetilde{S})$$

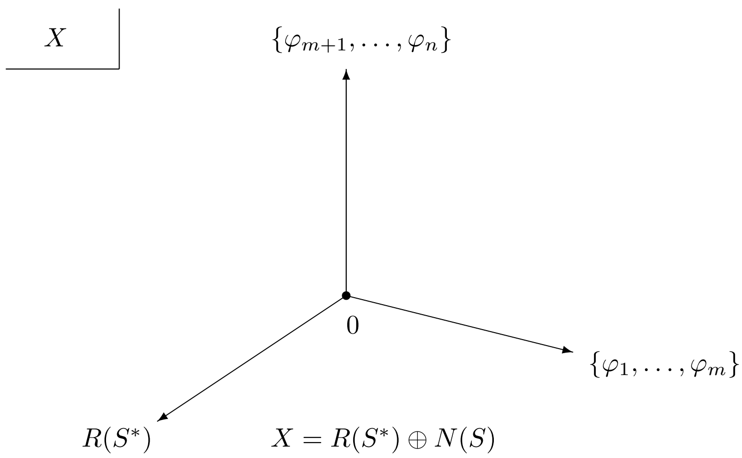
に矛盾する．



(b) $m < n$ ならば，

$$\widetilde{U} = I - \left(T^* - \sum_{j=1}^{m} (\cdot, \psi_j)\varphi_j\right)$$

を考えれば，同様にして，矛盾が導かれる．



以上，(a), (b) より，

$$m = n.$$

これで，定理 40.1 が証明できた．

定理 40.1 より，次の定理が導かれる:

定理 40.2 (フレドホルムの交代定理)**.** X をヒルベルト空間とし，T を X から X への完全連続作用素とする．このとき，$I-T$ が単射または全射ならば，$I-T$ は全単射である．

注意 40.2. V を n 次元線形空間とし，S を V から V への線形写像とする．このとき，S が単射または全射ならば，S は全単射である．フレドホルムの定理は，この事実の無限次元版である．

フレドホルムの交代定理は，楕円型境界値問題の超関数解の存在定理を証明する際に，極めて本質的な役割を果たす．

第 III 部
超関数論入門

第 III 部では，ルベーグ積分論及び関数解析学の重要な応用として，通常の関数概念の一般化である「超関数の理論」の基本的な事項，概念，定理等について，丁寧に解説する．超関数導入の利点は，代数方程式の解法との比喩で，次のように述べられる：

代数方程式の解法	微分方程式の解法
代数的閉体（複素数体）の構成	完備な関数空間（超関数）の構成
代数学の基本定理	超関数解の存在定理
根の性質を調べる	超関数解の性質を調べる

あるいは，より詳しい対照表を作れば，次のようになる：

テーマ	代数方程式	微分方程式
枠組み 1	実数	連続関数 リーマン積分
枠組み 2	複素数	超関数 ルベーグ積分
存在定理	複素数体 （代数的閉体）	ソボレフ空間 （完備性）
定性的性質	複素根の性質	超関数解の一意性 超関数解の正則性

41　絶対連続関数

この節では，1 次元超関数論の準備として，絶対連続性について述べる．

定義 41.1 (絶対連続性)**.** $I = [a, b]$ を $\mathbf{R}$ の有界な閉区間とする．閉区間 I 上で定義された連続関数 $f(x)$ が絶対連続であるとは，任意の正数 ε に対して，$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，I の互いに交わらない区間 (α_i, β_i) について，

$$\sum_{i=1}^{N}(\beta_i - \alpha_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^{N}|f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon$$

となることをいう．

注意 41.1. 特に $N=1$ とすると，絶対連続関数は，一様連続関数になることに注意.

例 41.1. リプシッツ連続な関数は絶対連続である.

証明. $f(x)$ がリプシッツ連続とすると，

$$\exists L>0: \quad |f(x)-f(y)| \le L|x-y|, \quad \forall x,y \in I.$$

そこで，$\delta = \varepsilon/L$ とおくと，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} |f(\beta_i - f(\alpha_i))| &\le L\sum_{i=1}^{N}|\beta_i-\alpha_i| \\ &< L\delta = \varepsilon.\end{aligned}$$

命題 41.1. $f(x)$, $g(x)$ を絶対連続関数とすると，次が成り立つ：

(i) $\alpha f(x)+\beta g(x)$ は絶対連続.

(ii) $f(x)g(x)$ は絶対連続.

(iii) $f(x)\neq 0$ ならば，$1/f(x)$ は絶対連続.

定理 41.1. 微積分の基本公式について，次の結果を得る：

(i) 関数 $f(x)$ が I 上で絶対連続ならば，$f(x)$ は I のほとんどいたるところで微分可能で，$f'(x)$ は I で積分可能である．さらに，

$$f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt, \quad x\in I.$$

(ii) 逆に，$g(x)$ が I で積分可能ならば，積分

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

は I で絶対連続で，

$$f'(x) = g(x) \quad \text{a.e. } x\in I.$$

系 41.1 (部分積分の公式)**.** $f(x)$ を I で積分可能な関数，$g(x)$ を I で絶対連続な関数であるとする．このとき，

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C \quad (C:\text{const.})$$

とおくと，部分積分の公式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

が成り立つ.

証明. $f(x)$ は I で積分可能なので，定理 41.1 の (ii) から，$F(x)$ は絶対連続である．よって，命題 41.1 の (ii) から，$F(x)g(x)$ は絶対連続である．したがって，定理 41.1 の (i) から，

$$[F(x)g(x)]_a^b = \int_a^b (F(t)g(t))'\,dt = \int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b F(t)g'(t)\,dt.$$

したがって，

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

以上をまとめると，微積分の基本公式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

について，次の表を得る：

分野	$f(x)$	dx
微分積分学	連続的微分可能関数	リーマン測度
実解析学	絶対連続関数	ルベーグ測度

42　1次元超関数の定義

この節では，$I = (a, b)$ を $\mathbf{R}$ の開区間とする．滑らかな関数や不連続な関数を含む，できるだけ大きな関数空間を導入することを考えよう．次の関数空間は，ルベーグ積分論の観点から最適なものである：

定義 42.1 (局所的に積分可能)**.** 関数 $f(x)$ が I で局所的に積分可能であるとは，$f(x)$ が I の任意のコンパクト部分集合 K 上で積分可能であることをいう．すなわち，

$$\int_K |f(x)|\,dx < \infty.$$

以下では，

$$L^1_{\mathrm{loc}}(I) := \{I \text{ で局所的に積分可能な関数}\}$$

とおく．

ルベーグ積分の観点から，最も重要な注意を述べる．$L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ の関数 $f(x), g(x)$ について，次の同値関係 $\sim$ を導入する：

$$f(x) \sim g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \quad \text{a.e. in } I = (a, b)$$

このとき，この同値関係で割った空間 $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(I) := L^1_{\mathrm{loc}}(I)/\sim$ が，局所可積分関数の空間の正しい定義である．しかしながら，慣例では，上のように同じ記号を使う．

注意 42.1. $1 < p \leq \infty$ に対して，$L^p_{\mathrm{loc}}(I)$ が，$L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ に準じて定義される．このとき，コンパクト集合 $K \subset I$ の測度が有限であることとヘルダーの不等式 (8.4) より，

$$L^p(I) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(I) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(I) \quad \text{for } 1 < p \leq \infty$$

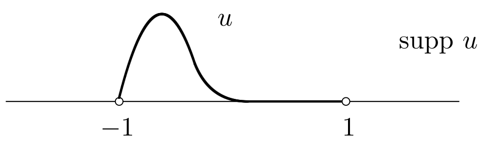
であることに注意.

連続関数 $u \in C(I)$ に対してその**台** (support) を

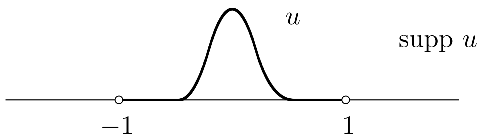
$$\mathrm{supp}\ u = \overline{\{x \in I : u(x) \neq 0\}} \cap I$$

として定義する．右辺は $\mathbf{R}$ における閉包と I の共通部分である．

例 42.1. $I=(-1,1)$ とする．



supp u はコンパクトでない



supp u はコンパクトである

非負整数 m に対して，次の関数空間を導入する：

$$\begin{aligned}&C^m(I) := \{I \text{ で } m \text{ 回連続的微分可能な関数}\},\\ &C_0^m(I) := \{I \text{ でコンパクトな台をもつ } C^m(I) \text{ の関数}\}.\end{aligned}$$

定義 42.2 (超関数)**.** T が I 上の m 次の**超関数** (distribution) であるとは，T が $C_0^m(I)$ から $\mathbf{C}$ への写像

$$T : C_0^m(I) \ni \varphi \longmapsto T(\varphi) \in \mathbf{C}$$

で，次の 2 条件を満たすときをいう：

(i) 線形性：

$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \quad \forall a, b \in \mathbf{C}, \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^m(I).$$

(ii) I の任意のコンパクト部分集合 K に対して，定数 $C_K > 0$ が存在して，任意の $\varphi \in C_0^m(I)$ $(\operatorname{supp}\varphi \subset K)$ に対して，

$$|T(\varphi)| \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \max_{x\in K} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

I 上の m 次超関数からなる集合を $\mathcal{D}'^m(I)$ とかく．また，$T(\varphi)$ を $\langle T, \varphi\rangle$ ともかく．

注意 42.2. 非負整数 m と I のコンパクト部分集合 K に対して，

$$\mathcal{D}_K^m(I) := \{\varphi \in C^m(\Omega) : \text{supp } \varphi \subset K\} \subset C_0^m(I)$$

とすると，$\mathcal{D}_K^m(I)$ は，

$$\|\varphi\|_m = \sum_{j=0}^{m} \max_{x\in I} |\varphi^{(j)}(x)|$$

をノルムとするバナッハ空間である．このとき，超関数の定義 42.2 の (ii) は次と同値である：

(ii′) I の任意のコンパクト部分集合 K に対して，T は $\mathcal{D}_K^m(I)$ 上で連続である．すなわち，

$$\|\varphi_k - \varphi\|_m \to 0 \Longrightarrow T(\varphi_k) \to T(\varphi).$$

$m=\infty$ に対しては，次の関数空間を導入する：

$$\begin{aligned}&C^\infty(I) := \{I \text{ で無限回微分可能な関数}\},\\ &C_0^\infty(I) := \{I \text{ でコンパクトな台をもつ } C^\infty(I) \text{ の関数}\}.\end{aligned}$$

定義 42.3 (超関数)**.** T が I 上の**超関数** (distribution) であるとは，T が $C_0^\infty(I)$ から $\mathbf{C}$ への写像

$$T : C_0^\infty(I) \ni \varphi \longmapsto T(\varphi) \in \mathbf{C}$$

で，次の 2 条件を満たすときをいう：

(i) 線形性：
$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \quad \forall a, b \in \mathbf{C}, \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(I).$$

(ii) I の任意のコンパクト部分集合 K に対して，定数 $C_K > 0$ と $m_K \geq 0$ が存在して，任意の $\varphi \in C_0^\infty(I)$ ($\operatorname{supp} \varphi \subset K$) に対して，

$$|T(\varphi)| \leq C_K \sum_{j=0}^{m_K} \max_{x \in K} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

I 上の超関数からなる集合を $\mathcal{D}'(I)$ とかく．また，$T(\varphi)$ を $\langle T, \varphi \rangle$ ともかく．

注意 42.3. I のコンパクト部分集合 K に対して，

$$\mathcal{D}_K(I) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\, \varphi \subset K\} \subset C_0^\infty(I)$$

とすると，$\mathcal{D}_K(I)$ は，可算個のセミノルム

$$p_m(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} \max_{x \in I} |\varphi^{(j)}(x)|, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

をの族とするフレッシェ空間である．このとき，超関数の定義 42.3 の (ii) は次と同値である：

(ii′) I の任意のコンパクト部分集合 K に対して，T は $\mathcal{D}_K(I)$ 上で連続である．すなわち，

$$\forall m = 0, 1, 2, \ldots, \quad p_m(\varphi_k - \varphi) \to 0 \Longrightarrow T(\varphi_k) \longrightarrow T(\varphi).$$

超関数全体の空間は，次のような階層をなす：

$$\begin{gathered} C_0^\infty(I) \subset \ldots \subset C_0^m(I) \subset \ldots \subset C_0^0(I) = C_0(I) \\ \subset \mathcal{D}'^0(I) \subset \ldots \subset \mathcal{D}'^m(I) \subset \ldots \subset \mathcal{D}'(I) \end{gathered}$$

このように，階層的に，滑らかな関数と不連続な関数を含む，非常に大きな関数空間である $\mathcal{D}'$ を導入することができる．実際，次に述べる例 42.2 のように，先に定義した空間 $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ は，第 1 次の不連続な関数空間 $\mathcal{D}'^0(I)$ に属することがわかる．また，$\mathcal{D}'^m(I) \subset \mathcal{D}'(I)$ は，写像

$$T \in \mathcal{D}'^m(I) \longmapsto T|_{C_0^\infty(I)} \in \mathcal{D}'(I)$$

が単射であることから従う．

この写像が単射であることは，定理 45.1, 定理 45.2 より，任意の $\varphi \in C_0^m(I)$ に対して，I のコンパクト部分集合 K と $\{\varphi_\varepsilon\} \subset \mathcal{D}_K(I)$ が存在して，

$$\varphi \in \mathcal{D}_K^m(I), \quad \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_m \to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

となることから証明できる．$\mathcal{D}'^m(I) \subset \mathcal{D}'^n(I)$ $(n > m)$ の証明も同様である．

超関数 T に対して，$T \in \mathcal{D}'^m(I)$ となる m のうち最小の値を T の**位数**という．

$n > m$ に対して，$\mathcal{D}'^n(I)$ もしくは $\mathcal{D}'(I)$ の元が $\mathcal{D}'^m(I)$ の元に拡張できるための条件を述べる．

例 42.2. 任意の関数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ は次の式により，0 次の超関数 T_f とみなせる：

$$T_f(\varphi) = \int_I f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in C_0(I).$$

証明. 実際，任意の $\varphi \in C_0(I)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ に対して，

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &\le \int_K |f(x)||\varphi(x)|\,dx \\ &\le \left(\int_K |f(x)|\,dx\right) \max_{x\in K} |\varphi(x)| \end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 42.4. 写像 $f \longmapsto T_f$ は $L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ から $\mathcal{D}'^0(I)$ への単射である．言い換えると，任意の関数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ は 超関数 $T_f \in \mathcal{D}'^0(I)$ と同一視することができる．これは，補題 44.1（デュボアレモン）から従う．

この節の冒頭で述べたように，$L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ は，同値類の空間なので，単射であることが言える．すなわち，$f(x) = 0$ a.e. in I が，$L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ のゼロ元であったことに注意.

今後，混乱の恐れがないときは，$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ から定まる超関数 T_f を単に f で表す.

上の例では，関数 $f(x)$ を密度とする測度 $f(x)\,dx$ と考えている．シュワルツが distribution (超分布）と呼んだ根拠だと思われる．しかしながら，次に述べるデルタ関数は，そのような密度関数で表示されない $\mathcal{D}'^0(I)$ の典型的な例である：

例 42.3 (ディラックのデルタ関数)**.** $a < c < b$ のとき，

$$\delta_c(\varphi) = \varphi(c), \quad \forall \varphi \in C_0(I)$$

とする.

$$\delta_c(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } \ x = c, \\ 0 & \text{if } \ x \neq c, \end{cases}$$

で，

$$\int_I \delta_c(x)\,dx = 1$$

である．この超関数 $\delta_c(x)$ は 0 次の超関数である.

ポール・エイドリアン・モーリス・ディラックはイギリスの理論物理学者である．1933 年にエルヴィン・シュレーディンガーと共にノーベル物理学賞を受賞した.

証明. 実際，

$$|\delta_c(\varphi)| = |\varphi(c)| \le \max_{x\in K} |\varphi(x)|.$$

デルタ関数 $\delta(x) = \delta_0(x)$ は，第 45 節で述べるフリードリックスの釣鐘型の関数列の極限として表示することができる（例 46.3 を参照）．さらに，考える問題に応じて，次のような関数列 $\{\phi_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ を用いて，デルタ関数を近似する（熱核に関しては第 53 節，

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \phi_\varepsilon(x)\,d\xi.$$

近似関数 $\phi_\varepsilon(x)$	積分核	付随する問題
$e^{-\varepsilon\xi^2}$	熱核	熱方程式の初期値問題
$e^{-\varepsilon\lvert\xi\rvert}$	ポアソン核	ラプラス方程式のディィリクレ問題

ポアソン核に関しては第 50 節を参照）：

以下の例については，ゲルファント・シーロフ [12] に詳しい説明がある：

例 42.4 (コーシーの主値)**.**

$$\left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx \right),$$

と定義すると，v.p. $\frac{1}{x}$ は $\mathbf{R}$ 上で位数 1 の超関数である．ここで，v.p. はフランス語 valeur principale の省略記号である．

証明． まず，任意の $\varphi \in C_0^1(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ に対して，

$$\left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$$

で，

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx = \int_{\varepsilon<|x|\le 1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$$

として考えていく．

ところで，

$$\begin{aligned} |(\text{第 2 項})| &\le \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|}|\varphi(x)|\,dx \\ &< \int_{|x|>1} |\varphi(x)|\,dx \\ &\le |K| \max_{x\in K} |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

一方，

$$\int_{\varepsilon<|x|\le 1} \frac{1}{x}\,dx = 0$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} (\text{第 1 項}) &= \int_{\varepsilon<|x|\le 1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx - \int_{\varepsilon<|x|\le 1} \frac{1}{x}\varphi(0)\,dx \\ &= \int_{\varepsilon<|x|\le 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx \\ &= \int_{\varepsilon<|x|\le 1} \left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt \right) dx \end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\text{第 1 項}) &= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt\right)dx,\\
\left|\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\text{第 1 項})\right| &\leq \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 |\varphi'(tx)|\,dt\right)dx\\
&\leq \int_{-1}^{1}\left(\int_0^1 dt\right)dx\cdot\max_{x\in K}|\varphi'(x)|\\
&= 2\max_{x\in K}|\varphi'(x)|.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\left|\left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x},\varphi\right\rangle\right| \leq |K|\max_{x\in K}|\varphi(x)| + 2\max_{x\in K}|\varphi'(x)|
$$

となり，

$$
\mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}\in\mathcal{D}'^{1}(\mathbf{R}).
$$

例 42.5 (アダマールの有限部分)**.** 次の関数を考える：

$$
f(x) = \begin{cases} x^{-3/2}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}
$$

$f(x)$ は原点の近傍で可積分でないので，$f\notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ である．よって，$\varphi\in C^1_0(\mathbf{R})$ が $\varphi(0)\neq 0$ をみたすとき，積分

$$
\int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,dx \tag{42.1}
$$

は発散する．しかしながら，次のようにして，この積分から無限部分を取り除くことによって，関数 $f(x)$ に対応する超関数を構成することができる．

$\varepsilon>0$ とする．任意の $\varphi\in C^1_0(\mathbf{R})$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\int_\varepsilon^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,dx &= 2\varepsilon^{-1/2}\varphi(\varepsilon)+\int_\varepsilon^\infty 2x^{-1/2}\varphi'(x)\,dx\\
&=: A(\varepsilon)+B(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

$\varepsilon\downarrow 0$ のとき，$B(\varepsilon)$ は収束するが，$A(\varepsilon)$ は，$\varphi(0)\neq 0$ ならば，発散する．アダマールは，$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}B(\varepsilon)$ を積分 (42.1) の有限部分とよんだ．この有限部分は，

$$
\mathrm{pf.}\int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,dx
$$

で表される．ここで，pf. はフランス語 partie finie の省略記号である．写像

$$
\varphi\in C^1_0(\mathbf{R})\longmapsto \mathrm{pf.}\int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,dx
$$

が $\mathcal{D}'^{1}(\mathbf{R})$ の元を定義することは，

$$
\mathrm{pf.}\int_0^\infty x^{-3/2}\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty 2x^{-1/2}\varphi'(x)\,dx
$$

から従う．この超関数を $\mathrm{pf.}\,f(x)$ で表す．

同様にして，

$$\begin{aligned}\mathrm{pf.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx &= \mathrm{pf.}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \mathrm{pf.}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\log|x|\varphi'(x)\,dx\end{aligned}$$

から，超関数 $\mathrm{pf.}\,x^{-1}\in\mathcal{D}'^{1}(\mathbf{R})$ が定義できる．さらに，後出の例 43.8 で示すように，

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\log|x|\varphi'(x)\,dx = \left\langle \mathrm{v.p.}\frac{1}{x},\varphi\right\rangle$$

であるので，

$$\mathrm{pf.}\frac{1}{x} = \mathrm{v.p.}\frac{1}{x}$$

が成り立つ．

43　超関数についての種々の作用

超関数の制限，乗法，微分等は，以下のように定義する：

(a) 制限：T を I 上の m 次の超関数，J を I の開部分区間として，

$$\langle T|_J,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle\,, \qquad \forall\varphi\in C_0^m(J)$$

と定義する．制限 $T|_J$ は J 上の超関数である．

$$\begin{tikzcd} C_0^m(J) \arrow[r] \arrow[dr, "T|_J"'] & C_0^m(I) \arrow[d, "T"] \\ & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

(b) 関数による乗法：T を I 上の m 次の超関数，$\alpha\in C^m(I)$ として，

$$\langle \alpha T,\varphi\rangle = \langle T,\alpha\varphi\rangle\,, \quad \forall\varphi\in C_0^m(I)$$

と定義する．αT は m 次の超関数である．

$$\begin{tikzcd} C_0^m(I) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha T"'] & C_0^m(I) \arrow[d, "T"] \\ & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

例 43.1. $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(I),\,\alpha\in C(I)$ ならば，f から定まる超関数 T_f と α の積 αT_f は，$\alpha f\in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ から定まる超関数 $T_{\alpha f}$ と一致する: $\alpha T_f = T_{\alpha f}$．実際，任意の $\varphi\in C_0(I)$ に対して，

$$\langle \alpha T_f,\varphi\rangle = \langle T_f,\alpha\varphi\rangle = \int_I[\alpha(x)f(x)]\varphi(x)\,dx = \langle T_{\alpha f},\varphi\rangle\,.$$

このように，超関数の意味での関数との積は，通常の意味での積の拡張といえる．

例 43.2. 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，積 $x^n\delta$ を計算する．

任意の $\varphi \in C_0(I)$ に対して，

$$\langle x^n\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x^n\varphi\rangle = 0 \cdot \varphi(0) = 0.$$

よって，$x^n\delta = 0$ である．

例 43.3.

$$x\left(\mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}\right) = 1$$

である．実際，任意の $\varphi \in C_0^1(\mathbf{R})$ に対して，

$$\left\langle x\left(\mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}, x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle\,.$$

(c) 微分：T を I 上の m 次の超関数として，

$$\left\langle T^{(j)}, \varphi\right\rangle = (-1)^j\left\langle T, \varphi^{(j)}\right\rangle, \quad \forall\varphi \in C_0^{m+j}(I)$$

と定義する．導関数 $T^{(j)}$ は $(m+j)$ 次の超関数である．

$$\begin{tikzcd}
C_0^{m+j}(I) \arrow[r, "(-1)^j \frac{d^j}{dx^j}"] \arrow[dr, "T^{(j)}"'] & C_0^m(I) \arrow[d, "T"] \\
 & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

例 43.4. $f \in C^1(I)$ ならば，f から定まる超関数 T_f の微分 $(T_f)'$ は，f' から定まる超関数 $T_{f'}$ と一致する．実際，任意の $\varphi \in C_0^1(I)$ に対して，

$$\langle (T_f)', \varphi\rangle = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx = \int_I f'(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_{f'}, \varphi\rangle\,.$$

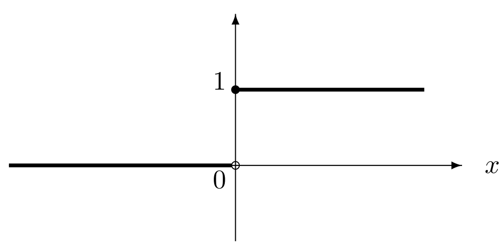
このように，超関数の意味での微分は，通常の意味での微分の拡張といえる．

次に，いくつか計算例を挙げる．

例 43.5. 次の関数 $H(x)$ を**ヘビサイドの階段関数**という：

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x < \infty, \\ 0 & \text{if } -\infty < x < 0. \end{cases}$$

オリヴァー・ヘヴィサイドはイギリスの電気技師である．



明らかに，$H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ であるから，$H \in \mathcal{D}'^0(\mathbf{R})$ である．H の導関数は，

$$H' = \delta$$

となる．実際，任意の $\varphi \in C^1_0(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle H', \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(0) \quad = \quad \langle \delta, \varphi \rangle\end{aligned}$$

となるからである．

例 43.6 (双極子)**.** デルタ関数 δ を微分すると，任意の $\varphi \in C^1_0(\mathbf{R})$ に対して，

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\delta(\varphi) - \delta_\varepsilon(\varphi)}{\varepsilon}.$$

より一般的な例を挙げる：

例 43.7 (ジャンプ公式)**.** 関数 $f(x)$ を $x = 0$ を除いて C^1 級であるとする．このとき，

$$(T_f)' = T_{f'} + (f(+0) - f(-0))\,\delta_0.$$

証明. 任意の $\varphi \in C^1_0(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle (T_f)', \varphi \rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle \\ &= -\int_0^\infty f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= -[f(x)\varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty f'(x)\varphi(x)\,dx - [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= f(+0)\varphi(0) + \int_0^\infty f'(x)\varphi(x)\,dx - f(-0)\varphi(0) + \int_{-\infty}^0 f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= (f(+0) - f(-0))\,\varphi(0) + \int_0^\infty f'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \langle (f(+0) - f(-0))\,\delta_0 + T_{f'}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

したがって，

$$(T_f)' = T_{f'} + (f(+0) - f(-0))\,\delta_0.$$

例 43.8.

$$\log|x| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$$

に注意すると，

$$(\log|x|)' = \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}$$

である．

証明. ド・ロピタルの定理から，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \log \varepsilon = 0$$

が成り立つことに注意する．

まず，$r=|x|$ とすると，

$$\begin{aligned}
\left|\int_\varepsilon^1 \log r\,dr\right| &= \left|[r\log r]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dr\right| \\
&= |-\varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon)| \\
&\longrightarrow 1 \quad (\varepsilon\downarrow 0).
\end{aligned}$$

さらに，任意の $\varphi\in C_0^1(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}
\left\langle (\log|x|)', \varphi\right\rangle = -\langle \log|x|, \varphi'\rangle &= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty (\log x)\varphi'(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon}(\log(-x))\varphi'(x)\,dx\right\} \\
&= -\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{-(\log\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx\right. \\
&\qquad \left. + (\log\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx\right\} \\
&= \left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle + \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\log\varepsilon.
\end{aligned}$$

ところで，

$$\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi(2t\varepsilon-\varepsilon)dt \\
&= 2\varepsilon\int_0^1 \varphi'(2t\varepsilon-\varepsilon)dt
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\log\varepsilon &= 2\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{(\varepsilon\log\varepsilon)\int_0^1 \varphi'(2t\varepsilon-\varepsilon)\right\}dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\left\langle (\log|x|)', \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle.$$

乗法と微分の定義を使って超関数の意味でのライプニッツの公式：

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T', \quad \alpha\in C^1(I)$$

が示せる．

実際，任意の $\varphi\in C_0^1(I)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle(\alpha T)', \varphi\rangle &= -\langle \alpha T, \varphi'\rangle \\
&= -\langle T, \alpha\varphi'\rangle \\
\langle \alpha' T + \alpha T', \varphi\rangle &= \langle \alpha' T, \varphi\rangle + \langle \alpha T', \varphi\rangle \\
&= \langle T, \alpha'\varphi\rangle + \langle T', \alpha\varphi\rangle \\
&= \langle T, \alpha'\varphi\rangle - \langle T, (\alpha\varphi)'\rangle \\
&= \langle T, \alpha'\varphi\rangle - \langle T, \alpha'\varphi + \alpha\varphi'\rangle \\
&= -\langle T, \alpha\varphi'\rangle
\end{aligned}$$

となる．

44　超関数の意味での導関数

この節では，微分積分学における連続的微分可能性の超関数版を定義する：

定義 44.1 (超関数の意味での微分)**.** I を $\mathbf{R}$ の開区間とする．関数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ が超関数の意味で微分可能であるとは，$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ が存在して，

$$\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_I g(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in C^1_0(I) \tag{44.1}$$

が成り立つときをいう．このとき，関数 $g(x)$ のことを $f(x)$ の導超関数 (distribution derivative) とよび，$g = Df$ とかく．

	基礎となる 関数空間	導（超）関数	付加条件	定義
微分積分	$u \in C(I)$	u'	$u' \in C(I)$	C^1–級 （連続的微分可能）
超関数論	$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$	$(T_f)'$	$\exists g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$: $(T_f)' = T_g$	超関数の意味で 微分可能

注意 44.1. 上の定義の (44.1) は，関数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ から定まる超関数 T_f の導関数 $(T_f)'$ が $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ から定まる超関数 T_g と一致することを意味している．前節の例 43.4 で示したように，関数 $f \in C^1(I)$ から定まる超関数 T_f の導関数 $(T_f)'$ は，$f' \in C(I)$ から定まる超関数 $T_{f'}$ と一致する．しかしながら，一般の $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ に対しては，$(T_f)' = T_g$ となる $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ が存在するとは限らない．たとえば，例 57.4 で見たように，ヘビサイド関数 $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ に対して，$(T_H)' = \delta$ であるから，$(T_H)' = T_g$ をみたす $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ は存在しない．

$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ に対して，このような $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ が存在するための必要十分条件を与えるのが，後出の定理 44.1（ソボレフの埋蔵定理）である．その条件は，f は絶対連続関数で，$g = f'$ が成り立つことである．

次の補題から，導超関数 $g(x)$ が一意的に定まることが従う：

補題 44.1 (デュボアレモン)**.** $I = (a, b)$ を $\mathbf{R}$ の有界な開区間とする．このとき，$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ に対して，

$$\int_I g(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall \varphi \in C^1_0(I) \Longrightarrow g(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in I.$$

証明. K を I の任意のコンパクト部分集合とし，K 上で $\chi = 1$ となる関数 $\chi \in C^1_0(I)$ をとる．

このような関数は，後出の定理 46.2 により存在する．関数 g と χ を区間 I の外側で 0 となる $\mathbf{R}$ 上の関数に拡張し，

$$g_\chi(x) = \chi(x)g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{if } x \in K, \\ \chi(x)g(x) & \text{if } x \notin K \end{cases}$$

とすると，

$$g_\chi \in L^1(\mathbf{R}).$$

ここで，$\rho \in C_0^1(\mathbf{R})$ を，

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\rho \subset \{x \in \mathbf{R} : |x| \le 1\}, \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \rho(x)\,dx = 1, \end{cases}$$

として，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とすると，

$$\rho_\varepsilon * g_\chi \longrightarrow g_\chi \quad \text{in } L^1(\mathbf{R}) \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

詳しくは，後出のフリードリックスの軟化作用素を参照されたい（第 45 節）．

ところで，

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon * g_\chi(x) &= \int_{\mathbf{R}} \rho_\varepsilon(x-y) g_\chi(y)\,dy \\ &= \int_I g(y)(\chi(y)\rho_\varepsilon(x-y))\,dy \end{aligned}$$

であり，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\chi(\cdot)\rho_\varepsilon(x-\cdot) \in C_0^1(I), \quad x \in \mathbf{R}.$$

よって，仮定より，

$$\rho_\varepsilon * g_\chi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

だから，

$$\|g_\chi\|_1 = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|\rho_\varepsilon * g_\chi\|_1 = 0$$

となり，

$$g_\chi(x) = \chi(x)g(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in \mathbf{R}.$$

特に，

$$g(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in K.$$

ところで，集合 $K \subset I$ は任意なので，

$$g(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in I$$

が従う．

以下では，超関数の意味での微分と通常の意味での微分を区別せず，$'$ や d/dx で表し，局所可積分関数 f の導超関数 g を表す際には D を用いる $(g = Df)$ ことで統一する。この節の目的は，一変数の場合，超関数の意味での微分について，次のソボレフの埋蔵定理を示すことである：

分野	偏微分方程式	実解析
関数 の性質	超関数の意味で 微分可能関数	局所的 絶対連続関数

定理 44.1 (ソボレフの埋蔵定理). (i) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ が超関数の意味で微分可能ならば，関数 $f(x)$ は I に含まれる任意の閉区間で絶対連続で，

$$f' = Df.$$

(ii) 逆に，$f(x)$ が I に含まれる任意の閉区間で絶対連続ならば，関数 $f(x)$ は超関数の意味で微分可能で，

$$Df = f'.$$

証明. (ii) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ を I に含まれる任意の有界閉区間 K で絶対連続であるとする．このとき，定理 41.1 から $f(x)$ は a.e. $x \in K$ で微分可能で，$f'(x)$ は K で積分可能である．さらに，任意の $\varphi \in C^1_0(I)$, supp $\subset K$ に対して，

$$\begin{aligned}
\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_K f(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= [f(x)\varphi(x)]_{\partial K} - \int_K f'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_K f'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_I f'(x)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は超関数の意味で微分可能で，

$$Df = f'.$$

(i) まず，

$$Df = 0 \quad \text{in } I \Longrightarrow f : \text{const}. \tag{44.2}$$

を示す．

区間 I で $Df = 0$ とすると，

$$\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx = 0, \quad \forall\varphi \in C^1_0(I). \tag{44.3}$$

今，$\zeta \in C^1_0(I)$ が，

$$\int_I \zeta(x)\,dx = 0$$

を満たすとすると，

$$\Phi(x) = \int_a^x \zeta(t)\,dt \in C^2_0(I).$$

よって，(44.3) から，

$$0 = \int_I f(x)\Phi'(x)\,dx = \int_I f(x)\zeta(x)\,dx. \tag{44.4}$$

ここで，任意の $\varphi \in C^1_0(I)$ と

$$\int_I \psi_0(x)\,dx = 1$$

を満たす $\psi_0 \in C^1_0(I)$ に対して，

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \left(\int_I \varphi(x)\,dx\right)\psi_0(x)$$

とする．このとき，

$$\begin{cases} \varphi_1 \in C_0^1(I), \\ \displaystyle\int_I \varphi_1(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

は明らかである．

したがって，(44.4) から，

$$\begin{aligned}
0 &= \int_I f(x)\varphi_1(x)\,dx \\
&= \int_I f(x)\left\{\varphi(x) - \left(\int_I \varphi(x)\,dx\right)\psi_0(x)\right\}\,dx \\
&= \int_I f(x)\varphi(x)\,dx - \int_I f(t)\left(\int_I \varphi(x)\,dx\right)\psi_0(t)dt \\
&= \int_I f(x)\varphi(x)\,dx - \int_I\left(\int_I f(t)\psi_0(t)\,dt\right)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_I \left(f(x) - \int_I \psi_0(t)f(t)\,dt\right)\varphi(x)\,dx, \quad \forall\varphi \in C_0^1(I).
\end{aligned}$$

よって，

$$f(x) = \int_I \psi_0(t)f(t)\,dt = \mathrm{const.}$$

$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ を $f(x)$ の導超関数とすると，

$$\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_I g(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall\varphi \in C_0^1(I).$$

$c \in I$ として，

$$G(x) = \int_c^x g(t)\,dt$$

とする．このとき，定理 41.1 より，

$$\begin{aligned}
\int_I f(x)\varphi'(x)\,dx &= -\int_I g(x)\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_I G'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \int_I G(x)\varphi'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_I (f(x) - G(x))\varphi'(x)\,dx = 0, \quad \forall\varphi \in C_0^1(I).$$

すなわち，

$$D(f - G) = 0 \quad \text{in } I.$$

したがって，(44.2) から，

$$f(x) = G(x) + \mathrm{const.} = \int_c^x g(t)\,dt + \mathrm{const.}$$

$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ だから，定理 41.1 から，$f(x)$ は I で絶対連続で，

$$f' = g = Df.$$

45　フリードリックスの軟化作用素

$\mathbf{R}^n$ 上の関数 $\varphi(x)$ として，次の性質を持つものをとる：

(i) $\varphi(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbf{R}^n$.

(ii) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$; $\varphi(x) = 0$ if $|x| \geq 1$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$.

たとえば，関数

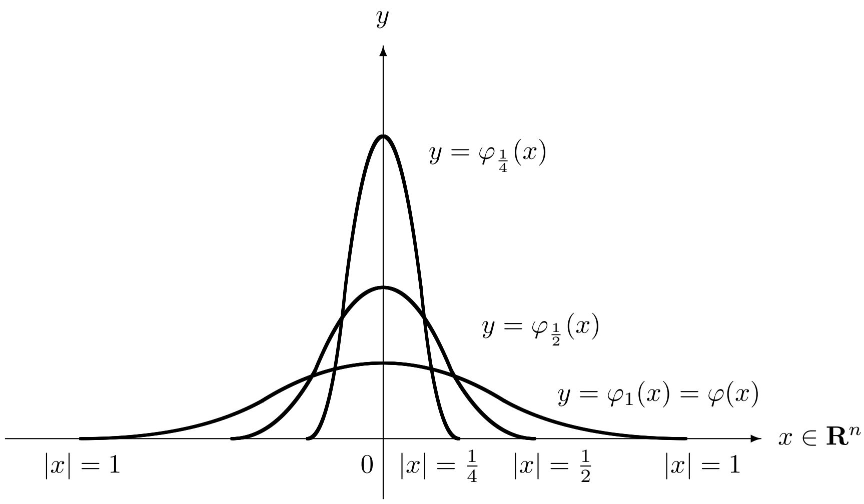
$$\psi(x) = \begin{cases} \exp[-1/(1-|x|^2)] & \text{if } |x| < 1, \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1 \end{cases}$$

は，(i), (ii) を満たすので，$\varphi(x) = \psi(x)/\int_{\mathbf{R}^n} \psi(x)\,dx$ とすればよい．

さて，任意の $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対して，

$$J_\varepsilon f(x) := (\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy, \quad \varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{45.1}$$

とおく．この J_ε をフリードリックスの**軟化作用素**という．



定理 45.1. 軟化作用素を施した関数 $J_\varepsilon f(x)$ について，次の性質が成り立つ：

(i) $1 \leq p \leq \infty$ に対して，不等式

$$\|J_\varepsilon f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}.$$

がなりたつ．

(ii) $J_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

証明. (i) まず，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$$

だから，ハウスドルフ・ヤングの不等式 (9.3) より，

$$\|J_\varepsilon f\|_{L^p} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1}\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.$$

(ii) $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ だから，(45.1) の右辺より，x について何回でも偏微分可能であることがわかる．よって，$J_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

次に，準備として，次の補題を用意する：

補題 45.1. 関数 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, に対して

$$f_x(y) := f(x+y), \quad y \in \mathbf{R}^n,$$

とおくと，$x \to 0$ のとき，

$$f_x \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^n).$$

証明. (1) 関数 $g(x)$ が，コンパクトな台を持つ連続関数ならば，$x \to 0$ のとき，一様に

$$g_x \longrightarrow g \quad \text{on } \mathbf{R}^n$$

だから，

$$\|g_x - g\|_p \longrightarrow 0 \quad (x \to 0).$$

(2) 次に $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ とする．定理 9.4 より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

をみたす，コンパクトな台を持つ連続関数 $g(x)$ を見つけることができる．このとき，

$$\|f_x - g_x\|_p = \|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

だから，

$$\begin{aligned}\|f_x - f\|_p &\leq \|f_x - g_x\|_p + \|g_x - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &< \varepsilon + \|g_x - g\|_p.\end{aligned}$$

これより，

$$\overline{\lim_{x \to 0}} \|f_x - f\|_p \leq \varepsilon$$

を得るから，補題が従う．

注意 45.1. 補題 45.1 は，$p = \infty$ に対しては正しくない．実際，

$$\|f_x - f\|_\infty = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} |f(x+y) - f(y)| \longrightarrow 0 \quad (x \to 0)$$

ならば，関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}^n$ において一様連続でなければならないからである．

定理 45.2. $\varphi(x)$ を $L^1(\mathbf{R}^n)$ に属する関数であって，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$$

をみたすとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とおくと，次の主張が成り立つ：

(i) $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ ならば，

$$J_\varepsilon f = f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^n) \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

(ii) $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ が一様連続ならば，

$$J_\varepsilon f = f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{in } L^\infty(\mathbf{R}^n) \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

証明. (i) まず，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$$

だから，

$$\begin{aligned} f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\varphi_\varepsilon(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\varphi(z)\,dz. \end{aligned}$$

従って，ミンコウスキーの不等式の積分形 ([9, Theorem 6.19]) より，

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \leq \int_{\mathbf{R}^n} \|f_{-\varepsilon z} - f\|_p |\varphi(z)|\,dz.$$

ところで，

$$\|f_{-\varepsilon z} - f\|_p \leq \|f_{-\varepsilon z}\|_p + \|f\|_p = 2\|f\|_p$$

だから

$$\|f_{-\varepsilon z} - f\|_p |\varphi(z)| \leq 2\|f\|_p |\varphi(z)|$$

であって，

$$\varphi \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

さらに，補題 45.1 から，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|f_{-\varepsilon z} - f\|_p = 0, \quad \forall z \in \mathbf{R}^n.$$

以上より，ルベーグの優収束定理（定理 3.6）が使えて，

$$\overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} \|f_{-\varepsilon z} - f\|_p |\varphi(z)|\,dz = 0.$$

(ii) 関数 $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ は一様連続とする．関数 $\varphi(x)$ は，$\mathbf{R}^n$ 上積分可能だから，次が従う：任意の $\delta > 0$ に対して，コンパクト集合 W が存在して，

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus W} |\varphi(z)|\,dz < \delta.$$

このとき，

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbf{R}^n} |f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)||\varphi(y)|\,dy \right) \\ &= \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \left(\int_W |f(x-\varepsilon y) - f(x)||\varphi(y)|\,dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbf{R}^n \setminus W} |f(x-\varepsilon y) - f(x)||\varphi(y)|\,dy \right) \\ &\leq \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ y \in W}} (|f(x-\varepsilon y) - f(x)|) \cdot \int_W |\varphi(y)|\,dy + 2\|f\|_\infty \cdot \int_{\mathbf{R}^n \setminus W} |\varphi(y)|\,dy \\ &\leq \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ y \in W}} (|f(x-\varepsilon y) - f(x)|)\,\|\varphi\|_1 + 2\delta\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

ところで，関数 $f(x)$ は一様連続で，集合 W はコンパクトだから，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n\\ y\in W}}|f(x-\varepsilon y)-f(x)|\right]=0.$$

以上をまとめると，

$$\varlimsup_{\varepsilon\downarrow 0}\|f*\varphi_\varepsilon-f\|_\infty\le 2\delta\|f\|_\infty.$$

$\delta>0$ は任意だったから，主張 (ii) を得る．

関数族 $\{\varphi_\varepsilon\}$ は，**恒等作用素の近似**と呼ばれる．

46　超関数の台

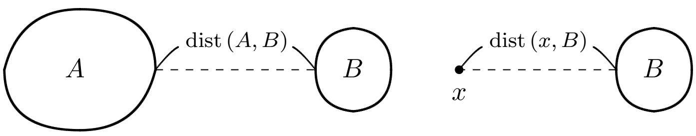
集合 $A,\,B\subset\mathbf{R}^n$ に対して

$$\mathrm{dist}\,(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}|x-y|$$

とおく．特に，$A=\{x\}$ の場合には，

$$\mathrm{dist}\,(x,B)=\inf_{y\in B}|x-y|$$

となる．



定理 46.1. K を開集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ のコンパクト部分集合とすると，$\mathrm{dist}\,(K,\Omega^c)>0$.

証明. 背理法によって示す．もし $\mathrm{dist}\,(K,\Omega^c)=0$ だとすると，点列 $x_n\in K,\,y_n\in\Omega^c$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=0$$

となる．$\{x_n\}$ は有界列であるから，収束する部分列 $\{x_{n'}\}$ が存在する（ワイエルシュトラスの定理より）．すなわち，ある $x_0\in K$ が存在して

$$\lim_{n'\to\infty}|x_{n'}-x_0|=0.$$

$\{y_{n'}\}$ も有界列となるから，その部分列 $\{y_{n''}\}$ と，ある $y_0\in\Omega^c$ が存在して

$$\lim_{n''\to\infty}|y_{n''}-y_0|=0.$$

以上から

$$|x_0-y_0|=\lim_{n''\to\infty}|x_{n''}-y_{n''}|=0$$

でなければならない．したがって，$K \ni x_0 = y_0 \in \Omega^c$.

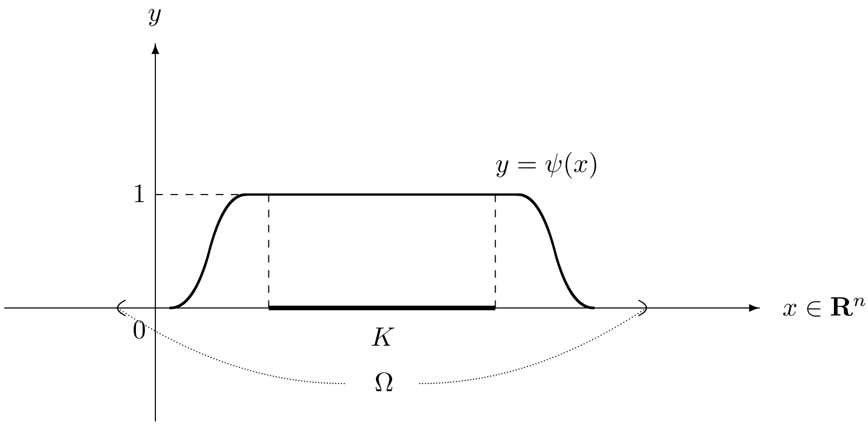
一方，

$$K \cap \Omega^c = \emptyset$$

だから，これは矛盾である．

定理 46.2. K を開集合 Ω のコンパクト部分集合とすると，次の条件を満たす関数 $\psi(x)$ が存在する：

$$0 \le \psi(x) \le 1, \qquad K \text{ のある近傍で } \psi(x) = 1, \qquad \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$



証明. 定理 46.1 により

$$\delta = \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$$

とおけば，$0 < \delta \le \infty$. 正数 ε を $0 < 2\varepsilon < \delta$ となるように固定する．

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \le \varepsilon\}$$

とおき，$\chi(x)$ を K_ε の定義関数とする．すなわち，関数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ x \in K_\varepsilon, \\ 0 & \text{if } \ x \in K_\varepsilon^c \end{cases}$$

そして，フリードリックスの軟化作用素 (45.1) の $\varphi_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$ をとり

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \chi * \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) = \int \chi(y) \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x - y)\, dy \\ &= \int_{K_\varepsilon} \varphi_{\frac{\varepsilon}{2}}(x - y)\, dy \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} &\psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad 0 \le \psi(x) \le 1, \\ &\psi(x) = 1 \quad \text{if } \ x \in K_{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{if } \ x \in CK_{\frac{3\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

となることが分かる．

定理 46.3 (1 の分解)**.** K を $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合，Ω_j, $j = 1, \ldots, k$, を $\mathbf{R}^n$ の開集合族で，K を覆っている，すなわち

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$$

となっているとき，条件 $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $\varphi_j \ge 0$, $0 \le \sum_j \varphi_j(x) \le 1$, K の近傍で $\sum_j \varphi_j(x) = 1$, をみたす関数族 φ_j, $j = 1, \ldots, k$, が存在する．

証明. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して，

$$K_j = K \cap \{x \in \Omega_j : d(x, \Omega_j^c) \geq \varepsilon\}, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

とすると，各 K_j は $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合で，

$$K_j \subset \Omega_j, \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{k} K_j$$

を満たす．

定理 46.2 によって各 j に対して，条件 $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $0 \leq \psi_j \leq 1$, K_j のある近傍で $\psi_j = 1$ をみたす関数 $\psi_j(x)$ が存在する．そこで

$$\begin{cases} \varphi_1 = \psi_1, \\ \varphi_j = \psi_j(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{j-1}), \quad j = 2, \ldots, k \end{cases}$$

とおけば

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \varphi_j &= \psi_1 + \psi_2(1-\psi_1) + \psi_3(1-\psi_1)(1-\psi_2) \\
&\qquad\qquad + \ldots + \psi_k(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{k-1}) \\
&= 1 - (1-\psi_1) + \psi_2(1-\psi_1) + \psi_3(1-\psi_1)(1-\psi_2) \\
&\qquad\qquad + \ldots + \psi_k(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{k-1}) \\
&= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2) + \psi_3(1-\psi_1)(1-\psi_2) \\
&\qquad\qquad + \ldots + \psi_k(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{k-1}) \\
&= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)(1-\psi_3) \\
&\qquad\qquad + \ldots + \psi_k(1-\psi_1)\ldots(1-\psi_{k-1}) \\
&= 1 - (1-\psi_1)\ldots(1-\psi_k)
\end{aligned}$$

となるので，定理の主張は成り立つ．

Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし，超関数 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を Ω の部分開集合 Ω'（$\subset \Omega$）に制限することを考える．線形汎関数 $C_0^\infty(\Omega') \ni \varphi \to u(\varphi)$ を考えると，これは $\mathcal{D}'(\Omega')$ の元となる．

定義 46.1. 2 つの超関数 u_1, $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して

$$u_1(\varphi) = u_2(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega') \tag{46.1}$$

となるとき，つまり u_1 と u_2 の Ω' への制限が相等しいとき，u_1 と u_2 は Ω' 上で等しいという．

定理 46.4. u_1, $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して，Ω の各点の近傍で $u_1 = u_2$ となっているならば，Ω で $u_1 = u_2$ となる．

証明. 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，$K = \operatorname{supp} \varphi$ とおくと，K の各点ごとに近傍が存在して，仮定によりそこで $u_1 = u_2$ となる．K は $\mathbf{R}^n$ のコンパクト集合であるから，そのうちの有限個の近傍 Ω_j, $j = 1, \ldots, k$, が K を覆う（ハイネ・ボレルの被覆定理 (定理 1.1) より）．定理 46.3 を適用して，この場合の 1 の分解 φ_j, $j = 1, \ldots, k$, をとると

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} \varphi\varphi_j, \quad \varphi\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$$

であるから

$$\begin{aligned} u_1(\varphi) &= u_1\left(\sum_{j=1}^{k}\varphi\varphi_j\right) = \sum_{j=1}^{k}u_1(\varphi\varphi_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k}u_2(\varphi\varphi_j) = u_2(\varphi) \end{aligned}$$

故に，Ω で $u_1 = u_2$ となる．

$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して，その上で $u = 0$ となるような Ω の最大開部分集合 Ω_0 が存在する．なぜなら，$u = 0$ であるような Ω の開部分集合全体の和集合を Ω_0 とすればよいからである．この和集合 Ω_0 上で $u = 0$ となることは定理 46.4 の証明と同じようにして示すことができる．そして集合 $\Omega \cap \Omega_0^c$ を**超関数 u の台**といい，$\mathrm{supp}\ u$ と表す．

例 46.1. $u \in C(\Omega)$ の場合には，超関数の意味での $\mathrm{supp}\ T_u$ と従来の意味での $\mathrm{supp}\ u$ は一致する．このことは，

$$T_u(\varphi) = 0,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0) \Longleftrightarrow u(x) = 0,\ \forall x \in \Omega_0$$

と台の定義から従う．

例 46.2. $\mathrm{supp}\ \delta = \{0\}$ である．なぜなら，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ に対して，

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) = 0$$

だが，$\varphi(0) \neq 0$ となる $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対しては，$\delta(\varphi) \neq 0$ だからである．

超関数の性質 (ii) と超関数の台の定義から，次の定理を得る：

定理 46.5. 集合 $K \subset \Omega$ を Ω のコンパクト部分集合とする．このとき，$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathrm{supp}\ u \subset K$ ならば，ある整数 $k \geq 0$ が存在して，任意の $\delta > 0$ に対して次の不等式が成り立つ：

$$|u(\varphi)| \leq C_\delta \sup_{\substack{|\alpha|\leq k \\ x \in K_\delta \cap \Omega}} |D^\alpha\varphi(x)|, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{46.2}$$

ここで，C_δ は δ に応じて決まる定数である．

逆に，$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して (46.2) の形の不等式が成り立てば，$\mathrm{supp}\ u \subset K$ となる．

超関数 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ の台 $\mathrm{supp}\ u$ が Ω のコンパクト部分集合 K に含まれる場合には，不等式 (46.2) を保ちながら u は $C^\infty(\Omega)$ 上の線形汎関数 $\tilde{u}$ に一意的に拡張される．それには，K の近傍で 1 となるような関数 $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ を一つとり，

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\psi\varphi), \quad \forall\varphi \in C^\infty(\Omega) \tag{46.3}$$

と定義すればよい．超関数 $\tilde{u}$ が，このような ψ のとり方によらないことも (46.2) を用いることによって分かる．

逆に，(46.2) の形の不等式をみたす $C^\infty(\Omega)$ 上の線形汎関数 $\tilde{u}$ は，$\mathcal{D}'(\Omega)$ の元であって $\mathrm{supp}\ \tilde{u} \subset K$ となる．そこで，$C^\infty(\Omega)$ 上の線形汎関数で，あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して (46.2) の形の不等式をみたすものの全体を $\mathcal{E}'(\Omega)$ と表すと，$\mathcal{E}'(\Omega)$ に属する超関数は，$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ の元であって，その台が Ω に含まれるものということもできる．包含関係は

$$\mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \quad \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

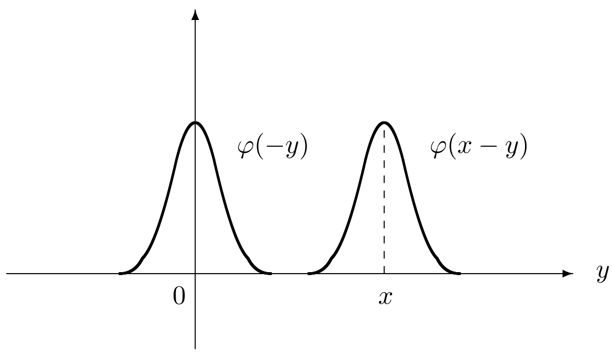
次に，$u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ と $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ の合成積（たたみ込み積）について考える．それは，次のような x の関数によって定義すればよい：

$$(46.4) \qquad (u * \varphi)(x) = u_y(\varphi(x-y))$$

$u_y(\varphi(x-y))$ を積分の記号を用いて，形式的に

$$\int u(y)\varphi(x-y)\,dy$$

と表すと，$u(y)$ を通常の関数のように扱う間違いを犯す可能性があるので，証明の中では $u_y(\varphi(x-y))$ と表すことにする．



ここで，$u_y(\varphi(x-y))$ は各 x を固定して y 変数のテスト関数 $\varphi(x-y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_y^N)$ における超関数 u の値を表し，これを，積分の記号を用いて，形式的に

$$\int u(y)\varphi(x-y)\,dy$$

と表すこともある．以下に証明を述べるように，$(u*\varphi)(x) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$ であって，次の公式が成り立つ：

$$(46.5) \qquad D^\alpha(u*\varphi)(x) = (u*(D^\alpha\varphi))(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n$$

公式 (46.5) を 1 変数の場合に証明する．

$u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ とするとき

$$\frac{d}{dx}(u*\varphi)(x) = (u*\varphi')(x), \qquad x \in \mathbf{R}$$

が成り立つことを示す．微分の定義に戻って $h \neq 0$ に対して差分商

$$\begin{aligned} \frac{u*\varphi(x+h) - u*\varphi(x)}{h} &= \frac{u_y(\varphi(x+h-y)) - u_y(\varphi(x-y))}{h} \\ &= u_y\left(\frac{\varphi(x+h-y) - \varphi(x-y)}{h}\right) \end{aligned}$$

を考える．x を固定し，$0 < |h| \leq 1$ とすると，

$$\operatorname*{supp}_y \varphi(x+h-y), \quad \operatorname*{supp}_y \varphi(x-y), \quad \operatorname*{supp}_y \varphi'(x-y)$$

は，共通のコンパクト集合 K に含まれるとしてよい．

一方，超関数の定義と平均値の定理によって，ある $k, C > 0, 0 < \theta < 1$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\left| u_y\left(\frac{\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)}{h}\right) - u_y(\varphi'(x-y))\right| \\
&\quad = \left| u_y\left(\frac{\varphi(x+h-y)-\varphi(x-y)}{h} - \varphi'(x-y)\right)\right| \\
&\quad \le C\sum_{j=0}^{k}\sup_{y\in K}\left|\frac{\varphi^{(j)}(x+h-y)-\varphi^{(j)}(x-y)}{h} - \varphi^{(j+1)}(x-y)\right| \\
&\quad = C\sum_{j=0}^{k}\sup_{y\in K}\left|\varphi^{(j+1)}(x-y+\theta h) - \varphi^{(j+1)}(x-y)\right|.
\end{aligned}$$

$\varphi^{(j+1)}$ の一様連続性より，$h \to 0$ のとき右辺は 0 に収束する．したがって

$$\frac{d}{dx}(u * \varphi)(x) = (u * \varphi')(x)$$

が成り立つ．

高次の微分についても，同様にして示せる．

定義 46.2. 超関数列 $\{u_j\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して，ある超関数 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が存在して

$$u(\varphi) = \lim_{j\to\infty} u_j(\varphi), \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{46.6}$$

が成り立つとき，$\{u_j\}$ は**超関数の意味で** u **に収束する**といい，$u = \lim_{j\to\infty} u_j$ とかく．

例 46.3. フリードリックスの軟化作用素 (45.1) の $\varphi_\varepsilon(x)$ は，$\varepsilon \to 0$ のとき，超関数の意味でデルタ関数 $\delta(x)$ に収束する．

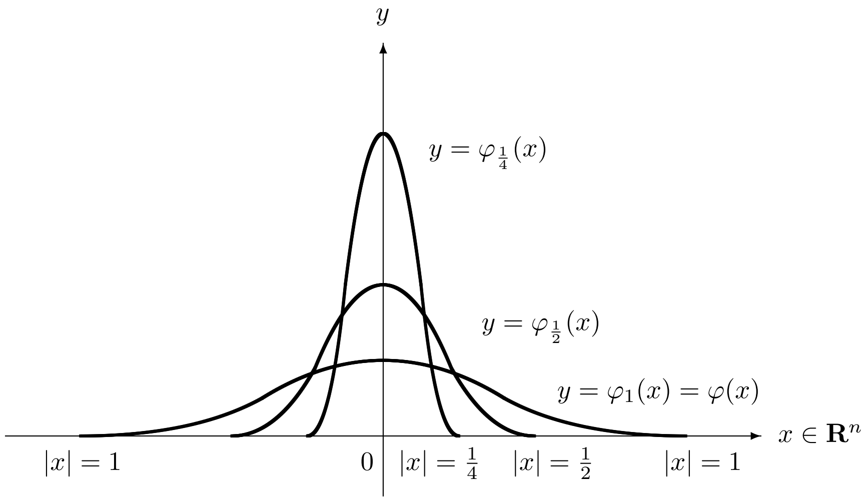
実際，$\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\,dx = 1$ と $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \le 1\}$ に注意すると，任意の $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle T_{\varphi_\varepsilon}, \psi\rangle &= \int_{\mathbf{R}^n}\varphi_\varepsilon(x)\psi(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\varphi(y)\psi(\varepsilon y)\,dy = \int_{|y|\le 1}\varphi(y)(\psi(\varepsilon y)-\psi(0))\,dy + \psi(0).
\end{aligned}$$

ψ の一様連続性より，$\varepsilon \to 0$ のとき右辺の第 1 項は 0 に収束する．よって，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle T_{\varphi_\varepsilon}, \psi\rangle = \psi(0) = \langle \delta, \psi\rangle.$$

このように，デルタ関数 $\delta(x)$ は，フリードリックスの軟化作用素 (45.1) の $\varphi_\varepsilon(x)$ に対して，ε を 0 に限りなく近づけたときの $\varphi_\varepsilon(x)$ である．



定理 46.6. $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ に対して，$\varepsilon \to 0$ のとき超関数の意味で

$$(u * \varphi_\varepsilon)(x) \longrightarrow u$$

証明. 任意の $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\langle u * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \int u_y(\varphi_\varepsilon(x-y))\psi(x)\,dx.$$

この右辺の x に関する積分は，滑らかな関数に対する通常のリーマン積分であるから，いわゆるリーマン和の極限として表される．その際に，u_y が超関数であることの定義から，この右辺は

$$u_y\left(\int \varphi_\varepsilon(x-y)\psi(x)\,dx\right)$$

に等しいことがわかる．ここで，$\check{\varphi}_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(-x)$ と定義すると，

$$\begin{aligned}\int \varphi_\varepsilon(x-y)\psi(x)\,dx &= \int \check{\varphi}_\varepsilon(y-x)\psi(x)\,dx \\ &= (\check{\varphi}_\varepsilon * \psi)(y).\end{aligned}$$

さらに，定理 45.2 によって，各 α に対して $\varepsilon \to 0$ のとき，一様に

$$D^\alpha(\check{\varphi}_\varepsilon * \psi)(y) \quad = \quad (\check{\varphi}_\varepsilon * D^\alpha\psi)(y) \quad \longrightarrow \quad D^\alpha\psi(y)$$

であることに注意すれば，$\varepsilon \to 0$ のとき

$$\begin{aligned}|\langle u * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle - \langle u, \psi \rangle| &= \left|\int u_y(\varphi_\varepsilon(x-y))\psi(x)\,dx - u(\psi)\right| \\ &= \left|u_y\left(\int \varphi_\varepsilon(x-y)\psi(x)\,dx\right) - u(\psi)\right| \\ &= |u_y(\check{\varphi}_\varepsilon * \psi - \psi)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{y \in (\mathrm{supp}\ \psi)_\varepsilon} |\check{\varphi}_\varepsilon * D^\alpha\psi(y) - D^\alpha\psi(y)| \quad \longrightarrow \quad 0\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，k は u の

$$[\mathrm{supp}\ \psi]_\varepsilon = \{x : \mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}\ \psi) < \varepsilon\}$$

での位数である．

集合 $A, B \subset \mathbf{R}^n$ に対して

$$A+B=\{x+y : x\in A,\ y\in B\}$$

という記号を導入する．

定理 46.7. $u\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ と $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して $u*\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ であって

$$\mathrm{supp}(u*\varphi)\subset \mathrm{supp}\ u+\mathrm{supp}\ \varphi.$$

さらに，次の公式が成り立つ：

$$D^\alpha(u*\varphi)=u*(D^\alpha\varphi)=(D^\alpha u)*\varphi \tag{46.7}$$

証明. supp u は閉集合，supp φ はコンパクト集合だから，supp $u+$ supp φ は閉集合であることに注意する．$x\notin$ supp $u+$ supp φ とすると，supp $u+$ supp φ とは交わらない x の近傍 $B(x)$ が存在する．よって，任意の $y\in$ supp u に対して，$B(x)-y$ は supp φ と交わらない．ゆえに，$z\in B(x)$ ならば $(u*\varphi)(z)=u_y(\varphi(z-y))=0$. すなわち，$x\notin$ supp $(u*\varphi)$. したがって，

$$\mathrm{supp}\ (u*\varphi)\subset \mathrm{supp}\ u+\mathrm{supp}\ \varphi.$$

(46.7) の最初の等式は，すでに (46.5) で証明した．後の等式は，

$$\begin{array}{rcl} u*(D^\alpha\varphi)(x) &=& u_y(D_x^\alpha\varphi(x-y))\\ &=& u_y((-D_y)^\alpha\varphi(x-y))\\ &=& D_y^\alpha u_y(\varphi(x-y))\\ &=& (D^\alpha u)*\varphi(x)\end{array}$$

から従う．

$u_1, u_2\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ のうち，一方の台がコンパクト集合の場合には合成積 $u_1*u_2=u_2*u_1\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ が定義できる．以下，このことについて考える．たとえば，$u_1\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, $u_2\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ と仮定する．$u_1\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $u_2\in\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ の場合も同様である．線形汎関数

$$\begin{array}{rcccl} C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\ni\varphi &\longrightarrow& L(\varphi) &=& (u_1)_y((u_2)_x(\varphi(x+y)))\\ &&&=& \displaystyle\int u_1(y)\left(\int u_2(x)\varphi(x+y)\,dx\right)dy\in\mathbf{C}\end{array} \tag{46.8}$$

を考える．このとき，supp $\varphi\subset K_0\subset\mathbf{R}^n$ で K_0 はコンパクト集合とする．

$$(u_2)_x(\varphi(x+y))\in C^\infty(\mathbf{R}_y^n)$$

であり，supp $u_1=K_1$（コンパクト集合）とすると，ある整数 $k_1\geq 0$ が存在して，任意の $\delta>0$ に対して

$$|L(\varphi)|\leq C_\delta\sup_{\substack{y\in K_{1\delta}\\ |\alpha|\leq k_1}}\left|D_y^\alpha(u_2)_x(\varphi(x+y))\right| \tag{46.9}$$

の形の不等式が成り立つ (c.f. (46.2)).

$$D_y^\alpha(u_2)_x(\varphi(x+y))=(u_2)_x(D^\alpha\varphi(x+y))$$

であり，$u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\mathrm{supp}\,\varphi \subset K_0$ であるから，超関数の定義 (ii) によって，ある整数 $k_2 \geq 0$ と定数 $C' > 0$ が存在して

$$|(u_2)_x(D^\alpha \varphi(x+y))| \leq C' \sup_{\substack{|\beta| \leq k_2 \\ x \in K_0}} \left|D^\beta D^\alpha \varphi(x)\right| \tag{46.10}$$

ここで，定数 C' は $y \in K_{1\delta}$ に無関係にとれる．(46.9), (46.10) を総合して

$$|L(\varphi)| \leq C \sup_{\substack{|\alpha| \leq k_1+k_2 \\ x \in K_0}} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K_0) \tag{46.11}$$

の形の不等式を得る．ゆえに，$L \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ となるが，この超関数 L をもって $u_1 * u_2$ と定義するのである．フリードリックスの軟化作用素を用いれば，

$$u_1 * u_2 = u_2 * u_1$$

であることが容易に示される．

同じようにして次の公式を得る：

$$D^\alpha(u_1 * u_2) = (D^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * (D^\alpha u_2) \tag{46.12}$$

例 46.4. $f,\ g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ であり，そのうち一方の台がコンパクトとする．このとき，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\begin{aligned}
L(\varphi) &= (T_f)_y\left((T_g)_x(\varphi(x+y))\right) \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbf{R}^n} g(x)\varphi(x+y)\,dx\right) dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbf{R}^n} g(z-y)\varphi(z)\,dz\right) dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(y)g(z-y)\,dy\right) \varphi(z)\,dz \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} (f*g)(z)\varphi(z)\,dz \\
&= T_{f*g}(\varphi).
\end{aligned}$$

例 46.5. $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ とすると $u * \delta = u$

証明. 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\begin{aligned}
L(\varphi) &= u_y(\delta_x(\varphi(x+y))) \\
&= u_y(\varphi(y)) \\
&= u(\varphi)
\end{aligned}$$

であるから $L = u$ となる．

47 作用素と超関数核

線形代数学で，線形作用素は，ベクトル空間の基底を選べば，行列表示される．この事実の無限次元版が，下記に述べるシュワルツの核定理である．

標語的に言えば，

線形代数学	微分方程式論
線形作用素	積分作用素
行列	超関数核

Ω_1 と Ω_2 を，それぞれ，ユークリッド $\mathbf{R}^{n_1}$ と $\mathbf{R}^{n_2}$ の開集合とする．超関数 $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ に対して，連続な線形作用素

$$A \in L(C_0^\infty(\Omega_2), \mathcal{D}'(\Omega_1))$$

を，次式で定義することができる：

$$\langle A\psi, \varphi \rangle = \langle K, \varphi \otimes \psi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1),\ \psi \in C_0^\infty(\Omega_2).$$

このとき，

$$A = \mathrm{Op}\,(K)$$

とかく．空間 $C_0^\infty(\Omega_1) \otimes C_0^\infty(\Omega_2)$ は，空間 $C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ において列的稠密だから，写像

$$\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2) \ni K \longmapsto \mathrm{Op}\,(K) \in L(C_0^\infty(\Omega_2), \mathcal{D}'(\Omega_1))$$

は，単射であることがわかる．次の定理は，写像が全射であることを主張している ([3, p. 21, Théorème 4.4], [24, Theorem 5.36])：

定理 47.1 (シュワルツの核定理)**.** 作用素 A が，$C_0^\infty(\Omega_2)$ から $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ への連続な線形作用素ならば，一意的な超関数 $K_A \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ が存在して，$A = \mathrm{Op}\,(K_A)$ が成り立つ．

超関数 $K_A(x_1, x_2)$ は，作用素 A の超関数核と呼ばれる．形式的には，

$$A\psi(x_1) = \int_{\Omega_2} K_A(x_1, x_2)\, \psi(x_2)\, dx_2, \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega_2).$$

超関数核の重要な例を挙げる：

例 47.1. (a) リースポテンシャル：$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}^n$, $0 < \alpha < n$.

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{-\alpha/2} u(x) &= R_\alpha * u(x) \\ &= \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\, u(y)\, dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

(b) ニュートンポテンシャル：$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}^n$, $n \geq 3$.

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{-1} u(x) &= N * u(x) \\ &= \frac{\Gamma((n-2)/2)}{4\pi^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, u(y)\, dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

(c) ベッセルポテンシャル：$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}^n$, $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}(I-\Delta)^{-\alpha/2} u(x) &= G_\alpha * u(x) = \int_{\mathbf{R}^n} G_\alpha(x-y)\, u(y)\, dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \\ G_\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}\, t^{\frac{\alpha-n}{2}}\, \frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

(d) リース作用素：$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}^n$, $1 \le j \le n$.

$$\begin{aligned} Y_j u(x) &= R_j * u(x) \\ &= i\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\,\mathrm{v.p.}\int_{\mathbf{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\,u(y)\,dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

(e) カルデロン・ジグムントの積分微分作用素：$\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbf{R}^n$.

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{1/2} u(x) &= \frac{1}{i}\sum_{j=1}^n Y_j\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x) \\ &= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\sum_{j=1}^n \mathrm{v.p.}\int_{\mathbf{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\,\frac{\partial u}{\partial y_j}(y)\,dy, \\ &\qquad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

48　ラプラス作用素に対する作用素解析

前節の例 47.1 の種々の作用素について，作用素解析の観点から，その背景を説明する．表にまとめると，次のようになる：

作用素	記号	超関数核	シンボル
リース ポテンシャル	$(-\Delta)^{-\alpha/2}$ $(0 < \alpha < n)$	$\frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}\frac{1}{\lvert x\rvert^{n-\alpha}}$	$\frac{1}{\lvert\xi\rvert^\alpha}$
ニュートン ポテンシャル	$(-\Delta)^{-1}$ $(\alpha = 2)$	$\frac{\Gamma((n-2)/2)}{4\pi^{n/2}}\frac{1}{\lvert x\rvert^{n-2}}$	$\frac{1}{\lvert\xi\rvert^2}$
ベッセル ポテンシャル	$(I-\Delta)^{-\alpha/2}$ $\alpha > 0$	$G_\alpha(x)$	$\frac{1}{(1+\lvert\xi\rvert^2)^{\alpha/2}}$
リース 作用素	Y_j $(1 \le j \le n)$	$i\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\,\mathrm{v.p.}\frac{x_j}{\lvert x\rvert^{n+1}}$	$\frac{\xi_j}{\lvert\xi\rvert}$
カルデロン ジグムント 作用素	$(-\Delta)^{1/2}$	$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\,\mathrm{v.p.}\frac{x_j}{\lvert x\rvert^{n+1}}\,\frac{\partial}{\partial x_j}$	$\lvert\xi\rvert$

(I) まず，

(48.1)
$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \forall t > 0$$

とする．このとき，$f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して，関数

$$K_t * f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} K_t(x-y) f(y)\, dy$$

が，熱伝導方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u(x,t) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x) & \text{on } \mathbf{R}^n \end{cases}$$

の解であることを示すのは容易である．くわしくは，後の節 **??** で説明する．

よって，形式的に指数関数表示

$$K_t * f = e^{t\Delta} f, \quad \forall t > 0 \tag{48.2}$$

を得る．

(II) 次に，ラプラス変換

$$\mathcal{L}\phi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \phi(t)\, dt$$

を考える．関数 $\phi(s)$ は後で，色々と決める．

形式的な変数変換

$$s := -\Delta$$

を行うと，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\phi(-\Delta) f &= \int_0^\infty (e^{t\Delta} f)\phi(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbf{R}^n} K_t(x-y) f(y)\, dy \right) \phi(t)\, dt \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_0^\infty K_t(x-y)\, \phi(t)\, dt \right) f(y)\, dy \end{aligned}$$

を得る．これは，作用素

$$\mathcal{L}\phi(-\Delta)$$

のたたみ込み核が

$$\int_0^\infty K_t(x)\, \phi(t)\, dt$$

で与えられることを意味する．

(A)

$$\phi(t) := t^{\beta-1} \quad \text{for } \operatorname{Re}\beta > 0$$

とする．公式

$$\mathcal{L}\phi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \phi(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, t^{\beta-1}\, dt = \Gamma(\beta) s^{-\beta} \tag{48.3}$$

により，作用素

$$(-\Delta)^{-\beta}$$

のたたみ込み核は

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty K_t(x)\, t^{\beta-1}\, dt \tag{48.4}$$

である．

さらに，次の主張が成り立つ：

主張 48.1. $0 < \mathrm{Re}\,\beta < n/2$ とする．このとき，$x \neq 0$ に対して，

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty K_t(x)\, t^{\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(n/2-\beta)}{\Gamma(\beta) 4^\beta \pi^{n/2}} \frac{1}{|x|^{n-2\beta}}. \tag{48.5}$$

証明. (48.1) より，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\, t^{\beta-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \tau^{n/2} \tau^{1-\beta}\, e^{-\frac{|x|^2}{4}\tau}\, \frac{d\tau}{\tau^2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \tau^{n/2-\beta-1}\, e^{-\frac{|x|^2}{4}\tau}\, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty e^{-\sigma} \left(\frac{4\sigma}{|x|^2}\right)^{n/2-\beta-1} \frac{4}{|x|^2}\, d\sigma \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \frac{1}{\pi^{n/2}} \frac{1}{4^\beta} \frac{1}{|x|^{n-2\beta}} \int_0^\infty e^{-\sigma}\, \sigma^{n/2-\beta-1}\, d\sigma \\
&= \frac{\Gamma(n/2-\beta)}{\Gamma(\beta) 4^\beta \pi^{n/2}} \frac{1}{|x|^{n-2\beta}}.
\end{aligned}$$

公式 (48.4) と (48.5) を合せると，

定理 48.1. $0 < \mathrm{Re}\,\beta < n/2$ とする．このとき，作用素

$$(-\varDelta)^{-\beta}$$

のたたみ込み核は，$x \neq 0$ に対して，

$$\frac{\Gamma(n/2-\beta)}{\Gamma(\beta) 4^\beta \pi^{n/2}} \frac{1}{|x|^{n-2\beta}}$$

と等しい．

例 48.1. $n \geq 3$, $\beta = 1$ ならば，定理 48.1 より，作用素

$$(-\varDelta)^{-1}$$

のたたみ込み核は，

$$\frac{\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2}} \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

である．さらに，

$$\Gamma(n/2-1) = \frac{2}{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

であることと，n 次元単位球の表面積が

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

で与えられることから，

$$\frac{\Gamma(n/2-1)}{4\pi^{n/2}} = \frac{1}{(n-2)\omega_n}$$

を得る．したがって，作用素

$$(-\varDelta)^{-1}$$

のたたみ込み核は

$$\frac{1}{(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}$$

と等しい．これは，**ニュートンポテンシャル**とよばれる．

例 48.2. $\beta = \alpha/2,\ 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < n$ ならば，定理 48.1 より，作用素

$$(-\varDelta)^{-\alpha/2}$$

のたたみ込み核は

$$\frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)2^{\alpha}\pi^{n/2}}\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$$

である．これは，α 次**リースポテンシャル**とよばれる．

(B) 公式 (48.3) において，s を $s+1$ で置き換えると，

$$(s+1)^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty} e^{-(s+1)t}\,t^{\beta-1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty} e^{-st}\,e^{-t}\,t^{\beta-1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\mathcal{L}(e^{-s}\,s^{\beta-1}) \tag{48.6}$$

を得る．したがって，

$$s := -\varDelta,\ \beta := \alpha/2 \text{ for } \mathrm{Re}\,\alpha > 0$$

とすると，次の定理を得る：

定理 48.2. $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ ならば，作用素

$$(I-\varDelta)^{-\alpha/2}$$

のたたみ込み核は

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^{\infty} e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}t^{\frac{\alpha-n}{2}}\,\frac{dt}{t}$$

である．これは，α 次**ベッセルポテンシャル**とよばれる．

関数

$$G_{\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\int_0^{\infty} e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}t^{\frac{\alpha-n}{2}}\,\frac{dt}{t} \quad \text{for } \mathrm{Re}\,\alpha > 0$$

に対して，次の主張が成り立つ：

主張 48.2. $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ に対して，

$$G_{\alpha} \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

証明.

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx = 1$$

だから，

$$\int_{\mathbf{R}^n}|G_{\alpha}(x)|\,dx = \frac{1}{|\Gamma(\alpha/2)|}\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{(\mathrm{Re}\,\alpha)/2-1}\,dt = \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\,\alpha/2)}{|\Gamma(\alpha/2)|}$$

であることに注意.

よって，ハウスドルフ・ヤングの不等式 (9.3) により，

$$\begin{aligned}\|(I-\Delta)^{-\alpha/2}f\|_p &= \|G_\alpha * f\|_p \\ &\le \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha/2)}{|\Gamma(\alpha/2)|}\|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbf{R}^n)\end{aligned}$$

が成り立つ．

(C)

$$\phi(s) := \frac{1}{\sqrt{\pi s}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4s}} \quad \text{for } \beta > 0$$

とする．このとき，

$$e^{-\beta} = \int_0^\infty e^{-s}\, \frac{1}{\sqrt{\pi s}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4s}}\, ds \tag{48.7}$$

が成り立つ．

実際，留数定理より，

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\beta\tau}}{1+\tau^2}\, d\tau = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i\beta\tau}}{1+\tau^2}\right]_{\tau=i} = \pi\, e^{-\beta}.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\beta\tau}}{1+\tau^2}\, d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\beta\tau}\left(\int_0^\infty e^{-(1+\tau^2)s}\, ds\right) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{i\beta\tau}\, e^{-s\tau^2}\, d\tau\right) ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-s}\left(\sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4s}}\right) ds \\ &= \int_0^\infty e^{-s}\, \frac{1}{\sqrt{\pi s}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4s}}\, ds. \end{aligned}$$

今，公式 (48.7) において，

$$\beta := t\sqrt{-\Delta}$$

とすると，形式的に

$$\begin{aligned} e^{-t\sqrt{-\Delta}}f &= \int_0^\infty e^{-s}\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\left(e^{\frac{t^2}{4s}\Delta}f\right) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\left(\int_{\mathbf{R}^n} K_{t^2/4s}(x-y)\, f(y)\, dy\right) ds \\ &= \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\, K_{t^2/4s}(x-y)\, ds\right) f(y)\, dy \end{aligned}$$

を得る．これは，作用素

$$e^{-t\sqrt{-\Delta}}$$

のたたみ込み核が

$$\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}}\, K_{t^2/4s}(x)\, ds \tag{48.8}$$

で与えられることを意味する．

さらに，次の主張が成り立つ：

主張 48.3. $t > 0$ に対して，

$$\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} K_{t^2/4s}(x)\,ds = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(|x|^2+t^2)^{(n+1)/2}}. \tag{48.9}$$

証明. (48.1) より，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} K_{t^2/4s}(x)\,ds \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} \frac{1}{(\pi t^2/s)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2 s}{t^2}}\,ds \\
&= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{t^n} \int_0^\infty e^{-s(1+\frac{|x|^2}{t^2})} s^{(n-1)/2}\,ds \\
&= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{t^n} \left(1+\frac{|x|^2}{t^2}\right)^{-(n+1)/2} \int_0^\infty e^{-\sigma} \sigma^{(n+1)/2-1}\,d\sigma \\
&= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(|x|^2+t^2)^{(n+1)/2}}.
\end{aligned}$$

公式 (48.8) と (48.9) を合せると，

定理 48.3. 作用素

$$e^{-t\sqrt{-\Delta_x}}$$

のたたみ込み核は

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(|x|^2+t^2)^{(n+1)/2}}$$

で与えられる．これは，ポアソン核とよばれる．

関数

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= e^{-t\sqrt{-\Delta_x}} f(x) \\
&= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{t}{(|x-y|^2+t^2)^{(n+1)/2}} f(y)\,dy
\end{aligned}$$

が次のディリクレ境界値問題の解であることを示すのは容易である：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_x\right) u(x,t) = 0 & \text{in } \mathbf{R}_+^{n+1}, \\ u(x,0) = f(x) & \text{on } \partial\mathbf{R}_+^{n+1} = \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

ここで，

$$\mathbf{R}_+^{n+1} = \left\{(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1} : t > 0\right\}.$$

(III) 最後に，リース作用素とカルデロン・ジグムント作用素に関する重要な公式を紹介する。

(A) $\sum_{j=1}^n Y_j * Y_j = I$（恒等作用素）：実際，左辺の作用素の超関数核のフーリエ変換を計算すると，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \widehat{Y_j * Y_j}(\xi) &= \sum_{j=1}^n \widehat{Y}_j(\xi)\,\widehat{Y}_j(\xi) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j}{|\xi|} \frac{\xi_j}{|\xi|} = |\xi|^2 \cdot \frac{1}{|\xi|^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

一方，恒等作用素の超関数核はデルタ関数 $\delta(x)$ であるが，そのフーリエ変換は 1 である．

(B) $(-\Delta)^{1/2} = \sum_{j=1}^{n} Y_j * \frac{\partial}{\partial x_j}$: 実際，右辺の作用素の超関数核のフーリエ変換を計算すると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{Y_j * \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}}\right)(\xi) &= \sum_{j=1}^{n} \widehat{Y}_j(\xi)\, \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j}{|\xi|}\, \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \cdot \frac{1}{|\xi|} = |\xi|^2 \cdot \frac{1}{|\xi|} \\ &= |\xi|.\end{aligned}$$

一方，$(-\Delta)^{1/2}$ の超関数核のフーリエ変換は $|\xi|$ である．

関数解析は，以上の例のように，大胆かつ自由に作用素解析を行う．この形式的な計算に厳密な裏付けを与えるのが，実解析学あるいは偏微分方程式論の役割である．

49　線型偏微分作用素の基本解

一般に，線型偏微分作用素 $P(x, D)$ に対して，

$$P(x, D)E = \delta$$

を満たす超関数 $E(x)$ を $P(x, D)$ の**基本解**という．線型代数における行列の右逆行列に相当する．

標語的に言えば，次の表にまとめられる：

線形代数 （有限次元）	積分方程式 （微分方程式）	関数解析 （無限次元）
ベクトル空間	連続関数の空間	バナッハ空間
ベクトル $\mathbf{x}$	関数 $f(x)$	ベクトル $\mathbf{x}$
行列 $A = (a_{ij})$	積分核 $K(x, y)$	線形作用素 T
連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$	積分方程式 $\int K(x, y) f(y) dy = g(x)$	線形方程式 $T\mathbf{x} = \mathbf{y}$
単位行列 $E = (\delta_{ij})$	ディラック超関数 $\delta(x - y)$	恒等作用素 I
逆行列 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$	グリーン関数 $\int k(x, z) G(z, y) dz$ $= \delta(x - y)$	逆作用素 $TT^{-1} = T^{-1}T = I$

49.1 定数係数線型偏微分作用素の基本解

定数係数の線型偏微分作用素については，次の定理が知られている ([15], [32])：

定理 49.1 (エーレンプライス・マルグランジュ)**.** 定数係数の線型偏微分作用素 $P(D)$ は基本解 $E(x)$ を持つ: $P(D)E = \delta$.

以下では，代表的な定数係数の線型偏微分作用素とその基本解の例を挙げる：

(I) コーシー・リーマン作用素：

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad i = \sqrt{-1}.$$

基本解は

$$E(x, y) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{x + iy}.$$

コーシー・リーマン作用素の基本解 $E(x, y)$ は，原点以外 ($(x, y) \neq (0, 0)$) で C^∞ であることに注意．このような基本解 $E(x, y)$ は，溝畑・シュワルツにより，準楕円型と呼ばれている．

(II) ラプラス作用素：

$$\varDelta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

基本解は

(1) $n=2$（対数ポテンシャル）：

$$E(x)=\frac{1}{2\pi}\log|x|, \quad x\in\mathbf{R}^2.$$

(2) $n\geq 3$（ニュートンポテンシャル）：

$$E(x)=\frac{1}{2-n}\frac{1}{\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}},\ x\in\mathbf{R}^n, \quad \omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\text{（}n\text{ 次元単位球の表面積）}.$$

ラプラス作用素の基本解 $E(x)$ は，原点以外 $(x\neq 0)$ で C^∞ であることに注意．ラプラス作用素の基本解 $E(x)$ は準楕円型である．

(III) 熱作用素：

$$\frac{\partial}{\partial t}-\Delta=\frac{\partial}{\partial t}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right).$$

基本解は熱核で与えられる：

$$E(x,t)=H(t)\,\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\;e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x\in\mathbf{R}^n,\ t\in\mathbf{R}.$$

ただし，$H(t)$ は時間変数に関するヘビサイド関数である（例 57.4）．

熱作用素の基本解 $E(x,t)$ は，原点以外 $((x,t)\neq(0,0))$ で C^∞ であることに注意．熱作用素の基本解 $E(x,t)$ は準楕円型である．さらに，熱作用素の基本解 $E(x,t)=K_t(x)$ の台は，わずかでも時間が経てば，空間全体になる（下図を参照）．すなわち，熱の拡散現象の伝播速度は無限大である．

(IV) 波動作用素：

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right).$$

基本解は，ホイヘンスの原理に対応している：

(1) $n=1$:

$$E(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{if } |x|<t,\\ 0 & \text{if } |x|>t.\end{cases}$$

(2) $n=2$:

$$E(x,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2-|x|^2}}, \quad x\in\mathbf{R}^2,\ t>|x|.$$

(3) $n=3$:

$$E(x,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\delta(|x|-t)}{t}, \quad x\in\mathbf{R}^3,\ t>0.$$

波動作用素の基本解 $E(x,t)$ は，原点以外 $((x,t)\neq(0,0))$ でも特異点を持っていることに注意．波動作用素の基本解 $E(x,t)$ は準楕円型ではない．さらに，波動作用素の基本解 $E(x,t)$ の台は，空間全体ではない．波動現象の伝播速度が有限であることを意味している（ホイヘンスの原理）．

49.2 定数係数線型偏微分作用素の局所可解性定理

定数係数の線型偏微分作用素 $P(D)$ は，超関数の空間内で局所可解的であることに注意．実際，任意に与えられた，コンパクトな台を持つ超関数 $f \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ に対して，$P(D)$ の基本解 $E(x)$ との合成積（たたみ込み積）

$$u = E * f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

を考えれば，公式 (46.12) と例 46.5 より，

$$P(D)u = P(D)\,(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

を得る．

50 ディリクレ問題とポアソン核

ディリクレ問題 (50.1)	部分フーリエ変換 >>>>>>>>>>>>>>>	常微分方程式の 初期値問題 (50.2)
$\wedge$ $\wedge$ $\wedge$ $\wedge$ $\wedge$		$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
$u(x,y)$ (**??**)	<<<<<<<<<<<<<<< 部分フーリエ逆変換	$\widetilde{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)e^{-\lvert\xi\rvert y}$ (**??**)

半空間 $\mathbf{R}^{n+1}_+ = \{(x,y) : x \in \mathbf{R}^n,\ y > 0\}$ 上で

(50.1)
$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^{n+1}_+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{on } \mathbf{R}^n \end{cases}$$

を考える．式 (50.1) を空間変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について部分フーリエ変換すると，$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ をパラメータに持つ，y に関する常微分方程式の初期値問題

(50.2)
$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dy^2} - |\xi|^2\right)\widetilde{u}(\xi,y) = 0, \quad y > 0, \\ \widetilde{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

が従い，これを解けば，

(50.3)
$$\widetilde{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)e^{-|\xi|y}, \quad y \geq 0$$

が得られる．

よって，フーリエの反転公式より，

(50.4)
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-|\xi|y}e^{ix\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\iint_{\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n} e^{-|\xi|y}e^{i(x-t)\xi}f(t)\,dt\,d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} P(x-t,y)f(t)\,dt, \end{aligned}$$

(50.5)
$$P(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}e^{-|\xi|y}\,d\xi$$

となる．

ところで，式 (50.4) を満たす関数 $P(x,y)$ をポアソン核というが，具体的に，

$$P(x,y) = c_n \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^{n+1}_+,$$
$$c_n = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}$$

で与えられることが，次の命題より分かる：

命題 50.1. 任意の点 $(x,y) \in \mathbf{R}^{n+1}_+$ に対して

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi} e^{-|\xi| y}\, d\xi = c_n \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}}$$

が成り立つ．

証明. 証明のために，次の 2 つの式を用いる：

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha|\xi|^2}](x) = \frac{1}{(4\alpha\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}}, \tag{50.6}$$

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\gamma^2}{4u}}\, du. \tag{50.7}$$

式 (50.6) は, 次のようにして証明できる．まず,

$$F(t) := \int_{\mathbf{R}} \cos(tr) e^{-\alpha r^2}\, dr, \quad t \in \mathbf{R},$$

とおき，微分すると，

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\int_{\mathbf{R}} r \sin(tr) e^{-\alpha r^2}\, dr \\ &= \int_{\mathbf{R}} \sin(tr) \frac{1}{2\alpha} \frac{d}{dr} e^{-\alpha r^2}\, dr \\ &= -\frac{t}{2\alpha} \int_{\mathbf{R}} \cos(tr) e^{-\alpha r^2}\, dr \\ &= -\frac{t}{2\alpha} F(t). \end{aligned}$$

さらに，初期条件は

$$F(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-\alpha r^2}\, dr = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

だから，

$$F(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha|\xi|^2}](x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}e^{-\alpha|\xi|^2}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{k=1}^{n}\int_{\mathbf{R}} e^{ix_k\xi_k}e^{-\alpha\xi_k^2}\,d\xi_k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{k=1}^{n}\int_{\mathbf{R}} \cos(x_k\xi_k)e^{-\alpha\xi_k^2}\,d\xi_k \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{k=1}^{n} F(x_k) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)^n \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x_k^2}{4\alpha}} \\
&= \frac{1}{(4\alpha\pi)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}}.
\end{aligned}$$

式 (50.7) については，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= \int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du \\
e^{-\gamma} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\gamma x}}{1+x^2}\,dx \qquad (50.8)
\end{aligned}$$

を用いて示すことができる（式 (50.8) は下で示す）．

よって，式 (50.6), (50.7) とフビニの定理より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}e^{-|\xi|y}\,d\xi &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u^{1/2}}e^{-|\xi|^2y^2/(4u)}\,du\right)d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u^{1/2}}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\xi}e^{-|\xi|^2y^2/(4u)}\,d\xi\right)du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u^{1/2}}\left(\frac{\pi y^2}{u}\right)^{-n/2} e^{-|x|^2u/y^2}\,du \\
&= \pi^{-(n+1)/2}y^{-n}\int_0^\infty u^{(n-1)/2}e^{-(1+|x|^2/y^2)u}\,du \\
&= \pi^{-(n+1)/2}\Gamma\left((n+1)/2\right)\frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}} \\
&= P(x,y).
\end{aligned}$$

この命題 50.1 から，フーリエの反転公式を用いれば

$$\mathcal{F}[P(x,y)](\xi) = e^{-|\xi|y} \qquad (50.9)$$

であることがわかる．また，式 (50.1), もしくは，式 (50.5) で表される $u(x,y)$ を $f(x)$ の **ポアソン積分**という．

上記の式 (50.8) について

命題 50.2. 任意の $\gamma > 0$ に対して，

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\gamma x}}{1+x^2}\,dx$$

が成り立つ．

証明．まず

$$f(z) = \frac{e^{i\gamma z}}{1+z^2}$$

とすると，$f(z)$ は上半平面で $z = i$ を極（特異点）に持つから，留数を計算すると

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[f(z)\ i] &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{e^{-\gamma}}{2i} \\ &= -\frac{i}{2}e^{-\gamma} \end{aligned}$$

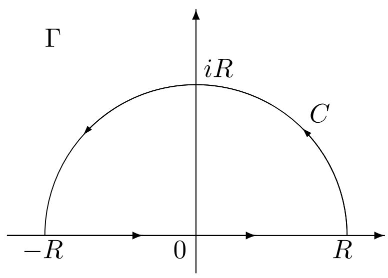
となる．したがって

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{i}{2}e^{-\gamma}\right) = \pi e^{-\gamma}. \tag{50.10}$$

また，下図のような積分路 Γ を考えると

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \tag{50.11}$$

と書ける．



ここで $z \in C$ に対して

$$\left|e^{i\gamma z}\right| = \left|e^{i\gamma \operatorname{Re} z}e^{-\gamma \operatorname{Im} z}\right| = \left|e^{-\gamma \operatorname{Im} z}\right| \leq 1$$

だから，(50.11) 式の右辺の第 1 項を評価すると

$$\begin{aligned} \left|\int_C f(z)\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{e^{i\gamma Re^{i\theta}}}{1+R^2e^{2i\theta}}Rie^{i\theta}\,d\theta\right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}\,d\theta = \frac{\pi R}{R^2-1} \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty) \end{aligned}$$

となる．ゆえに (50.10), (50.11) 式より $R \to \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\gamma x}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-\gamma}$$

が成り立つ．

以下では，ポアソン核 $P(x,y)$ を用いて，ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ が近似できることを示す．
実際，関数

$$u(x,y) = f * P(x,y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{y}{(|x-z|^2+y^2)^{(n+1)/2}} f(z)\,dz, \qquad x \in \mathbf{R}^n,\ y>0, \tag{50.12}$$

を定義すると，次の命題が成り立つ：

命題 50.3. (i) $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ ならば，

$$u(\cdot,y) \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^n) \quad (y \downarrow 0).$$

(ii) 関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}^n$ 上で有界かつ一様連続ならば，関数 $u(x,y)$ は，$\mathbf{R}^n \times [0,\infty)$ 上で連続であって，

$$u(\cdot,y) \longrightarrow f \quad (y \downarrow 0).$$

しかも，この収束は一様収束である．

証明. (i) まず，

$$Q(x) = \frac{1}{(|x|^2+1)^{(n+1)/2}}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} Q(x)\,dx &= \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(|x|^2+1)^{(n+1)/2}}\,dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\Sigma_n} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}\,dr\,d\sigma \\
&= |\Sigma_n| \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}}\,dr \\
&= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}{2\Gamma((n+1)/2)}.
\end{aligned}$$

ここで，$|\Sigma_n|$ は n 次元単位球の表面積である（付録 A を参照）．
したがって，関数 $P(x,y)$ は，次の形にかける：

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{(n+1)/2}} \\
&= \frac{1}{y^n} \left\{ \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} Q\left(\frac{x}{y}\right) \right\},
\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} Q(x)\,dx = 1$$

であることに注意．
以上より，主張 (i) は，

$$\varphi(x) := \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} Q(x), \qquad \varepsilon := y,$$

として，定理 45.2 の主張 (i) を適用すれば良い．

(ii) 同様に，主張 (ii) は，

$$\varphi(x) := \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} Q(x),$$
$$\varepsilon := y,$$

として，定理 45.2 の主張 (ii) を適用すれば良い．

注意 50.1. 主張 (i), (ii) より，関数

$$u(x,y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{y}{(|x-z|^2+y^2)^{(n+1)/2}} f(z)\,dz$$

は，次のラプラス方程式に対するディリクレ境界値問題の解である：

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & x \in \mathbf{R}^n,\ y > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

これを，ポアソン核 $P(x,y)$ の言葉で定式化すると，

$$\begin{cases} \Delta P(x,y) = 0, & x \in \mathbf{R}^n,\ y > 0, \\ \lim_{y\downarrow 0} P(x,y) = \delta(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

ここで，$\lim_{y\downarrow 0} P(x,y) = \delta(x)$ は，超関数の意味での収束を意味する．すなわち，

$$\lim_{y\downarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} P(x,y)\varphi(x)\,dx = \delta(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

これが成り立つことは，次のように証明できる．変数変換 $z = x/y$ により，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} P(x,y)\varphi(x)\,dx &= \frac{1}{y^n} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} Q\left(\frac{x}{y}\right)\varphi(x)\,dx \\ &= \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \int_{\mathbf{R}^n} Q(z)\varphi(yz)\,dz. \end{aligned}$$

ここで，

$$Q(z)|\varphi(yz)| \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\varphi(x)|Q(z), \quad \forall z \in \mathbf{R}^n,\ \forall y > 0$$

かつ

$$\lim_{y\downarrow 0} Q(z)\varphi(yz) = \varphi(0)Q(z), \quad \forall z \in \mathbf{R}^n$$

より，ルベーグの優収束定理（定理 3.6）が使えて，

$$\lim_{y\downarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} P(x,y)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

を得る．このように，ポアソン核を用いてデルタ関数 $\delta(x)$ が近似できる．

注意 50.2. ファーロウ [6] の第 4 部に、ポアソン核の具体例の解説がある．

51 熱方程式の初期値問題と熱核

熱方程式の 初期値問題 (51.1)	部分フーリエ変換 >>>>>>>>>>>>>>	常微分方程式の 初期値問題 (51.2)
$\wedge$ $\wedge$ $\wedge$ $\wedge$ $\wedge$		$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
$u(x,t)$ (51.6)	<<<<<<<<<<<<<<< 部分フーリエ逆変換	$\widetilde{u}(\xi,t)=\widehat{u}_0(\xi)\,e^{-t\|\xi\|^2}$ (51.3)

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ で，熱方程式に対する次の初期値問題を考える：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\Delta u(x,t)=0, & x\in\mathbf{R}^n,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbf{R}^n.\end{cases}\tag{51.1}$$

まず、冒頭のフローチャートに従って，発見的考察を行う．

$u_0\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ と仮定して，(51.1) を空間変数 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ について部分フーリエ変換すると，

$$\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$$

をパラメータに持つ，時間変数 t に関する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases}\left(\dfrac{d}{dt}+|\xi|^2\right)\widetilde{u}(\xi,t)=0, & t>0,\\ \widetilde{u}(\xi,0)=\widehat{u}_0(\xi),\end{cases}\tag{51.2}$$

を得る．これを解けば，常微分方程式の解の一意性定理から，

$$\widetilde{u}(\xi,t)=\widehat{u}_0(\xi)\,e^{-t|\xi|^2},\quad t\geq 0\tag{51.3}$$

が得られる．

よって，部分フーリエ変換の反転公式より，

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^n}e^{ix\cdot\xi}\left(\widehat{u}_0(\xi)\,e^{-t|\xi|^2}\right)d\xi\\&=u_0*\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right)\end{aligned}\tag{51.4}$$

となる．

具体的な計算で（式 (50.6)）

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,e^{-|x|^2/(4t)}\tag{51.5}$$

である．したがって，２つの式 (51.4), (51.5) より，

$$\begin{aligned}u(x,t)&=u_0*\left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\,e^{-|x|^2/(4t)}\right)\\&=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbf{R}^n}e^{-|x-y|^2/(4t)}\,u_0(y)\,dy\end{aligned}\tag{51.6}$$

が従う．

ところで，急減少関数
$$e^{-|x|^2/(4t)} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n_x), \quad t > 0$$
に注意すれば，公式 (51.6) の積分の意味を，緩増加な超関数 $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n_x)$ との合成積（たたみ込み積）とみなすことができる．すなわち，$t > 0$ をパラメータとして，
$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)} * u_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^n_x) \cap \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n_x)$$
と表示できる．

以上より，次の定理を得る：

定理 51.1. 緩増加な超関数 $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ に対して，合成積（たたみ込み積）
$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)} * u_0 \quad (t > 0) \tag{51.7}$$
が，$C^\infty(\mathbf{R}^n_x) \cap \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n_x)$ の要素として定義される．すなわち，関数 $u(x,t)$ は、空間変数 x の無限遠方では多項式オーダーで増加する滑らかな関数である．

さらに，$u(x,t)$ は，初期値問題 (51.1) を次の意味でみたす超関数解である：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) = 0 & \text{in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n), \quad t > 0, \\ u(\cdot, t) \longrightarrow u_0 & \text{in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \quad (t \downarrow 0). \end{cases} \tag{H}$$

証明. 前半の主張は，前述の発見的考察より示している．したがって，後半の主張を示せばよい．

まず，
$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(\Delta e^{-|x|^2/(4t)}\right) * u_0 \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right) e^{-|x|^2/(4t)} * u_0. \end{aligned}$$
一方，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して，合成積の定義より，
$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \varphi \right\rangle &= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t}, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle u_0, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)} * \varphi\right) \right\rangle \\ &= \left\langle u_0, \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) e^{-|x|^2/(4t)} * \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \left(-\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) e^{-|x|^2/(4t)} * u_0, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$
したがって，
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u(x,t) = 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n).$$

次に，$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対して，
$$\langle u(x,t), \varphi \rangle = \left\langle u_0, \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)} * \varphi \right\rangle.$$

ところで，

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)} * \varphi\right) \quad = \quad e^{-t|\xi|^2}\widehat{\varphi}(\xi)$$
$$\longrightarrow \quad \widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \quad (t \downarrow 0).$$

実際，例えば

$$(1 - e^{-t|\xi|^2})|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq 2 \sup_{|\xi|\geq R} |\widehat{\varphi}| + \sup_{|\xi|\leq R}(1 - e^{-t|\xi|^2}) \sup |\widehat{\varphi}|$$

と評価すると，第 1 項は R を十分大きくすればいくらでも小さくできる，その R に対して $t \downarrow 0$ とすれば第 2 項は 0 に限りなく近づく.

したがって，フーリエ逆変換をすると，

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-|x|^2/(4t)} * \varphi \longrightarrow \varphi \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \quad (t \downarrow 0).$$

このことから，

$$\langle u(x,t), \varphi\rangle \longrightarrow \langle u_0, \varphi\rangle \quad (t \downarrow 0)$$

が成り立ち，

$$u(\cdot, t) \longrightarrow u_0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \quad (t \downarrow 0)$$

を得る.

注意 51.1. ファーロウ [6] の第 12 課に、超関数論を使わない熱核の解説がある.

52　1 次元波動方程式の初期値問題

1 次元波動方程式の 初期値問題 (52.1)	部分フーリエ変換 >>>>>>>>>>>>>>>	常微分方程式の 初期値問題 (52.2)
$\wedge$ $\wedge$ $\wedge$ $\wedge$ $\wedge$		$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
$E(x,t)$ (52.6)	<<<<<<<<<<<<<<< 部分フーリエ逆変換	$\widetilde{E}(\xi,t) = \dfrac{\sin(\|\xi\|t)}{\|\xi\|}$ (52.3)

1 次元波動方程式に対する次の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{52.1}$$

冒頭のフローチャートに従って，発見的考察を行う.

まず，初期値 $u_0=0,\, u_1=\delta(x)$ に対応する基本解 $E(x,t)$ を求める．初期値問題 (52.1) を空間変数 x について部分フーリエ変換すると，$\xi\in\mathbf{R}$ をパラメータに持つ，時間変数 t に関する常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases}\left(\dfrac{d^2}{dt^2}+\xi^2\right)\widetilde{E}(\xi,t)=0, & \xi\in\mathbf{R},\ t>0,\\ \widetilde{E}(\xi,0)=0,\ \dfrac{d\widetilde{E}}{dt}(\xi,0)=1, & \end{cases} \tag{52.2}$$

が従う．これを解けば，

$$\widetilde{E}(\xi,t)=\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|},\quad t\ge 0 \tag{52.3}$$

が得られる．

よって，部分フーリエ変換の反転公式より，

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\,d\xi + i\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x\xi)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\,d\xi\right). \end{aligned} \tag{52.4}$$

$\sin(|\xi|t)/|\xi|$ は ξ について偶関数であり，$\sin(x\xi)$ は ξ について奇関数だから，(52.4) の最右辺の括弧内の第 2 項は 0 である．また，$\cos(x\xi)$ は $x\xi$ について偶関数だから，$\cos(x\xi)=\cos(|x\xi|)=\cos(|x||\xi|)$ である．したがって，

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(|x||\xi|)\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\,d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(|x|\xi)\sin(\xi t)}{\xi}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(t+|x|)\xi}{\xi}+\frac{\sin(t-|x|)\xi}{\xi}\right)d\xi. \end{aligned} \tag{52.5}$$

最後の積分を，次の 2 つの場合に分けて考える：

(1) $|x|<t$ の場合は，(52.5) の最右辺の積分内の第 1 項では $s=(t+|x|)\xi$, 第 2 項では $u=(t-|x|)\xi$ とおくと，

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{\frac{s}{t+|x|}}\frac{ds}{t+|x|}+\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{\frac{u}{t-|x|}}\frac{du}{t-|x|}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\,ds \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) $|x|>t$ の場合は，(52.5) の最右辺の積分内の第 1 項では $s=(t+|x|)\xi$, 第 2 項では $u=(|x|-t)\xi$ とおくと，

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\,ds+\int_0^{\infty}\frac{-\sin u}{\frac{u}{|x|-t}}\frac{du}{|x|-t}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin s}{s}\,ds-\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって，$t > 0$ をパラメータとして，

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{if } |x| < t, \\ 0 & \text{if } |x| > t \end{cases} \tag{52.6}$$

を得る．

実際に検算すると，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E(x,t) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x) \quad (t > 0) \tag{52.7}$$

が成り立つ．

以下では，基本解 $E(x,t)$ について考察する：

(a) まず，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x,t) = \frac{1}{2}(\delta'(x+t) - \delta'(x-t)) \tag{52.8}$$

を示す．

任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x,t), \varphi(x) \right\rangle &= \langle E(x,t), \varphi''(x) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{-t}^{t} \varphi''(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} (\varphi'(t) - \varphi'(-t)) \\ &= \left\langle \frac{1}{2} (\delta'(x+t) - \delta'(x-t)), \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

よって，公式 (52.8) が成り立つ．

(b) 他方，$t > 0$ をパラメータとして，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x,t) = \frac{1}{2}(\delta'(x+t) - \delta'(x-t)) \tag{52.9}$$

が成り立つ．

実際，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} E(x,t), \varphi(x) \right\rangle &= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{E(x,t+\Delta t) - E(x,t)}{\Delta t}, \varphi(x) \right\rangle \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} \int_{-t-\Delta t}^{t+\Delta t} \varphi(x)\, dx - \frac{1}{2} \int_{-t}^{t} \varphi(x)\, dx \right) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{-t-\Delta t}^{-t} \varphi(x)\, dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \varphi(x)\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi(-t) + \varphi(t)). \end{aligned} \tag{52.10}$$

このことから，

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x,t), \varphi(x) \right\rangle &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2}(\varphi(-t-\Delta t) + \varphi(t+\Delta t)) - \frac{1}{2}(\varphi(-t) + \varphi(t))}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{2}(\varphi'(t) - \varphi'(-t)) \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\left(\delta'(x+t) - \delta'(x-t)\right), \varphi \right\rangle .
\end{aligned}$$

(a)，(b) の計算より，所期の式 (52.7)を得る．

さらに，

$$\langle E(x,t), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \varphi(x)\, dx \longrightarrow 0 \quad (t \downarrow 0)$$

であり，また，(52.10) 式より，

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} E(x,t), \varphi(x) \right\rangle = \frac{1}{2}(\varphi(-t) + \varphi(t)) \longrightarrow \varphi(0) \quad (t \downarrow 0).$$

したがって，

$$E(x,t) \longrightarrow 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t}(x,t) \longrightarrow \delta(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x) \quad (t \downarrow 0)$$

である．

以上をまとめると，次の命題を得る：

命題 52.1. $t > 0$ をパラメータとする超関数

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{if } |x| < t, \\ 0 & \text{if } |x| > t \end{cases}$$

は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E(x,t) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x) \quad (t > 0), \\ E(x,t) \longrightarrow 0, \quad \dfrac{\partial E}{\partial t}(x,t) \longrightarrow \delta(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x) \quad (t \downarrow 0) \end{cases}$$

を満たす．

さらに，この命題から，次の系を得る：

系 52.1.

$$\frac{\partial E}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}(\delta(x+t) - \delta(x-t))$$

は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E(x,t) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x) \quad (t > 0), \\ \dfrac{\partial E}{\partial t}(x,t) \longrightarrow \delta(x), \quad \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}(x,t) \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x) \quad (t \downarrow 0) \end{cases}$$

を満たす．

以上をすべてまとめると，次の主定理を得る：

定理 52.1. 与えられた初期値 $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$，$u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ に対して，

$$u(x,t) = u_0 * \frac{\partial E}{\partial t}(x,t) + u_1 * E(x,t) \quad (t > 0)$$

が $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_x)$ の元として定義され，超関数 $u(x,t)$ は

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x) \quad (t > 0), \\ u(x,t) \longrightarrow u_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \longrightarrow u_1(x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}_x) \quad (t \downarrow 0) \end{cases}$$

を満たす．

注意 52.1. 特に，u_0，$u_1 \in C^\infty(\mathbf{R})$ のときは，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0 * \left(\frac{1}{2}\delta(x+t) + \frac{1}{2}\delta(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} u_1(x-y)\, dy \\ &= \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\, dy \end{aligned}$$

となる．これは，古典的なダランベールの公式である．ダランベールの公式については，ファーロウ [6] の第 17 課と第 18 課に詳しい解説がある．

53 熱核の応用

この節では，恒等作用素を近似する関数族 $\{\varphi_\varepsilon\}$ として熱核 (heat kernel) を用いた応用例について述べる．

定理 53.1. 熱核を

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4}}, \\ G(t,x) &= \frac{1}{(\sqrt{t})^n}\, G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

で定義する．

このとき，関数

$$u(t,x) = f * G(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy, \quad \forall t > 0,$$

に対して，次の主張 (i), (ii) が成り立つ：

(i) $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ ならば，

$$u(t,\cdot) \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^n) \quad (t \downarrow 0).$$

(ii) 関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}^n$ 上で有界かつ一様連続ならば，関数 $u(t,x)$ は，$\mathbf{R}^n \times [0,\infty)$ 上で連続であって，

$$u(t,\cdot) \longrightarrow f \quad (t \downarrow 0).$$

しかも，この収束は一様収束である．

証明． (i) まず，

$$\int_{\mathbf{R}^n} G(x)\,dx = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx = 1.$$

従って，主張 (i) は，

$$\varphi(x) := G(x),$$
$$\varepsilon := \sqrt{t},$$

として，定理 45.2 の主張 (i) を適用すれば良い．

(ii) 同様に，主張 (ii) は，

$$\varphi(x) := G(x),$$
$$\varepsilon := \sqrt{t},$$

として，定理 45.2 の主張 (ii) を適用すれば良い．

注意 53.1. 主張 (i), (ii) より，関数 $u(t,x)$

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy$$

は，次の**熱伝導方程式** (heat conduction equation) に対する初期値問題の解である：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

これを，熱核 $G(t,x)$ の言葉で定式化すると，

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial t}(t,x) - \Delta G(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n, \\ \lim_{t\downarrow 0} G(t,x) = \delta(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

ここで，$\lim_{t\downarrow 0} G(t,x) = \delta(x)$ は，超関数の意味での収束を意味する．すなわち，

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} G(t,x)\varphi(x)\,dx = \delta(\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

これが成り立つことは，次のように証明できる．変数変換 $y = x/2t$ により，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} G(t,x)\varphi(x)\,dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \varphi(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|y|^2} \varphi(2\sqrt{t}y)\,dy. \end{aligned}$$

ここで，

$$e^{-|y|^2}|\varphi(2\sqrt{t}y)| \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\varphi(x)| e^{-|y|^2}, \quad \forall y \in \mathbf{R}^n,\ \forall t > 0$$

かつ

$$\lim_{t\downarrow 0} e^{-|y|^2}\varphi(2\sqrt{t}y) = \varphi(0)e^{-|y|^2}, \quad \forall y \in \mathbf{R}^n$$

より，ルベーグの優収束定理（定理 3.6）が使えて，

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} G(t,x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

を得る．このように，熱核を用いてデルタ関数 $\delta(x)$ が近似できる．

54　ワイエルシュトラスの多項式近似定理

熱核は，解析的に非常に良い性質を持っている．たとえば，次のワイエルシュトラスの多項式近似定理の解析的な証明を与えることができる．

定理 54.1 (ワイエルシュトラスの多項式近似定理)**.** 多項式全体は，連続関数の空間 $C[a,b]$ において稠密である．すなわち，任意の連続関数は，多項式によって，一様に近似される．

証明. まず，

$$
\begin{aligned}
G(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{x^{2\nu}}{(4t)^\nu}, \\
G_{N_0}(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{\nu=0}^{N_0-1} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{x^{2\nu}}{(4t)^\nu}, \quad N_0 \in \mathbf{N}
\end{aligned}
$$

とおく．

次に，関数 $f \in C[a,b]$ を，関数 $\tilde{f} \in C(-\infty,\infty)$ に条件

$$\mathrm{supp}\ \tilde{f} \subset [a-1, b+1]$$

をみたすように拡張し，関数

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_t(x) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} G(t,x-y)\,\tilde{f}(y)\,dy, \\
\tilde{f}_{t,N_0}(x) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} G_{N_0}(t,x-y)\,\tilde{f}(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

を定義する．ここで，関数 $\tilde{f}_{t,N_0}(x)$ は，次数 $2N_0-2$ の多項式であることに注意．

このとき，定理 54.1 は，次の 2 つの主張 54.1, 主張 54.2 から従う．

主張 54.1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$|f(x) - \tilde{f}_t(x)| < \varepsilon/2, \quad \forall x \in [a,b]$$

をみたす $t > 0$ を見つけることができる．

証明. 関数 $\tilde{f}(x)$ は，$\mathbf{R}$ 上で一様連続かつ有界だから，定理 53.1 の (ii) を適用すれば，主張を得る．

主張 54.2. 与えられた $t > 0$ に対して，

$$|\tilde{f}_t(x) - \tilde{f}_{t,N_0}(x)| < \varepsilon/2, \quad \forall x \in [a,b]$$

をみたす整数 N_0 を見つけることができる．

証明. まず，

$$x \in [a,b], \quad y \in \mathrm{supp}\ \tilde{f} \Longrightarrow |x-y| \le b-a+1$$

であることに注意．従って，

$$
\begin{aligned}
|G(t,x-y) - G_{N_0}(t,x-y)| &\le \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{\nu=N_0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{(b-a+1)^{2\nu}}{(4t)^\nu} \\
&< \frac{\varepsilon}{2M(b-a+2)}, \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall y \in \mathrm{supp}\ \tilde{f}
\end{aligned}
$$

をみたす整数 N_0 を見つけることができる．ここで，

$$M = \max_{x \in \mathbf{R}} |\tilde{f}(x)|.$$

このとき，全ての $x \in [a,b]$ に対して，

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_t(x) - \tilde{f}_{t,N_0}(x)| &\le \int_{y \in \mathrm{supp}\ \tilde{f}} |G(t,x-y) - G_{N_0}(t,x-y)||\tilde{f}(y)|\,dy \\ &< \int_{a-1}^{b+1} \frac{\varepsilon M}{2M(b-a+2)}\,dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

これより，主張を得る．

55　スツルム・リウヴィルの境界値問題

この節では，超関数の意味で，次のスツルム・リウヴィル型常微分方程式を考える：

$$Lu := -(p(x)u')' + q(x)u, \quad a < x < b.$$

ここで，

$$\begin{cases} p(x) \in C^1(a,b), \quad p(x) \neq 0 \quad \text{on } (a,b), \\ q(x) \in C(a,b). \end{cases}$$

この常微分方程式の関数解析的解法は，標語的には，次のように述べられる：

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{常微分方程式：スツルム・リウヴィルの方程式}} \\ \downarrow\uparrow \qquad \text{超関数の言葉を通して} \\ \boxed{\text{関数解析：ヒルベルト空間における線型方程式}} \end{array}$$

この節の内容は，第 IV 部への入門となっている．

55.1　超関数解の内部正則性定理及び境界までの正則性定理

この小節では，関数解析的解法の出発点として，超関数解の通常の意味での正則性について考察する．

定理 55.1 (超関数解の内部正則性定理)**.** 開区間 $I = (a,b)$ とする．$p \in C^1(I)$ を I で $p(x) \neq 0$ とし，$q \in C(I)$ とする．このとき，

$$\begin{cases} u \in L^1_{loc}(I), \\ -(p(x)u')' + q(x)u = f \in L^1_{loc}(I) \quad (\text{超関数の意味で}), \end{cases}$$

ならば，

$$\begin{cases} u \in C^1(I), \\ u'(x) \text{ は } I \text{ で局所絶対連続}, \end{cases}$$

である．

さらに，

$$f \in C(I) \Longrightarrow u \in C^2(I)$$

である．

証明. Step 1： まず，仮定から，

$$-(p(x)u')' = f - q(x)u \in L^1_{loc}(I).$$

よって，$\psi(x) = p(x)u'$ は I で局所絶対連続である（参照: 1 次元の超関数）．したがって，$p \in C^1(I)$ は I で $p(x) \neq 0$ だから，$u'(x) = \psi(x)/p(x)$ は I で局所絶対連続である．これより，特に，

$$u \in C^1(I).$$

Step 2： さらに，$f \in C(I)$ ならば，

$$-p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u = f \quad \text{a.e. in } I$$

だから，

$$u'' = -\frac{p'(x)}{p(x)}u' - \frac{q(x)}{p(x)}u - \frac{f}{p(x)} \in C(I).$$

したがって，

$$u \in C^2(I).$$

注意 55.1. Step 1 の場合は，

$$-p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u = f \quad \text{a.e. in } I.$$

Step 2 の場合は，

$$-p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u = f \quad \text{in } I \quad (\text{通常の意味で}).$$

定理 55.2 (超関数解の境界までの正則性定理)**.** 開区間 $I = (a,b)$ とする．$p \in C^1[a,b]$, $p(x) \neq 0$ とし，$q \in C[a,b]$ とする．このとき，

$$\begin{cases} u \in L^2(I), \\ -(p(x)u')' + q(x)u = f \in L^2(I) \quad (\text{超関数の意味で}), \end{cases}$$

ならば，

$$\begin{cases} u \in C^1[a,b], \\ u'(x) \text{ は, 閉区間 } [a,b] \text{ で局所絶対連続}, \end{cases}$$

である．

証明. まず，シュワルツの不等式から，

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(x)|\,dx &\le \left(\int_a^b |u(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{b-a}\|u\|_{L^2[a,b]} < \infty \end{aligned}$$

となるので，

$$L^2(I) \subset L^1(I)$$

となることに注意する．

さて，仮定から，

$$-(p(x)u')' = f - q(x)u \in L^2(I) \subset L^1(I)$$

だから，定理 55.1 より，

$$u \in C^1(I).$$

さらに，微分積分学の基本定理から，

$$\begin{aligned}\int_c^x (f(t)-q(t)u(t))\,dt &= -[p(t)u'(t)]_c^x \\ &= -p(x)u'(x)+p(c)u'(c).\end{aligned}$$

ただし，$c\in(a,b)$ とする．したがって，$x_n\downarrow a$ となる任意の点列 $\{x_n\}$ に対して，

$$-p(x_n)u'(x_n)+p(x_m)u'(x_m)=\int_{x_m}^{x_n}(f(t)-q(t)u(t))\,dt.$$

ところで，

$$\begin{cases} p(x)\neq 0 \quad \text{on } [a,b], \\ f-q(x)u\in L^1(I), \end{cases}$$

なので， n，$m\to\infty$ のとき，ルベーグ可積分関数の絶対連続性より，

$$\begin{aligned}|-p(x_n)u'(x_n)+p(x_m)u'(x_m)| &\leq \int_{x_m}^{x_n}|f(t)-q(t)u(t)|\,dt \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

となり，$\{p(x_n)u'(x_n)\}$ は コーシー列である．

よって，

$$\exists\lim_{x\downarrow a}p(x)u'(x)=-\int_c^a(f(t)-q(t)u(t))\,dt+p(c)u'(c).$$

同様にして，

$$\exists\lim_{x\uparrow b}p(x)u'(x)=-\int_c^b(f(t)-q(t)u(t))\,dt+p(c)u'(c).$$

したがって，

$$\begin{aligned}\exists\lim_{x\downarrow a}u'(x)&=-\frac{1}{p(a)}\left\{\int_c^a(f(t)-q(t)u(t))\,dt+p(c)u'(c)\right\}, \\ \exists\lim_{x\uparrow a}u'(x)&=-\frac{1}{p(b)}\left\{\int_c^b(f(t)-q(t)u(t))\,dt+p(c)u'(c)\right\}.\end{aligned}$$

以上から，

$$u\in C^1[a,b].$$

ところで，

$$\begin{cases} -p(x)u'(x)=\displaystyle\int_c^x(f(t)-q(t)u(t))\,dt-p(c)u'(c), \\ f-q(x)u\in L^1(I). \end{cases}$$

よって，$-p(x)u'(x)$ は 閉区間 $[a,b]$ で絶対連続だから，$p\in C^1[a,b]$ は $p(x)\neq 0$ より，

$$u'=\left(-\frac{1}{p(x)}\right)(-p(x)u')$$

も閉区間 $[a,b]$ で絶対連続である．

注意 55.2.

$$-p(x)u''-p'(x)u'+q(x)u=f \quad \text{a.e. in } I$$

より，

$$u''=-\frac{p'(x)}{p(x)}u'+\frac{q(x)}{p(x)}u-\frac{1}{p(x)}f\in L^2(I)$$

に注意する．

55.2　作用素の定義域

ここからは，開区間を $I = (0,\ell)$ として考えていく．$p \in C^1[0,\ell]$ を $[0,\ell]$ で $p(x) > 0$ とし，$q \in C[0,\ell]$ とする．このとき，$u \in L^2(0,\ell)$ に対して，

$$Lu := -(p(x)u')' + q(x)u \quad \text{(超関数の意味で)}$$

とおく．

(1) $Lu = f \in L^2(0,\ell)$ ならば，

$$\begin{cases} u \in C^1[0,\ell], \\ u'(x) \text{ は } [0,\ell] \text{ で絶対連続.} \end{cases}$$

さらに，

$$-p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u = f \quad \text{a.e. in } (0,\ell)$$

だから，

$$u'' = -\frac{p'(x)}{p(x)}u' + \frac{q(x)}{p(x)}u - \frac{1}{p(x)}f \in L^2(0,\ell)$$

となることに注意する．さらに，

$$f \in C(0,\ell) \Longrightarrow u \in C^2(0,\ell).$$

(2) 逆に，

$$\begin{cases} u \in C^1[0,\ell], \quad u' \in \text{A.C. } [0,\ell], \\ u'' \in L^2(0,\ell) \end{cases}$$

ならば，

$$Lu = -p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u \in L^2(0,\ell).$$

以上より，ディリクレ境界値問題

$$(SL1) \qquad \begin{cases} Lu = f, \\ u(0) = u(\ell) = 0 \end{cases}$$

において，

$$f \in L^2(0,\ell) \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in C^1[0,\ell], \\ u' \in \text{A.C. } [0,\ell], \\ u'' \in L^2(0,\ell). \end{cases}$$

さらに，

$$f \in L^2(0,\ell) \cap C(0,\ell) \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in C^1[0,\ell], \\ u \in C^2(0,\ell), \\ u'' \in L^2(0,\ell). \end{cases}$$

55.3　スツルム・リウヴィルの境界値問題の関数解析的解法

この小節では，常微分方程式論におけるスツルム・リウヴィルの境界値問題を，超関数の言葉を通して，ヒルベルト空間の線型方程式として定式化する．

開区間 $(0,\ell)$ で次の微分作用素を考える．

$$Lu := -(p(x)u')' + q(x)u, \quad 0 < x < \ell.$$

ここで，

$$\begin{cases} p \in C^1[0,\ell], \quad p(x) > 0 \quad \text{on } [0,\ell], \\ q \in C[0,\ell], \quad q(x) \geq 0 \quad \text{on } [0,\ell], \end{cases}$$

とする．このとき，ヒルベルト空間 $L^2(0,\ell)$ 内で次の ディリクレ問題を考える．

$$(SL1) \qquad \begin{cases} Lu = f \quad \text{in } (0,\ell), \\ u(0) = u(\ell) = 0 \end{cases}$$

すなわち，

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in C^1[0,\ell] \mid u' \in \text{A.C. } [0,\ell], \quad u'' \in L^2(0,\ell), \quad u(0) = u(\ell) = 0\}$$

とおいて，作用素

$$L : L^2(0,\ell) \longrightarrow L^2(0,\ell)$$

を定義する．

まず，ディリクレ問題 $(SL1)$ の解が一意的であることを示す．

主張 55.1. 作用素 L は単射である．すなわち，

$$u \in \mathcal{D}(L), \quad Lu = 0 \Longrightarrow u = 0.$$

証明. ディリクレ積分（エネルギー積分）を考えると，

$$\begin{aligned} 0 &= (Lu, u) \\ &= -\int_0^\ell (pu')' \cdot u \, dx + \int_0^\ell qu^2 \, dx \\ &= -[pu' \cdot u]_0^\ell + \int_0^\ell pu' \cdot u' \, dx + \int_0^\ell qu^2 \, dx \\ &= \int_0^\ell pu'^2 \, dx + \int_0^\ell qu^2 \, dx. \end{aligned}$$

よって，$(0,\ell)$ 上で $p(x) > 0$ だから，

$$u'(x) = 0 \quad \text{on } (0,\ell),$$

すなわち，

$$u(x) = \text{定数} \quad \text{on } (0,\ell).$$

ところで，境界条件から $u(0) = u(\ell) = 0$ だから，

$$u(x) \equiv 0 \quad \text{on } (0,\ell).$$

次に，ディリクレ問題 $(SL1)$ が一意可解的であることを示す．そのために，$v_1(x), v_2(x)$ を次の常微分方程式の初期値問題の一意的な非自明解とする．

$$\begin{cases} -(p(x)v_1')' + q(x)v_1 = 0, \quad 0 < x < \ell, \\ v_1(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(p(x)v_2')' + q(x)v_2 = 0, \quad 0 < x < \ell, \\ v_2(\ell) = 0. \end{cases}$$

ここで，

$$v_1 \in C^2[0,\ell], \quad v_2 \in C^2[0,\ell]$$

とする．

主張 55.2. 関数 $v_1(x)$, $v_2(x)$ は一次独立である.

証明.

$$\begin{cases} a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) = 0, \\ a_1 \neq 0, \end{cases}$$

と仮定すると,

$$u(x) := v_1(x) = -\frac{a_2}{a_1} v_2(x).$$

明らかに,

$$\begin{cases} Lu = 0, \quad 0 < x < \ell, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

なので，主張 55.1 から，

$$v_1(x) = u(x) \equiv 0.$$

これは，$v_1(x)$ が非自明解であることに矛盾する.

系 55.1. ロンスキアン $W(x)$ について，

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

証明.

$$\begin{aligned} W(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad v_1(x) v_2'(x) = v_2(x) v_1'(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{v_2(x)}{v_1(x)} = \frac{v_2'(x)}{v_1'(x)}. \end{aligned}$$

よって，主張 55.2 から，明らかに $W(x) \neq 0$.

主張 55.3 (リウヴィル).

$$p(x)W(x) = p(0)W(0), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

証明.

$$\begin{aligned} (p(x)W)' &= p'(x)W + p(x)W' \\ &= p'(x)(v_1 v_2' - v_1' v_2) + p(x)(v_1' v_2' + v_1 v_2'' - v_1'' v_2 - v_1' v_2') \\ &= p'(x)(v_1 v_2' - v_1' v_2) + p(x)(v_1 v_2'' - v_1'' v_2). \end{aligned}$$

ところで，

$$\begin{aligned} -(p(x)v_1')' + q(x)v_1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -p'(x)v_1' - p(x)v_1'' + q(x)v_1 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad -p'(x)v_1' v_2 - p(x)v_1'' v_2 + q(x)v_1 v_2 = 0. \end{aligned}$$

同様にして，

$$-p'(x)v_2' v_1 - p(x)v_2'' v_1 + q(x)v_1 v_2 = 0.$$

よって，両辺引くと，

$$p'(x)(v_1 v_2' - v_1' v_2) + p(x)(v_1 v_2'' - v_1'' v_2) = 0.$$

したがって，

$$(p(x)W)' = p'(x)(v_1 v_2' - v_1' v_2) + p(x)(v_1 v_2'' - v_1'' v_2) = 0.$$

ゆえに，

$$p(x)W(x) = p(0)W(0).$$

さて，ディリクレ問題 $(SL1)$ の解を定数変化法

$$u(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

の形で求めてみる．

まず，境界条件について，

$$0 = u(0) = c_1(0)v_1(0) + c_2(0)v_2(0) = c_2(0)v_2(0)$$

より，

$$c_2(0) = 0.$$

また，

$$0 = u(\ell) = c_1(\ell)v_1(\ell) + c_2(\ell)v_2(\ell) = c_1(\ell)v_1(\ell)$$

より，

$$c_1(\ell) = 0.$$

次に，方程式については，

$$(\sharp) \qquad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f/p \end{pmatrix}$$

を満たすとして考えていく．このとき，

$$\begin{cases} u' = c_1'v_1 + c_1v_1' + c_2'v_2 + c_2v_2', \\ u'' = c_1''v_1 + 2c_1'v_1' + c_1v_1'' + c_2''v_2 + 2c_2'v_2' + c_2v_2'' \end{cases}$$

より，

$$\begin{aligned} & -p'(x)u' - p(x)u'' + q(x)u \\ = \ & -p'(x)(c_1'v_1 + c_1v_1' + c_2'v_2 + c_2v_2') \\ & -p(x)(c_1''v_1 + 2c_1'v_1' + c_1v_1'' + c_2''v_2 + 2c_2'v_2' + c_2v_2'') \\ & +q(x)(c_1v_1 + c_2v_2) \\ = \ & -p(x)(c_1'v_1' + c_2'v_2') + (-p(x)v_1'' - p'(x)v_1' + q(x)v_1)c_1 \\ & +(-p(x)v_2'' - p'(x)v_2' + q(x)v_2)c_2 - p(x)(c_1'v_1 + c_2'v_2)' \\ = \ & f \quad \text{a.e. in } (0, \ell). \end{aligned}$$

よって，方程式 $(\sharp)$ を解けばよい．

ところで，

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix}$$

だから，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -f/p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{pW} \begin{pmatrix} fv_2 \\ -fv_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p(0)W(0)} \begin{pmatrix} fv_2 \\ -fv_1 \end{pmatrix} \quad (\text{主張 } 55.3 \text{ から}). \end{aligned}$$

よって，境界条件：

$$c_1(\ell) = 0, \quad c_2(0) = 0$$

に注意すると，

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= -\int_x^\ell c_1'(t)\,dt = -\frac{1}{p(0)W(0)}\int_x^\ell f(t)v_2(t)\,dt,\\
c_2(x) &= -\int_0^x c_2'(t)\,dt = -\frac{1}{p(0)W(0)}\int_0^x f(t)v_1(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

注意 55.3. $f \in L^2(0,\ell), \quad v_1,\, v_2 \in C^2[0,\ell]$ だから，

$$c_1,\, c_2 \in \text{A.C.}\,[0,\ell]$$

となる．

以上のことをまとめると，

$$
\begin{aligned}
u(x) &= c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)\\
&= -\frac{1}{p(0)W(0)}\left(\int_0^x v_2(x)v_1(y)f(y)\,dy + \int_x^\ell v_1(x)v_2(y)f(y)\,dy\right).
\end{aligned}
$$

そこで，グリーン関数：

$$G(x,y) = -\frac{1}{p(0)W(0)}\begin{cases} v_1(x)v_2(y) & \text{if } 0 \le x \le y \le \ell,\\ v_1(y)v_2(x) & \text{if } 0 \le y \le x \le \ell \end{cases}$$

とおくと，

$$(SL2) \qquad u(x) = \int_0^\ell G(x,y)f(y)\,dy, \quad f \in L^2(0,\ell)$$

となる．

例 55.1. $\ell = 1$ の場合を考える．

$$\begin{cases} -u'' = f, \quad 0 < x < 1,\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

とすると，明らかに，

$$v_1(x) = x, \quad v_2(x) = 1 - x.$$

よって，

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & 1-x\\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - (1-x) = -1$$

より，

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{if } 0 \le x \le y \le 1,\\ (1-x)y & \text{if } 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

以上をまとめると，次の定理が成り立つ：

定理 55.3. 境界値問題 $(SL1)$ は一意的な解をもち，解は $(SL2)$ 式で与えられる．

注意 55.4.

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x)\\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} \ne 0, \quad 0 \le x \le \ell.$$

まず，リウヴィルの関係式（主張 55.3）から，

$$p(x)W(x) = p(0)W(0) \quad 0 \le x \le \ell.$$

よって，

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in [0,\ell] \quad \text{s.t.} \quad W(x_0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad W(0) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad W(x) \equiv 0, \quad 0 \le x \le \ell. \end{aligned}$$

ところで，

$$\begin{aligned} W(0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad v_1(0)v_2'(0) = v_2(0)v_1'(0) \\ &\Longrightarrow \quad v_1(0) = 0 \quad (v_1(0) = 0, \quad v_2(0) \ne 0 \text{ より}) \\ &\Longrightarrow \quad \begin{cases} -(p(x)v_1')' + q(x)v_1 = 0, \quad 0 < x < \ell, \\ v_1(0) = v_1'(0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となり，

$$v_1(x) \equiv 0.$$

これは，$v_1(x)$ が非自明解であることに矛盾する．

55.4 グリーン関数の性質

以下に，グリーン関数 $G(x,y)$ の重要な性質をまとめる：

(i) $G(x,y) \in C([0,\ell]\times[0,\ell])$ は閉三角形 $0 \le x \le y \le \ell$，$0 \le y \le x \le \ell$ において C^2 級である．

(ii) $G(x,y) = G(y,x)$ (対称性)

(iii)

$$\frac{\partial G}{\partial x}(y+0,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y-0,y) = -\frac{1}{p(y)}, \quad 0 < y < \ell.$$

実際，

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(y+0,y) &= -\frac{1}{p(0)W(0)} v_1(y)v_2'(y), \\ \frac{\partial G}{\partial x}(y-0,y) &= -\frac{1}{p(0)W(0)} v_1'(y)v_2(y). \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial x}(y+0,y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y-0,y) \\ = \quad & -\frac{1}{p(0)W(0)}(v_1(y)v_2'(y) - v_1'(y)v_2(y)) \\ = \quad & -\frac{1}{p(y)W(y)}W(y) \\ = \quad & -\frac{1}{p(y)} \end{aligned}$$

を得る．

(iv) 超関数の意味で $L_x G(x,y) = \delta(x-y)$. 実際，関数 $v_1(x)$, $v_2(y)$ の定義から，

$$\begin{cases} L_x v_1(x) = 0 & \text{for } y > x, \\ L_x v_2(x) = 0 & \text{for } x > y \end{cases}$$

だから，

$$L_x G(x,y) = 0 \quad \text{for } x \neq y.$$

さらに，(iii) より，

$$\begin{aligned} L_x G &= (-p(x)G')' + q(x)G \quad (\text{超関数の意味で}) \\ &= L_x G + \delta(x-y) \\ &= \delta(x-y) \end{aligned}$$

を得る．

(v) $G(0,y) = G(\ell,y) = 0$. 実際，$v_1(0) = 0$，$v_2(\ell) = 0$ より明らかである．

55.5 固有値の単純性

λ_0 を作用素 L の固有値とし，$X_1(x)$, $X_2(x)$ を対応する固有関数とする．すなわち，

$$\begin{cases} LX_1 = \lambda_0 X_1, \quad 0 < x < \ell, \\ X_1(0) = X_1(\ell) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} LX_2 = \lambda_0 X_2, \quad 0 < x < \ell, \\ X_2(0) = X_2(\ell) = 0. \end{cases}$$

このとき，

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 X_1 X_2 - \lambda_0 X_2 X_1 \\ &= LX_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot LX_2 \\ &= (-(p(x)X_1')' + q(x)X_1)X_2 - X_1(-(p(x)X_2')' + q(x)X_2) \\ &= (p(x)(X_1 X_2' - X_1' X_2))'. \quad (\text{Lagrange}) \end{aligned}$$

両辺を積分すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^x (p(X_1 X_2' - X_1' X_2))' \, dt \\ &= p(x)(X_1(x)X_2'(x) - X_1'(x)X_2(x)) \\ &\quad -p(0)(X_1(0)X_2'(0) - X_1'(0)X_2(0)) \\ &= p(x)(X_1(x)X_2'(x) - X_1'(x)X_2(x)) \\ &= p(x)\begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) \\ X_1'(x) & X_2'(x) \end{vmatrix}, \quad 0 < x < \ell. \end{aligned}$$

ところで，$(0,\ell)$ 上で $p(x) > 0$ だから，

$$\begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) \\ X_1'(x) & X_2'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

すなわち，$X_1(x)$, $X_2(x)$ は一次従属だから，λ_0 に対応する固有空間は 1 次元である．この事実を，固有値 λ_0 は単純であるという．

55.6 積分方程式への帰着

定理 55.4. 境界値問題

$$(SL3) \qquad \begin{cases} Lu = \lambda u + f, \\ u \in \mathcal{D}(L), \quad f \in L^2(0,\ell) \end{cases}$$

は, ヒルベルト空間 $L^2(0,\ell)$ における積分方程式

$$(SL4) \qquad u(x) = \lambda \int_0^\ell G(x,y)u(y)\,dy + \int_0^\ell G(x,y)f(y)\,dy$$

と同等である.

証明. $(SL3) \Longrightarrow (SL4)$：

$$\lambda u + f \in L^2(0,\ell)$$

だから，定理 55.3 より，積分方程式 $(SL4)$ が成立する．

$(SL4) \Longrightarrow (SL3)$：逆に，$u_0 \in L^2(0,\ell)$ を積分方程式 $(SL4)$ の解とする．すなわち，

$$u_0(x) = \lambda \int_0^\ell G(x,y)u_0(y)\,dy + \int_0^\ell G(x,y)f(y)\,dy.$$

このとき，右辺は閉区間 $[0,\ell]$ で絶対連続だから，特に $u_0 \in C[0,\ell]$ である．

ところで，

$$\lambda u_0 + f \in L^2(0,\ell)$$

だから，定理 55.3 から，

$$\exists! u \in \mathcal{D}(L) \quad \text{s.t.} \quad Lu = \lambda u_0 + f.$$

さらに，解 $u(x)$ は次式で与えられる：

$$u(x) = \lambda \int_0^\ell G(x,y)u_0(y)\,dy + \int_0^\ell G(x,y)f(y)\,dy.$$

したがって，

$$u(x) = u_0(x)$$

となり，

$$u_0 \in \mathcal{D}(L), \quad Lu_0 = \lambda u_0 + f$$

を得る．

注意 55.5.

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in C^1[0,\ell] \mid u' \in \text{A.C. } [0,\ell], \quad u'' \in L^2(0,\ell), \quad u(0) = u(\ell) = 0\}.$$

55.7 固有関数の完全性

定理 55.5. ヒルベルト空間 $L^2(0,1)$ において，正規直交系

$$\left\{\sqrt{2}\sin n\pi t\right\}_{n=1}^\infty$$

は完全である．

証明. **Step 1**： まず，次の ディリクレ固有値問題を考える：

$$(SL5) \qquad \begin{cases} x'' + \lambda x = 0, & 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

上の固有値問題を積分方程式に変換すると，

$$(SL6) \qquad x(s) = \lambda \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt, \quad 0 \le s \le 1.$$

ただし，

$$K(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{if } 0 \le s \le t \le 1, \\ t(1-s) & \text{if } 0 \le t \le s \le 1 \end{cases}$$

とする．

Step 2：積分方程式 $(SL6)$ を ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ で考える．そこで，

$$Hx(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt, \quad x \in L^2(0,1)$$

と定義すると，H は $\mathcal{H}$ における完全連続，自己共役作用素である．

Step 3：自己共役作用素 H の固有値，固有関数を求める．積分方程式 $(SL6)$ 式より，

$$\begin{aligned} x(s) &= \lambda \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \\ &= \lambda \int_0^s t(1-s)x(t)\, dt + \lambda \int_s^1 (1-t)x(t)\, dt \\ &= \lambda(1-s) \int_0^s t\, x(t)\, dt + \lambda s \int_s^1 (1-t)x(t)\, dt \\ &= \lambda(1-s) \int_0^s t\, x(t)\, dt + \lambda s \int_0^1 (1-t)x(t)\, dt - \lambda s \int_0^s (1-t)x(t)\, dt \\ &= \lambda \int_0^s (t-s)x(t)\, dt + \lambda s \int_0^1 (1-t)x(t)\, dt. \end{aligned}$$

したがって，

$$(***) \qquad x(s) = \lambda \int_0^s t\, x(t)\, dt - \lambda s \int_0^s x(t)\, dt + \lambda s \int_0^1 (1-t)x(t)\, dt.$$

よって，右辺は $x \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$ より，$x \in$ A.C. $[0,1]$．再び, 積分方程式 $(***)$ より，$x \in C^1[0,1]$.

この議論を繰り返すと，

$$x \in C^\infty[0,1].$$

以上より，積分方程式 $(SL6)$ を ヒルベルト空間 $L^2(0,1)$ で考えても，解 $x(t)$ は通常の解（古典解）として求まる．

一方，固有値問題 $(SL5)$ の固有値，固有関数は，

$$\begin{aligned} &\lambda_n = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ &\varphi_n(t) = \sqrt{2} \sin n\pi t, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

ところで，

$$
(*) \quad \begin{cases} x'' + \lambda x = 0, & 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}
$$

$$
\Longleftrightarrow (**) \quad x(s) = \lambda \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt, \quad 0 \le s \le 1
$$

$$
\Longleftrightarrow x = \lambda H x \quad \text{in } L^2(0,1).
$$

Step 4：0 は, 作用素 H の固有値ではない．実際，$Hx = 0$ とすると，

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt \\
&= \int_0^s t(1-s)x(t)\,dt + \int_s^1 s(1-t)x(t)\,dt \\
&= (1-s)\int_0^s t\,x(t)\,dt + s\int_s^1 (1-t)x(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

両辺 s で微分すると，

$$
\begin{aligned}
0 &= -\int_0^s t\,x(t)\,dt + (1-s)sx(s) + \int_s^1 (1-t)x(t)\,dt - s(1-s)x(s) \\
&= -\int_0^s t\,x(t)\,dt + \int_s^1 (1-t)x(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

さらに両辺 s で微分すると，

$$
0 = -sx(x) - (1-s)x(s) = -x(s).
$$

したがって，

$$
Hx = 0 \Longrightarrow x = 0
$$

となり，ヒルベルト・シュミットの展開定理 (定理 39.1) から $\left\{\sqrt{2}\sin n\pi t\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2(0,1)$ で完全である．

同様にして，

定理 55.6. ヒルベルト空間 $L^2(-1,1)$ において，正規直交系

$$
\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\pi t, \sin\pi t, \ldots, \cos n\pi t, \sin n\pi t, \ldots\right\}
$$

は完全である．

証明には，次の混合型固有値問題を考えればよい：

$$
\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, & -1 < t < 1, \\ x(-1) = x(1), & x'(-1) = x'(1). \end{cases}
$$

注意 55.6. 境界値問題の解の関数解析的な性質を調べるのに，同等な積分方程式を考えて，これに ヒルベルト空間の理論を適用して（例えば，固有値，固有関数の完全性など），種々の性質を導く論法は有効であり，しばしば使われる．

55.8　方程式 $(SL3)$ の解法

さて，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ における方程式

$$(SL3) \qquad (I-\lambda H)u = f \quad \text{in } \mathcal{H}$$

の考察に戻る．

定理 55.7. H を完全連続な自己共役作用素，$\{\mu_i\}$ を H の 0 でない固有値の全体，$\{\varphi_i\}$ を H の対応する固有解の全体とし，

$$H\varphi_i = \mu_i\varphi_i$$

とする．

(i) もし，$\lambda \notin \left\{\frac{1}{\mu_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ ならば，方程式 $(SL3)$ は一意な解

$$u = f + \lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu_i}{1-\lambda\mu_i}(f,\varphi_i)\varphi_i$$

をもつ．

さらに，$N(H)=\{0\}$ ならば，

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\lambda\mu_i}(f,\varphi_i)\varphi_i.$$

(ii) もし，$\lambda = \dfrac{1}{\mu_k}$ ならば，方程式 $(SL3)$ が少なくとも一つの解をもつための必要十分条件は，f が μ_k に対応する H の任意の固有解と直交することである．

証明. (i) まず，$N(H)=\{0\}$ の場合を考える．このとき，$\{\varphi_i\}$ が $\mathcal{H}$ で完全である．したがって，

$$(I-\lambda H)u = f$$

より，

$$\begin{aligned}((I-\lambda H)u,\varphi_j) = (f,\varphi_j) &= (u,\varphi_j) - \lambda(Hu,\varphi_j)\\ &= (u,\varphi_j) - \lambda(u,H\varphi_j)\\ &= (1-\lambda\mu_j)(u,\varphi_j), \quad j=1,2,\ldots.\end{aligned}$$

よって，

$$(u,\varphi_j) = \frac{1}{1-\lambda\mu_j}(f,\varphi_j).$$

ところで，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{1-\lambda\mu_k}\right|^2|(f,\varphi_k)|^2 &\leq \left(\sup_k\left|\frac{1}{1-\lambda\mu_k}\right|\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}|(f,\varphi_k)|^2\\ &\leq \left(\sup_k\left|\frac{1}{1-\lambda\mu_k}\right|\right)^2\|f\|^2.\end{aligned}$$

ここで，k が十分大なら，$\mu_k\to\infty$ より $\lambda\mu_k\to\infty$．また，有限個の k については $1-\lambda\mu_k\neq 0$．よって，

$$\sup_k\left|\frac{1}{1-\lambda\mu_k}\right| < \infty.$$

以上より，

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-\lambda\mu_i}(f,\varphi_i)\varphi_i.$$

次に，$N(H) \neq \{0\}$ の場合を考える．このとき，

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i + \psi, \quad \psi \in N(H)$$

となる．まず，$\mathcal{H} = \overline{R(H)} \oplus N(H)$ だから，

$$f = g + \psi, \quad g \in \overline{R(H)}, \quad \psi \in N(H)$$

と分解できる．ところで，

$$\begin{cases} \mathcal{H} \longleftrightarrow \overline{R(H)} = N(H)^{\perp}, \\ H \longleftrightarrow H|_{N(H)^{\perp}}, \end{cases}$$

として ヒルベルト・シュミットの展開定理（定理 39.1）を適用すると，$\{\varphi_i\}$ は $\overline{R(H)}$ で完全系であることがわかる．したがって，

$$g = \sum_{i=1}^{\infty}(g,\varphi_i)\varphi_i \quad \text{in } \overline{R(H)}.$$

ところで，

$$(g,\varphi_i) = (f-\psi,\varphi_i) = (f,\varphi_i).$$

以上より，

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i + \psi, \quad \psi \in N(H)$$

このとき，

$$(I-\lambda H)u = f \quad \text{in } \mathcal{H}$$

より，

$$(I-\lambda H)u = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i + \psi \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

よって，

$$(I-\lambda H)(u-\psi) = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

そこで，$v := u - \psi$ とおくと，

$$(I-\lambda H)v = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i$$

だから，

$$v = \lambda H v + \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i \in \overline{R(H)}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} & (I-\lambda H)u = f \quad \text{in } \mathcal{H} \\ \Longleftrightarrow \quad & (I-\lambda H)v = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i \quad \text{in } \overline{R(H)}. \end{aligned}$$

以上より，$N(H)=\{0\}$ の場合に帰着させて，

$$v=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\lambda\mu_i}(f,\varphi_i)\varphi_i.$$

これを書き直すと，

$$\begin{aligned}u&=\psi+v\\&=f-\sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-\lambda\mu_k}(f,\varphi_i)\varphi_i\\&=f+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu_i}{1-\lambda\mu_i}(f,\varphi_i)\varphi_i.\end{aligned}$$

(ii) の場合

$$\lambda=\frac{1}{\mu_k},\quad \dim N(\mu_kI-H)=p,$$

例えば，その基底を

$$\left\{\varphi_k^{(1)},\ldots,\varphi_k^{(p)}\right\}$$

とする．このとき，

$$(I-\lambda H)u=f\quad \text{in } \mathcal{H}$$

より，

$$\begin{aligned}(f,\varphi_k^{(j)})&=\left((I-\lambda H)u,\varphi_k^{(j)}\right)\\&=\left(u,\varphi_k^{(j)}\right)-\lambda\mu_k\left(u,\varphi_k^{(j)}\right)\\&=0,\quad 1\le j\le p.\end{aligned}$$

逆に，

$$(f,\varphi_k^{(j)})=0,\quad 1\le j\le p$$

ならば，$\lambda=\dfrac{1}{\mu_k}$ 以外の $\{\mu_{k'}\}$ については，(i) より，

$$\frac{1}{1-\lambda\mu_{k'}}(f,\varphi_{k'})$$

として一意に定まる．

したがって，方程式 $(SL3)$ の一般解は，

$$u=f+\lambda\sum_{k\neq k'}\frac{\mu_{k'}}{1-\lambda\mu_{k'}}(f,\varphi_{k'})\varphi_{k'}+\sum_{j=1}^{p}c_j\varphi_k^{(j)}$$

で与えられる．

第 IV 部
変分法による楕円型境界値問題入門

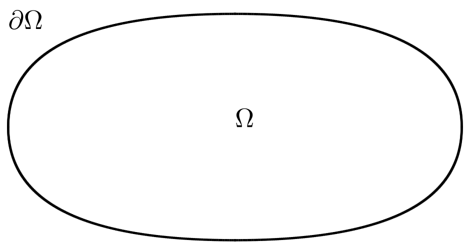
最後の第 IV 部は，ルベーグ積分論，超関数の考え方を基礎にして，偏微分方程式論における楕円型境界値問題への「関数解析的なアプローチ」についての自習書である．特に，楕円型境界値問題の超関数解の存在及び一意性定理について，丁寧にまとめたものである．

Ω をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の有界領域（連結開集合）として，その境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかであるとする．このとき，楕円型微分作用素に対するディリクレ境界値問題のソボレフ空間 $H^m(\Omega)$ の枠組みにおける一意可解性について考察する：

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，偏微分作用素 A は次のような $2m$ 階の一般的な楕円型偏微分作用素とする：

$$Au = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u \right).$$



楕円型境界値問題の超関数解の存在を証明する代表的な方法としては，次の 2 つがある：

分野	項目	ポイント
ポテンシャル論	フレドホルムの積分方程式 ニュートン核 ポアソン核	特異積分作用素 擬微分作用素
変分法	変分原理 オイラー・ラグランジュ方程式	関数空間の設定 完備性，コンパクト性

第 IV 部では，そのうちの 1 つであるディリクレの原理を用いた変分法のアイデアについて証明する．ディリクレの原理は，リーマンがラプラス方程式に対するディリクレ問題の解の存在の証明の際に提唱した方法である．以下では，ラプラス作用素の場合から始め，順次，一般の楕円型作用素の場合について考察する．尚，古典的なポテンシャル論の現代版である擬微分作用素の理論を援用したアプローチについては，文献 [24], [25] を参照されたい．

この問題に関して用いる主な理論，定理の鳥瞰図は, 次の通りである：

テーマ	Laplace 作用素の場合	一般楕円型作用素の場合
解の存在定理	ディリクレの原理 ポアンカレの不等式	ゴールディングの不等式 ラックス・ミルグラムの定理 フレドホルムの交代定理
解の一意性定理	グリーンの定理	ゴールディングの不等式
解の正則性定理	ワイルの補題	差分法
固有値分布	レリッヒの定理 ヒルベルト・シュミットの理論	レリッヒの定理 ヒルベルト・シュミットの理論

56　記号について

(1) ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の点に対して, 解析学の伝統的な記号

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

を使う． また, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対して,

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}.$$

とおく.

(2) 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ に対して,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$
$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_n!$$

とおく． また, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ に対して,

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

と定義する.

記号：$\alpha \leq \beta$ は, $\alpha_j \leq \beta_j$, $1 \leq j \leq n$, を意味する． このとき,

$$\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} = \binom{\beta_1}{\alpha_1}\binom{\beta_2}{\alpha_2} \cdots \binom{\beta_n}{\alpha_n}.$$

(3) 偏導関数について, 次の省略形を使う：

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (i = \sqrt{-1})$$

例えば, 高階の偏導関数は次のようになる：

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\dots\partial_n^{\alpha_n},$$
$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\dots D_n^{\alpha_n}.$$

同様に, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$$

と表す.

57　n 次元超関数論

この節では，一般の n 次元超関数論の基本的な事項，概念，定理等について，丁寧に解説する．超関数導入の利点は，代数方程式の解法との比喩で，次のように述べられる：

代数学	解析学
代数方程式の解法	微分方程式の解法
代数的閉体（複素数体）の構成	完備な関数空間（超関数）の構成
代数学の基本定理	超関数解の存在定理
根の性質を調べる	超関数解の性質を調べる

あるいは，より詳しい対照表を作れば，次のようになる：

テーマ	代数方程式	微分方程式
枠組み	実数体	連続関数 リーマン積分
存在定理	複素数体（代数的閉体）	超関数 ルベーグ積分（完備性）
定性的性質	根の性質	解の一意性 解の正則性

57.1　n 次元超関数の定義

定義 57.1 (急減少関数)**.** ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上の C^∞ 関数が，その導関数とともに，$|x| \to \infty$ のとき $|x|$ の任意の巾より早く 0 に収束するとき，$\mathbf{R}^n$ 上の**急減少関数** (rapidly decreasing function) という．すなわち，$f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ が，任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_+^n$ に対して，

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

となるときをいう．$\mathbf{R}^n$ 上の急減少関数の全体をシュワルツ空間と呼び, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$，または $\mathcal{S}$ とあらわす．

定理 57.1. $\mathcal{S}$ 上の次の 2 つの定義セミノルムは同値である：

$$\mathcal{P} = \{p_{\alpha,\beta}\}, \quad p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^n_+). \tag{57.1}$$

$$\widehat{\mathcal{P}} = \{p_m\}, \quad p_m(f) = \sum_{|\alpha|+k\le m} \sup_{x\in\mathbf{R}^n} (1+|x|^2)^k \left|\partial^\alpha f(x)\right|. \tag{57.2}$$

定義 57.2. 次の (i), (ii) をみたす u を $\mathbf{R}^n$ 上の**緩増加超関数**という．

(i) u は $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ 上の線形汎関数，すなわち, 各 $\varphi \in (\mathbf{R}^n)$ に複素数 $\langle u, \varphi\rangle$ を対応させる $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ から $\mathbf{C}$ への線形写像である：

$$\begin{aligned}&\langle u, c\varphi\rangle = c\langle u, \varphi\rangle, \quad \forall c \in \mathbf{C},\\ &\langle u, \varphi+\psi\rangle = \langle u, \varphi\rangle + \langle u, \psi\rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).\end{aligned}$$

(ii) u は $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ 上で連続，すなわち, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ の定義セミノルム系 $\mathcal{P} = \{p_m\}$ に対して，

$$\forall \varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)\colon p_m(\varphi_j) \longrightarrow 0 \Longrightarrow \langle u, \varphi_j\rangle \longrightarrow 0$$

が成り立つ．

$\mathbf{R}^n$ 上の緩増加超関数全体を $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$，または $\mathcal{S}'$ とあらわす．

以下では, Ω を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする．

定義 57.3. $C_0^\infty(\Omega)$ を Ω で定義された C^∞ 関数で，その台が Ω のコンパクト集合となっているものの全体とする．K を Ω のコンパクトな部分集合とするとき，

$$\mathcal{D}_K = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$$

とする．さらに，$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$|\varphi|_m = \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} \left|\partial_x{}^\alpha \varphi(x)\right|, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

とおく．

定義 57.4. T が Ω 上の位 数 m の**超関数** (distribution) であるとは，T が $C_0^\infty(\Omega)$ から $\mathbf{C}$ への写像

$$T\colon C_0^\infty(\Omega) \ni \varphi \longmapsto T(\varphi) \in \mathbf{C}$$

で，次の性質をもつときをいう：

(i) 線形性：

$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \quad \forall a, b \in \mathbf{C}, \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(ii) Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対して，

$$|T(\varphi)| \le C|\varphi|_m, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K$$

となる整数 $m \ge 0$，定数 $C > 0$ が存在する．

以下，Ω 上の超関数全体を $\mathcal{D}'(\Omega)$ と表す．

例 57.1. 任意の $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対して，次の式により位数 0 の超関数 T_f が定義できる：

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall\varphi \in C_0^1(\Omega).$$

証明. 任意の $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ $(\mathrm{supp}\,\varphi \subset K)$ に対して，

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &\leq \int_K |f(x)||\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \left(\int_K |f(x)|\,dx\right)\max_K |\varphi|. \end{aligned}$$

注意 57.1. 写像 $f \longmapsto T_f$ は $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ への単射である．言い換えると，任意の $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ は，超関数 $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ と同一視することができる．これは，後出のデュボア・レモンの補題（補題 57.1）から示すことができる．このことから，$L^1(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ であり，一般に，

$$L^p(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

例 57.2 (ディラックのデルタ関数)**.** $a < c < b$ のとき，

$$\delta_c(\varphi) = \varphi(c), \quad \forall\varphi \in C_0(I)$$

とする．

$$\delta_c(x) = \begin{cases} +\infty & (x = c), \\ 0 & (x \neq c), \end{cases}$$

で，

$$\int_I \delta_c(x)\,dx = 1$$

である．この超関数 δ_c は位数 0 の超関数である．

証明.

$$|\delta_c(\varphi)| = |\varphi(c)| \leq \max_K |\varphi|.$$

例 57.3 (コーシーの主値)**.**

$$\left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx\right),$$

とすると，$\mathrm{v.p.}\,\dfrac{1}{x}$ は $\mathbf{R}$ 上で位数 1 の超関数である．ここで，v.p. はフランス語 valeur principale の省略記号である．

証明.

$$\left\langle \mathrm{v.p.}\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$$

で，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_{\varepsilon<|x|\leq 1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\int_{|x|>1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$$

として考えていく．

ところで，

$$\begin{aligned}|(\text{第 2 項})| &\leq \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|}|\varphi(x)|\,dx \\ &< \int_{|x|>1} |\varphi(x)|\,dx \\ &\leq |K|\max_K |\varphi(x)|.\end{aligned}$$

一方，

$$\int_{\varepsilon<|x|\leq 1} \frac{1}{x}\,dx = 0$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}(\text{第 1 項}) &= \int_{\varepsilon<|x|\leq 1} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx - \int_{\varepsilon<|x|\leq 1} \frac{1}{x}\varphi(0)\,dx \\ &= \int_{\varepsilon<|x|\leq 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx \\ &= \int_{\varepsilon<|x|\leq 1} \left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt\right) dx\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\text{第 1 項}) &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \varphi'(tx)\,dt\right) dx, \\ \left|\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\text{第 1 項})\right| &\leq \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 |\varphi'(tx)|\,dt\right) dx \\ &\leq \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 dt\right) dx \cdot C_K \max_K |\varphi'(x)| \\ &= 2C_K \max_K |\varphi'(x)|.\end{aligned}$$

したがって，

$$\left\langle \mathrm{v.}p.\,\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \leq |K|\max_K |\varphi(x)| + 2C_K \max_K |\varphi'(x)|$$

となり，

$$\mathrm{v.}p.\,\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}).$$

57.2 n 次元超関数の微分演算

$u \in C^1(\Omega)$ とすると, 部分積分によって，

$$\int (D_k u)\varphi\,dx = -\int u D_k \varphi\,dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

となる．この等式の右辺は，u が微分可能でなくても $u \in L^1(\Omega)$ ならば意味を持つ．そこで，$u \in L^1(\Omega)$ のような場合にも，この右辺で定義される超関数でもって，一般化された偏微分導関数 $D_k u$ を定義する．

定義 57.5. 一般に，$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ に対して，

$$(D_k u)(\varphi) = -u(D_k\varphi),\ (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{57.3}$$

と定義する．さらに, 一般に，

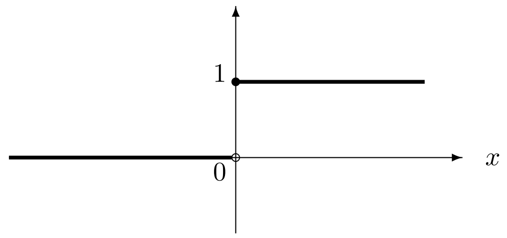
$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\varphi), \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{57.4}$$

と定義する．

この定義により，例えば u が Ω で位数 ℓ の超関数の場合，$D^\alpha u$ は Ω で位数 $(\ell + |\alpha|)$ の超関数となる．また，常に公式 $D_j D_k u = D_k D_j u$ が成り立つ．

例 57.4. 次の関数 $H(x)$ をヘビサイド関数という：

$$H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \infty, \\ 0 & -\infty < x < 0. \end{cases}$$



明らかに, $H(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ であるが，$H'(x) = \delta(x)$ となる．実際，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi\rangle &= -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(0) = \int_{-\infty}^\infty \delta(x)\varphi(x)\,dx = \langle\delta, \varphi\rangle \end{aligned}$$

となるからである．

例 57.5. $u(x), f(x) \in C(\mathbf{R})$ であって，超関数 $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ の意味で $\dfrac{d}{dx}u = f$ ならば，実は通常の意味で $u'(x) = f(x), -\infty < x < \infty$ が成り立っている．

証明. $\varepsilon > 0$ に対して，$u_\varepsilon(x) = u * \varphi_\varepsilon(x), f_\varepsilon(x) = f * \varphi_\varepsilon(x)$ とおくと，$u_\varepsilon, f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R})$ であって，$\varepsilon \to 0$ のとき，任意の有界区間で一様に $u_\varepsilon(x) \to u(x), f_\varepsilon(x) \to f(x)$ となることが容易に分かる．

一方，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}u_\varepsilon(x) &= \frac{d}{dx}(u * \varphi_\varepsilon(x)) = u * \varphi_\varepsilon'(x) \\ &= \int u(y)\frac{d}{dx}\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \\ &= -\int u(y)\frac{d}{dy}\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \\ &= \int f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy \\ &= f_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

であるから，$\varepsilon \to 0$ のとき，同じ有界区間で一様に $\dfrac{d}{dx}u_\varepsilon(x) \longrightarrow f(x)$. したがって，$u(x) \in C^1(\mathbf{R})$ であって $u'(x) = f(x), -\infty < x < \infty$ が成り立つ．

定理 57.2. $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ と $\{u_j\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ について，超関数の意味で $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ ならば，任意の α に対して，超関数の意味で，

$$D^\alpha u = \lim_{j\to\infty} D^\alpha u_j \tag{57.5}$$

証明. 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，仮定から $j \to \infty$ のとき，

$$\begin{aligned}(D^\alpha u_j)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} u_j(D^\alpha \varphi) \\ &\longrightarrow (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi) = (D^\alpha u)(\varphi).\end{aligned}$$

定義 57.6. $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ のとき，

$$(au)(\varphi) = u(a\varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{57.6}$$

によって $au \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を定義する.

定理 57.3. $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ とすると，

$$D_k(au) = (D_k a)u + aD_k u \quad \text{(Leibniz の公式)} \tag{57.7}$$

が成り立つ.

証明. 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle D_k(au), \varphi\rangle &= -\langle au, D_k\varphi\rangle \\ &= -\langle u, aD_k\varphi\rangle \\ &= -\langle u, D_k(a\varphi) - (D_k a)\varphi\rangle \\ &= -u(D_k(a\varphi)) + u((D_k a)\varphi) \\ &= (D_k u)(a\varphi) + u((D_k a)\varphi) \\ &= (aD_k u)(\varphi) + ((D_k a)u)(\varphi) \\ &= \langle aD_k u + (D_k a)u, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

57.3 フリードリックスの軟化作用素

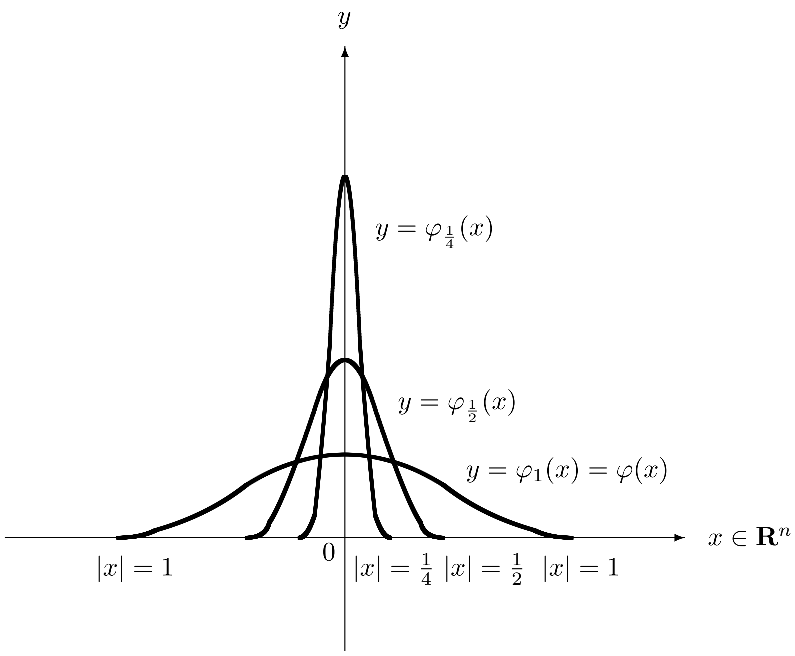
$\mathbf{R}^n$ 上の関数 φ として，次の性質を持つものをとる：

(i) $\varphi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$.
(ii) $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi(x) = 0, \quad |x| \geq 1$.
(iii) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$.

さて，任意の $f \in L^p(\mathbf{R}^n) (1 \leq p \leq \infty)$ に対して，

$$J_\varepsilon f(x) := f_\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy \tag{57.8}$$

とおく．この J_ε をフリードリックスの **軟化作用素** (mollifier) という.



定理 57.4. f_ε に関して次の性質が成り立つ：

(i) $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.

(ii) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

証明. (i) ハウスドルフ・ヤングの不等式 (9.3) より，

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1}\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.$$

(ii) $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ だから (57.8)の右辺より x について何回でも微分可能であることがわかる．よって，$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

定理 57.5. $\varphi \in L^1(\mathbf{R}^n)$ で，

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$$

とする．また，

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

とする．このとき，

(i) $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ ならば，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{in } L^p(\mathbf{R}^n).$$

(ii) $f \in L^p(\mathbf{R}^\infty)$ が一様連続ならば，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$f * \varphi_\varepsilon \longrightarrow f \quad \text{in } L^\infty(\mathbf{R}^n).$$

証明. (i)

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbf{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$$

より，

$$\begin{aligned} f*\varphi_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} (f(x-y)-f(x))\varphi_\varepsilon(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} (f(x-\varepsilon z)-f(x))\varphi(z)\,dz. \end{aligned}$$

よって，ミンコウスキーの不等式より，

$$\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_{L^p} \le \int_{\mathbf{R}^n} \|f_{-\varepsilon z}-f\|_{L^p}|\varphi(z)|\,dz.$$

ところで，

$$\|f_{-\varepsilon z}-f\|_{L^p} \le \|f_{-\varepsilon z}\|_{L^p} + \|f\|_{L^p} = 2\|f\|_{L^p}$$

だから，

$$\|f_{-\varepsilon z}-f\|_{L^p}|\varphi(z)| \le 2\|f\|_{L^p}|\varphi(z)| \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

また，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|f_{-\varepsilon z}-f\|_{L^p} = 0$$

より，ルベーグの優収束定理を適用して，

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_{L^p} &\le \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbf{R}^n} \|f_{-\varepsilon z}-f\|_{L^p}|\varphi(z)|\,dz \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|f_{-\varepsilon z}-f\|_{L^p}|\varphi(z)|\,dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ が一様連続であるとすると，φ の積分可能性より，任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus W} |\varphi(z)|\,dz < \delta$$

となるコンパクト集合 W が存在する．よって，

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbf{R}^n} |f*\varphi_\varepsilon(x) - f(x)| \\ \le\ &\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-\varepsilon y)-f(x)| : \varphi(y)|\,dy\right) \\ =\ &\sup_{x\in\mathbf{R}^n}\left(\int_W |f(x-\varepsilon y)-f(x)| : \varphi(y)|\,dy + \int_{\mathbf{R}^n\setminus W} |f(x-\varepsilon y)-f(x)| : \varphi(y)|\,dy\right) \\ \le\ &\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n\\ y\in W}} |f(x-\varepsilon y)-f(x)| \int_W |\varphi(y)|\,dy + 2\|f\|_{L^\infty}\int_{\mathbf{R}^n\setminus W} |\varphi(y)|\,dy \\ \le\ &\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n\\ y\in W}} |f(x-\varepsilon y)-f(x)|\,\|\varphi\|_{L^1} + 2\delta\|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

ところで，f は一様連続で，W がコンパクトだから，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sup_{\substack{x\in\mathbf{R}^n\\ y\in W}} |f(x-\varepsilon y)-f(x)|\right) = 0.$$

よって，

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_{L^\infty} \leq 2\delta\|f\|_{L^\infty}. \quad \square$$

定理 57.6. $C_0(\mathbf{R}^n)$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1\leq p<\infty)$ のなかで $\|\cdot\|_{L^p}$ に関して稠密である．

証明. $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$, $f_1(x)=\mathrm{Re}f(x)$, $f_2(x)=\mathrm{Im}f(x))$ とおくと，$f\in L^p$ なので

$$f_1^+,\, f_1^-,\, f_2^+,\, f_2^- \in L^p$$

となる．よって，$f\geq 0$ として考えても一般性は失わない．

任意の $\varepsilon>0$ をとる．$S_n=\{x\in\mathbf{R}^n : |x|<n\}$ とおくと，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\,dx<\infty$ より，

$$\int_{\mathbf{R}^n-S_n}|f(x)|^p\,dx<\varepsilon^p$$

とできる．よって，

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & \text{for } x\in S_n, \\ 0 & \text{for } x\in {S_n}^c \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \|f_n-f\|_p &= \left(\int_{\mathbf{R}^n}|f_n(x)-f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}^n-S_n}|f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

ところで，$f_n\geq 0$ より，$f_n(x)$ は非負単関数の単調増加列の極限となる．単関数 $g(x)$ を，

$$f_n(x)\geq g(x)\geq 0, \quad \int_{\mathbf{R}^n}(f_n(x)-g(x))^p\,dx<\varepsilon^p$$

となるようにとれる．よって，

$$\|f_n-g\|_p<\varepsilon.$$

また，$g(x)$ は，

$$g(x)=\sum_{j=1}^k \alpha_j\chi_{E_j}(x) \quad (\alpha_j>0, \quad E_j\subset S_n)$$

とかける．よって，各 E_j に対し，

$$F_j\subset E_j\subset G_j, \quad \mu(G_j-E_j)<\left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j}\right)^p$$

をみたすような閉集合 F_j，開集合 G_j が存在する．S_n は開集合だから，$G_j\subset S_n$ とできる．$h_j(x)$ を $\mathbf{R}^n$ 上で $0\leq h_j(x)\leq 1$ となる連続関数で，

$$h_j(x)=\begin{cases} 1 & \text{for } x\in F_j, \\ 0 & \text{for } x\in {G_j}^c \end{cases}$$

とすると，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{E_j}(x) - h_j(x)|^p d\mu &\leq \int_{G_j - E_j} 1^p d\mu \\ &= \mu(G_j - E_j) \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j}\right)^p.\end{aligned}$$

よって，

$$\|\chi_{E_j} - h_j\|_p < \frac{\varepsilon}{k\alpha_j}.$$

$h(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} h_j(x)$ とおくと，$h \in C_0(\mathbf{R}^n)$ で，

$$\begin{aligned}\|g - h\|_{L^p} &\leq \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \|\chi_{E_j} - h_j\|_{L^p} \\ &< \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\|f - h\|_{L^p} &\leq \|f - f_n\|_{L^p} + \|f_n - g\|_{L^p} + \|g - h\|_{L^p} \\ &< 3\varepsilon.\end{aligned}$$

57.4 デュボア・レモンの補題（n 次元版）

通常の関数を，汎関数として捉えて，超関数とみなした場合に，矛盾が起きないことを保証するのが，次の補題である．より正確には，埋め込み写像

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

が，単射であることを示している:

補題 57.1 (デュボア・レモン)**.** $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が，

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{for all } \varphi \in C^1_0(\Omega)$$

を満たすならば，

$$f = 0 \quad \text{almost everywhere in } \Omega.$$

証明. K を Ω の任意のコンパクト部分集合とし，$\chi \in C^1_0(\Omega)$ を K 上で $\chi(x) = 1$ とする．

$$f_\chi(x) = \chi(x)f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x \in K, \\ \chi(x)f(x) & \text{for } x \notin K \end{cases}$$

とすると，

$$f_\chi \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

$\rho \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ を，

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\ \rho \subset \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \le 1\}, \\ \int_{\mathbf{R}^n} \rho(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

として，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

とする．
すると，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき，

$$\rho_\varepsilon * f_\chi \longrightarrow f_\chi \quad \text{in } L^1(\mathbf{R}^n).$$

ところで，

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon * f_\chi(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) f_\chi(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} f(y)(\chi(y)\rho_\varepsilon(x-y))\,dy. \end{aligned}$$

$$\chi(\cdot)\rho_\varepsilon(x-\cdot) \in C_0^1(\mathbf{R}^n), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

よって，

$$\rho_\varepsilon * f_\chi(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

とすると，

$$\|f_\chi\|_{L^1} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\rho_\varepsilon * f_\chi\|_{L^1} = 0$$

となり，

$$f_\chi(x) = \chi(x) f(x) = 0, \quad \text{almost every } x \in \mathbf{R}^n.$$

特に，

$$f(x) = 0 \quad \text{almost every } x \in K.$$

したがって，K は任意なので，

$$f(x) = 0 \quad \text{almost every } x \in \Omega.$$

58　ソボレフ空間 $H^1(\Omega)$ と $H_0^1(\Omega)$

Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界な領域（連結開集合）とする．$u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ に対して，

$$D(u,v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}}\,dx$$

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx + D(u,u)\right)^{1/2}$$

とおく．$W^1(\Omega)$ を

$$W^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D_i u \in L^2(\Omega),\ 1 \le i \le n\right\}$$

とかき，**ソボレフ空間**という．ただし，$D_i u$ は超関数の意味での偏微分である．空間 $W^1(\Omega)$ は，内積

$$(u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega u(x) \cdot \overline{v(x)}\,dx + D(u,v)$$

に関して ヒルベルト空間である．

さらに，$H^1(\Omega)$ を，ノルム $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ に関して $C^1(\overline{\Omega})$ の完備化した空間とすると，次の定理が成り立つ：

定理 58.1.

$$W^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

証明. $u \in H^1(\Omega)$ とすると，$H^1(\Omega)$ の完備性より，

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

となるような $C^1(\overline{\Omega})$ のコーシー列 $\{u_j\}$ が存在する．さらに，$\left\{\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right\}$ は $L^2(\Omega)$ のコーシー列である．よって，$L^2(\Omega)$ の完備性より，

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \longrightarrow v \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

となる $v \in L^2(\Omega)$ が存在する．したがって，任意の $\varphi \in C_0^1(\Omega)$，$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega u_j(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \\
&= -\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx \\
&= -\int_\Omega v(x)\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

よって，$D_i u = v \in L^2(\Omega)$ となり，$H^1(\Omega) \subset W^1(\Omega)$.

逆に，$u \in W^1(\Omega)$ とする．また，$\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$ となるような $\rho(x) \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ をとり，

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\rho^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon > 0$$

とおく．さらに，

$$u_\varepsilon(x) = u * \rho_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy$$

とおくと，$u_\varepsilon \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$. ここで，

$${\rho_\varepsilon}'(x-y) = -\frac{\partial}{\partial y_i}\rho_\varepsilon(x-y)$$

に注意すると，部分積分により，

$$\begin{aligned}
{u_\varepsilon}'(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} {\rho_\varepsilon}'(x-y)u(u)\,dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)\frac{\partial u}{\partial y_i}(y)\,dy.
\end{aligned}$$

したがって，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon &\longrightarrow u && \text{in } L^2(\mathbf{R}^n), \\
{u_\varepsilon}' &\longrightarrow u' && \text{in } L^2(\mathbf{R}^n).
\end{aligned}$$

ここで，u_ε を Ω に制限すると，

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon &\longrightarrow u && \text{in } L^2(\Omega), \\
{u_\varepsilon}' &\longrightarrow u' && \text{in } L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

よって，$u \in H^1(\Omega)$ となるので，$W^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

注意 58.1. この定理より，これからは $W^1(\Omega)$ と $H^1(\Omega)$ を同一視して, $H^1(\Omega)$ とする．

次に，$H^1(\Omega)$ のすべての関数が一般的な意味で " 境界値 " をもつことを示す．

命題 58.1 (トレース定理)．トレース写像を

$$\begin{aligned}\gamma_0 : C^1(\Omega) &\longrightarrow C(\partial\Omega)\\ u &\longmapsto u|_{\partial\Omega}\end{aligned}$$

と定義する．このとき，写像 γ_0 は連続的な写像

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$

に，一意的に拡張できる．

証明.

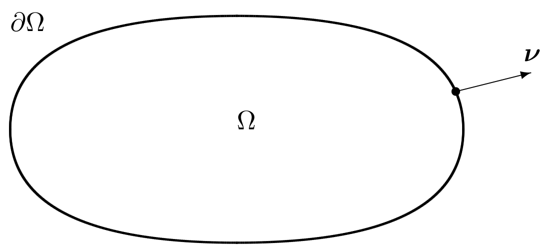
$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|_{\partial\Omega}|^2\, d\sigma(x) \leq C\|u\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

を示せばよい．ただし，C は正の定数とする．

$C^1(\overline{\Omega})$ の関数は $H^1(\Omega)$ で稠密なので，

$$u \in C^1(\overline{\Omega})$$

と仮定する．



このとき，発散定理（定理 61.6）より，

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |u(x)|_{\partial\Omega}|^2\, d\sigma(x) &= \int_{\partial\Omega} |u(x)|_{\partial\Omega}|^2 \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}\, d\sigma(x)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|u(x)|^2 \nu_j(x)\right) dx.\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ は, 境界 $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである．したがって，シュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} |u(x)|_{\partial\Omega}|^2\, d\sigma &= \sum_{j=1}^{n}\left\{\left|\int_\Omega u(x)\cdot\overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)}\cdot\nu_j(x)\,dx\right| + \int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\cdot\overline{u(x)}\cdot\nu_j(x)\right| dx\right.\\ &\qquad \left. + \int_\Omega |u(x)|^2\left|\frac{\partial \nu_j}{\partial x_j}(x)\right| dx\right\}\\ &\leq C\left\{\int_\Omega |u(x)|^2\,dx + \sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right|^2 dx\right\}.\end{aligned}$$

$C_0^1(\Omega)$ を Ω でコンパクトな台をもつ $C^1(\Omega)$ の関数の集合とし，$H_0^1(\Omega)$ を $C_0^1(\Omega)$ の $H^1(\Omega)$ における閉包とする．すなわち，$u \in H_0^1(\Omega)$ であるとは，$u \in H^1(\Omega)$ に対して，

$$\|u - \varphi_j\|_{1,\Omega} \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty)$$

となる関数列 $\varphi_j \in C_0^1(\Omega)$ が存在するときをいう．

次の命題は，境界条件によって $H_0^1(\Omega)$ の特徴づけを与える：

命題 58.2. $u \in H^1(\Omega)$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(i) $u \in H_0^1(\Omega)$.
(ii) $\gamma_0(u) = 0$.

言い換えると，

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = 0 \right\}.$$

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)：$u \in H_0^1(\Omega)$ とすると，$u_j \to u$ となるような $C_0^1(\Omega)$ のコーシー列 $\{u_j\}$ が存在する．よって，トレース作用素 γ_0 は連続であるから，

$$\gamma_0(u) = \lim_{j \to \infty} \gamma_0(u_j) = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：以下，

$$\Omega = \mathbf{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \mid x_n > 0\}$$

としても一般性は失わない．$u \in H^1(\Omega)$ として，

$$\gamma_0(u) = 0$$

とする．$\mathbf{R}_+^{n-1}$ の管状近傍で $\alpha(x) = 1$ となるような滑らかな関数 $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ をとり，

$$u(x) = \alpha(x)u(x) + (1 - \alpha(x))\, u(x)$$

と分解する．

$(1-\alpha)u$ はフリードリックスの軟化作用素によって $C_0^\infty(\mathbf{R}_+^n)$ の関数に近似できるので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|\alpha u - \psi_\varepsilon\|_{1,\Omega} < \varepsilon \tag{58.1}$$

となるような $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ が存在することを示せばよい．

次の補題は，(58.1) の証明における本質的な手段となる：

補題 58.1. $\psi \in H^1(\mathbf{R}_+^n)$ は $\gamma_0(\psi) = 0$ をみたすと仮定する．また，

$$\psi^0(x', x_n) = \begin{cases} \psi(x', x_n) & x_n > 0, \\ 0 & x_n < 0 \end{cases}$$

とする．このとき，十分小さな任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\psi^0(x', x_n - \varepsilon) \in H^1(\mathbf{R}_+^n)$$

で，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき，

$$\psi^0(x', x_n - \varepsilon) \longrightarrow \psi(x', x_n) \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}_+^n).$$

証明 (補題 58.1). ルベーグ積分の絶対連続性より,

$$\int_{\mathbf{R}^n_+} |\widetilde{\psi}(x', x_n - \varepsilon) - \psi(x)|^2 \, dx \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

である．次に，$\gamma_0(\psi) = 0$ だから，ジャンプ公式より，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_n}\psi^0(x', x_n) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\psi(x', x_n)\right)^0 + (\gamma_0(\psi)) \otimes \delta(x_n) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\psi(x', x_n)\right)^0\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n_+} \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\psi^0(x', x_n - \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial x_n}\psi^0(x', x_n)\right|^2 dx &= \int_{\mathbf{R}^n_+} \left|\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x', x_n - \varepsilon) - \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(x', x_n)\right|^2 dx \\ &\longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0).\end{aligned}$$

したがって，

$$\widetilde{\psi}(x', x_n - \varepsilon) \longrightarrow \psi(x', x_n) \quad \text{in } H^1(\mathbf{R}^n_+).$$

命題 58.2 の証明に戻る．補題 58.1 より，フリードリックスの軟化作用素を用いて，

$$\theta_\varepsilon(x', x_n) := \int_{\mathbf{R}^{n-1}_+} \left(\int_\varepsilon^\infty \rho_{\varepsilon/2}(x' - y', x_n - y_n)(\alpha u)^0(y', y_n - \varepsilon)\, dy_n\right) dy'$$

を考える．

もし $0 < x_n < \dfrac{\varepsilon}{2}$，$y_n > \varepsilon$ とすると，$y_n - x_n > \dfrac{\varepsilon}{2}$ だから，

$$\rho_{\varepsilon/2}(x' - y', x_n - y_n) = 0.$$

このことは，$\theta_{\varepsilon/2}(x', x_n)$ の台が $x_n \geq \varepsilon/2$ の範囲にあることがわかり，

$$\theta_\varepsilon(x', x_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n_+).$$

さらに，補題 58.1 より，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$\theta_\varepsilon(x', x_n) \longrightarrow \alpha u \quad \text{in } C_0^\infty(\mathbf{R}^n_+).$$

以上より，命題 58.2 が証明できた．

次の補題により，

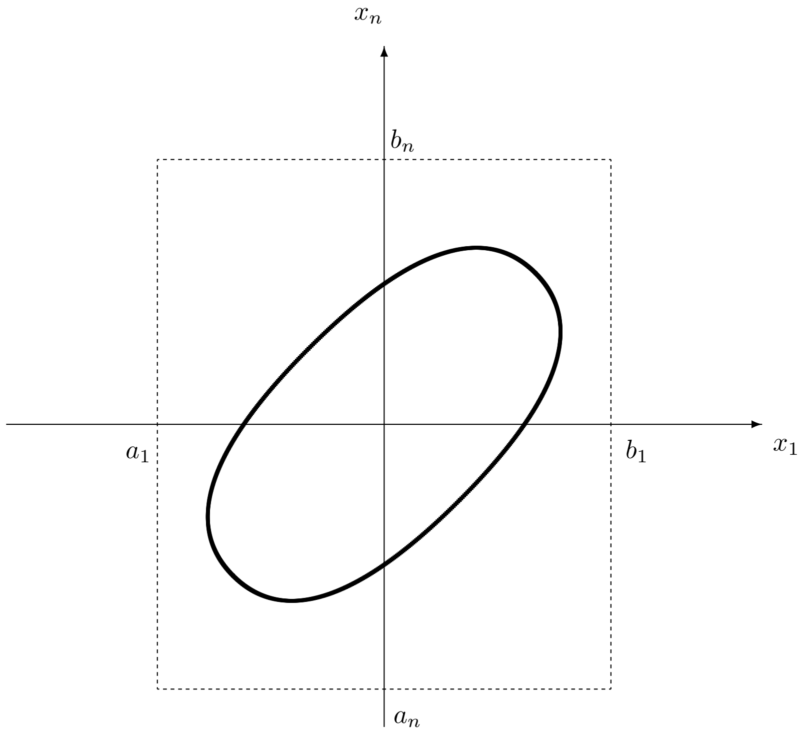
$$D(w, w) \leq \|w\|_{1,\Omega}^2 \leq (C + 1)D(w, w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

となり，セミノルム $D(\cdot, \cdot)^{1/2}$ とソボレフ空間 $H^1(\Omega)$ のノルム $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ が同等となる：

補題 58.2 (ポアンカレ).

$$\int_\Omega |w(x)|^2 \, dx \leq C \cdot D(w, w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

となるような正の定数 C が，Ω の直径（最小の (a_j, b_j)）のみに依存して存在する．



証明. $C_0^1(\Omega)$ の関数は $H_0^1(\Omega)$ で稠密なので，

$$w \in C_0^1(\Omega)$$

と仮定する．このとき，

$$w(x_1, x') = \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}(t, x')\, dt$$

だから，シュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned} |w(x_1, x')|^2 &\leq \int_{a_1}^{x_1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt \cdot (x_1 - a_1) \\ &\leq \int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt \cdot (b_1 - a_1). \end{aligned}$$

したがって，両辺 $x = (x_1, x')$ に対して積分していくと，

$$\begin{aligned} \int_\Omega |w(x)|^2\, dx &\leq \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdot \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt \right) dx' \cdot (b_1 - a_1) \\ &= (b_1 - a_1)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

系 58.1. $H_0^1(\Omega)$ は $C_0^1(\Omega)$ のノルム $D(\cdot, \cdot)^{1/2}$ における閉包である．

59　フーリエ級数による解法（変数分離法）

Ω をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ における有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする．このとき，熱伝導現象を記述する，次の初期値・境界値問題を考える：

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases} \tag{59.1}
$$

ここで，

$$
\Delta = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}
$$

はラプラス作用素，$u_0(x)$ は初期温度分布，$u(x, t)$ は時刻 t における位置 x での温度分布を表している．また，境界条件はディリクレ境界条件 (等温条件) である．

59.1　解の構造

この初期値・境界値問題 (59.1) の非自明解 $u(x, t)$ を，関数

$$
u(x, t) = T(t)X(x).
$$

と変数分離した形の解を求める．ここで， $T(t)$ と $X(x)$ はともに非自明な関数とする．

Step 1: まず，熱伝導方程式

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u
$$

に代入すると，

$$
T'(t)X(x) = T(t)\Delta X(x).
$$

したがって，式

$$
\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = -\lambda
$$

を得る．左辺は変数 t にのみ依存し，右辺は変数 x にのみ依存するから，両辺は t にも x にも依存しない定数である．それを $-\lambda$ とする．

Step 2: 次に，式

$$
\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = -\lambda
$$

より，初期値・境界値問題 (59.1) は

$$
T'(t) + \lambda T(t) = 0,
$$

$$
\begin{cases} \Delta X + \lambda X = 0 & \text{in } \Omega, \\ X = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{59.2}
$$

と同値である．

次の主張は $\lambda > 0$ であることを主張している：

主張 59.1. $X(x)$ が非自明な関数ならば， $\lambda > 0$ である．

証明. 実際，関数 $X(x)$ はディリクレ境界条件

$$X = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{59.3}$$

をみたすので，部分積分 (あるいはグリーンの公式) を用いると，

$$\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega X(x)^2\, dx &= -\int_\Omega \Delta X(x) \cdot X(x)\, dx \\
&= -\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 X}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial {x_2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2 X}{\partial {x_n}^2} \right) \cdot X(x)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial X}{\partial x_i} \right)^2 dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

これより

$$\lambda \geq 0$$

であることが証明できた．

ここで，$\lambda = 0$ とすると，

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial X}{\partial x_i} \right)^2 dx = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

であるから，$X(x)$ は定数となる．ところが，ディリクレ条件 (59.3) より，

$$X = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

であるから，Ω において $X(x) \equiv 0$ となり，$u(t, x)$ が自明解となり不適である．

よって，$X(x)$ が非自明関数であるならば，$\lambda > 0$ であることが証明された．

Step 3: さて，初期境界値問題 (59.1) の非自明解 $u(x, t)$ を変数分離形

$$u(x, t) = A\, e^{-\lambda t} X(x), \quad \lambda > 0,$$

で求めることができる．ただし， A と λ は任意定数である．

Step 4: 偏微分方程式論の基本的な結果として，次の固有関数の完全性定理が知られている．

定理 59.1. ディリクレ境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は，可算個の解

$$\{\lambda_j, u_j\}_{j=1}^\infty$$

をもつ．さらに，可算個の関数系

$$\{u_j\}_{j=1}^\infty$$

は，ヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ の完全正規直交系となる．ただし，

$$\begin{aligned}
&0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \\
&u_1 > 0 \quad \text{in } \Omega.
\end{aligned}$$

したがって，ディリクレ境界値問題

$$\begin{cases} \Delta X_j + \lambda_j X_j = 0 & \text{in } \Omega, \\ X_j = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は可算個の解 $\{\lambda_j, X_j\}_{j=1}^{\infty}$ をもつ．

Step 5: 変数分離した関数

$$u_j(x,t) = A_j \, e^{-\lambda_j t} \, X_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots$$

は，熱伝導方程式とディリクレ境界条件

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u_j = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u_j = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたしている．

さらに，重ね合わせの原理より，無限級数

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \, e^{-\lambda_j t} \, X_j(x), \quad A_j \in \mathbf{C}$$

が初期条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

を除いた (59.1) の解の候補である．ここで，A_j は任意定数である．

Step 6: 最後に，残っている初期条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

をみたすならば，可算個の定数 A_j は

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \, X_j(x)$$

をみたす．

したがって，数学的に問題となるのは，次の固有関数展開の問題である：

問題 59.1. ディリクレ境界値問題 (59.2) の固有関数 $X_j(x)$ の無限級数和として，関数 $u_0(x)$ がフーリエ級数展開できるか？

実際，定理 59.1 より，関数 $u_0(x)$ を次のようにフーリエ級数展開できる：

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \, X_j(x), \quad A_j = \int_{\Omega} u_0(y) \, X_j(y) \, dy.$$

Step 7: 以上をまとめると，初期値・境界値問題 (59.1) の非自明解は次のように表されることが証明できた：

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \, e^{-\lambda_j t} \, X_j(x),$$

$$A_j = \int_{\Omega} u_0(y) \, X_j(y) \, dy.$$

60　フーリエ級数展開の応用例

この節の内容に付いては，高橋健人著「物理数学」[41] の説明が丁寧で分かり易い．

60.1　問題の定式化

左端は $x=0$，右端は $x=\ell$ の位置にあるとし，長さ ℓ の針金を考える．この針金の温度分布を考察する．針金の上の点 x の，時刻 t における温度を $u(t,x)$ とする．$u(x,t)$ は熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{60.1}$$

に従うことが知られている．ここで，定数 c は針金を構成する物質の密度や比熱等と関係のある定数である．偏微分方程式 (60.1) は**熱伝導方程式**と呼ばれる．

物理学的には，時刻 $t=0$ における針金の初期温度分布が与えられ，それ以後の時刻における両端の温度の状態が規定されるならば，針金の温度分布は一意的に確定する．

数学的に言えば，針金の温度分布が次のように定式化される：

(i) 時刻 $t=0$ における針金の初期温度分布は，$[0,\ell]$ で定義された関数 $\varphi(x)$ を与えて，解 $u(x,t)$ は条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le\ell \tag{60.2}$$

をみたすことを要求することである．

(ii) 端点での温度分布は次の典型的な 3 条件で述べられる：

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0, \tag{60.3a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=0, \tag{60.3b}$$

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,\ell)+hu(\ell,t)=0. \tag{60.3c}$$

ここで，h は正の定数である．

条件 (60.2) は初期条件と呼ばれ，条件 (60.3a)，(60.3b)，(60.3c) は境界条件と呼ばれる．条件 (60.3a) は両端の温度を常に 0 に保つ，条件 (60.3b) は両端を断熱的に（熱の出入りがないように）保つ，条件 (60.3c) は左端の温度は 0 に保つが，右端では温度に比例した熱輻射があるようにするものである．

この節では，等温の場合のみを考える．すなわち，次の問題を考える：

問題 60.1. $[0,\ell]$ で定義された関数 $\varphi(x)$ に対して，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & \text{in } (0,\infty)\times[0,\ell],\\ u(x,0)=\varphi(x) & \text{in } [0,\ell],\\ u(0,t)=u(\ell,t)=0 & \text{for } t>0.\end{cases} \tag{60.4}$$

をみたす $(0,\infty)\times[0,\ell]$ の関数 $u(x,t)$ を求めよ．

60.2　熱伝導方程式に対する初期値・境界値問題の一意性定理

この小節では，熱伝導方程式における次の初期値・境界値問題を考える：閉区間 $J = [0, \ell]$ で定義された関数 $\varphi(x)$ に対して，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{for all } 0 < x < \ell \text{ and } t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{for all } t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{for all } 0 < x < \ell. \end{cases} \tag{60.5}$$

をみたす $J \times [0, \infty)$ の関数 $u(x,t)$ を求めよ．

まず，初期境界値問題 (60.5) の一意性定理を証明する：

定理 60.1. 関数 $\varphi(x)$ は閉区間 $J = [0, \ell]$ で連続であるとする．問題 (60.5) の解 $u(x,t)$ はただ 1 つである．

証明. $u_1(x,t)$ と $u_2(x,t)$ を初期値・境界値問題 (60.5) の 2 つの解であるとし，

$$u(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

とおく．このとき，式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{for all } 0 < x < \ell \text{ and } t > 0, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 & \text{for all } t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{for all } 0 < x < \ell \end{cases} \tag{60.6}$$

を得る．今，総熱エネルギー

$$E(t) = \int_0^\ell u(x,t)^2 \, dx$$

を考える．部分積分を用いると，式 (60.6) より

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= 2 \int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \cdot u(x,t) \, dx \\ &= 2 \int_0^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \cdot u(x,t) \, dx \\ &= 2 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot u(x,t) \right]_{x=0}^{x=\ell} - 2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 dx \\ &= -2 \int_0^\ell \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

このことより，総熱エネルギー $E(t)$ は t の非増加関数であることが示せた．しかし，すべての $0 < x < \ell$ に対して $u(x,0) = 0$ であるから，

$$E(0) = \int_0^\ell u(x,0)^2 \, dx = 0$$

である．

まとめると，すべての $t \geq 0$ に対して

$$E(t) = \int_0^\ell u(x,t)^2\,dx \equiv 0$$

であることが証明できた．

ところで，被積分関数 $u(x,t)^2$ は非負の関数だから，すべての $(x,t) \in (0,\ell) \times [0,\infty)$ に対して

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t) \equiv 0.$$

定理 60.1 の証明終わり．

定理 60.1 より，初期条件とディリクレ境界条件のついた熱方程式 (60.5) の解の候補をみつけるだけでよい．その解が，真の解になる．

そのために，フーリエによる変数分離の方法を用いる．

60.3　変数分離法

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{60.7}$$

と変数を分離して，初期値・境界値問題 (60.1)，(60.2)，(60.3a) の非自明解を求めよう．

ここで，$T(t)$ と $X(x)$ はともに非自明な関数とする．

方程式 (60.1) へ式 (60.7) を代入すると

$$X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

を得る．すなわち，公式

$$\frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

を得る．左辺は変数 t にのみ依存し，右辺は変数 x にのみ依存するから，両辺は t にも x にも依存しない定数である．それを $-\lambda$ とする．したがって，

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{60.8}$$

と

$$T'(t) + c^2\lambda T(t) = 0 \tag{60.9}$$

を得る．さらに，ディリクレ境界条件 (60.3a) をみたすので，関数 $X(x)$ は境界条件

$$X(0) = X(\ell) = 0 \tag{60.10}$$

をみたさなければならない．

すなわち，関数 $X(x)$ は 2 回線型常微分方程式に対するディリクレ境界値問題 (60.8)，(60.10) の非自明解である．

(I) $\lambda < 0$ の場合：ディリクレ境界値問題 (60.8)，(60.10) は自明解 $X(x) \equiv 0$ のみをもつ．実際，(60.8) の一般解は

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

となる．境界条件 (60.10) より

$$c_1 = c_2 = 0$$

であるから，

$$X(x) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega.$$

これは $u(x,t) = T(t)X(x) \equiv 0$ であることを意味しているので，不適である．

(II) $\lambda = 0$ の場合：ディリクレ境界値問題 (60.8)，(60.10) は自明解 $X(x) \equiv 0$ のみをもつ．実際，方程式 (60.8) の一般解は

$$X(x) = c_1 + c_2 x.$$

境界条件 (60.10) より，$X(x) \equiv 0$．これは $u(x,t) = T(t)X(x) \equiv 0$ であることを意味している．

(III) $\lambda > 0$ の場合：(60.8) の一般解は

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

となる．境界条件 (60.10) より，

$$\begin{cases} 0 = X(0) = D_1, \\ 0 = X(\ell) = D_2 \sin\sqrt{\lambda}\ell. \end{cases}$$

ここで，$X(x) \not\equiv 0$ ならば，$D_2 \neq 0$．よって，条件

$$\sin\sqrt{\lambda}\ell = 0.$$

より，

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

したがって，ディリクレ境界値問題 (60.8)，(60.10) が非自明解をもつためには，定数 λ は

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{60.11}$$

でなければならない．このとき，対応する解は

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{60.12}$$

ここで，D_n は任意の定数である．

以上より，ディリクレ境界値問題 (60.8)，(60.10) は，パラメータ λ が (60.11)で与えられる，限られた離散値をとる場合にのみ，非自明解 (60.12) をもつ．

(60.11) の値 λ_n を**固有値**，(60.12) の関数 $X_n(x)$ を固有値 λ_n に対応する**固有関数**と呼ぶ．この $\lambda = \lambda_n$ に対応する (60.9) の解 $T_n(t)$ は，

$$T_n(t) = c_n\, e^{-c^2\lambda_n t}. \tag{60.13}$$

ここで，c_n は任意定数となる．

したがって，(60.12) および (60.13) を，(60.7) に代入すると，

$$u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t) = A_n\, e^{-c^2\lambda_n t} \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

が得られる．ここで，A_n は定数である．

こうして得られた関数 $u_n(x,t)$ は，いずれも熱伝導方程式 (60.1) の解で，ディリクレ境界条件 (60.3a) をみたしている．しかし，まだ初期条件 (60.2) はみたしていない．

そこで，初期条件 (60.2) をみたす解を求めるために，重ね合わせの原理を用いる．すなわち，$u_n(x,t)$ の無限級数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2 \lambda_n t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \tag{60.14}$$

を考える．この関数 $u(x,t)$ がディリクレ境界条件をみたすことは明らかである．さらに，初期条件 (60.2) をみたすためには，条件

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad 0 \leq x \leq \ell \tag{60.15}$$

をみたすように係数 A_n を決めることができ，かつそのとき，(60.14) の級数が $0 < x < 1$，$t > 0$ で t に関して 1 回，x に関して 2 回項別微分可能であることを確認することができれば，(60.14) の関数 $u(x,t)$ は熱伝導方程式の初期値・境界値問題の解になる．

無限級数の項別微分可能性の問題をさし当たって度外視すれば，解決しなければならない数学的な問題は，次の問題である：

問題 60.2. 閉区間 $[0,1]$ で与えれられた任意の関数 $\varphi(x)$ を (60.15) の形の三角級数に展開することができるか？

フーリエ級数の理論より，適当な条件のもとで関数 $\varphi(x)$ は (60.14) の形に展開され，係数 A_n は，式

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{60.16}$$

で定められる．

これらの事実を認めれば，(60.14) および (60.16) で定義される関数 $u(x,t)$ が初期条件 (60.2)，ディリクレ境界条件 (60.3a) をみたす，熱伝導方程式 (60.1) の解になる．

針金を構成する金属の密度，比熱等が定数でなく，点 x の関数である場合には，より一般的なスツルム–リウヴィル型偏微分方程式

$$r(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + q(x) u \tag{60.17}$$

によって記述される．境界条件は，一般に，

$$\begin{cases} \alpha u(a,t) + \alpha' u'(a,t) = 0 & (t > 0), \\ \beta u(b,t) + \beta' u'(b,t) = 0 & (t > 0) \end{cases} \tag{60.18}$$

の形で指定される．ただし，

$$\alpha^2 + \alpha'^2 \neq 0\,,\, \beta^2 + \beta'^2 \neq 0$$

である．境界条件 (60.3a) は (60.18) の特別な場合である．

偏微分方程式 (60.17) の解 $u(x,t)$ で初期条件 (60.2) と境界条件 (60.18) をみたすものを，上述の変数分離法で求めようとすれば，次の固有値問題が提起される：

問題 60.3. 常微分方程式に対する境界値問題

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]\, y = 0, \tag{60.19}$$

$$\alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0, \quad \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0. \tag{60.20}$$

の非自明解（**固有関数**）$y(x)$ と対応するパラメータ λ の値（**固有値**）を求めよ．さらに，固有値 λ_n は可算無限個存在するか，対応する固有関数 $y_n(x)$ はどのような性質をもっているか．

固有関数と固有値の例として，(60.19) において，$p(x) \equiv 1$，$q(x) \equiv 0$，$r(x) \equiv 1$ とした簡単な微分方程式

$$y'' + \lambda y = 0$$

に対する固有値問題を考える．

境界条件を，ディリクレ境界条件（等温条件）

$$y(a) = y(b) = 0$$

とすれば，固有値と固有関数：

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2; \quad y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}(x-a),\ n = 1, 2, \ldots$$

を得る．

ノイマン境界条件（断熱条件）

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

をとれば，

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2; \quad y_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}(x-a),\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

となり，固有値は等しいが固有関数が異なる．

まとめ 60.2. 簡単のために，$a = 0$，$b > 0$ として，表にまとめると次の通り：

境界条件	固有値	固有関数	備考
ディリクレ条件	$\dfrac{m^2\pi^2}{b^2}$	$\sqrt{\dfrac{2}{b}}\sin\dfrac{m\pi}{b}x$	奇関数拡張
ノイマン条件	$\dfrac{m^2\pi^2}{b^2}$	$\sqrt{\dfrac{2}{b}}\cos\dfrac{m\pi}{b}x$	偶関数拡張

さらに，境界条件を混合型条件

$$y(0) = y'(b) = 0$$

の場合を考えると，

$$\lambda_n = \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{b}\right]^2, \qquad y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

となり，固有関数 $y_n(x)$ は等しいが，対応する固有値 λ_n が異なっている．

尚，備考欄で，境界条件に応じて，奇関数拡張及び偶関数拡張を考えるかの理由については，シュワルツの著書 [22] に詳しい説明がある．

60.4　長方形の場合

2 次元の長方形の場合に，ラプラス作用素に対するディリクレ境界値問題の固有値および固有関数を求める．

例 60.1. 領域 $\Omega=(0,a)\times(0,b)$ を平面 $\mathbf{R}^2$ の長方形として，熱伝導方程式に対する次の初期値・境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\varDelta u=0 & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ u(x,y,0)=u_0(x,y) & \text{in } \Omega, \\ u(x,y,t)=0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty). \end{cases} \tag{60.21}$$

ここで，

$$\varDelta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

はラプラス作用素，$u_0(x,y)$ は初期温度分布，$u(x,y,t)$ は時刻 t における温度分布を表している．また，境界条件はディリクレ境界条件（等温条件）である．

この初期値・境界値問題 (60.21) を，

$$u(x,y,t)=T(t)X(x,y)=T(t)U(x)V(y) \tag{60.22}$$

と変数分離した形の解を求める．ただし，$T(t)$，$U(x)$，$V(y)$ は非自明な関数とする．

Step 1: まず，熱伝導方程式 (60.22)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varDelta u$$

より，

$$T'(t)X(x,y)=T(t)\varDelta X(x,y)$$

である．よって，

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{\varDelta X(x,y)}{X(x,y)}=\frac{U''(x)V(y)+U(x)V''(y)}{U(x)V(y)}=-\lambda.$$

左辺は変数 t にのみ依存し，右辺は変数 x，y にのみ依存するから，両辺は t にも x，y にも依存しない定数である．それを $-\lambda$ とする．このとき，

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{U''(x)}{U(x)}+\frac{V''(y)}{V(y)}=-\lambda.$$

さらに，

$$\frac{U''(x)}{U(x)}=-\lambda-\frac{V''(y)}{V(y)}=-\alpha.$$

左辺は変数 x にのみ依存し，右辺は変数 y にのみ依存するから，両辺は x にも y にも依存しない定数である．それを $-\alpha$ とする．すなわち，

$$\frac{U''(x)}{U(x)}=-\lambda-\frac{V''(y)}{V(y)}=-\alpha$$

は

$$\frac{U''(x)}{U(x)}=-\alpha,$$
$$\frac{V''(y)}{V(y)}=-\beta$$

と同値である．ただし，α，β は

$$\alpha + \beta = \lambda$$

をみたす定数である．

まとめると，初期値・境界値問題 (59.1) は，次の 3 つの問題に帰着される：

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,$$

$$\begin{cases} U''(x) + \alpha U(x) = 0 & \text{in } (0, a), \\ U(0) = U(a) = 0 \end{cases} \tag{60.23}$$

$$\begin{cases} V''(y) + \beta V(y) = 0 & \text{in } (0, b), \\ V(0) = V(b) = 0 \end{cases} \tag{60.24}$$

Step 2: ディリクレ境界値問題 (60.23)，(60.24) を解くと，固有値と固有関数は，それぞれ

$$\alpha_m = \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$U_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad m = 1, 2, \ldots$$

および

$$\beta_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$V_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad n = 1, 2, \ldots$$

である．ここで，

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad m = 1, 2, \ldots, \ n = 1, 2, \ldots$$

である．

まとめ 60.3. 表にまとめると，次の通り：

境界条件	固有値	固有関数	備考
ディリクレ条件	$\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$	$\frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$	奇関数拡張

したがって，(60.21) の一意解 $u(x, y, t)$ は次のように表すことができる：

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{m,n}\, e^{-\lambda_{m,n} t}\, U_m(x) V_n(y),$$
$$C_{m,n} = \int \int_{\Omega} u_0(x, y)\, U_m(x) V_n(y)\, dx\, dy.$$

尚，備考欄で，ディリクレ条件の場合に奇関数拡張を考えるかの理由については，シュワルツの著書 [22] に詳しい説明がある．

60.5　2 次元円板の場合

2 次元の円板の場合に，ラプラス作用素に対するディリクレ境界値問題の固有値および固有関数を求める．

例 60.2. $\Omega = \{x^2 + y^2 \le a^2\}$ を $\mathbf{R}^2$ の円板とし，ラプラス方程式のディリクレ境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x, y) = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{60.25}$$

を考える．

ラプラス作用素 Δ の極座標表示は

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

となる．したがって，ラプラス方程式

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\lambda u \tag{60.26}$$

と同値である．

さて，方程式 (60.26) の解 $u(r, \theta) = u(x, y)$ を

$$u(r, \theta) = U(r)V(\theta) \tag{60.27}$$

と変数分離した形の解で求める．ここで，$U(r)$，$V(\theta)$ はともに非自明な関数である．

(60.27) を (60.26) へ代入すると，

$$\frac{r^2 U''(r) + rU'(r) + r^2\lambda U(r)}{U(r)} = -\frac{V''(\theta)}{V(\theta)} = \mu,$$

左辺は変数 r にのみ依存し，右辺は変数 θ にのみ依存するから，両辺は r にも θ にも依存しない定数である．それを μ とする．これより，2 つの境界値問題

$$\begin{cases} V''(\theta) = -\mu V(\theta), \\ V(0) = V(2\pi), \end{cases} \tag{60.28}$$

および

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)U(r) = 0, \tag{60.29}$$

$$U(a) = 0 \tag{60.30}$$

が得られる．境界値問題 (60.28) の固有値 μ_n と固有関数 $V_n(\theta)$ は，それぞれ

$$\mu_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

および

$$\begin{cases} V_n(\theta) = \cos n\theta, & n = 0, 1, 2, \dots, \\ V_n(\theta) = \sin n\theta, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

となる．

これらの固有値 $\mu_n = n^2$ に対して，境界値問題 (60.29)，(60.30)を解く．(60.29)において，

$$s = \sqrt{\lambda} r,$$
$$J(s) = J(\sqrt{\lambda} r) = U(r)$$

とすると，ベッセルの微分方程式

$$J''(s) + \frac{1}{s} J'(s) + \left(1 - \frac{n^2}{s^2}\right) J(s) = 0. \tag{60.31}$$

を得る．微分方程式 (60.31)の解 $J_n(s)$ のうち，原点で滑らかなものは，

$$J_n(s) = \left(\frac{s}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k} \tag{60.32}$$

という無限級数で表される．関数 $J_n(s)$ は n 次のベッセル関数と呼ばれる．さらに，$J_n(s)$ は正の実軸上に無限大に発散する零点の無限列をもつので，これを各 n に対して，

$$\nu_{n,m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

とおく．このとき，境界条件 (60.30) は条件

$$J_n(\sqrt{\lambda} a) = 0$$

と同値である．したがって，ディリクレ境界値問題 (60.25)の固有値 λ は

$$\lambda_{n,m} = \frac{\nu_{n,m}^2}{a^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots$$

である．零点　$\lambda_{n,m}$ に対応する固有関数は

$$\begin{cases} J_n(\nu_{n,m} r/a) \cos n\theta, & n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots \\ J_n(\nu_{n,m} r/a) \sin n\theta, & n = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{60.33}$$

である．

まとめ 60.4. 表にまとめると，次の通り：

境界条件	固有値	固有関数	注
ディリクレ条件	$\dfrac{\nu_{n,m}^2}{a^2}$	$J_n(\nu_{n,m} r/a) \cos n\theta$, $J_n(\nu_{n,m} r/a) \sin n\theta$	ベッセル関数の零点

したがって，(60.21)の一意解 $u(r, \theta, t) = u(x, y, t)$ は次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \, e^{-\lambda_{n,m} t} \, J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \cos n\theta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{n,m} \, e^{-\lambda_{n,m} t} \, J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \sin n\theta, \\ C_{n,m} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} u_0(r, \theta) \, J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \cos n\theta \, r \, dr \, d\theta, \\ D_{n,m} &= \int_0^a \int_0^{2\pi} u_0(r, \theta) \, J_n(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) \sin n\theta \, r \, dr \, d\theta. \end{aligned}$$

61　ラプラス作用素に対する楕円型境界値問題

61.1　変分法

リーマンが 1851 年に，さらには，ディリクレが 1850 年代前半に，古典的なポテンシャル論や複素変数の解析関数論の研究において，いわゆるディリクレの原理が成立することを（暗黙に）仮定して，議論を進めた．

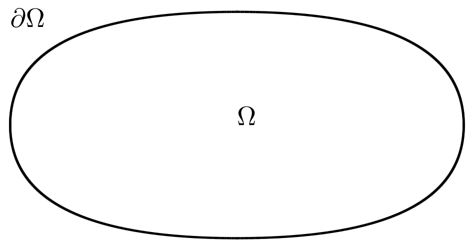
ところが，1870 年に，ワイエルストラスが，連続関数の枠内でディリクレの原理が成立しない反例を与えたことで，重大な危機に直面した．

このディリクレの原理の危機を，1899 年に，ヒルベルトが救った．

この節では，ディリクレの原理の現代版である「変分法的アプローチ」により，ディリクレ問題の解法について丁寧に解説する．ディリクレの原理の正当性が保証されるためのキーワードは，ソボレフ空間の「完備性」である．

61.1.1　ディリクレの原理

Ω をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の有界領域（連結開集合）で，境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする．



このとき，次のディリクレ問題を考える：

$$(D_1) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ディリクレの原理は，ディリクレ問題 (D_1) の解 u は，境界上 $\partial\Omega$ で g に等しく，エネルギー積分

$$D(v,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx$$

を最小にする超関数 v として得られることを主張している．すなわち，

$$D(u,u) = \inf_{v|_{\partial\Omega}=g} D(v,v).$$

ヒルベルトが救ったのは，正に，ソボレフ空間の持つ「完備性」である．

61.1.2　ディリクレ境界値問題の定式化

$\gamma_0(f) = g$ となる $f \in H^1(\Omega)$ が存在すると仮定する．このとき，ディリクレ問題 (D_1) は次のように定式化される：

問題 1. $f \in H^1(\Omega)$ に対して，

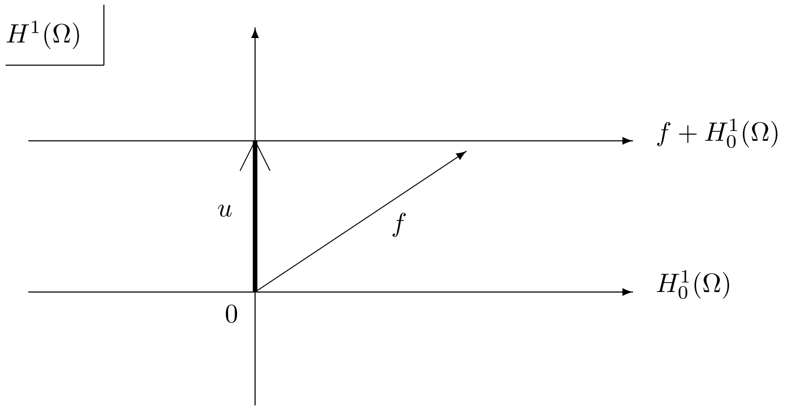
$$(D_2) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u \in f + H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

となるような超関数 $u \in H^1(\Omega)$ を求めよ．

主なアイデアは，

$$D(u,u) = \inf_{v \in f + H_0^1(\Omega)} D(v,v)$$

となるような解 u を実際に見つけることである．幾何学的なイメージとしては、下図のように「最短距離となるベクトル u は、平行移動された空間 $f + H_0^1(\Omega)$ と直交する」ことである。



61.1.3　ディリクレ問題 (D_2) の解法

命題 61.1. $u \in H^1(\Omega)$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(i) $\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$
(ii) $D(u,\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$

証明. 部分積分を使うと，

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\overline{\Delta\varphi(x)}\,dx = -D(u,\varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

したがって，極限移行すると，

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \Longleftrightarrow D(u,\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

次の命題は，先ほどの証明のアイデアが正しいことを認めている：

命題 61.2. $u \in f + H_0^1(\Omega)$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(i) $\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$
(ii) $D(u,u) \le D(v,v), \quad \forall v \in f + H_0^1(\Omega).$

証明. (i) $\Longrightarrow$ (ii): 仮定 $u \in f + H_0^1(\Omega)$ より，

$$v = u + \varphi, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

だから，命題 61.1 より，

$$\begin{aligned} D(v,v) &= D(u+\varphi, u+\varphi) \\ &= D(u,u) + D(u,\varphi) + D(\varphi,u) + D(\varphi,\varphi) \\ &= D(u,u) + D(\varphi,\varphi) \\ &\ge D(u,u). \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): 特に，

$$v = u + t\varphi, \quad \forall t \in \mathbf{C}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

とすると，

$$\begin{aligned} D(u,u) &\le D(v,v) \\ &= D(u+t\varphi, u+t\varphi) \\ &= D(u,u) + (tD(\varphi,u) + \bar{t}D(u,\varphi)) + |t|^2 D(\varphi,\varphi). \end{aligned}$$

そこで，

$$t = ae^{-i\theta}, \quad \theta = \arg D(\varphi,u), \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

とおくと，

$$D(\varphi,\varphi)a^2 + 2|D(\varphi,u)|a \ge 0, \quad \forall a \in \mathbf{R}$$

となることがわかる．これは，

$$D(\varphi,u) = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

を示している．よって，命題 61.1 より，

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

定理 61.1. ディリクレ問題 (D_2) は，与えられた任意の $f \in H^1(\Omega)$ に対して，解 $u \in H^1(\Omega)$ をもつ．

証明.

$$d = \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} D(f+\varphi, f+\varphi)$$

とする．このとき，

$$D(f+\varphi_j, f+\varphi_j) \downarrow d \quad (f \to \infty)$$

となるような $H_0^1(\Omega)$ の列 $\{\varphi_j\}$ をみつけることができる．

ところで，次の式に注意する．

$$\begin{aligned} & D(a+b,a+b) + D(a-b,a-b) \\ = \; & D(a,a) + D(a,b) + D(b,a) + D(b,b) \\ & + D(a,a) - D(a,b) - D(b,a) + D(b,b) \\ = \; & 2(D(a,a) + D(b,b)), \quad a,b \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

よって，この式を

$$a = f + \varphi_j, \quad b = f + \varphi_k$$

として適用すると，$(\varphi_j + \varphi_k)/2 \in H_0^1(\Omega)$ だから，

$$\begin{aligned} & 2(D(f+\varphi_j, f+\varphi_j) + D(f+\varphi_k, f+\varphi_k)) \\ = \quad & D(2f+\varphi_j+\varphi_k, 2f+\varphi_j+\varphi_k) + (\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k) \\ \geq \quad & 4d + D(\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k). \end{aligned}$$

したがって，$j,\, k \to \infty$ とすると，

$$D(\varphi_j - \varphi_k, \varphi_j - \varphi_k) \longrightarrow 0.$$

言い換えると，$\{\varphi_j\}$ はセミノルム $D(\cdot,\cdot)^{1/2}$ に関してコーシー列である．ポアンカレの補題（補題 58.2）より，セミノルム $D(w,w)^{1/2}$ と $H^1(\Omega)$ のノルム $\|w\|_{1,\Omega}$ が同等であるから，$\{\varphi_j\}$ は $H_0^1(\Omega)$ でコーシー列であることがわかる．したがって，

$$\varphi_j \longrightarrow \psi \quad \text{in } H_0^1(\Omega)$$

となるような $\psi \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．今，

$$u = f + \psi \in f + H_0^1(\Omega)$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned} D(u,u) &= \lim_{j\to\infty} D(f+\varphi_j, f+\varphi_j) \\ &= d \\ &= \inf_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} D(f+\varphi, f+\varphi). \end{aligned}$$

これは，

$$D(u,u) \leq D(v,v), \quad \forall v \in f + H_0^1(\Omega)$$

を示している．よって，命題 61.2 より，この u がディリクレ問題 (D_2) の求める解である．

61.2 変分法の直接法

ここでは，前節とは別の方法で超関数解の存在と一意性を示していく．前節の方法はラプラス作用素の場合には有効であるが，一般の楕円型作用素の場合には対応できない．しかし，この変分法の直接法は一般の場合にも対応できる．アイデアの違いは，以下のように述べられる：

変分法の直接法	ディリクレの原理
一般のエネルギー汎関数に対して オイラー・ラグランジェ方程式を導く	エネルギー積分の 最小値の存在に帰着
ラックス・ミルグラムの定理を用いて オイラー・ラグランジェ方程式の解を求める	超関数の理論を用いて 最小値の存在を示す

61.2.1　ディリクレ問題の定式化

Ω をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の有界領域で，境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとする．このとき，次のディリクレ問題を考える：

$$(D_1)\qquad \begin{cases} \varDelta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで，

$$F = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

となる $\overline{\Omega}$ 上で定義された関数 F が存在すると仮定する．$u = w - F$ とすると，

$$\begin{cases} \varDelta u = -\varDelta F & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

だから，

$$\begin{cases} -\varDelta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，

$$f = \varDelta F$$

とする．

しかし，以下のことに注意する．

$$\begin{aligned} & -\varDelta u = f \quad \text{in } \Omega \\ \iff\ & (-\varDelta u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \\ \iff\ & \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)}\, dx = \int_\Omega f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \\ \iff\ & \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

よって，ディリクレ問題 (D_1) は次のように定式化できる．

問題 2. 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$D(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

となる $u \in H_0^1(\Omega)$ を求めよ．ここで，

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx, \\ (f, v) &= \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, dx \end{aligned}$$

である．

61.2.2　一意可解性定理（定理 61.2）

主な結果は次の通りである：

定理 61.2. 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$D(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

となるような $u \in H_0^1(\Omega)$ が唯一つ存在する．

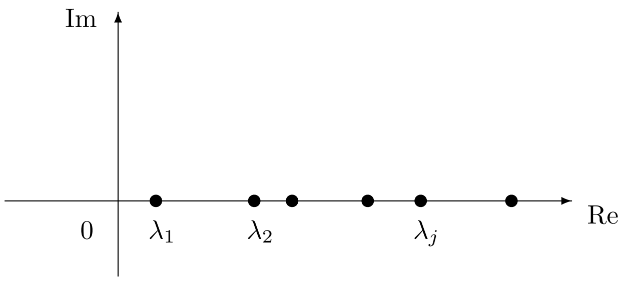
この定理の応用として，次の系がある：

系 61.1. ディリクレ問題

$$\begin{cases} \varDelta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は可算個の解 $\{\lambda_j, u_j\}_{j=1}^{\infty}$ を持つ．さらに，関数列 $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $L^2(\Omega)$ の完全系となる．ただし，

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \quad u_1 > 0.$$



61.2.3　一意可解性定理 61.2 の証明

証明のアイデアは次のようにして解 u をみつけることである．

$$\begin{aligned} & -\varDelta u = f \quad \text{in } \Omega \\ \iff\; & (-\varDelta + I)u = f + u \quad \text{in } \Omega \\ \iff\; & u = (-\varDelta + I)^{-1}(f + u) \quad \text{in } \Omega \\ \iff\; & (I - (-\varDelta + I)^{-1})u = (-\varDelta + I)^{-1} f \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

言い換えると，$L^2(\Omega)$ の作用素として $(-\varDelta + I)^{-1}$ を構成して，その関数解析的な性質を調べていく．
$(-\varDelta + I)^{-1}$ の存在性は，次の命題に基づいている．

命題 61.3.

$$D_1(u,v) = D(u,v) + (u,v), \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$$

とすると，

$$D_1(v, Af) = (v, f), \quad \forall f \in L^2(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

となるような有界で可逆な作用素

$$A : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

が存在する．

注意 61.1.

$$\begin{aligned} D_1(u,v) &= D(u,v) + (u,v) \\ &= (f,v) + (u,v) \\ &= ((-\Delta + I)u, v) \\ &= (u, (-\Delta + I)v) \end{aligned}$$

だから，

$$(-\Delta + I)Af = f, \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

となり，形式的に

$$A = (-\Delta + I)^{-1}$$

である．

命題 61.3 の証明. $f \in L^2(\Omega)$ ならば，

$$\Phi f(v) = (v, f), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

とする．そのとき，シュワルツの不等式から，

$$\begin{aligned} |\Phi f(v)| = |(v,f)| &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{1,\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

これより，

$$\Phi f \in (H_0^1(\Omega))^*$$

であり，$f \to 0$ とすると $\Phi f \to 0$ だから，

$$\Phi : L^2(\Omega) \longrightarrow (H_0^1(\Omega))^*$$

が有界（連続）であることを示している．

さらに，Φ は単射である．実際，

$$\Phi f = 0, \quad f \in L^2(\Omega)$$

とすると，

$$(v, f) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

だから，

$$\int_\Omega v(x)\overline{f(x)}\,dx = 0, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega).$$

よって，デュボア・レモンの補題（補題 57.1）を適用すると，

$$f = 0 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

これで，Φ の単射性が示せた．

次に，以下のことに注意する．

$$
\begin{aligned}
&D_1(u,u) = D(u,u) + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{1,\Omega}, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega),\\
&|D_1(u,v)| \le C\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall u,v \in H^1_0(\Omega).
\end{aligned}
$$

そうして，

$$X = H^1_0(\Omega), \quad B(\cdot,\cdot) = D_1(\cdot,\cdot)$$

としてラックス・ミルグラムの定理（定理 32.3）を適用すると，

$$\phi(v) = D_1(v, T\phi), \quad \forall \phi \in (H^1_0(\Omega))^*, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

となるような可逆な作用素

$$T : (H^1_0(\Omega))^* \longrightarrow H^1_0(\Omega)$$

が存在する．ここで，$A = T \circ \Phi$ とする．

以上まとめると，

$$A : L^2(\Omega) \longrightarrow H^1_0(\Omega)$$

は有界で可逆で，

$$D_1(v, Af) = \Phi f(v) = (v,f), \quad \forall f \in L^2(\Omega), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

これで，命題 61.3 が証明できた． □

ここから定理 61.2 の証明に入る．

証明 (定理 61.2)．**Step 1**] 線形作用素

$$G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

を

$$G : L^2(\Omega) \xrightarrow{A} H^1_0(\Omega) \xrightarrow{\iota} L^2(\Omega)$$

として導入する．ここで，ι: $H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は埋めこみ写像である．

注意 61.2.

$$A : L^2(\Omega) \longrightarrow H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

レリッヒの定理（定理 37.1）より，埋め込み写像 ι が完全連続であるから，合成された作用素 $G = \iota \circ A$ が $L^2(\Omega)$ で完全連続である．

次のことに注意する．

$$
\begin{aligned}
& u \in H^1(\Omega), \quad D(v,u) = (v,f), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)\\
\iff\ & u \in H^1_0(\Omega), \quad D_1(v,u) = (v, f+u), \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)\\
\iff\ & u = G(f+u)\\
\iff\ & (I-G)u = Gf.
\end{aligned}
$$

したがって，$L^2(\Omega)$ において作用素 $I-G$ について考える．

Step 2: まず, 次のことを得る．

主張 61.1. 作用素 $I-G$ は単射である．

証明. $(I-G)u = Gf$ だから，

$$\begin{aligned} u \in L^2(\Omega), (I-G)u = 0 \quad &\Longrightarrow \quad Gf = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad f = 0 \\ &\Longrightarrow \quad D(v,u) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ &\Longrightarrow \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

しかし，ワイルの補題（補題 61.1）より，

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

さらに，

$$u = Gu \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$$

だから，

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

したがって，グリーンの公式を適用すると，

$$0 = (-\Delta u, u) = D(u,u) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx.$$

これは，

$$u(x) \equiv \text{constant} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を意味している．

Step 3: $I - G$ の全射性は，フレドホルムの交代定理（定理 40.2）を

$$X = L^2(\Omega), \quad T = G$$

として適用すると，

$$I - G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は全単射である．

これで定理 61.2 が証明できた．

次に，系 61.1 の証明をする．

証明 (系 61.1)**.**

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は次と同値なことに注意する．

$$\begin{aligned} &(I-G)u = G(\lambda u) \quad (f = \lambda u) \\ \Longleftrightarrow \quad & u = (\lambda+1)Gu \\ \Longleftrightarrow \quad & Gu = \frac{1}{\lambda+1} u. \end{aligned}$$

したがって，作用素

$$G : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

は完全連続だから ヒルベルト・シュミットの理論を適用すればよい．

これで系 61.1 が証明できた．

61.2.4　ノイマン問題の定式化

Ω をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の有界領域で，境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとする．このとき，次のノイマン問題を考える：

$$\text{(N)}\qquad \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，$\boldsymbol{\nu}$ を境界 $\partial\Omega$ に対する外向き法線ベクトルとする．ここで，

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

をみたす $\overline{\Omega}$ 上で定義された関数 $F(x)$ が存在すると仮定する．$u = w - F$ とおくと，

$$\begin{cases} \Delta u = -\Delta F & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

だから，

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし，

$$f = \Delta F$$

とする．

しかし，以下のことに注意する．

$$\begin{aligned} & -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \\ \iff\ & (-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \\ \iff\ & \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)}\, dx = \int_\Omega f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx, \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \\ \iff\ & \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned}$$

よって，問題 (N) は次のように定式化できる：

問題 3. 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$D(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

となる超関数 $u \in H^1(\Omega)$ を求めよ．ここで，

$$\begin{aligned} D(u, v) &= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\, dx, \\ (f, v) &= \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, dx \end{aligned}$$

である．

61.2.5　一意可解性定理（定理 61.3）

主な結果は次の通りである：

定理 61.3. 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，

$$D(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

となるような $u \in H^1(\Omega)$ が唯一つ存在する．

発見的考察であるが，この定理 61.3 を認めると，ノイマン境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

が導かれる．

まず，$v \in C_0^\infty(\Omega)$ を任意にとる．このとき，グリーンの公式 (61.6)より，

$$\begin{aligned}
(f,v) &= D(u,v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\,dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\overline{v(x)}\,d\sigma(x) - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}(x)\overline{v(x)}\,dx \\
&= (-\Delta u, v).
\end{aligned}$$

よって，

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega.$$

次に，$v \in H^1(\Omega)$ を任意にとる．ここで，$C^1(\overline{\Omega})$ の関数は $H^1(\Omega)$ で稠密なので，$v \in C^1(\overline{\Omega})$ と仮定してもよい．このとき，

$$\begin{aligned}
(f,v) &= D(u,v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}\,dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\overline{v(x)}\,d\sigma(x) - (\Delta u, v) \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\overline{v(x)}\,d\sigma(x) + (f, v).
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\overline{v(x)}\,d\sigma(x) = 0, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

となり，

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

これで，Neumann 境界条件が導かれた．

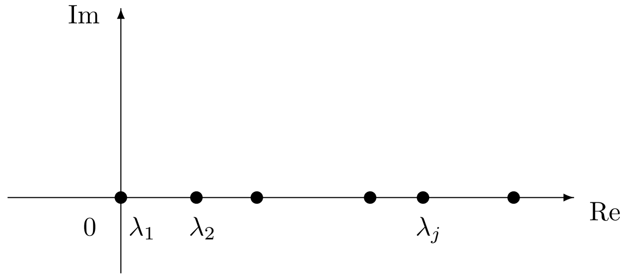
定理 61.2 と同様に，この定理 61.3 の応用として，次の系がある：

系 61.2. ノイマン問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は可算個の解 $\{\lambda_j, u_j\}_{j=1}^\infty$ を持つ．さらに，関数列 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ は $L^2(\Omega)$ の完全系となる．ただし，

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots, \quad u_1 = 1.$$



61.2.6 定理 61.3 の証明

定理 61.3 の証明. 証明には，考える基礎空間を定理 61.2 でのソボレフ空間 $H_0^1(\Omega)$ を　より広いソボレフ空間 $H^1(\Omega)$ に置き換えれば，定理 61.2 の証明とほぼ同様に議論が進む．ただし，レリッヒの定理（定理 37.1）の適用の部分に関して若干補足する．

まず，次の定理をあげる：

定理 61.4. $f \in H^1(\Omega)$ のある連続な線形拡張作用素 $\Psi : F(x) = \Psi f(x) \in H^1(\mathbf{R}^n)$ が存在する．すなわち，

$$\|F\|_{1,\mathbf{R}^n} \le C\|f\|_{1,\Omega} \tag{61.1}$$

となる定数 $C > 0$ が存在する．特に, Ω が有界領域の場合は，$F(x)$ は $\overline{\Omega}$ を内部に含む任意の有界な開集合 Ω_1 にその台をもつと仮定できる．すなわち，$F \in H_0^1(\Omega_1)$.

この定理とレリッヒの定理（定理 37.1）を組み合わせると次の定理が導かれる．

定理 61.5. Ω を有界領域とする．任意の有界列 $f_j \in H^1(\Omega)$ に対して，適当な部分列 $\{f_{j_p}(x)\}$ が存在して，$L^2(\Omega)$ の収束列になっている．すなわち，埋め込み写像

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

が完全連続である．

証明. Ω は有界だから，前定理の Ω_1 をとり Ψ を定義する．すなわち，

$$F_j(x) = \Psi f_j(x) \in H_0^1(\Omega_1).$$

(61.1)より，$\{F_j(x)\}$ は $H_0^1(\Omega)$ の有界列である．よって，レリッヒの定理より，適当な部分列 $\{F_{j_p}(x)\}$ を選べば $L^2(\Omega_1)$ のコーシー列になる．したがって，Ω に制限すると，$\{f_{j_p}(x)\}$ は $L^2(\Omega)$ のコーシー列である．　□

以上により，定理 61.3 が証明できた．

61.2.7　熱方程式の初期値・境界値問題への応用

Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域とし，境界 $\partial\Omega$ が滑らかであるとする．このとき，次の初期値・境界値問題を考える：

$$
\text{(H)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{(初期条件)}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{(境界条件)}. \end{cases}
$$

ここで，$u_0(\cdot)$ は初期温度分布，$u(t, \cdot)$ は時刻 t における温度分布を表している．

この問題を

$$
u(t, x) = T(t)X(x)
$$

と変数分離した形の解を求める．

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u
$$

だから，

$$
T'(t)X(x) = T(t)\Delta X(x).
$$

よって，

$$
\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)}
$$

となり，左辺は t のみに依存し，右辺は x のみに依存するから，両辺は t にも x にも依存しない定数で，これを $-\lambda$ とする．よって，

$$
\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = -\lambda.
$$

したがって，

$$
T'(t) + \lambda T(t) = 0,
$$

$$
(D_3) \qquad \begin{cases} \Delta X + \lambda X = 0 & \text{in } \Omega, \\ X = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

ここで，$\lambda > 0$ であることを示す．$X|_{\partial\Omega}$ に注意して部分積分を行うと，

$$
\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega X(x)^2 \, dx &= -\int_\Omega \Delta X(x) \cdot X(x) \, dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial X}{\partial x_i} \right)^2 dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\lambda \geq 0.
$$

しかし，$\lambda = 0$ とすると X は定数となり，$X|_{\partial\Omega} = 0$ だから，

$$
X(x) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega
$$

となり，u が自明解となり不適．よって，$\lambda > 0$ であることが示せた．したがって，

$$
u(t, x) = Ae^{-\lambda t} X(x).
$$

ただし，A，$\lambda(>0)$ は任意定数である．系 61.1 より，ディリクレ問題

$$(D_4) \qquad \begin{cases} \Delta X_j + \lambda_j X_j = 0 & \text{in } \Omega, \\ X_j = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は可算個の解 $\{\lambda_j, X_j\}_{j=1}^{\infty}$ を持つ．このとき，

$$u_j(t,x) = A_j e^{-\lambda_j t} X_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots$$

は，

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u_j = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \\ u_j = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたしている．したがって，重ね合わせの原理より，

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j e^{-\lambda_j t} X_j(x)$$

を得る．

初期条件 $u|_{t=0} = u_0$ より，

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j X_j(x).$$

ここで問題となるのは，

“ 問題 (D_4) の固有関数 X_j の和として u_0 が展開できるか？”

ということであるが，実際に可能であるならば，

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_j(x)$$

となる．

以上をまとめると，問題 (H) の解 $u(x,t)$ は次のような形になる：

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{-\lambda_j t} X_j(x).$$

61.2.8 熱方程式 (H) のスペクトル解析

X をヒルベルト空間とし，T を X から X への非負の自己共役作用素とする．簡単のため，次を仮定する．

(I) T の固有値は離散的であって，$+\infty$ に発散する．

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_j \leq \ldots \longrightarrow +\infty$$

と番号付けする．

(II) T の固有ベクトルからなる X の完全正規直交系 $\{\varphi_n\}$ が存在する：

$$T\varphi_n = \mu_n \varphi_n.$$

例 61.1. $L^2(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への作用素 $\varDelta_D$ を

$$\begin{aligned} D(\varDelta_D) &= \left\{u \in H^2(\Omega) : u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\right\} \\ &= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

と定義して，

$$\varDelta_D u = \varDelta u, \quad \forall u \in D(\varDelta_D)$$

とする．このとき，$-\varDelta_D$ は系 61.1 より，上の T の条件 (I)，(II) をみたす．

例 61.2. $L^2(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への作用素 $\varDelta_N$ を

$$D(\varDelta_N) = \left\{u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\right\}$$

と定義して，

$$\varDelta_N u = \varDelta u, \quad \forall u \in D(\varDelta_N)$$

とする．このとき，$-\varDelta_N$ は系 61.2 より，上の T の条件 (I)，(II) をみたす．

さて，T が (I)，(II) をみたすとき，ヒルベルト・シュミットの理論が適用できて，

$$\begin{aligned} T\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} (T\varphi, \varphi_n)\varphi_n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi, T\varphi_n)\varphi_n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\varphi, \varphi_n)\varphi_n. \end{aligned}$$

$\{\mu_n\}$ の相異なるものだけを取り出して，

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_j < \ldots$$

と並べ，P_j を $N(\lambda_j I - T)$ への直交射影とする．このとき，

$$\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{s_1}$$

とすると，

$$T\varphi_1 = \mu_1\varphi_1, \quad \ldots, \quad T\varphi_{s_1} = \mu_{s_1}\varphi_{s_1}.$$

このことから $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s_1}\}$ が $N(\lambda_1 I - T)$ を張ることがわかる．

$$P_1\varphi = (\varphi, \varphi_1)\varphi_1 + \ldots + (\varphi, \varphi_{s_1})\varphi_{s_1}$$

だから，

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 \varphi &= \lambda_1(\varphi, \varphi_1)\varphi_1 + \ldots + \lambda_1(\varphi, \varphi_{s_1})\varphi_{s_1} \\ &= \sum_{j=1}^{s_1} \mu_j(\varphi, \varphi_j)\varphi_j. \end{aligned}$$

よって，P_2 以降に関しても同じ議論をしていくと，(61.2)より，

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j$$

とかける．さらに，

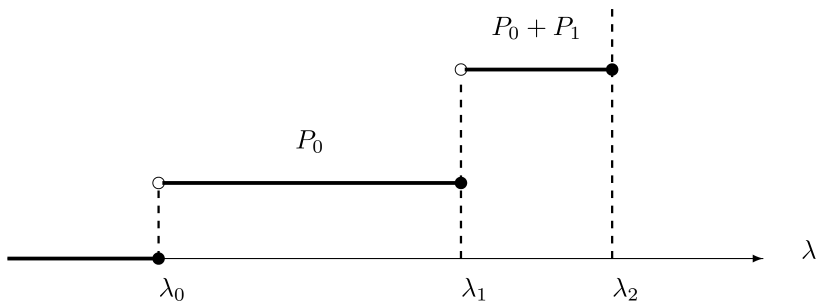
$$E(\lambda) = \sum_{\lambda_j < \lambda} P_j, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

とおくと，

(a) E_λ は λ について左連続．

(b) $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_{\min\{\mu,\lambda\}}$.

(c) $E_{-\infty} = 0$，$E_{+\infty} = I$.



ここで，$\{\varphi_n\}$ が X の完全正規直交系であることから，

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_j \varphi.$$

よって，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} P_j = I$ となり，$E_{+\infty} = I$ であることが分かる．

注意 61.3. 条件 (a)〜(c) をみたす直交射影の族 $\{E_\lambda\}$ を**単位の分解**という．

このとき，

$$\begin{aligned} T &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_j P_j + \ldots \\ &= \int_0^{\infty} \lambda dE(\lambda) \end{aligned}$$

とかける．そこで，

$$\begin{aligned} e^{-tT} &= \int_0^{\infty} e^{-t\lambda} dE(\lambda) \\ &= P_0 + e^{-\lambda_1 t} P_1 + \ldots + e^{-\lambda_j t} P_j + \ldots \end{aligned}$$

とおくと，

主張 61.2.

(61.2)
$$\|e^{-tT}\| \leq 1, \quad t > 0.$$

証明.

$$
\begin{aligned}
\|e^{-tT}\varphi\|^2 &= \|(P_0 + e^{-\lambda_1 t}P_1 + \ldots + e^{-\lambda_j t}P_j + \ldots)\varphi\|^2 \\
&= \|P_0\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\lambda_j t}\|P_j\varphi\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}\|P_j\varphi\|^2 \\
&= \|\varphi\|^2 \quad (\text{パーシバルの等式}).
\end{aligned}
$$

主張 61.3.

(61.3) 初期状態 : $e^{-tT} \longrightarrow I \quad (t \downarrow 0)$,

(61.4) 平衡状態 : $e^{-tT} \longrightarrow P_0 \quad (t \uparrow \infty)$.

証明.

$$
\begin{aligned}
\|(e^{-tT} - I)\varphi\|^2 &= \|e^{-tT}\varphi - \varphi\|^2 \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{\infty}(e^{-\lambda_j t} - 1)P_j\varphi \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}(e^{-\lambda_j t} - 1)^2\|P_j\varphi\|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}\|P_j\varphi\|^2.
\end{aligned}
$$

ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$
\sum_{j=N}^{\infty}\|P_j\varphi\|^2 < \varphi^2
$$

となる $N = N(\varepsilon)$ が存在することに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}(e^{-\lambda_j t} - 1)^2\|P_j\varphi\|^2 &\leq \sum_{j=1}^{N-1}(e^{-\lambda_j t} - 1)^2\|P_j\varphi\|^2 + \sum_{j=N}^{\infty}\|P_j\varphi\|^2 \\
&\leq (1 - e^{-\lambda_{N-1} t})^2\sum_{j=1}^{N-1}\|P_j\varphi\|^2 + \varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\limsup_{t\downarrow 0}\sum_{j=1}^{\infty}(e^{-\lambda_j t} - 1)^2\|P_j\varphi\|^2 \leq \varepsilon^2.
$$

すなわち，$t \downarrow 0$ のとき，

$$
\|(e^{-tT} - I)\varphi\| \longrightarrow 0
$$

となり (61.3)が示せた.

また，

$$\begin{aligned}
\|(e^{-tT}-P_0)\varphi\|^2 &= \|e^{-tT}\varphi - P_0\varphi\|^2 \\
&= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}P_j\varphi\right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2\lambda_j t}\|P_j\varphi\|^2 \\
&\le e^{-2\lambda_1 t}\sum_{j=1}^{\infty}\|P_j\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

したがって，$t \uparrow +\infty$ とすると，

$$\|(e^{-tT}-P_0)\varphi\| \longrightarrow 0$$

となり (61.4)が示せた．

定義 61.1. $\{T_t\}_{t\ge 0}$ を X から X への有界線形作用素とする．次の 3 つの条件をみたすとき $\{T_t\}_{t\ge 0}$ を $(C)_0$ 級の**縮小半群**（contraction semigroup）という：

(i) $T_{t+s} = T_tT_s, \quad t,s \ge 0.$
(ii) $\lim_{t\downarrow 0}\|T_tx - x\| = 0, \quad x \in E.$
(iii) $\|T_t\| \le 1, \quad t \ge 0.$

ここで，今議論してきた e^{-tT} が縮小半群になっていることを示す．
(ii) は (61.3)から，(iii) は (61.2)から従うので，(i) のみを示せば十分である．

$$\begin{aligned}
& e^{-tT}e^{-sT} \\
=\ & (P_0 + e^{-\lambda_1 t}P_1 + \ldots + e^{-\lambda_j t}P_j + \ldots)(P_0 + e^{-\lambda_1 s}P_1 + \ldots + e^{-\lambda_j s}P_j + \ldots) \\
=\ & (P_0 + e^{-\lambda_1 (t+s)}P_1 + \ldots + e^{-\lambda_j (t+s)}P_j + \ldots) \\
=\ & e^{-(t+s)T}.
\end{aligned}$$

ゆえに，e^{-tT} は縮小半群である．
最後に，ディリクレ境界条件の解とノイマン境界条件の解において $t \to \infty$ としたときの漸近挙動について考える．
まず，ディリクレ境界条件

$$\begin{cases}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)u = 0, \\
u|_{t=0} = u_0, \\
u|_{\partial\Omega} = 0
\end{cases}$$

の場合を考える．例 61.1 より，T を $-\Delta_D$ と対応させて，

$$e^{-tT} \longleftrightarrow e^{t\Delta_D}$$

とかく．すると，解は

$$u(t,x) = e^{t\Delta_D}u_0(x)$$

とかける．ここで $t \to \infty$ とすると，0 は固有値でないから $P_0 = 0$ で，

$$u(t,x) \longrightarrow 0.$$

次に，ノイマン境界条件

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \end{cases}$$

の場合を考える．例 61.2 より，T を $-\Delta_N$ と対応させて，

$$e^{-tT} \longleftrightarrow e^{t\Delta_N}$$

とかく．すると，解は

$$u(t,x) = e^{t\Delta_N} u_0(x)$$

とかける．ところで，固有値 0 に対応する $L^2(\Omega)$ で正規化された固有関数 $\varphi_0(x)$ は，

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}.$$

したがって，

$$P_0(u_0) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x)\,dx.$$

となり，$P_0(u_0)$ は初期温度分布 $u_0(x)$ の平均となる．

また，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\Omega u(t,x)\,dx\right) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\,dx \\ &= \int_\Omega \Delta u(t,x)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\,d\sigma(x) \quad (\text{グリーンの公式}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり，$\displaystyle\int_\Omega u(t,x)\,dx$ は t によらない定数であることに注意する．

以上より，

$$\int_\Omega u(t,x)\,dx \longrightarrow \int_\Omega u_0(x)\,dx \qquad (t \downarrow 0),$$

$$\int_\Omega u(t,x)\,dx \longrightarrow P_0(u_0) \qquad (t \to \infty)$$

だから，

$$\int_\Omega u(t,x)\,dx \longrightarrow \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\,dx \quad (t \to \infty)$$

となり，$u(\cdot,t)$ は初期温度分布 $u_0(\cdot)$ の平均に近づく．

61.3 調和関数に対するワイルの補題

ワイルの補題は，超関数の意味で調和 $\Delta u = 0$ ならば，実は $u \in C^\infty(\Omega)$ であることを主張している．

ワイルの補題の証明には調和関数の理論が必要であり，まずは, 調和関数を考えた後にワイルの補題を証明していく．

61.3.1 調和関数

定理 61.6 (発散定理)**.** Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域（連結開集合）とし，$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ を境界 $\partial\Omega$ に対する外向き単位法線ベクトルとする．このとき，

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n f_i \nu_i \,d\sigma, \quad f_i \in C^2(\overline{\Omega}). \tag{61.5}$$

ただし，$d\sigma$ は境界 $\partial\Omega$ の面積要素である．

注意 61.4. $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ とすると，(61.5)は次のように書き換えることができる：

$$\int_\Omega \operatorname{div} f\,dx = \int_{\partial\Omega} (f, \nu)\,d\sigma. \tag{(61.5)'}$$

定理 61.7 (グリーンの公式)**.** $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ に対して，

$$\int_\Omega (v\Delta u + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u\,dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,d\sigma. \tag{61.6}$$

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\ dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}u \right) d\sigma. \tag{61.7}$$

証明.

$$f = v\operatorname{grad} u = \left(v\frac{\partial u}{\partial x_1}, v\frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, v\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

として定理 61.6 を適用すると (61.6)が導かれる．次に，(61.6)において u と v を交換し，(61.6)からこの式を引くと (61.7)が得られる．

定義 61.2. Ω で定義された関数 u が 2 回連続微分可能で，Ω でラプラス方程式

$$\Delta u = 0$$

を満たすとき，**調和**であるという．

系 61.3. u が Ω で調和であるとき，任意の Ω の部分領域 Ω' で

$$\int_{\partial\Omega'} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x)\,d\sigma(x) = 0$$

である．

証明. (61.6)において，$v = 1$ とすればよい．

定理 61.8 (球面平均の定理)**.** u が Ω で調和であるとする．$x \in \Omega$ とし，$\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ となるように十分小さな $r > 0$ をとる．このとき，

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} u(y)\,d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x + rz)\,d\sigma(z). \end{aligned}$$

ここで，$\omega_n = \dfrac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ は n 次元単位球の表面積である．

証明. 2 番目の式に関して：

$$y = x + rz, \quad z \in S_1(0)$$

と変数変換すると，

$$d\sigma(y) = r^{n-1}\, d\sigma(z)$$

だから，

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x+rz) r^{n-1}\, d\sigma(z) \\ &= \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x+rz)\, d\sigma(z). \end{aligned}$$

1 番目の式に関して：

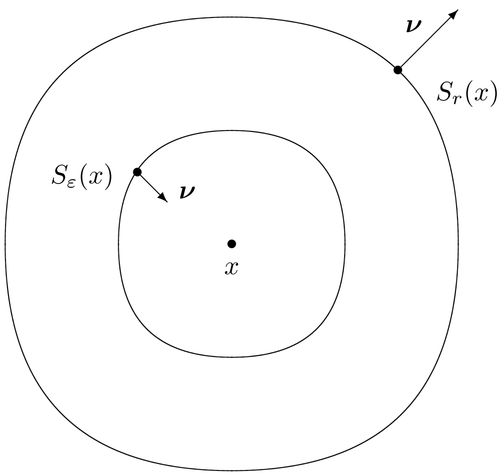
$$v(y) = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} & (n \geq 3), \\ -\log|x-y| & (n=2), \end{cases}$$

とする．

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} \frac{1}{r}\sum_{j=1}^n (y_j - x_j)\dfrac{\partial}{\partial y_j} & \text{on } S_r(x), \\ \\ \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)\dfrac{\partial}{\partial y_j} & \text{on } S_\varepsilon(x), \end{cases}$$

に注意すると，

$$\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \begin{cases} (2-n)\frac{1}{r^{n-1}} & \text{on } S_r(x), \\ \\ -(2-n)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} & \text{on } S_\varepsilon(x). \end{cases}$$



さらに，

$$\Delta u = 0 \quad \text{for } y \neq x$$

は容易に分かる．そして，グリーンの公式の (61.7)を適用すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_r(x)} \left(v(y)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y) - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y)u(y) \right) d\sigma(y) + \int_{S_\varepsilon(x)} \left(v(z)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(z) - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}(z)u(z) \right) d\sigma(z) \\ &= \int_{S_r(x)} \frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y)\, d\sigma(y) - \int_{S_r(x)} (2-n)\frac{1}{r^{n-1}}u(y)\, d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(z)\, d\sigma(z) + \int_{S_\varepsilon(x)} (2-n)\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}u(z)\, d\sigma(z). \end{aligned}$$

しかし，系 61.3 より，

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y)\, d\sigma(y) = 0, \quad \int_{S_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(z)\, d\sigma(z) = 0.$$

したがって，

$$\frac{1}{r^{n-1}} \int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z).$$

主張 61.4. $\varepsilon \downarrow 0$ とすると，

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z) \longrightarrow \omega_n u(x).$$

実際，u の連続性から，

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z) - u(x) \right| &= \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \left| \int_{S_\varepsilon(x)} (u(z) - u(x))\, d\sigma(z) \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon(x)} |u(z) - u(x)|\, d\sigma(z) \\ &\leq \sup_{|z-x| \leq \varepsilon} |u(z) - u(x)| \longrightarrow 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0). \end{aligned}$$

したがって，まとめると，

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{S_r(x)} u(y)\, d\sigma(y).$$

系 61.4. u が Ω で調和であるとする．このとき，

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy = \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + rz)\, dz.$$

注意 61.5. n 次元単位球の体積は，

$$\int_{B_1(0)} dy = \int_0^1 \int_{S_1(0)} r^{n-1}\, d\sigma(y)\, dr = \omega_n \int_0^1 r^{n-1}\, dr = \frac{\omega_n}{n}.$$

系 61.4 の証明. 2 番目の式に関して：

$$y = x + rz, \quad z \in B_1(0)$$

と変数変換すると，

$$dy = r^n\, dz$$

だから，

$$\begin{aligned} \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy &= \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + rz) r^n\, dz \\ &= \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + rz). \end{aligned}$$

1 番目の式に関して：定理 61.8 より，

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x + \rho r y)\, d\sigma(y), \quad 0 < \rho < 1.$$

したがって，$\rho^{n-1}d\rho$ に関して 0 から 1 まで両辺積分すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}u(x) &= \frac{1}{\omega_n}\int_0^1\int_{S_1(0)} u(x+\rho r y)\rho^{n-1}\,d\rho\,d\sigma(y)\\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_0^r\int_{S_1(0)} u(x+ty)\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}\frac{dt}{r}\,d\sigma(y)\\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_0^r\int_{S_1(0)} u(x+ty)t^{n-1}\,dt\,d\sigma(y)\\
&= \frac{1}{r^n\omega_n}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy. \quad \square
\end{aligned}$$

定理 61.9 (球面平均の定理の逆)**.** $u \in C(\Omega)$ が球面平均の性質：

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x+ry)\,d\sigma(y), \quad \forall\overline{B_r(x)} \subset \Omega \tag{61.8}$$

を満たすとする．このとき，

$$\begin{cases} u \in C^\infty(\Omega), \\ \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

証明. まず，$u \in C^\infty(\Omega)$ を示す.

(a) $\varphi \geq 0 \quad$ on $B_1(0)$.
(b) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)\,dx = 1$.
(c) $\varphi(x) = \psi(|x|), \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$.

を満たすような $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ をとり，

$$\begin{aligned}
&\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,\\
&\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\},
\end{aligned}$$

とする.

主張 61.5. 任意の $x \in \Omega_\varepsilon$ に対して，

$$u(x) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy. \tag{61.9}$$

証明.

$$\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon(x-\cdot) \subset \Omega, \quad x \in \Omega_\varepsilon$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy &= \int_{|z|\le\varepsilon}\varphi_\varepsilon(z)u(x-z)\,dz\\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|z|\le\varepsilon}\varphi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)u(x-z)\,dz\\ &= \int_{|w|\le 1}\varphi(w)u(x-\varepsilon w)\,dw\\ &= \int_0^1\int_{S_1(0)}\varphi(rs)u(x-\varepsilon rs)r^{n-1}\,d\sigma(s)\,dr\\ &= \int_0^1\int_{S_1(0)}\psi(r)u(x-\varepsilon rs)r^{n-1}\,d\sigma(s)\,dr\\ &= \int_0^1\psi(r)r^{n-1}\,dr\left(\int_{S_1(0)}u(x-\varepsilon rs)\,d\sigma(s)\right).\end{aligned}$$

しかし，(61.8)より，

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)}u(x-\varepsilon rs)\,d\sigma(s).$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy &= \int_0^1\psi(r)r^{n-1}\,dr(\omega_n u(x))\\ &= u(x)\left(\int_0^1\int_{S_1(0)}\psi(r)r^{n-1}\,d\sigma(s)\,dr\right)\\ &= u(x)\int_{B_1(0)}\varphi(y)\,dy\\ &= u(x).\end{aligned}$$

したがって，(61.9)は

$$u\in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

を意味している．

$$\Omega=\bigcup_{\varepsilon>0}\Omega_\varepsilon$$

だから，

$$u\in C^\infty(\Omega).$$

次に，

$$\Delta u=0\quad\text{in }\Omega$$

を示す．

$$\Omega=B_r(x),\quad v=1$$

として，グリーンの公式の (61.6)を適用すると，

$$\begin{aligned}\int_{B_r(x)} \Delta u(y)\,dy &= \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(y)\,d\sigma(y) \\ &= \int_{S_r(x)} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - x_i}{r} \frac{\partial u}{\partial y_i}(y)\,d\sigma(y) \\ &= \int_{S_1(0)} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial u}{\partial y_i}(x+rz) r^{n-1}\,d\sigma(z) \\ &= \int_{S_1(0)} \left[\frac{d}{d\rho}(u(x+\rho z))\right]_{\rho=r} d\sigma(z)\cdot r^{n-1} \\ &= r^{n-1}\frac{d}{d\rho}\left(\int_{S_1(0)} u(x+\rho z)\,d\sigma(z)\right)\Bigg|_{\rho=r}.\end{aligned}$$

しかし，(61.8)より，

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x+\rho z)\,d\sigma(z).$$

よって，

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y)\,dy = r^{n-1}\frac{d}{d\rho}(\omega_n u(x)) = 0.$$

$\Delta u \in C(\Omega)$ で，$B_r(x)$ は任意だから，

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

これで，定理 61.9 が証明できた．

系 61.5. u が Ω で調和であるとすると，

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

証明. 定理 61.8，61.9 の結果より明らか．

系 61.6. $\{u_k\}$ を Ω のコンパクト部分集合上で u に一様収束するような Ω の調和関数の列とする．このとき，u は Ω で調和である．

証明. $u_k \in C^2(\Omega)$ でその収束が一様だから，$u \in C(\Omega)$ である．

一方，定理 61.9 から，

$$u_k(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} u_k(x+ry)\,d\sigma(y).$$

両辺の極限をとると，

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x+ry)\,d\sigma(y).$$

したがって，定理 61.9 を適用して，

$$\begin{cases} u \in C^\infty(\Omega), \\ \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

定理 61.10 (最大値の原理)**.** Ω を連結な領域とする．u を Ω 上で調和で実数値関数とし，さらに，

$$\sup_\Omega u = A < \infty$$

を満たすとする．このとき，次のいずれかが成り立つ：

(a) $u(x) < A, \quad \forall x \in \Omega.$
(b) $u(x) = A, \quad \forall x \in \Omega.$

証明.

$$G = \{x \in \Omega : u(x) = A\}$$

とする．$u \in C(\Omega)$ だから G は Ω での閉集合である．
x_0 を G の任意の点とすると，系 61.4 より，十分小な $r > 0$ に対して，

$$\sup_\Omega u = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n}\int_{B_1(0)} u(x_0 + ry)\,dy \le \sup_\Omega u.$$

これは，x_0 の周りの小さい球内のすべての y に対して $u(y) = A$ であることを意味している．
ここで，

$$\varphi(y) = u(x_0) - u(x_0 + ry), \quad \forall u \in B_1(0)$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}\frac{n}{\omega_n}\int_{B_1(0)} \varphi(y)\,dy &= u(x_0) - \frac{n}{\omega_n}\int_{B_1(0)} u(x_0 + ry)\,dy \\ &= 0\end{aligned}$$

よって，

$$\varphi(y) = 0 \quad \text{on } B_1(0)$$

だから，

$$u(x_0 + ry) = u(x_0), \quad \forall y \in B_1(0).$$

よって，$x_0 + B(0, r) \subset G$ だから，G は開集合である．
したがって， Ω は連結だから，

(a) $G = \emptyset.$
(b) $G = \Omega.$

のいずれかである．

61.3.2 ワイルの補題

調和関数論の基礎として，次のワイルの補題を証明する：

補題 61.1 (Weyl)**.** $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，$\Omega$ で $\Delta u = 0$ とすると，$u \in C^\infty(\Omega)$ である．

証明. 定理 61.9 より，

$$\begin{aligned}&u \in C(\Omega) \\ &u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S_1(0)} u(x + ry)\,d\sigma(y), \quad \omega_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\end{aligned}$$

を示せばよい．
Step 1:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1, \\ \varphi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ \varphi(x) = \varphi(-x), \quad x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

を満たすような $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ をとる．

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon > 0$$

とする．このとき，

$$u * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

ただし，

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

とする．今，任意に $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$ をとる．このとき，

$$\psi * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$$

で，Ω で $\mathit{\Delta} u = 0$ だから，

$$\begin{aligned}
\langle \mathit{\Delta}(u * \varphi_\varepsilon), \psi\rangle &= \langle u * \varphi_\varepsilon, \mathit{\Delta}\psi\rangle \\
&= \int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{\mathbf{R}^n} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy\right)\mathit{\Delta}\psi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} u(y)\left(\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)\psi(x)\,dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} u(y)\left(\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_\varepsilon(y-x)\mathit{\Delta}\psi(x)\,dx\right)dy \\
&= \langle u, \mathit{\Delta}(\varphi_\varepsilon * \psi)\rangle \\
&= \langle \mathit{\Delta} u, \varphi_\varepsilon * \psi\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\langle \mathit{\Delta}(u * \varphi_\varepsilon), \psi\rangle = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

これは，

$$\mathit{\Delta}(u * \varphi_\varepsilon) = 0 \quad \text{in } \Omega_\varepsilon$$

であることを意味している．よって，系 61.4 を適用して，

$$u * \varphi_\varepsilon(x) = \frac{n}{r^n\omega_n}\int_{B_r(x)} (u * \varphi_\varepsilon)(y)\,dy.$$

Step 2] ここでは，次の 2 つの主張をあげる．

主張 61.6. $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ とすると，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき，

$$u * \varphi_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

証明. Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対して，

$$\begin{aligned}
\int_K |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|\,dx &= \int_K \left|\int_{|y|\le\varepsilon} \varphi_\varepsilon(y)(u(x-y) - u(x))\,dy\right| dx \\
&= \int_K \left|\int_{|z|\le 1} \varphi(z)(u(x-\varepsilon z) - u(x))\,dz\right| dx \\
&\le \int_K \int_{|z|\le 1} \varphi(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|\,dz\,dx
\end{aligned}$$

だから，フビニの定理より，

$$\int_K |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|\, dx \le \int_{|z|\le 1} \left(\int_K |u(x-\varepsilon z) - u(x)|\, dx \right) \varphi(z)\, dz.$$

もし

$$u^0(x) = \begin{cases} u(z) & \text{for } z \in K_1 = K + \{|y| \le 1\}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とすると，

$$u^0 \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

さらに，

$$\begin{aligned} \int_K |u(x-\varepsilon z) - u(x)|\, dx &\le \int_K |u^0(x-\varepsilon z) - u\ 0(x)|\, dx \\ &\le 2\|u^0\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad |z| \le 1, \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K |u(x-\varepsilon z) - u(x)|\, dx \le \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K |u^0(x-\varepsilon z) - u^0(x)|\, dx = 0.$$

よって，ルベーグの優収束定理を適用して，

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K |\varphi_\varepsilon * u(x) - u(x)|\, dx &\le \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|z|\le 1} \left(\int_K |u(x-\varepsilon z) - u(x)|\, dx \right) \varphi(z)\, dz \\ &= \int_{|z|\le 1} \left(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_K |u(x-\varepsilon z) - u(x)|\, dx \right) \varphi(z)\, dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

これは，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき，

$$u * \varphi_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

を意味している．

主張 61.7. $L^1(\Omega)$ で $f_j \to f$ とすると，

$$f_{j(k)}(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{almost every } x \in \Omega$$

となるような部分列 $\{f_{j(k)}\}$ をみつけることができる．

証明． $\{f_j\}$ は $L^1(\Omega)$ のコーシー列だから，

$$\begin{aligned} &\|f_{j(1)} - f_{j(2)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} < \frac{1}{2}, \\ &\|f_{j(2)} - f_{j(3)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} < \frac{1}{2^2}, \\ &\quad \vdots \\ &\|f_{j(k)} - f_{j(k+1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} < \frac{1}{2^k}, \end{aligned}$$

となるような部分列 $\{f_{j(k)}\}$ をみつけることができる．このとき，

$$g_k(x) = |f_{j(1)}(x)| + |f_{j(2)}(x) - f_{j(1)}(x)| + \ldots + |f_{j(k)}(x) - f_{j(k-1)}(x)|$$

とおくと，

$$0 \le g_1(x) \le g_2(x) \le \ldots \le g_k(x) \le g_{k+1}(x) \le \ldots$$

だから，任意の $x \in \Omega$ に対して，極限

$$g(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x)$$

が存在する．したがって，単調収束定理を適用すると，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k(x)\,dx \\
&\le \|f_{j(1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + \|f_{j(2)} - f_{j(1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + \dots \\
&\le \|f_{j(1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \\
&= \|f_{j(1)}\|_{L^1(\mathbf{R}^n)} + 1.
\end{aligned}$$

これは,

$$g \in L^1(\Omega)$$

であること,

$$\begin{cases} \mu(\Omega_0) = 0, \\ 0 \le g(x) < \infty, \quad \forall x \in \Omega \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

となるような Ω の可測な部分集合 Ω_0 が存在することを示している．

しかし,

$$|f_{j(k)}(x)| \le g_k(x) \le g(x), \quad \forall x \in \Omega$$

であり，$\ell > k$ に対して,

$$\begin{aligned}
|f_{j(k)}(x) - f_{j(\ell)}(x)| &\le |f_{j(k)}(x) - f_{j(k+1)}(x)| + \dots + |f_{j(\ell-1)}(x) - f_{j(\ell)}(x)| \\
&\le g_\ell(x) - g_k(x)
\end{aligned}$$

である．よって，任意の $x \in \Omega \backslash \Omega_0$ に対して，有限な極限

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} f_{j(k)}(x)$$

が存在して,

$$|F(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_{j(k)}(x)| \le g(x), \quad \forall x \in \Omega \backslash \Omega_0.$$

これは,

$$|f_{j(k)}(x) - F(x)| \le 2g(x), \quad \forall x \in \Omega \backslash \Omega_0$$

を意味している．

よって，ルベーグの優収束定理を適用して,

$$f_{j(k)} \longrightarrow F \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

しかし，$L^1(\Omega)$ で $f_j \to f$ だから,

$$\begin{cases} \mu(\Omega_1) = 0, \\ f(x) = F(x) \quad \forall x \in \Omega \backslash \Omega_1 \end{cases}$$

となるような Ω の可測な部分集合 Ω_1 をみつけることができる．したがって,

$$\Omega' = \Omega_0 \cup \Omega_1$$

とおくと，$\mu(\Omega') = 0$ で,

$$f_{j(k)}(x) \longrightarrow f(x), \quad \forall x \in \Omega \backslash \Omega'.$$

Step 3: 主張 61.6 より，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき，

$$u * \varphi_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Ω の任意のコンパクト部分集合 K に対し，十分小な $r > 0$ に対して，

$$\bigcup_{x \in K} \overline{B_r(x)}$$

はコンパクトであることに注意する．よって，任意の $x \in K$ に対して，

$$u * \varphi_\varepsilon(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} (u * \varphi_\varepsilon)(y)\, dy \longrightarrow \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy.$$

しかし，主張 61.7 より，

$$u * \varphi_{\varepsilon_j}(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{almost every } x \in K$$

となるような列 $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j \downarrow 0$ をみつけることができる．したがって，u を測度 0 の集合上の関数と見ると，$u \in C(\Omega)$ で，

$$u(x) = \frac{n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy.$$

これから，

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1(0)} u(x + rz)\, d\sigma(z)$$

であることがわかる．

これで，補題 61.1 が証明できた．

62　一般楕円型境界値問題

ここからは，第 61 部で考えたラプラス作用素を一般の楕円型偏微分作用素に発展させて考えていく．

62.1　ディリクレ固有値問題のスペクトル解析

この節では，ラプラス作用素 Δ を一般化した 2 階の楕円型偏微分作用素 A に対する境界値問題を考える．

Ω を ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の有界領域で，境界 $\partial\Omega$ は滑らかであるとする．その閉包 $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ は n 次元の滑らかな境界付きコンパクト多様体である．2 階偏微分作用素

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \tag{62.1}$$

が楕円型であるとは，$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \neq 0, \quad x \in \Omega,\ \xi \neq 0$$

が成り立つときをいう．特に，$a_{ij}(x)$ が実数値関数のときは，

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad x \in \Omega,\ i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{62.2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \neq 0 \tag{62.3}$$

が成り立つことを Ω での楕円型の条件とする．

さらに，係数に関しては，$a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$，$b_i(x), c(x) \in C(\overline{\Omega})$ で，ともに有界な関数とする．

注意 62.1. (62.3)より，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0, \quad (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \{\eta \in \mathbf{R}^n : |\eta| = 1\}.$$

$\overline{\Omega} \times \{\eta \in \mathbf{R}^n : |\eta| = 1\}$ はコンパクトなので，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, |\xi| = 1$$

となる最小値 c_0 が存在する．よって，

$$\frac{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j}{|\xi|^2} \geq c_0, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \neq 0$$

より，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbf{R}^n \tag{62.4}$$

が成り立っている．

$$Au = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

を，実係数が次の条件を満たす 2 階の楕円型偏微分作用素とする：

(1) $a_{ij} \in C^{\theta}(\overline{\Omega})$, $0 < \theta < 1$ であって, 任意の $x \in \overline{\Omega}$ に対して $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$，さらに, 楕円型条件

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2 \quad x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbf{R}^n \tag{62.5}$$

を満たす定数 $a_0 > 0$ が存在する．

(2) $1 \leq i \leq n$ に対して $b_i \in C(\overline{\Omega})$

(3) $c \in C(\overline{\Omega})$ であって, Ω で $c(x) \leq 0$ とする．

この節では，次の ディリクレ固有値問題を考える：複素数パラメータ λ が与えられたとき，

$$\begin{cases} -Au = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$*$}$$

を満たす Ω における関数 $u(x)$ を求めよ．

62.1.1 ディリクレ固有値問題 $(*)$ の一意可解性

u, $v \in H_0^1(\Omega)$ に対して，公式

$$\mathcal{A}_0[u,v] = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \overline{\frac{\partial v}{\partial x_j}} \, dx. \tag{62.6}$$

により ディリクレ形式 $\mathcal{A}_0[u,v]$ を導入する．u, $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ ならば，部分積分により

$$\begin{aligned} &(Au + \lambda u, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= -\mathcal{A}_0[u,v] + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(b_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + \lambda u, v \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= -\mathcal{A}_0[u,v] + \left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + \lambda u, v \right)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{62.7}$$

を得ることに注意する．ただし，

$$\widetilde{b}_i(x) := b_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{for } 1 \leq i \leq n$$

とする．

定理 62.1. $\lambda \in \mathbf{C}$ とする．定数 $C(\lambda) > 0$ が存在して，不等式

$$|(Au + \lambda u, u)| \geq C(\lambda) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{for all } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \tag{62.8}$$

を満たすとする．

このとき，ディリクレ固有値問題 $(*)$ は, 任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，解 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を持つ．

さらに，解 $u \in H^2(\Omega)$ は ソボレフ空間 $H_0^1(\Omega)$ の中で一意的である．

証明. 証明を, 次の 3 つのステップに分ける.

Step (1): まず，偏微分作用素 A を次のように分解する：

$$\begin{aligned}
Au &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\
&:= A_0 u + B_0 u + c(x)u,
\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
A_0 u &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \\
B_0 u &= \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\widetilde{b}_i(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

である.

A_0 は自己共役な微分可能作用素，B は高々 1 階の微分作用素であることに注意する．したがって，レリッヒの定理より，偏微分作用素

$$B_0 + c(x) : H^2(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

はコンパクトである.

次の定理は，フレドホルム作用素がコンパクト摂動の下で安定であることを主張している:

定理 62.2 (解析的指数の安定性定理)**.** X，Y を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の バナッハ空間とし，T を X から Y へのフレドホルム作用素とする．K を X から Y へのコンパクト (完全連続) 作用素とするならば，和 $T+K$ は X から Y へのフレドホルム作用素であり，

$$\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind} T$$

が成り立つ.

したがって，

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind}(A_0 + B_0 + c(x)) = \operatorname{ind} A_0 \tag{62.9}$$

となる.

Step (2): 次に，自己共役作用素 A_0 とラプラス (Laplace) 作用素 $\varDelta$ の間には, 2 階の楕円型偏微分作用素の族におけるホモトピーが存在する．例えば,

$$A_t = (1-t)\,A_0 + t\,\varDelta \quad 0 \le t \le 1.$$

とすればよい.

このように，ディリクレ固有値問題 $(*)$ は, ラプラス作用素に対するディリクレ固有値問題

$$\begin{cases} -\varDelta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{$**$}$$

に, ホモトピー変形される．

一般論で，解析的指数はホモトピー変形で不変であることが知られている．今の場合, 定理 24.2 (連続的変形の方法) を使って, 直接的に証明することもできる ([13]).

Step (3) ところで, ディリクレ問題 $(**)$ の解析的指数は, 関数空間 $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ において 0 と等しいことが分かっている．したがって, 最初のディリクレ固有値問題 $(*)$ の解析的指数も，関数空間 $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ において 0 と等しいことを意味している．すなわち, ディリクレ固有値問題 $(*)$ に対して，フレドホルムの交代定理（定理 40.2）が成り立つ.

以上より, 不等式 (62.8) が複素数パラメター λ に対して成立すれば，フレドホルムの交代定理から，任意の関数 $f \in L^2(\Omega)$ に対して，ディリクレ固有値問題 $(*)$ は一意的な解 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を持つことがわかる．

定理 62.1 の証明終わり．

62.1.2　ディリクレ固有値問題 $(*)$ のレゾルベント集合の特徴づけ

この節では，不等式 (62.8) が成り立つような複素数パラメータ λ の範囲の特徴づけをする．

そのために，ディリクレ固有値問題 $(*)$ に付随して, 次の線形閉作用素 $\mathfrak{A}$ を導入する：

(1) 定義域 $D(\mathfrak{A})$ は
$$D(\mathfrak{A}) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$
である．

(2) $u \in D(\mathfrak{A})$ に対して, $\mathfrak{A}u = Au$ とする.

次の定理は，レゾルベント集合 $\rho(\mathfrak{A})$ が放物線の外に含まれる, 言い換えれば, スペクトル集合が放物線内に含まれることを主張している．

定理 62.3.
$$\lambda = \mu + i\nu, \quad i = \sqrt{-1}$$
とする．このとき, 定数 $p > 0$ と $q > 0$ が存在して，複素数 $\lambda = \mu + i\nu$ が条件

$$(|\nu| - p)^2 \geq 4p\,(\mu + q) \tag{62.10}$$

をみたしているならば，不等式 (62.8) が成り立つ．

したがって，任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して，ディリクレ固有値問題 $(*)$ は一意的な解 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ をもつ．特に，レゾルベント集合 $\rho(\mathfrak{A})$ が放物線

$$\rho(\mathfrak{A}) \supset \left\{ \lambda = \mu + i\nu : (|\nu| - p)^2 \geq 4p\,(\mu + q) \right\}. \tag{62.11}$$

の外に含まれている (図 1 を見よ).

証明. $\mu > 0$ とし，(62.10)をみたすとき，(62.8)をみたすような定数 $C(\lambda) > 0$ が存在することを証明する．

証明を 3 段階に分ける．

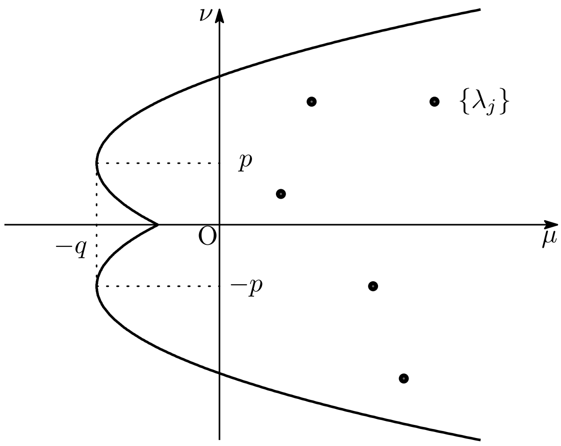


図 1: レゾルベント集合 $\rho(\mathfrak{A})$ は領域 $\left\{(|\nu|-p)^2 \geq 4p\,(\mu+q)\right\}$ を含む

Step (1): まず，不等式 (62.5)より，

$$
-\left(A_0 u, u\right)_{L^2(\Omega)} = \mathcal{A}_0[u,u] = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}}\, dx \geq a_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx = a_0 \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 . \tag{62.12}
$$

が成り立つ．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，シュワルツの不等式と不等式 (62.12) より，

$$C_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{x \in \overline{\Omega}} \left| \widetilde{b}_i(x) \right| \right\}, \tag{62.13a}$$

$$C_1 = \sqrt{n}\, C_0, \tag{62.13b}$$

$$C_2 = \frac{{C_1}^2}{4a_0} = \frac{n}{4a_0}\, C_0^2. \tag{62.13c}$$

として，

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, u\right)_{L^2(\Omega)}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\left(\widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, u\right)_{L^2(\Omega)}\right| \tag{62.14}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{n}\max_{x\in\overline{\Omega}}\left|\widetilde{b}_i(x)\right|\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_0\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_0\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{C_1}{\sqrt{a_0}}\left(\mathcal{A}_0[u,u]\right)^{1/2}\|u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \varepsilon\,\mathcal{A}_0[u,u] + \frac{C_2}{\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{for all } \varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

となる．ここで，初等的な不等式

$$2ab \leq \varepsilon\,a^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,b^2 \quad \text{for all } \varepsilon > 0$$

を用いた．

一方，式 (62.7) より，

$$\operatorname{Re}\,(Au+\lambda u, u)_{L^2(\Omega)} = -\mathcal{A}_0[u,u] + \mu\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_1, \tag{62.15a}$$

$$\operatorname{Im}\,(Au+\lambda u, u)_{L^2(\Omega)} = \nu\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_2. \tag{62.15b}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
K_1 &:= \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, u\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{b}_i}{\partial x_i}\right)u + c(x)u, u\right)_{L^2(\Omega)}, \\
K_2 &:= \operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, u\right)_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

とする．

実際，$\widetilde{b}_i(x)$ は実数値をとるから，部分積分法より，

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, u\right)_{L^2(\Omega)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \widetilde{b}_i(x)\,u\right)_{L^2(\Omega)} \\
= -\left(u, \frac{\partial\widetilde{b}_i}{\partial x_i}u\right)_{L^2(\Omega)} &- \left(u, \widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} \\
= -\left(\frac{\partial\widetilde{b}_i}{\partial x_i}u, u\right)_{L^2(\Omega)} &- \overline{\left(\widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, u\right)}_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

である．よって，

$$\operatorname{Re}\left(\widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}u, u\right)_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\widetilde{b}_i}{\partial x_i}\right)u, u\right)_{L^2(\Omega)}$$

を得る．

さらに，不等式 (62.14) とシュワルツの不等式より，K_2 と K_1 は次のように評価することができる：

$$
\begin{aligned}
(62.16a) \qquad |K_2| &= \left| \mathrm{Im} \left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}, u \right)_{L^2(\Omega)} \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{b}_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}, u \right)_{L^2(\Omega)} \right| \\
&\leq \varepsilon \, \mathcal{A}_0[u,u] + \frac{C_2}{\varepsilon} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{for all } \varepsilon > 0, \\
(62.16b) \qquad |K_1| &\leq C_3 \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
(62.17) \qquad C_3 = \max_{x \in \overline{\Omega}} \left| -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \widetilde{b}_i}{\partial x_i}(x) \right) + c(x) \right|
$$

とする．

Step (2): (62.15) を用いることにより，

$$
(Au + \lambda u, u)_{L^2(\Omega)}
$$

を

$$
\begin{aligned}
&(Au + \lambda u, u)_{L^2(\Omega)} \\
&= \mathrm{Re}\, (Au + \lambda u, u)_{L^2(\Omega)} + i \, \mathrm{Im}\, (Au + \lambda u, u)_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(-\mathcal{A}_0[u,u] + \mu \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_1 \right) + i \left(\nu \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_2 \right).
\end{aligned}
$$

と書き直す．ここで，$z = \alpha + i\beta$ に対して，

$$
(62.18) \qquad |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq (1-t)\,|\alpha| + t\,|\beta| \quad \text{for all } 0 \leq t \leq 1.
$$

となることに注意する．

したがって，(62.16)，(62.18)より，

$$
\begin{aligned}
(62.19) \qquad & \left| (Au + \lambda u, u)_{L^2(\Omega)} \right| \\
&\geq (1-t) \left| -\mathcal{A}_0[u,u] + \mu \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_1 \right| + t \left| \nu \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + K_2 \right| \\
&\geq (1-t) \left(\mathcal{A}_0[u,u] - \mu \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - |K_1| \right) + t \left(|\nu| \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - |K_2| \right) \\
&\geq (1-t) \left(\mathcal{A}_0[u,u] - \mu \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - C_3 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\quad + t \left(|\nu| \|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon \, \mathcal{A}_0[u,u] - \frac{C_2}{\varepsilon} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\geq (1-t-\varepsilon)\, \mathcal{A}_0[u,u] \\
&\quad + \left\{ t \left(|\nu| - \frac{C_2}{\varepsilon} \right) - (1-t)\,(\mu + C_3) \right\} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

を得る．

Step (3): 不等式 (62.8)を得るためには，次の 2 つの不等式を証明すればよい：

$$1 - t - \varepsilon > 0 \tag{62.20}$$

$$t\left(|\nu| - \frac{C_2}{\varepsilon}\right) - (1-t)(\mu + C_3) > 0 \tag{62.21}$$

まず，

$$\varepsilon = \frac{1-t}{2}$$

とおき，

$$\begin{aligned} g(t) &:= t\left(|\nu| - \frac{2C_2}{1-t}\right) - (1-t)(\mu + C_3) \\ &= t(\mu + |\nu| + C_3) - \frac{2C_2\, t}{1-t} - \mu - C_3. \end{aligned}$$

とする．

$$g'(t) = \mu + |\nu| + C_3 - \frac{2C_2}{(1-t)^2},$$

となり，

$$\mu + |\nu| + C_3 > 0. \tag{62.22}$$

より，

$$t_0 = 1 - \sqrt{\frac{2C_2}{\mu + |\nu| + C_3}},$$

で $g(t)$ は最大となる．そのとき，

$$g(t_0) = |\nu| - 2\sqrt{2C_2(\mu + |\nu| + C_3)} + 2C_2.$$

を得る．したがって，

$$g(t_0) = |\nu| - 2\sqrt{2C_2(\mu + |\nu| + C_3)} + 2C_2 > 0$$

となるように複素数パラメータ $\lambda = \mu + i\nu$ をとると，(62.19)における定数 $C(\lambda) > 0$ が存在する．

まとめると，2 つの定数 $p = 2\,C_2$ と $q = C_3$ に対して

$$(|\nu| - p)^2 \geq 4p(\mu + q)$$

の場合に，最も効率良く，2 つの不等式 (62.20), (62.21) をみたすことが証明できた．

定理 62.3 の証明終わり．

注意 62.2. ディリクレ問題の固有値の全体は，正の実軸を含む放物型の領域に含まれている．したがって，この定理は，正の実軸以外の方向をたどると，絶対値が十分大きくなれば，レゾルベント集合になることを主張している．あるいは固有値全体が，正の実軸の周りに集積しているといってもよい．

注意 62.3. 微分作用素 A が発散形の場合，すなわち，

$$\widetilde{b}_i(x) = b_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

が任意の $1 \leq i \leq n$ で成り立つとき，式 (62.13)，(62.17) と条件 (62.22) から主張 (62.11) が

$$\rho(\mathfrak{A}) \supset \{\lambda = \mu + i\nu : \mu > -C_3,\ \nu = 0\}$$

となることが分かる．ただし，

$$C_3 = \max_{x \in \overline{\Omega}} |c(x)|$$

とする．

62.2　強楕円型方程式の超関数解の大域的正則性定理

ここでは，$2m$ 階の楕円型方程式：

$$Au = f \quad \text{in } \Omega$$

の超関数解の正則性を考える．ただし，楕円型作用素 A は

$$Au = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u \right).$$

とし，係数 $a_{\alpha\beta}(x)$ は Ω で有界可測で，$|\alpha| = |\beta| = m$ のとき Ω で一様連続と仮定する．

ラプラス作用素 Δ の場合は，ワイルの補題によって，超関数解の正則性は証明できたが，一般の楕円型微分作用素 A の場合にはワイルの補題は用いることができない．そこで，差分法の理論を用いて超関数解の正則性を考えていく．

62.2.1　差分法

差分法に入る前に，関数空間などの準備をする．

まず，$u \in C^m(\Omega)$ に対して，

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

と定義する．また，$\|u\|_{m,\Omega}$，$\|v\|_{m,\Omega}$ が共に有限ならば，

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v} \, dx$$

が存在する．

同様に，$u \in C^m(\Omega)$ に対して，

$$|u|_{m,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = m} |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

と定義する．

また，$C^{m*}(\Omega)$ を，$\|u\|_{m,\Omega}$ が有限となる関数 u の全体になる $C^m(\Omega)$ の部分集合とし，$H^m(\Omega)$ をノルム $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ による $C^{m*}(\Omega)$ の完備化したものとする．さらに，$W^m(\Omega)$ を m 階までの導超関数をもち，それらがすべて $L^2(\Omega)$ に属するような $L^2(\Omega)$ 関数の全体とする．すなわち，

$$W^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m \right\}.$$

また，$u, v \in W^m(\Omega)$ に対して，

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha u \cdot \overline{D^\alpha v}\, dx$$

と定義する．

次の 2 つの定義により領域 Ω の準備をする．

定義 62.1. 任意の $x \in \Omega$ に対して，$U(x) \cap O_i \neq \emptyset$ をみたす O_i が有限個となるような x の近傍 $U(x)$ が存在するとき，**局所有限** (locally finite) という．

定義 62.2. Ω が**線分条件** (segment property) をもつとは，境界 $\partial\Omega$ の局所有限な開被覆 $\{O_i\}$ とそれに対応するベクトル $\{y_i\}$ があって，$x + ty_i \in \Omega$ がすべての $0 < t < 1,\, x \in \overline{\Omega} \cap O_i$ について成立することである．

Ω が線分条件をもつとき，定理 58.1 を発展させた次の定理を得る：

定理 62.4. Ω が線分条件をもつならば，

$$H^m(\Omega) = W^m(\Omega).$$

注意 62.4. $H^m(\Omega)$ に関するある性質を示すのに，同じ性質を $W^m(\Omega)$ に関して示すことがよくあるのでこの定理は重要である．

さらに，次の定理により，領域 Ω で考える話を局所的な話に帰着できる．

定理 62.5. $\mathbf{R}^n$ の部分集合 F がコンパクトであるとし，$F \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\nu} O_i$ であって，すべての O_i は開集合であるとする．このとき，$\xi_i \in C_0^\infty(O_i)$ であって，

$$\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(x) = 1, \quad x \in F$$

となる関数 $\{\xi_i\}$ が存在する．

証明. まず，コンパクト集合の族 $\{C_i\}$ を $C_i \subset O_i$ で，しかも $F \subset \bigcup C_i$ となるように選ぶ．例えば，次のように選ぶとよい：$x \in O_i$ に対して，半径が $2r_x > 0$ の球 $S(x, 2r_x)$ を

$$S(x, 2r_x) \subset O_i$$

となるようにとる．

F はコンパクトであって，$\{S(x, r_x) : x \in F\}$ で覆われているから，これらの球の有限個で覆われる．例えば，$\{S(x_k, r_{x_k}) : k = 1, 2, \ldots, m\}$ で覆われる．

$$C_i = \bigcup_{x_k \in O_i} \overline{S(x_k, r_{x_k})}$$

とおくと，C_i は望んでいた性質をもつ．

さて，コンパクト集合の族 $\{C_{i*}\}$ を

$$C_i \subset \operatorname{int} C_{i*} \subset C_{i*} \subset O_i$$

となるようにとる．ただし，$\mathrm{int}\, A$ は集合 A の内点の全体である．ψ_{i*} を C_{i*} 上で 1，その他で 0 である関数とし，$\varepsilon > 0$ を $\mathrm{dist}(C_i, \partial C_{i*})$, $\mathrm{dist}(C_{i*}, \partial O_i)$ より小にとる．

また，軟化作用素 J_ε を用いて，

$$\psi_i(x) = J_\varepsilon \psi_{i*}(x)$$

とおく．このとき，$\psi_i \in C_0^\infty(O_i)$ で，

$$\psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in C_i.$$

最後に，

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \psi_1, \\ &\xi_i = (1-\psi_1)\dots(1-\psi_{i-1})\psi_i \quad (i > 1) \end{aligned}$$

とおくと，$\xi \in C_0^\infty(O_i)$ であって，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i &= 1 - (1-\psi_1)\dots(1-\psi_\nu), \\ &\equiv 1 \quad (\bigcup C_i \text{において}) \end{aligned}$$

となる．

関数 ξ_i の集合を F の開被覆 $\{O_i\}$ に従属した **1 の分解** (partition of unity) という．

さて，ここから差分法を考える．まず，差分作用素を定義する．

定義 62.3. e_i を単位ベクトル $(\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni})$ とし，$h \in \mathbf{R}$ とするならば，差分作用素 δ_h^i を任意の関数 u に対して，

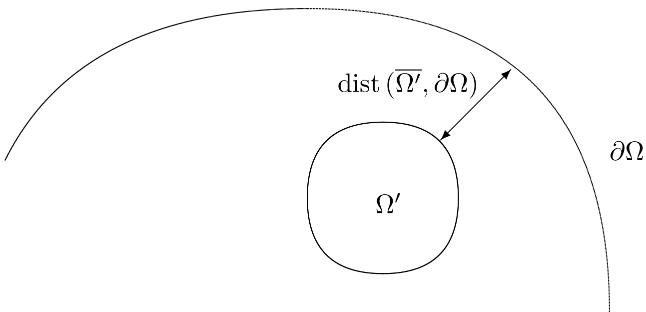
$$\delta_h^i u = \frac{1}{h}(u(x + he_i) - u(x))$$

により定義する．

以下，ここで定義した差分作用素に関する定理を 2 つあげる：

定理 62.6. $u \in H^m(\Omega)$, $m \geq 1$ とする．$\overline{\Omega'} \subset \Omega$ で $0 < h < \mathrm{dist}\,(\overline{\Omega'}, \partial\Omega)$ とする．このとき，

$$\|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \leq \|u\|_{m,\Omega}.$$



証明． 任意の $f \in C^1(a, b+h)$ について，

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(\xi)\, d\xi.$$

シュワルツの不等式より，

$$|f(x+h) - f(x)|^2 \leq h \int_x^{x+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^2\, dx &\leq h \int_a^b \int_x^{x+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi \\
&\leq h \left\{ \int_a^{a+h} \int_a^{\xi} + \int_{a+h}^{b} \int_{\xi-h}^{\xi} + \int_b^{b+h} \int_{\xi-h}^{b} \right\} |f'(\xi)|^2\, d\xi \\
&\leq h^2 \int_a^{b+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi.
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|^2 dx \leq \int_a^{b+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi. \tag{62.23}$$

さて，$u \in C^m(\Omega)$ ならば，多重積分を累次積分にして，(62.23)を適用すると，$|\alpha| \leq m-1$ に対して，

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} |D^\alpha \delta_h^i u_k|^2\, dx &= \int_{\Omega'} |\delta_h^i D^\alpha u_k|^2\, dx \\
&\leq \int_{\Omega} |D_i D^\alpha u_k|^2\, dx.
\end{aligned}$$

したがって，

$$\|\delta_h^i u_k\|_{m-1,\Omega'} \leq \|u_k\|_{m,\Omega}.$$

よって，$H^m(\Omega)$ において，$u_k \to u$ とすると，

$$\|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \leq \|u\|_{m,\Omega}.$$

ここで，左辺の正当性は，

$$\begin{aligned}
\left| \|\delta_h^i u_k\|_{m-1,\Omega'} - \|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \right| &\leq \|\delta_h^i u_k - \delta_h^i u\|_{m,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{h^2} \left\{ \|u_k(\cdot + h) - u(\cdot + h)\|_{m,\Omega} + \|u_k(\cdot) - u(\cdot)\|_{m,\Omega} \right\} \\
&= \frac{1}{h^2} \|u_k(\cdot) - u(\cdot)\|_{m,\Omega} \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

より確かめられる．

定理 62.7 (差分法の基本定理)**．** Ω は線分条件をみたすとする．$u \in H^m(\Omega)$ で，任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して，

$$\|\delta_h^i u\|_{m,\Omega'} \leq C, \quad 0 < |h| < \operatorname{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega)$$

となる Ω'，h によらない定数 $C > 0$ が存在するとする．このとき，

$$u \in H^{m+1}(\Omega), \quad \|D_i u\|_{m,\Omega} \leq C \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

証明. $m=0$ のときについて示す．弱コンパクト性定理（定理 34.1）より，$h_k \to 0$ となる実数列 $\{h_k\}$ と，$u_i \in L^2(\Omega')$ が存在して，$L^2(\Omega')$ において $k \to \infty$ とするとき，

$$\delta^i_{h_k} u \longrightarrow u_i \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

仮定より明らかに，

$$\|u_i\|_{0,\Omega'} \le C. \tag{62.24}$$

また，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} u_i \varphi\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \delta^i_{h_k} u\varphi\, dx \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} u\delta^i_{-h_k}\varphi\, dx \\ &= -\int_{\Omega'} uD_i\varphi\, dx.\end{aligned}$$

これが，任意の $\Omega' \Subset \Omega$ で成立するから，u_i は Ω において一意的に定まり，u の導超関数に等しい．ゆえに，

$$u \in W^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) = H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

さらに，(62.24) より，

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} |u_i(x)|^2\, dx \le C, \quad \Omega_k = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > 1/k\}$$

である．

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} |u_i(x)|^2\, dx = \int_{\Omega} |u_i(x)|^2\, dx$$

より，

$$\int_{\Omega} |u_i(x)|^2\, dx \le C.$$

したがって，

$$u \in W^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

あとは同じ議論を繰り返せばよい．

62.2.2　ゴールディングの不等式（定理 62.8）

ゴールディングの不等式は，解の存在，一意性，さらに正則性を示すのに重要な不等式である．

まず，1 つの補間定理を証明しておく：

補題 62.1. n と m にのみ依存して定まる定数 γ_0 が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ と $\varphi \in C_0^m(\mathbf{R}^n)$ に対して次の式が成り立つ．

$$|\varphi|^2_{j,\mathbf{R}^n} \le {\gamma_0}^m (\varepsilon^{m-j}|\varphi|^2_{m,\mathbf{R}^n} + \varepsilon^{-j}|\varphi|^2_{0,\mathbf{R}^n}), \quad j=0,1,\ldots,m. \tag{62.25}$$

証明. φ のフーリエ変換 $\widehat{\varphi}$ を

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx$$

とする．部分積分により，$\varphi \in C_0^1(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\begin{aligned}\widehat{D_k\varphi}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n} D_k\varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbf{R}^n}\varphi(x)i\xi_k e^{-ix\cdot\xi}\,dx \\ &= i\xi_k\widehat{\varphi}(\xi).\end{aligned}$$

したがって，$\varphi \in C_0^m(\mathbf{R}^n)$，$|\alpha| = j \le m$ ならば，

$$\widehat{D^\alpha\varphi}(\xi) = (i\xi)^\alpha\widehat{\varphi}(\xi).$$

パーシバルの等式より，

$$\begin{aligned}|D^\alpha\varphi|_{0,\mathbf{R}^n}^2 &= \int_{\mathbf{R}^n}\xi^{2\alpha}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \int_{|\xi|^2\le\varepsilon^{-1}}\xi^{2\alpha}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{|\xi|^2>\varepsilon^{-1}}\xi^{2\alpha}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\le \varepsilon^{-j}\int_{\mathbf{R}^n}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,dx + \varepsilon^{m-j}\int_{|\xi|^2>\varepsilon^{-1}}|\xi|^{2m}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi.\end{aligned}$$

パーシバルの等式をもう 1 度適用すると，

$$|D^\alpha\varphi|_{0,\mathbf{R}^n}^2 \le \varepsilon^{-j}|\varphi|_{0,\mathbf{R}^n}^2 + \gamma\varepsilon^{m-j}|\varphi|_{m,\mathbf{R}^n}^2.$$

よって，(62.25)が従う．

系 62.1. 定数 $\gamma_0 = \gamma_0(n,m) > 0$ が存在して，任意の $0 < \varepsilon \le 1$，$\varphi \in C_0^m(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$\|\varphi\|_{m-1,\mathbf{R}^n}^2 \le \gamma_0(\varepsilon|\varphi|_{m,\mathbf{R}^n} + \varepsilon^{1-m}|\varphi|_{0,\mathbf{R}^n})$$

が成り立つ．

さて，ゴールディングの不等式について述べる．2 次形式

$$B(\varphi,\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx$$

を扱う．B の主要部 (principal part) に対して，

$$B'(\varphi,\varphi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx$$

とする．

定義 62.4. 正の定数 E_0 をすべての実数ベクトル ξ と任意の $x \in \Omega$ について，

(62.26)
$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} \ge E_0|\xi|^{2m}$$

が成り立つように定めることができるとき，2 次形式 $B(\varphi,\varphi)$ は Ω において**一様に強楕円型**であるという．(62.26)が成り立つような E_0 を B の**楕円性定数**という．

定理 62.8 (ゴールディングの不等式). Ω を任意の開集合とする．$B(\varphi, \varphi)$ を Ω において一様に強楕円型の 2 次形式とし，E_0 を B の楕円性定数とする．

(i) $|\alpha| = |\beta| = m$ のとき，$a_{\alpha\beta}(x)$ は Ω で一様連続,

(ii) $|\alpha| + |\beta| \leq 2m$ のとき，$a_{\alpha\beta}(x)$ は有界可測

と仮定する．このとき，定数 $\gamma_0 > 0$，$\lambda_0 \geq 0$ を

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \gamma_0 E_0 \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - \lambda_0 \|\varphi\|_{0,\Omega}^2$$

がすべての $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ について成り立つようにとれる．ただし，γ_0 は n と m のみに依存し，λ_0 は n, m, E_0，$|\alpha| = |\beta| = m$ のときの $a_{\alpha\beta}(x)$ の連続度と $\sup_{x\in\Omega} \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2m} |a_{\alpha\beta}(x)|$ にのみに依存して定まる．ここで，f の連続度とは,

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbf{Q} \\ \|x-y\|\leq\delta}} |f(x) - f(y)| = \omega(\delta).$$

この証明はいくつかの補題を通してなされる．その補題における B は，少なくとも定理 62.8 の条件をみたしていると仮定する．以下，n, m にのみ依存して定まる正の定数を一般に γ で表し，n, m, E_0, $|\alpha| = |\beta| = m$ に対する $a_{\alpha\beta}(x)$ の連続度と $|\alpha| + |\beta| \leq 2m$ に対する $|a_{\alpha\beta}(x)|$ の上限にのみ依存する正の定数を一般に K で表すことにする．

補題 62.2. $B = B'$ とし，B は定数係数をもつとする．そのとき，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して,

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \gamma E_0 |\varphi|_{m,\Omega}^2.$$

証明. $\Omega = \mathbf{R}^n$ としてもよいのは明らか．パーシバルの等式より，$|\alpha| = |\beta| = m$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} D^\alpha\varphi \overline{D^\beta\varphi}\, dx &= \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{D^\alpha\varphi}\overline{\widehat{D^\beta\varphi}}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \xi^{\alpha+\beta} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) &= \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \int_{\mathbf{R}^n} \xi^{\alpha+\beta} |\widehat{\varphi(\xi)}|^2\, d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta}\, d\xi. \end{aligned}$$

ここで，B の楕円型性より,

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geq \gamma E_0 \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha}$$

であるから,

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \gamma E_0 \int_{\mathbf{R}^n} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \sum_{|\alpha|=m} \xi^{2\alpha}\, d\xi.$$

ゆえに，パーシバルの等式より,

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \gamma E_0 |\varphi|_{m,\Omega}^2.$$

補題 62.3. B' は定数係数をもつとする．そのとき，任意の $\varphi \in C_0^m(\Omega)$ について，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi, \varphi) \geq \gamma E_0 \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - K\|\varphi\|_{0,\Omega}^2.$$

証明.

$$B(\varphi, \varphi) = B'(\varphi, \varphi) + \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq 2m-1} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha \varphi \overline{D^\beta \varphi}\, dx.$$

シュワルツの不等式より，$|\alpha| + |\beta| \leq 2m - 1$ について，

$$\left| \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha \varphi \overline{D^\beta \varphi}\, dx \right| \leq K|\varphi|_{|\alpha|,\Omega} |\varphi|_{|\beta|,\Omega}.$$

よって，

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, B(\varphi, \varphi) &\geq \mathrm{Re}\, B'(\varphi, \varphi) - K\|\varphi\|_{m-1}|\varphi|_m - K\|\varphi\|_{m-1}^2 \\ &\geq \gamma E_0 |\varphi|_m^2 - K\|\varphi\|_{m-1}|\varphi|_m - K\|\varphi\|_{m-1}^2. \end{aligned}$$

最後の不等式は補題 62.2 からの結果である．

さて，任意の $\varepsilon > 0$，$a, b > 0$ に対して，

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$$

が成り立つことを (62.27)に適用すると，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi, \varphi) \geq (\gamma E_0 - K\varepsilon)|\varphi|_m^2 - K\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)\|\varphi\|_{m-1}^2.$$

そこで，$\varepsilon = \dfrac{\gamma E_0}{2K}$ ととると，

$$\mathrm{Re} B(\varphi, \varphi) \geq \frac{1}{2}\gamma E_0 |\varphi|_m^2 - K\|\varphi\|_{m-1}^2.$$

$\varphi \in C_0^m(\mathbf{R}^n)$ と考えられるから，系 62.1 より，$0 < \eta \leq 1$ について，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi, \varphi) \geq \frac{1}{2}\gamma E_0 |\varphi|_m^2 - K(\eta\|\varphi\|_m^2 + \eta^{1-m}\|\varphi\|_0^2).$$

もし，$\eta = \dfrac{\gamma E_0}{4K}$ ととると，

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi, \varphi) \geq \frac{1}{4}\gamma E_0 \|\varphi\|_m^2 - K\|\varphi\|_0^2.$$

これにより，B の主要部が定数係数をもつ場合のゴールディングの不等式が証明できた．

次に，一般の場合について証明する．

補題 62.4. $B = B'$ を仮定する．このとき，定数 ρ を

$$\mathrm{Re}\, B(\varphi, \varphi) \geq \gamma E_0 \|\varphi\|_{m,\Omega}^2$$

が $\mathrm{supp}\, \varphi$ の直径が ρ より小なる任意の $\varphi \in C_0^m(\Omega)$ について成り立つように定めることができる．ただし，ρ は n, m, E_0, $a_{\alpha\beta}(x)$ の連続度のみに依存する．

証明. 係数は一様連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ について，$|x-y| < \rho$ のとき，

$$|a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(y)| < \varepsilon, \quad x, y \in \Omega$$

となるように ρ を定めることができる．

もし，$\varphi \in C_0^m(\Omega)$ で，$\operatorname{supp}\varphi$ の直径が ρ より小であるとすると，$x^0 \in \operatorname{supp}\varphi$ とし，

$$B_0(\varphi,\varphi) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x^0)\int_{\operatorname{supp}\varphi} D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx$$

とおく．そのとき，シュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) &= \operatorname{Re}B_0(\varphi,\varphi) + \operatorname{Re}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}\int_{\operatorname{supp}\varphi}\left(a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x^0)\right)D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx \\ &\geq \operatorname{Re}B_0(\varphi,\varphi) - \varepsilon\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}|D^\alpha\varphi|_{0,\Omega}|D^\beta\varphi|_{0,\Omega} \\ &\geq \operatorname{Re}B_0(\varphi,\varphi) - \gamma_1\varepsilon\|\varphi\|_{m,\Omega}^2.\end{aligned}$$

B_0 は定数係数をもつので，補題 62.3 が適用できて，(62.27)より，

$$\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) \geq (\gamma E_0 - \gamma_1\varepsilon)\|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - K\|\varphi\|_{0,\Omega}^2.$$

ここで，$\varepsilon = \dfrac{\gamma E_0}{2\gamma_1}$ とおくと，

$$\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) \geq \frac{1}{2}\gamma E_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - K\|\varphi\|_{0,\Omega}^2. \tag{62.27}$$

$\operatorname{supp}\varphi$ の直径が ρ より小であるから，ポアンカレの不等式より，

$$\|\varphi\|_0 \leq \gamma\rho^m\|\varphi\|_m$$

であり，(62.27)は，

$$\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) \geq \left(\frac{1}{2}\gamma E_0 - K\gamma^2\rho^{2m}\right)\|\varphi\|_{m,\Omega}^2$$

となる．ρ を十分小にとると，

$$\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2.$$

系 62.2. 補題 62.4 は仮定 $B = B'$ を省いても正しい．

証明. $\varphi \in C_0^m(\Omega)$ であり，$\operatorname{supp}\varphi$ の直径は ρ より小であると仮定する．ただし，ρ は補題 62.4 で B' に対して定められた定数である．そのとき，この補題 62.4 より，$F = \operatorname{supp}\varphi$ とすると，

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) &= \operatorname{Re}B'(\varphi,\varphi) + \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq 2m-1}\int_F a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha\varphi\overline{D^\beta\varphi}\,dx \\ &\geq \gamma E_0\|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - K\|\varphi\|_{m,F}\|\varphi\|_{m-1,F}\end{aligned}$$

任意の $\varepsilon > 0$，$a, b > 0$ について，

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$$

という不等式を用いると，(62.28)は，

$$\text{(62.28)} \qquad \operatorname{Re} B(\varphi,\varphi) \geq \gamma E_0 \|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - K\varepsilon\|\varphi\|_{m,\Omega}^2 - \frac{K}{\varepsilon}\|\varphi\|_{m-1,F}^2.$$

となる．ポワンカレの不等式より，

$$\|\varphi\|_{m-1,F} \leq \gamma\rho\|\varphi\|_{m,F} = \gamma\rho\|\varphi\|_{m,\Omega}$$

だから, (62.28)は，

$$\operatorname{Re} B(\varphi,\varphi) \geq \left(\gamma E_0 - K\varepsilon - \frac{K\rho^2}{\varepsilon}\right)\|\varphi\|_{m,\Omega}^2.$$

今，簡単のために, $\varepsilon = \dfrac{\gamma E_0}{2K}$ とおくと，$\rho \leq \dfrac{\varepsilon\gamma E_0}{4K}$ ととればよい．

次の補題は，定理 62.5 に少し修正を加えた 1 の分解である．

補題 62.5. F を $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな部分集合とし，$F \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\nu} O_i$ とする．ただし，O_i は開集合とする．このとき，$0 \leq \zeta_i \leq 1$ であり，

$$\sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(x)^2 \equiv 1, \quad x \in F$$

となる $\zeta_i \in C_0^\infty(O_i)$ が存在する．

証明. O_i', O_i'' を

$$O_i' \Subset O_i'' \Subset O_i \quad (i = 1, \ldots, \nu)$$

であり，

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} O_i''$$

となるように選ぶ．

また，$\zeta_i' \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$ を次のようにとる．すべての i について $0 \leq \zeta_i' \leq 1$ で，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\nu} O_i''$ 上において $\zeta_0'(x) \equiv 1$，$\operatorname{supp} \zeta_0' \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\nu} O_i'$ であり，$1 \leq i \leq \nu$ について，O_i' 上で $\zeta_i'(x) \equiv 1$，$\operatorname{supp} \zeta_i' \subset O_i$ となるようにとる．

そのとき，$1 \leq i \leq \nu$ について，

$$\zeta_i(x) = \zeta_i'(x)\left\{\sum_{j=1}^{\nu} \zeta_j'(x)^2 + (1 - \zeta_0'(x))^2\right\}^{-1/2}$$

とおく．

{ } の中は決して 0 にはならないので，$\zeta_i \in C_0^\infty(O_i)$. そして，$x \in F$ に対して $1 - \zeta_0'(x) = 0$ だから，

$$\sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(x)^2 = 1, \quad x \in F.$$

次に，補題 62.5 を少し修正した次の補題をあげる：

補題 62.6. $d > 0$ とし，任意の整数の n 組 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ に対して，

$$Q_\alpha = \{x : d(\alpha_k - 1) < x_k < d(\alpha_k + 1),\ k = 1, \ldots, n\}$$

とおく．そのとき，$0 \le \zeta \le 1$ であり，さらに，

$$\sum_\alpha \zeta(x - \alpha d)^2 \equiv 1$$

となるような $\zeta \in C_0^\infty(Q_0)$ が存在する．すなわち，$\zeta_\alpha(x) \equiv \zeta(x - \alpha d)$ と定めると，$\zeta_\alpha \in C_0^\infty(Q_0)$ で，

$$\sum_\alpha \zeta_\alpha(x)^2 = 1$$

が成り立つ．

証明． $\zeta' \in C_0^\infty(Q_0)$ を $x \in \frac{3}{4}Q_0$ について $\zeta'(x) \equiv 1$ となるようにとる．そのとき，

$$\zeta(x) = \zeta'(x)\left(\sum_\alpha \zeta'(x - \alpha d)^2\right)^{-1/2}$$

とおく．補題 62.5 の証明と同様に，$\zeta(x - \alpha d)$ はこの補題の要求している条件をみたしている．

証明 (定理 62.8)．補題 62.6 を適用する．立方体 Q_α の一辺を $2d$ にとり，d は Q_α の直径が補題 62.4 における ρ よりも小にとる．よって，$\sqrt{n}d < \rho$. 立方体 Q_α とそれに対応する ζ_α にある順序で番号をつけて，$Q_1, Q_2, \ldots; \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ とする．ζ_i は ζ_1 を平行移動したものであるから，

$$|D^\alpha \zeta_i| \le K, \quad |\alpha| \le m. \tag{62.29}$$

さて，$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ とする．そのとき，(62.28)より，

$$\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \ge \operatorname{Re} B'(\varphi, \varphi) - K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}. \tag{62.30}$$

ところで，

$$\begin{aligned} B'(\varphi, \varphi) &= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty \zeta_i(x)^2 a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha \varphi \overline{D^\beta \varphi}\, dx \\ &= \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha(\zeta_i \varphi)\overline{D^\beta(\zeta_i \varphi)}\, dx + R(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

ただし，ライプニッツの公式により，

$$R(\varphi, \varphi) = -\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \sum_{i=1}^\infty \sum_{\substack{\gamma \le \alpha \\ \gamma \ne \alpha}} \sum_{\substack{\delta \le \beta \\ \delta \ne \beta}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) \binom{\alpha}{\gamma}\binom{\beta}{\delta} D^{\alpha-\gamma}\zeta_i D^\gamma \varphi \cdot D^{\beta-\gamma}\zeta_i \overline{D^\delta \varphi}\, dx.$$

したがって，(62.29)より，

$$|R(\varphi, \varphi)| \le K \sum_{|\gamma|+|\delta| \le 2m-1} \sum_{i=1}^\infty \int_{Q_i} |D^\gamma \varphi||D^\delta \varphi|\, dx. \tag{62.31}$$

さて，立方体 Q_i は重なっているが，任意に 1 点を定めておけばその点は高々 2^n 個の立方体に含まれるので，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{Q_i}|D^\gamma\varphi||D^\delta\varphi|\,dx = 2^n\int_\Omega |D^\gamma\varphi||D^\delta\varphi|\,dx$$

であり，(62.31)より，

$$|R(\varphi,\varphi)| \le K\sum_{|\gamma|+|\delta|\le 2m-1}\int_\Omega |D^\gamma\varphi||D^\delta\varphi|\,dx.$$

シュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned}|R(\varphi,\varphi)| &\le K\sum_{|\gamma|+|\delta|\le 2m-1}\|D^\gamma\varphi\|_{0,\Omega}\|D^\delta\varphi\|_{0,\Omega}\\ &\le K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}.\end{aligned}$$

したがって，(62.31)より，

$$\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) \ge \sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{Re}B'(\zeta_i\varphi,\zeta_i\varphi) - K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}. \tag{62.32}$$

よって，$\operatorname{supp}(\zeta_i\varphi)$ の直径は Q_i の直径をこえないから，$\operatorname{supp}(\zeta_i\varphi)$ の直径は ρ より小さい．補題 62.4 により，

$$\operatorname{Re}B'(\zeta_i\varphi,\zeta_i\varphi) \ge \gamma E_0\|\zeta_i\varphi\|^2_{m,\Omega}$$

である．

ゆえに，(62.32)より，

$$\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) \ge \gamma E_0\sum_{i=1}^{\infty}\|\zeta_i\varphi\|^2_{m,\Omega} - K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}. \tag{62.33}$$

(62.31)から (62.32)を導いたのと同様にして，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\|\zeta_i\varphi\|^2_{m,\Omega} &= \sum_{|\alpha|\le m}\sum_{i=1}^{\infty}\int_\Omega |D^\alpha(\zeta_i\varphi)|^2\,dx\\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\sum_{i=1}^{\infty}\int_\Omega {\zeta_i}^2|D^\alpha\varphi|^2\,dx + R_1(\varphi,\varphi)\\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha\varphi|^2\,dx + R_1(\varphi,\varphi)\\ &= \|\varphi\|^2_{m,\Omega} + R_1(\varphi,\varphi).\end{aligned}$$

ただし，$R_1(\varphi,\varphi)$ は (62.32)と類似な

$$|R_1(\varphi,\varphi)| \le K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}$$

という評価式をもつ 2 次形式である．この結論と (62.33)より，

$$\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi) \ge \gamma E_0\|\varphi\|^2_{m,\Omega} - K\|\varphi\|_{m,\Omega}\|\varphi\|_{m-1,\Omega}.$$

あとは補題 62.3 の証明と同様にして，

$$\operatorname{Re}B(\varphi,\varphi)| \ge \gamma_0\|\varphi\|^2_{m,\Omega} - \lambda_0\|\varphi\|^2_{0,\Omega}.$$

62.2.3　超関数解の内部正則性定理（定理 62.9）

補題 62.7. $x^0 \in \partial\Omega$ とする．座標軸を回転して，x^0 のある近傍 U を，

$$U = \{y : f(y') - h_0 < y_n < f(y') + h_0,\ |y'| < r_0\}$$

と表し，

$$U \cap \partial\Omega = \{y : y_n = f(y'),\ |y'| < r_0\}$$

と仮定する．ただし，$y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$, r_0 は正の定数，f は $|y'| < r_0$ での y' の連続関数, $x^0 = (0, 0, \ldots, f(0))$ とする．さらに，$u \in H_0^1(\Omega)$ で, u は $U \cap \overline{\Omega}$ で定義され，連続であるとする．このとき，$u(x^0) = 0$ である．

証明. $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ とし，$|y'| < r_0$ となるような y' を固定する．$0 < h < h_0$ について，$\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ に注意すると，

$$\varphi_k(y', f(y') - h) = \int_{f(y')}^{f(y')-h} D_n\varphi_n \, dy_n.$$

よって，シュワルツの不等式より，

$$|\varphi_k(y', f(y') - h)|^2 \leq h \int_{f(y')-h}^{f(y')} |D_n\varphi_n|^2 \, dy_n.$$

これを y' について積分すると，$r < r_0$ のとき，

$$\int_{|y'|<r} |\varphi_k(y', f(y') - h)|^2 \, dy' \leq h \int_{G_h} |D_n\varphi_n|^2 \, dy.$$

ただし，$G_h = \{y : f(y') - h < y_n < f(y'),\ |y'| < r_0\}$ とする．したがって，$0 < \eta < h_0$ とすると，

$$\begin{aligned}\int_0^\eta \int_{|y'|<r} |\varphi_k(y', f(y') - h)|^2 \, dy' \, dh &\leq \int_0^\eta h \int_{G_h} |D_n\varphi_n|^2 \, dy \, dh \\ &\leq \frac{1}{2}\eta^2 \int_{G_\eta} |D_n\varphi_n|^2 \, dy.\end{aligned}$$

$H_0^1(\Omega)$ で $\varphi_k \to u$ とすると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta}\int_0^\eta \int_{|y'|<r} |u(y', f(y') - h)|^2 \, dy' \, dh &\leq \frac{1}{2}\eta \int_{G_\eta} |D_n u|^2 \, dy \\ &\leq \frac{1}{2}\eta \|u\|_1^2.\end{aligned}$$

u の連続性より，$\eta \to 0$ とすると，

$$\int_{|y'|<r} |u(y', f(y') - h)|^2 \, dy' = 0.$$

よって，$|y'| < r$ のとき，

$$u(y', f(y') - h) = 0.$$

注意 62.5. この補題から，$u \in H_0^m(\Omega)$ で，$x^0 \in \partial\Omega$ が定理の条件をみたし，$D^\alpha u$ $(|\alpha| \leq m-1)$ が x^0 の近傍において $\overline{\Omega}$ で連続ならば，$D^\alpha u$ は x^0 で 0 になることがわかる．

さて，双１次形式

$$B(\varphi,\psi)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}\left(D^\alpha\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta\psi\right)$$

をディリクレ双１次形式とよぶ．

以下，任意の $\varphi_k\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，u が

$$B(\varphi,u)=(\varphi,f)$$

をみたし，ある j $(1\le j\le m)$ について，

$$|B(\varphi,u)|\le C\|\varphi\|_{m-j,\Omega}$$

であることを仮定する．ただし，$C>0$ を m, n, Ω, u に依存する定数とする．そして，$u\in H_0^m(\Omega)$ ならば，この不等式により $u\in H^{m+j}(\Omega)$ が導かれることを示していく．

ここで，次の記号を導入する: $G=G_R$ で球 $\{x:|x|<R\}$ をあらわし，$R'<R$，$R''=\dfrac{1}{2}(R+R')$ とし，$G'=G_{R'}$，$G''=G_{R''}$ と書く．

定理 62.9. $G=G_R$ とし，次を仮定する：

(i) 双１次形式

$$B(u,v)=\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m}\left(D^\alpha u, a_{\alpha\beta}D^\beta v\right)_{0,G}$$

で $a_{\alpha\beta}(x)$ は G で有界 $(|a_{\alpha\beta}(x)|\le M)$ かつ 可測で，$|\alpha|=m$ について $a_{\alpha\beta}(x)$ は一様リプシッツ条件，すなわち，

$$|a_{\alpha\beta}(x)-a_{\alpha\beta}(y)|\le K|x-y|,\quad x,y\in G$$

をみたすとする．さらに，$\xi\in\mathbf{R}$，$x\in G$ に対して，

$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}\ge E|\xi|^{2m}$$

とする．

(ii) $u\in H^m(G)$ であり，任意の $\zeta\in C_0^\infty(\{x:|x|<R\})$ に対して，$\zeta u\in H_0^m(G)$．（これは G が半球のときのみ必要であって，G が球のときは自動的に満たされている.）

(iii) 定数 $C>0$ が存在して，任意の $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，

$$|B(\varphi,u)|\le C\|\varphi\|_{m-1}.$$

このとき，$D_iu\in H^m(G')$ であり，m, n, E, M, K, R, R' に依存する定数 γ を，

$$\|D_iu\|_{m,G'}\le\gamma(C+\|u\|_{m,G})$$

であるように定めることができる．ただし，G が球のときは $i=1, 2, \ldots, n$ で，G が半球のときは $1, 2, \ldots, n-1$ である．

証明. まず，仮定 (iii) が成り立つとき，$|\alpha|<m$ について $a_{\alpha\beta}(x)$ を 0 としてよいことを示す．

$$\begin{aligned}
|B(\varphi,u)| &= \left|\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|\le m}}\left(D^\alpha\varphi,a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)_{0,G}+\sum_{\substack{|\alpha|<m\\|\beta|\le m}}\left(D^\alpha\varphi,a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)\right|\\
&\ge \left|\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|\le m}}\left(D^\alpha\varphi,a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)_{0,G}\right|-C_1\|\varphi\|_{m-1,G}\|u\|_{m,G}
\end{aligned}$$

より，任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ について，仮定 (iii) より，

$$\left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta} D^\beta u\right)_{0,G} \right| \le (C + C_1 \|u\|_{m,G}) \|\varphi\|_{m-1,G}$$

となる．ただし，$C_1 > 0$ は m, n, M に依存する定数である．この不等式から，$a_{\alpha\beta}(x) = 0$ ($|\alpha| < m$) としてもよい．

さて，$\zeta \in C_0^\infty(\{x : |x| \subset R\})$ を，G' 上で $\zeta(x) \equiv 1$，G'' の外で $\zeta(x) \equiv 0$ である関数とする．ここでは，関数 $\zeta(x)$ を固定しておく．$0 < h < R - R''$ に対して，

$$v_h = \delta_h^i(\zeta u) = \delta_h(\zeta u)$$

とする．

また，

$$D^\beta v_h = \delta_h D^\beta(\zeta u).$$

したがって，任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ について，

$$B(\varphi, v_h) = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta} \delta_h D^\beta(\zeta u)\right)_{0,G}. \tag{62.34}$$

ここで，m, n, M, K, E, R, R' に依存して決まる定数を k とする．(62.34)でライプニッツの公式を使い，定理 62.6 より，$|\gamma| \le m-1$ に対して，

$$\begin{aligned} \|\delta_h(D^{\beta-\gamma}\zeta \cdot D^\gamma u)\|_{0,G_R} &\le \|D^{\beta-\gamma}\zeta \cdot D^\gamma u\|_{1,G_{R+h}} \\ &= \|D^{\beta-\gamma}\zeta \cdot D^\gamma u\|_{1,G_R} \\ &\le k\|u\|_{m,G}. \end{aligned}$$

したがって，(62.34)，(62.35)より，

$$|B(\varphi, v_h)| \le \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta} \delta_h(\zeta D^\beta u)\right) \right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G}.$$

さて，右辺第 1 項は次のように評価できる：

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta} \delta_h(\zeta D^\beta u)\right) \right| \\ = &\left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, \delta_h(a_{\alpha\beta} \zeta D^\beta u)\right) - \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, \delta_h a_{\alpha\beta} \cdot \zeta(x+he_i) D^\beta u(x+he_i)\right) \right| \\ \le &\left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\le m}} \left(D^\alpha \varphi, \delta_h(a_{\alpha\beta} \zeta D^\beta u)\right) \right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G}. \end{aligned}$$

ここでは，$a_{\alpha\beta}(x)$ に関するリプシッツ条件を用いた．

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
|B(\varphi, v_h)| &\leq \left|\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, \delta_h(a_{\alpha\beta}\zeta D^\beta u)\right)\right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G} \\
&= \left|-\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\leq m}} \left(\zeta\delta_{-h}D^\alpha\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)\right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G}.
\end{aligned}
$$

ライプニッツの公式より，

$$
\begin{aligned}
|B(\varphi, v_h)| &\leq \left|\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha(\zeta\delta_{-h}\varphi), a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)\right| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G} \\
&= |B(\zeta\delta_{-h}\varphi, u)| + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G}.
\end{aligned}
$$

仮定 (iii) より，

$$
|B(\zeta\delta_{-h}\varphi, u)| \leq C\|\zeta\delta_{-h}\varphi\|_{m-1,G}.
$$

よって，定理 62.6 より，

$$
\begin{aligned}
|B(\varphi, v_h)| &\leq C\|\zeta\delta_{-h}\varphi\|_{m-1,G} + k\|\varphi\|_{m,G}\|u\|_{m,G} \\
&= k(C + \|u\|_{m,G})\|\varphi\|_{m,G}.
\end{aligned}
$$

この不等式は任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ について成り立つので，$\varphi \in H_0^m(G)$ で成り立つ．

特に，$\varphi = v_h$ について成り立つので，

$$
|B(v_h, v_h)| \leq k\|v_h\|_{m,G}(C + \|u\|_{m,G}).
$$

ゴールディングの不等式（定理 62.8）より，

$$
\begin{aligned}
\|v_h\|_{m,G}^2 &\leq {\gamma_0}^{-1}E^{-1}\left(\mathrm{Re}B(v_h, v_h) + \lambda_0\|v_h\|_{0,G}^2\right) \\
&\leq {\gamma_0}^{-1}E^{-1}\left\{k\|v_h\|_{m,G}(C + \|u\|_{m,G}) + \lambda_0\|v_h\|_{0,G}^2\right) \\
&\leq k\|v_h\|_{m,G}\left(C + \|u\|_{m,G} + \|v_h\|_{0,G}\right) \\
&\leq k\|v_h\|_{m,G}\left(C + \|u\|_{m,G} + \|u\|_{1,G}\right).
\end{aligned}
$$

ここでは，(62.35)を $\beta = \gamma = 0$, $m = 1$ として，

$$
\|v_h\|_{0,G} = \|\delta_h(\zeta u)\|_{0,G} \leq k\|u\|_{1,G}
$$

として用いた．$\|v_h\|_{m,G}$ で両辺を割ると，

$$
\|\delta_h(\zeta u)\|_{m,G} = \|v_h\|_{m,G} \leq k(C + \|u\|_{m,G}).
$$

定理 62.7 より，この不等式から $D_i(\zeta u) \in H^m(G')$ であり，

$$
\|D_i(\zeta u)\|_{m,G'} \leq k(C + \|u\|_{m,G})
$$

であることがわかる．

G' 上で $\zeta(x) \equiv 1$ より，

$$
\|D_i u\|_{m,G'} \leq k(C + \|u\|_{m,G}).
$$

この定理は，領域 Ω に含まれる任意の球について適用できるので，この定理は内部正則性を意味している．さらに，この定理は法線方向の導関数 $D_n u$ についても正しい．

特に，$m=1$ のときを考える．まず，任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して，u が方程式

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)_{0,\Omega}$$

をみたしているならば，Ω の任意の球 S に対して，

$$|B(\varphi, u)_S| \leq \|f\|_{0,S} \|\varphi\|_{1-1,S}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(S)$$

が成り立つ．そして，定理 62.9 を S について適用することができる．これより，$u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ である．

もし，$G \subset \Omega$ がその境界の平坦な部分が境界 $\partial\Omega$ に含まれるような半球で，そして，座標軸を回転して ∂G の平坦な部分が平面 $x_n = 0$ に含まれているとする．このとき，定理 62.9 より，任意の $R' < R$ に対して，

$$D_i u \in H^1(G') \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

が成り立つ．ゆえに，

$$D_i D_j u \in H^0(G') \quad (i = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, \ldots, n).$$

B は一様に強楕円型であるから，

$$\mathrm{Re}\, a_{nn}(x) \geq E.$$

したがって，$Au = f$ より，

$${D_n}^2 u = a_{nn}(x)^{-1} \left(f - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u - \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u - c(x) u \right)$$

とできる．右辺のすべての項は $H^0(G')$ に属するから，${D_n}^2 \in H^0(G')$ であり，$u \in H^2(G')$．さらに，定理 62.9 のなかで導関数 $D_i D_j u$ $(i \neq n)$ について得た評価式より，

$$\|D_n u\|_{1,G'} \leq \gamma(C + \|u\|_{1,G}).$$

ゆえに，

$$\|u\|_{2,G'} \leq \gamma(C + \|u\|_{1,G}). \quad \square$$

62.2.4　超関数解の大域的正則性定理（定理 62.10）

境界での正則性の問題にはいる前に，次の補題をあげる：

補題 62.8. $G = \{x : |x| < R, x_n > 0\}$ とする．$u \in H^{m+1}(G)$ で，すべての $\zeta \in C_0^\infty(\{x : |x| < R\})$ に対して $\zeta u \in H_0^m(G)$ であるならば，すべての $\zeta \in C_0^\infty(\{x : |x| < R\})$，$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ に対して，

$$\zeta D_i u \in H_0^m(G).$$

証明. $\zeta \in C_0^\infty(\{x : |x| < R\})$ を固定し，$i \neq n$ とする．G の外で u を 0 と定義すると，$x \in G$ で，

$$\zeta(x) \delta_h^i u(x) = \delta_h^i (\zeta u)(x) - \delta_h^i \zeta(x) \cdot u(x + h e_i). \tag{62.35}$$

明らかに，十分小な $|h|$ に対して，

$$\delta_h^i (\zeta u) \in H_0^m(G).$$

また，十分小な $|h|$ に対して，

$$\delta_h^i \zeta \in C_0^\infty(\{x : |x| < R)$$

であるから，十分小な $|h|$ に対して，

$$\delta_h^i \zeta(x) \cdot u(x + he_i) \in H_0^m(G).$$

よって，十分小な $|h|$ に対して，(62.35)より，

$$\zeta \delta_h^i u \in H_0^m(G).$$

適当に $R' < R$ を取れば，$\mathrm{supp}\, \zeta \cap G \subset G'$ である．定理 62.6 より，十分小な $|h|$ に対して，

$$\begin{aligned} \|\delta_h^i(\zeta u)\|_{m,G} &= \|\delta_h^i(\zeta u)\|_{m,G''} \\ &\leq \|\zeta u\|_{m+1,G} \\ &\leq \gamma\|\zeta\|_{m+1,G}\|u\|_{m+1,G}. \end{aligned}$$

(62.35)より，十分小な $|h|$ に対して，

$$\|\zeta \delta_h^i u\|_{m,G} \leq \gamma_1 \|u\|_{m+1,G}. \tag{62.36}$$

ただし，γ_1 は h に独立である．$H_0^m(G)$ は ヒルベルト空間であり，(62.36)より，$\zeta \delta_h^i u$ は $H_0^m(G)$ で一様有界である．よって，弱コンパクト性定理（定理 34.1）より，ある部分列 $\zeta \delta_{h(k)}^i u$ は $H_0^m(G)$ で弱収束する．特に，任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ に対して，

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \int_G \zeta \delta_{h(k)}^i u \cdot \varphi \, dx &= \lim_{k\to\infty} -\int_G u \delta_{-h(k)}^i (\zeta\varphi)\, dx \\ &= -\int_G u D_i(\zeta\varphi)\, dx \\ &= \int_G D_i u \cdot \zeta\varphi \, dx \\ &= \int_G \zeta D_i u \cdot \varphi \, dx. \end{aligned}$$

よって，$\zeta \delta_{h(k)}^i u$ は $H_0^m(G)$ において $\zeta D_i u$ に弱収束する．ゆえに，

$$\zeta D_i u \in H_0^m(G).$$

ここで，もう 1 つ関数空間を定義する．$C_*^k(\Omega)$ を Ω において k 階までのすべての階数の有界且つ連続な導関数をもつ関数の全体の集合とする．

定義 62.5. ディリクレ双 1 次形式

$$B(\varphi, \psi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} \left(D^\alpha \varphi, a_{\alpha\beta} D^\beta \psi \right)_{0,\Omega}$$

が **右 *j* 級滑らか** (right j-smooth) であるとは，係数 $a_{\alpha\beta}(x)$ が Ω において有界可測で，$|\alpha|+j-m > 0$ のとき，$a_{\alpha\beta}(x) \in C_*^{|\alpha|+j-m}(\Omega)$ であることをいう．

補題 62.9. $j \leq m$ であって，次の 3 条件を仮定する:

(i) B は一様に楕円型で，G で右 j 級滑らか．

(ii) $u \in H^m(G)$ で，任意の $\zeta \in C_0^\infty(\{x : |x| < R\})$ に対して，$\zeta u \in H_0^m(G)$.

(iii) 定数 $C > 0$ を，すべての $\varphi \in C_0^\infty(G)$ に対して，

$$|B(\varphi, u)| \leq C \|\varphi\|_{m-j,G}$$

となるようにとれる．

このとき，任意の $R' < R$ に対して，$u \in H^{m+j}(G')$ であり，定数 $\gamma = \gamma(m, n, B, R, R')$ を

$$\|u\|_{m+j,G'} \leq \gamma(C + \|u\|_{m,G})$$

となるようにとれる．

証明. j についての帰納法で示す．

まず，$j = 0$ のときは明らか．定理 62.9 の証明のときと同様に，一般性を失うことなく $|\alpha|+j-m \leq 0$ について $a_{\alpha\beta}(x) = 0$ としてよい．$1 \leq j \leq m$ で，補題 62.9 で j を $j-1$ に置き換えて成り立つと仮定する．さらに，$R''' = \dfrac{1}{2}(R + R'')$，$G''' = G_{R'''}$ とする．

$$|B(\varphi, u)| \leq C\|\varphi\|_{m-j,G} \leq C\|\varphi\|_{m-(j-1),G}$$

より，帰納法の仮定から，

$$u \in H^{m+j-1}(G''').$$

$j = 1$ のときは，定理 62.9 より，

$$D_i u \in H^{m+j-1}(G''') \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

同じ結果を $j > 1$ について確かめるために，$u \in H^{m+1}(G''')$ に注目する．補題 62.8 より，任意の $\zeta \in C_0^\infty(\{x : |x| < R'''\})$ に対して，

$$\zeta D_i u \in H_0^m(G''') \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

さらに，$\varphi \in C_0^\infty(G''')$ に対して，

$$\begin{aligned} B(\varphi, D_i u) &= \sum_{\substack{m-j\leq|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta D_i u\right)_{0,G'''} \\ &= \sum_{\substack{m-j\leq|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, D_i(a_{\alpha\beta}D^\beta u)\right)_{0,G'''} - B_i(\varphi, u). \end{aligned}$$

ただし，

$$B_i(\varphi, u) = \sum_{\substack{m-j\leq|\alpha|\leq m \\ |\beta|\leq m}} \left(D^\alpha\varphi, D_i a_{\alpha\beta} \cdot D^\beta u\right)_{0,G'''}$$

とする．部分積分をすると，

$$\left(D^\alpha\varphi, D_i(a_{\alpha\beta}u)\right)_{0,G'''} = -\left(D^\alpha D_i\varphi, a_{\alpha\beta}D^\beta u\right)_{0,G'''}$$

より，

$$B(\varphi, D_i u) = -B(D_i\varphi, u) - B_i(\varphi, u). \tag{62.37}$$

ここで，B_i の右辺の各項について考える．帰納法の仮定より，$u \in H^{m+j-1}(G''')$ だから，$|\alpha| - m + j - 1$ 回部分積分をして，$|\alpha| - m + j - 1$ 回の φ の微分を $(\cdot,\cdot)_{0,G'''}$ の他方へ移すと，シュワルツの不等式より，

$$\left|\left(D^\alpha\varphi, D_i a_{\alpha\beta} \cdot D^\beta u\right)_{0,G'''}\right| \leq \gamma\|\varphi\|_{m-j+1,G'''}\|u\|_{m+j-1,G'''}.$$

ここで，B が右 j 級滑らかだから，$D_i a_{\alpha\beta}(x)$ の $|\alpha| - m + j - 1$ 階までの導関数は有界であるという事実を用いた．

以上より，仮定 (iii) と (62.37)より，

$$\begin{aligned}|B(\varphi, D_i u)| &\leq C\|D_i\varphi\|_{m-j,G'''} + \gamma\|\varphi\|_{m-j+1,G'''}\|u\|_{m+j-1,G'''} \\ &\leq \gamma(C + \|u\|_{m+j-1,G'''})\|\varphi\|_{m-j+1,G'''}.\end{aligned}$$

ここで，γ は m, n, B, R, R' にのみ依存する定数である．

ゆえに，$D_i u$ は j を $j-1$，G を G''' で置き換えて 補題 62.9 の条件をみたしている．帰納法の仮定より，$D_i u \in H^{m+j-1}(G'')$ であり，

$$\begin{aligned}\|D_i u\|_{m+j-1,G''} &\leq \gamma(C + \|u\|_{m+j-1,G'''} + \|D_i u\|_{m,G'''}) \\ &\leq \gamma(C + \|u\|_{m+j-1,G'''}).\end{aligned}$$

ここで，$j > 1$ より, $m+1 \leq m+j-1$ であることに注意する．(62.38)は $i = 1, 2, \ldots, n$ で成り立つ．

(62.38)と帰納法の仮定より，

$$\|u\|_{m+j,G''} \leq \gamma(C + \|u\|_{m,G}).$$

補題 62.9 より，容易に強楕円型方程式に関する大域的正則性の定理を得ることができる．

定理 62.10. 次の 3 条件を仮定する：

(i) ある j $(1 \leq j \leq m)$ に対して，$B(\varphi, \psi)$ は G において右 j 級滑らかで，一様に強楕円型のディリクレ双 1 次形式.
(ii) $u \in H^m(G)$ で，任意の $\zeta \in C_0^\infty(\{x : |x| < R\})$ に対して，$\zeta u \in H_0^m(G)$.
(iii) $f \in L^2(G)$ で，任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ に対して，

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)_{0,G}.$$

このとき，$u \in H^{m+j}(G')$ であり，

$$\|u\|_{m+j,G'} \leq \gamma(\|f\|_{0,G} + \|u\|_{m,G}).$$

証明. 補題 62.9 の仮定 (iii) はすぐに導かれる．実際，

$$|B(\varphi, u)| \leq |(\varphi, f)_{0,G}| \leq \|f\|_{0,G}\|\varphi\|_{0,G} \leq \|f\|_{0,G}\|\varphi\|_{m-j,G}$$

だからである．ゆえに，補題 62.9 が適用でき，定理 62.10 が証明できる．

A　n 次元単位球の体積・表面積

n 次元単位球の体積 V_n は

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

となる．これを示していく．

B　線素，面積要素

曲面が座標表示されてる場合と，極座標表示されてる場合とに分けて，それぞれの線素，面積要素を考えていく．

B.1　曲面 $z = z(x, y)$

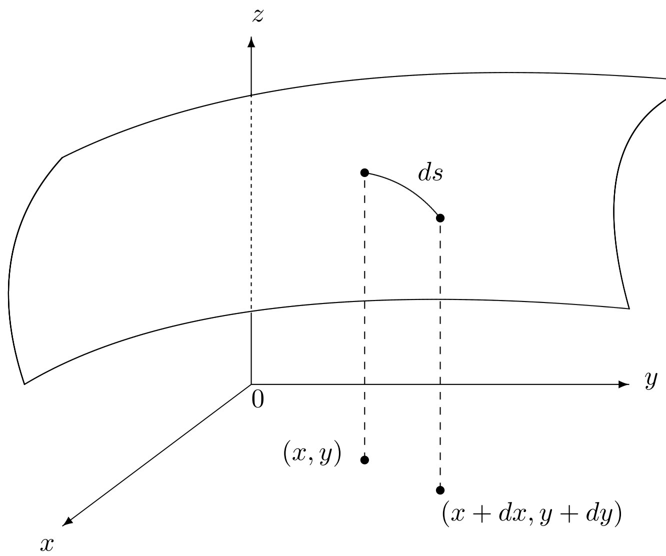
ここでは，曲面上の点の位置ベクトルを

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

と表し，微小距離，面積を考える．

B.1.1　微小距離

曲面上の接近した 2 点 $\mathbf{r}(x,y)$，$\mathbf{r}(x+dx, y+dy)$ を考える．



dx，dy が十分小さいとき，

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(x+dx,y+dy) &= \begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \\ z(x+dx,y+dy) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \\ z+\dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ここで，z 成分に関して，テイラー展開し，2 次以上の項を無視した．よって，2 点を結ぶベクトルを $d\mathbf{r}$ とすると，

$$\begin{aligned}d\mathbf{r} &= \mathbf{r}(x+dx,y+dy)-\mathbf{r}(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2 点間の距離を ds とすると，

$$(ds)^2=|d\mathbf{r}|^2=(dx)^2+(dy)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)^2.$$

ここで，

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y} \tag{B.2}$$

とおくと，

$$(ds)^2=(1+p^2)(dx)^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)(dy)^2. \tag{B.3}$$

この微小距離 ds を線素という．

B.1.2 微小面積

曲面上の接近した 3 点を $\mathbf{r}(x,y)$，$\mathbf{r}(x+dx,y)$，$\mathbf{r}(x,y+dy)$ とし，それぞれ点 P, Q, R とする．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\mathbf{r}(x+dx,y)-\mathbf{r}(x,y)=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\,dx$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\mathbf{r}(x,y+dy)-\mathbf{r}(x,y)=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\,dy$$

よって，微小面積を dS とすると，

$$dS=\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\right|\,dx\,dy. \tag{B.4}$$

ところで，(B.1)より，

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}=\begin{pmatrix}1\\0\\p\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=\begin{pmatrix}0\\1\\q\end{pmatrix}$$

だから，

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = -p\mathbf{i} - q\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

したがって，

$$dS = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy. \tag{B.5}$$

この微小面積 dS を**面積要素**とよぶ．

さて，ここまでの知識を利用して，半径 a の半球の表面積を考えてみる．半径 a の球の表面積は $4\pi a^2$ であるから，半球の表面積は $2\pi a^2$ になるはずである．

例 B.1. 原点中心，半径 a の球の $z \geq 0$ の部分

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

を考える．

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

だから，

$$p^2 + q^2 + 1 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{a^2}{z^2}.$$

よって，

$$dS = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy.$$

$\rho = x^2 + y^2$ とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, 2\pi\rho\, d\rho \\ &= 2\pi a \left[-\sqrt{a^2 - \rho^2} \right]_0^a \\ &= 2\pi a^2. \quad \diamondsuit \end{aligned}$$

注意 B.1. 曲面の長さ，面積はすべて 1 階の導関数できまる．

B.2　曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$

ここでは，パラメータ u，v を用いて曲面を

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

と表し，微小距離，面積を考える．

B.2.1　微小距離

２点 $\mathbf{r}(u,v)$，$\mathbf{r}(u+du,v+dv)$ を結ぶベクトル $d\mathbf{r}$ は

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv.$$

よって，

$$(ds)^2 = |\mathbf{r}_u|^2(du)^2 + 2\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v\,du\,dv + |\mathbf{r}_v|^2(dv)^2. \tag{B.7}$$

ここで，

$$E = |\mathbf{r}_u|^2,\quad F = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v,\quad G = |\mathbf{r}_v|^2 \tag{B.8}$$

とおくと（**第１基本量**とよぶ），

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2 \tag{B.9}$$

となる（**第１基本微分形式**とよぶ）．

例 **B.2.** 平面

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

を考える．このとき，$u=r$，$v=\theta$ と考えると，

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r} = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j},\\
&\mathbf{r}_u = \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j},\\
&\mathbf{r}_v = -u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

よって，

$$E-1,\quad F=0,\quad G=u^2$$

だから，

$$(ds)^2 = (du)^2 + u^2(dv)^2 = (dr)^2 + (r\,d\theta)^2.\quad\diamondsuit \tag{B.10}$$

B.2.2　面積

$\mathbf{r}_u$ と $\mathbf{r}_v$ でできる平行四辺形の微小面積 dS は

$$dS = |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,du\,dv. \tag{B.11}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|^2 &= (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\\
&= |\mathbf{r}_u|^2\,|\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v)^2\\
&= EG - F^2
\end{aligned}$$

となるので，

$$dS = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{B.12}$$

さて，座標表示のときと同様に，ここまでの知識を利用して，半径 a の球の表面積を考えてみる．

例 **B.3.** 原点中心，半径 a の球

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$$

を考える．

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\theta &= (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta),\\ \mathbf{r}_\varphi &= (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0)\end{aligned}$$

より，

$$E=a^2,\quad F=0,\quad G=a^2\sin^2\theta.$$

よって，

$$dS=a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

したがって，球の表面積は，

$$\begin{aligned}S &= a^2\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\\ &= a^2\left[-\cos\theta\right]_0^\pi\cdot 2\pi\\ &= 4\pi a^2.\quad\diamondsuit\end{aligned}$$

C　n 次元単位球の体積・表面積

ここからは，実際に n 次元単位球の体積・表面積を求める．

まず，体積要素を $\omega=dx_1\dots dx_n$ とすると，体積 V_n は

$$V_n=\int_{r\le 1}\omega,\quad r=\sum_{i=1}^n x_i^2$$

となり，面積要素を σ とすると，表面積 A_{n-1} は

$$A_{n-1}=\int_{S^{n-1}}\sigma,\quad S^{n-1}=\{r=1\}$$

となる．

このとき，

$$V_n=\int_0^1 r^{n-1}A_{n-1}\,dr=\frac{A_{n-1}}{n}$$

となっていることに注意する．

ここから，

$$V_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

を示す．

$$\begin{aligned}V_n &= \int_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2+x_n\le 1} dx_1\dots dx_{n-1}\,dx_n\\ &= \int_{-1}^1\left(\int_{x_1^2+\dots+x_{n-1}^2\le 1-x_n^2} dx_1\dots dx_{n-1}\right)dx_n\\ &= \int_{-1}^1 (1-x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}V_{n-1}\,dx_n\\ &= J_nV_{n-1}.\end{aligned}$$

ここで,

$$J_n = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\frac{n-1}{2}}\,dx$$

とおいた.

Step 1. J_n の計算

まず,

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \left[x(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \big(1-(1-x^2)\big)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx - J_2 \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin^{-1} x\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

また,

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} (1-x^2)\,dx \\ &= 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

一般に，

$$
\begin{aligned}
J_n &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x)'(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx \\
&= \Big[x(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x\cdot\frac{n-1}{2}(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\cdot(-2x)\,dx \\
&= (n-1)\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx \\
&= (n-1)\int_{-1}^{1} \big(1-(1-x^2)\big)(1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}\,dx \\
&= (n-1)(J_{n-2}-J_n).
\end{aligned}
$$

よって，

$$
J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}. \tag{C.3}
$$

(i) n：偶数のとき
$n=2k$ とする．

$$
\begin{aligned}
J_n &= \frac{n-1}{n}J_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}J_2 \\
&= \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2(k-1)}{2(k-1)}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2(k-2)}{2(k-2)}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2k-1)!}{2^k\,k!\,2^{k-1}\,(k-1)!}\,\pi \\
&= \frac{(n-1)!}{2^{n-1}\,\left(\frac{n}{2}\right)!\,\left(\frac{n}{2}-1\right)!}\,\pi \\
&= \frac{\mathit{\Gamma}(n)}{2^{n-1}\,\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}+1\right)\,\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}\right)}\,\pi.
\end{aligned} \tag{C.4}
$$

(ii) n：奇数のとき

$n = 2k+1$ とする.

$$
\begin{aligned}
\text{(C.5)} \qquad J_n &= \frac{n-1}{n} J_{n-2} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} J_3 \\
&= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k}{2k} \cdot \frac{2(k-1)}{2k-1} \cdot \frac{2(k-1)}{2(k-1)} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot 2 \\
&= \frac{2^k\, k!\, 2^k\, k!}{(2k+1)!}\, 2 \\
&= \frac{2^n \left(\dfrac{n-1}{2}\right)! \left(\dfrac{n-1}{2}\right)!}{n!} \\
&= \frac{2^n\, \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\, \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Step 2. V_n の漸化式

(i) n：偶数のとき

$$
\begin{aligned}
\text{(C.6)} \qquad V_n &= J_n V_{n-1} \;=\; J_n J_{n-1} V_{n-2} \\
&= \frac{\Gamma(n)}{2^{n-1}\, \Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)\, \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\, \pi \cdot \frac{2^{n-1}\, \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\, \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}\, V_{n-2} \\
&= \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}\, \pi\, V_{n-2} \\
&= \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\dfrac{n}{2}\, \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\, \pi\, V_{n-2} \\
&= \frac{2}{n}\, \pi\, V_{n-2}.
\end{aligned}
$$

(ii) n：奇数のとき

$$V_n = J_n J_{n-1} V_{n-2} \tag{C.7}$$
$$= \frac{2^n \,\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{2^{n-2}\,\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \pi V_{n-2}$$
$$= \frac{2^2\,\Gamma(n-1)\,\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \pi V_{n-2}$$
$$= \frac{2^2\,\Gamma(n-1)\cdot\dfrac{n-1}{2}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{n(n-1)\,\Gamma(n-1)\cdot\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \pi V_{n-2}$$
$$= \frac{2}{n}\pi V_{n-2}.$$

Step 3. V_n の計算

(i) n：偶数のとき
$n = 2k$ とする．

$$V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2} = \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{2\pi}{n-1}\cdot\dots\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot V_2 \tag{C.8}$$
$$= \frac{2\pi}{2k}\cdot\frac{2\pi}{2(k-1)}\cdot\dots\cdot\frac{2\pi}{2\cdot 2}\pi$$
$$= \frac{\pi}{k}\cdot\frac{\pi}{(k-1)}\cdot\dots\cdot\frac{\pi}{2}\pi$$
$$= \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\dfrac{n}{2}\right)!}$$
$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}.$$

(ii) n：奇数のとき
$n = 2k+1$ とする．

$$V_n = \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{2\pi}{n-2}\cdot\dots\cdot\frac{2\pi}{5} V_3 \tag{C.9}$$
$$= \frac{2\pi}{2k+1}\cdot\frac{2\pi}{2k-1}\cdot\dots\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi$$
$$= \frac{2\pi}{2k+1}\cdot\frac{2k}{2k}\cdot\frac{2\pi}{2k-1}\cdot\frac{2(k-1)}{(2k-1)}\cdot\dots\cdot\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot 2$$
$$= \frac{(2\pi)^k\,\pi^k\,k!}{(2k+1)!}\cdot 2$$
$$= \frac{2^{k+1}\,\pi^k\,k!}{(2k+1)!}.$$

ところで，

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) &= \Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2k+1}{2}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{2k+1}{2}\cdot\frac{2k}{2k}\cdot\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{2(k-1)}{2(k-1)}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2k+1)!}{2^k\,2^k\,k!}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}\,k!}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

より，

$$
V_n = \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{C.10}
$$

あとがき

引用文献の紹介を兼ねて，個人的な体験について書くことにします．

私が，初めてルベーグ積分を学んだのは，数学科の 3 年生の時です．担当は，伊藤清三先生で，教科書は引用文献 [30] です．ルベーグ積分論といっても，それまでに学んだ微分積分，ベクトル解析，関数論と全く違い，理論を理解するのは極めて難しく，非常に苦労しました．また，当初は，ルベーグ積分論そのものにも親しみを感じませんでした．何年か経って，自分が，筑波大学，広島大学で，ルベーグ積分を実際に教える立場になって，初めて理論の姿が少しづつ見えてきました．講義を準備する際には，溝畑茂先生の教科書 [39] で，伊藤先生の教科書とは異なる立場から，ルベーグ積分論を学びました．

1981 年秋には，本場のプリンストン学派に触れて，実解析学の神髄と面白さを体感しました ([23])．それ以降，自分が研究を進める上で，ルベーグ積分論を含めた実解析学が，一番好きな分野になりました．

私が，初めて函数解析（当時はこのような漢字で書きました）を学んだのは，数学科の 4 年生の時です．担当は，吉田耕作先生で，教科書は引用文献 [28] の基礎になりました日本語版です．吉田先生が，大学を定年退官される年でした．先生が，毎回，楽しそうに講義をされるお姿が，今でも鮮やかに記憶に残っています．黒田成俊先生の講義では，物理数学に通じる関数解析学を学びました（[33]）．大学時代の解析学の講義の中で，私が，一番親しみを感じたのが，関数解析の科目でした．

私の 4 年次の卒業研究のテーマは，楕円型境界値問題でした．テキストは，出版されたばかりの Agmon の原書 [1] です．小松彦三郎先生と井上淳先生の指導の下，毎週火曜日の午後にセミナーがあり，1 年間かけて，Agmon の教科書を終わりまで読みました．小松先生は，この 1 年間の卒業研究セミナーを通じて，数学の勉強を続けていく上での心構えについて，丁寧に教えて下さいました．また，井上先生は，どのように数学書を読み進めるべきかについて，一から教えて下さいました．

大学院に進学後は，オリジナルな研究を目指して，溝畑茂先生の偏微分方程式論 [38] 第 3 章の楕円型境界値問題を読みました．しかしながら，溝畑先生の流儀は，先生のフランス留学時代の恩師である Schwartz 流でしたので，Agmon の流儀と少し違っていました．いずれにしても，当時の私の理論力では，全く歯が立たない状態でした．そんな折に，偶然，溝畑先生の積分方程式入門の教科書 [40] に出会い，楕円型境界値問題の研究へと通じる道筋が，はっきりと見えてきました．後に，溝畑先生にお目にかかる機会がありましたので，お礼を兼ねて，自分の体験についてお話しました．フレドホルムの積分方程式論は，溝畑先生の大学院時代の研究テーマだったとのことでした．

フーリエの変数分離法を学ぶ上では，Schwartz ([21]) 及び Vladimirov [26] の物理数学の教科書が実に明快で，非常に参考になりました．

学問を研究する原動力は，素晴らしい方との出会いから生まれます．

私は，1978 年 1 月頃から，将来の研究テーマについての大きな迷いと悩みを抱えていました．1979 年 7 月，当時，学習院大学理学部におられた伊藤清先生が，筑波大学に集中講義に来られた際に，初めてお目にかかり，お話をさせて頂く機会に恵まれました．その 2 年後の 1981 年 3 月には，パリ第 6 大学の伊藤先生の研究室にて，当時，私が考えていた研究テーマについて，長時間にわたって話を聞いて頂きました．先生は，翌日,「君の考えていることは，非常に面白い．数学的にも正しいと思います．是非，これからも研究を続けて下さい」との励ましのお言葉を下さいました．伊藤清先生との出会いにより，最初は萌芽的であった研究テーマについて，広島大学，筑波

大学の恵まれた研究環境の下で 30 年以上も研究を続けることができ，私のライフワーク [24], [25] となりました.（平良和昭記）.

参考文献

[1] S. Agmon: Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand, Princeton, 1965.

[2] H. Brezis: Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2011.

[3] J. Chazarain et A. Piriou: Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[4] P. Drábek and J. Milota: Methods of nonlinear analysis, Applications to differential equations, second edition, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[5] E.B. Dynkin: Markov processes I, II. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1965.

[6] S.J. Farlow: 偏微分方程式：科学者・技術者のための使い方と解き方，啓学出版株式会社，1983 年.

[7] W. Feller: The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations. Ann. of Math., (2) **55** (1952), 468–519.

[8] G.B. Folland: Introduction to partial differential equations, second edition, Princeton University Press, Princeton, 1995.

[9] G.B. Folland: Real analysis, second edition, John Wiley & Sons, New York Chichester Weinheim Brisbane Singapore Toronto, 1999.

[10] A. Friedman: Foundations of modern analysis, Dover Publications Inc., New York, 1982.

[11] A. Friedman: Partial differential equations, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2008.

[12] I.M. Gel'fand and G.E. Shilov: Generalized functions I, Properties and operations, Academic Press, New York London, 1964.

[13] D. Gilbarg and N.S. Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order, 1998 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 2001.

[14] E. Hille and R.S. Phillips: Functional analysis and semi-groups, American Mathematical Society Colloquium Publications, 1957 edition. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1957.

[15] L. Hörmander: Linear partial differential operators. Springer-Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1963.

[16] L. Hörmander: The analysis of linear partial differential operators III, Pseudo-differential operators, reprint of the 1994 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 2007.

[17] K. Itô and H.P. McKean, Jr.: Diffusion processes and their sample paths, reprint of the 1974 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[18] T. Kato: Perturbation theory for linear operators, reprint of the 1980 edition. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995.

[19] J. Lamperti: Stochastic processes. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1977.

[20] H. Lebesgue: ルベーグ積分·長さおよび面積，現代数学の系譜 3，共立出版株式会社，1969 年.

[21] L. Schwartz: 超関数の理論（原著第 3 版），岩波書店，1971 年.

[22] L. Schwartz: 物理数学の方法，岩波書店，1966 年.

[23] E.M. Stein: Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[24] K. Taira: Semigroups, boundary value problems and Markov processes, second edition, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 2014.

[25] K. Taira: Analytic semigroups and semilinear initial boundary value problems, second edition, London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 434, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[26] V.S. Vladimirov: Equations of mathematical physics, Marcel Dekker, New York, 1971.

[27] J. Wloka: Partial differential equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[28] K. Yosida: Functional analysis, reprint of the sixth (1980) edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995.

[29] 井川満：偏微分方程式論入門，裳華房，1996 年.

[30] 伊藤清三：ルベーグ積分入門，裳華房，1963 年.

[31] 垣田 高夫：シュワルツ超関数入門，日本評論社，1999 年.

[32] 金子 晃：定数係数線型偏微分方程式（岩波講座基礎数学），岩波書店，1976 年.

[33] 黒田成俊：関数解析（共立数学講座），共立出版，1980 年.

[34] 増田久弥：発展方程式（紀伊国屋数学叢書），紀伊国屋書店，1975 年.

[35] 増田久弥：関数解析，裳華房，1994 年.

[36] 松澤忠人，原優，小川吉彦：積分論と超関数論入門，学術図書出版社，1996 年.

[37] 宮島静雄：ソボレフ空間の基礎と応用，共立出版，2006 年.

[38] 溝畑茂：偏微分方程式論，岩波書店，1965 年.

[39] 溝畑茂：ルベーグ積分（岩波全書），岩波書店，1966 年.

[40] 溝畑茂：積分方程式入門（復刊），朝倉書店，2004 年.

[41] 高橋健人：物理数学，培風館，2005 年.

[42] 田辺広城：関数解析 上，下，実教出版，1978 年/1981 年.

[43] 南就将・笠原勇二・若林誠一郎・平良和昭：明解微分積分，数学書房，2010 年.

記号	説明
$\Longrightarrow$	ならば
$\Longleftrightarrow$	同値，同等
$\forall$	任意の，すべての
$\exists$	存在する
$\in, \ni$	属する，要素である
$\notin, \not\ni$	属さない，要素でない
$A \subset B$, $B \supset A$	A は集合 B の部分集合
A^c	集合 A の補集合
$A \cup B$	集合 A と集合 B の和集合
$A \cap B$	集合 A と集合 B の共通部分
$A \setminus B$	集合 A から集合 B の要素を除いた差集合
$A \times B$	集合 A と集合 B の直積集合
$\sup A$	集合 A の上限
$\inf A$	集合 A の下限
$B(x, \varepsilon)$, $U_\varepsilon(x)$	点 x の ε 近傍
$\mathring{A}$	集合 A の内部
$\overline{A}$	集合 A の閉包
∂A	集合 A の境界
$\mathbf{R}$	すべての実数の全体，実数直線
$\mathbf{R}_+$	0 または正の実数の全体
$\mathbf{Q}$	すべての有理数の全体
$\mathbf{Z}$	すべての整数の全体
$\mathbf{Z}_+$	0 または正の整数の全体
$\mathbf{N}$	すべての自然数 1,2,... の全体
$\mathbf{C}$	すべての複素数の全体
$i = \sqrt{-1}$	虚数単位
$\mathrm{Re}\,\mathrm{z}$	複素数 z の実部
$\mathrm{Im}\,\mathrm{z}$	複素数 z の虚部
$\lvert z \rvert$	複素数 z の絶対値
$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$	数列 $\{a_n\}$ の上極限
$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$	数列 $\{a_n\}$ の下極限

ギリシャ文字

大文字	小文字	発音	英文スペル
A	α	アルファ	alpha
B	β	ベータ	beta
Γ	γ	ガンマ	gamma
Δ	δ	デルタ	delta
E	ϵ, ε	イプシロン, イプサイロン	epsilon
Z	ζ	ゼータ，ツェータ	zeta
H	η	イータ，エータ	eta
Θ	θ, ϑ	シータ，テータ	theta
I	ι	イオタ	iota
K	κ, $\varkappa$	カッパ	kappa
Λ	λ	ラムダ	lambda
M	μ	ミュー	mu
N	ν	ニュー	nu
Ξ	ξ	クシー，グザイ	xi
O	o	オミクロン	omicron
Π	π, ϖ	パイ	pi
P	ρ, ϱ	ロー	rho
Σ	σ, ς	シグマ	sigma
T	τ	タウ	tau
Υ	υ	ウプシロン	upsilon
Φ	ϕ, φ	ファイ，フィー	phi
X	χ	カイ	chi
Ψ	ψ	プサイ，プシー	psi
Ω	ω	オメガ	omega

数学者一覧

姓（慣用読み）	生没年
Abel（アーベル）	1802–1829
Agmon（アグモン）	1922–
Baire（ベール）	1874–1932
Banach（バナッハ）	1892–1945
Bessel（ベッセル）	1784–1846
Bolzano（ボルツァーノ）	1781–1848
Borel（ボレル）	1871–1956
Cauchy（コーシー）	1789–1857
D’Alembert（ダランベール）	1717–1783
Darboux（ダルブー）	1842–1917
Dedekind（デデキント）	1831–1916
de L’Hôspital（ド・ロピタル）	1661–1704
de Moivre（ド・モアーブル）	1667–1754
Descartes（デカルト）	1596–1650
Dirichlet（ディリクレ）	1805–1859
Du Bois Raymond（デュボアレモン）	1831–1889
Euclid（ユークリッド）	B.C. 330–B.C. 275
Euler（オイラー）	1707–1783
Feller（フェラー）	1906–1970
Fourier（フーリエ）	1768–1830
Fredholm（フレドホルム）	1866–1927
Friedrichs（フリードリックス）	1901–1982
Fubini（フビニ）	1879–1943
Gårding（ゴールディング）	1919–2014
Gauss（ガウス）	1777–1855
Green（グリーン）	1793–1841
Hadamard（アダマール）	1865–1963
Hahn（ハーン）	1879–1934
Heine（ハイネ）	1821–1881
Hilbert（ヒルベルト）	1862–1943
Hille（ヒレ）	1894–1980
Hölder（ヘルダー）	1859–1937
Hörmander（ヘルマンダー）	1931–2012

姓（慣用読み）	生没年
伊藤 清	1915–2008
Jacobi（ヤコビ）	1804–1851
Jordan（ジョルダン）	1838–1922
Lagrange（ラグランジュ）	1736–1813
Landau（ランダウ）	1887–1938
Laplace（ラプラス）	1749–1827
Lax（ラックス）	1926–
Lebesgue（ルベーグ）	1875–1941
Leibniz（ライプニッツ）	1646–1716
Lipschitz（リプシッツ）	1832–1903
Maclaurin（マクローリン）	1698–1746
Milgram（ミルグラム）	1912–1961
Minkowski（ミンコウスキー）	1864–1909
溝畑 茂	1924–2002
Neumann（ノイマン）	1832–1925
Newton（ニュートン）	1642–1727
Nirenberg（ニーレンバーグ）	1925–
Poincaré（ポアンカレ）	1854–1912
Rellich（レリッヒ）	1906–1955
Riemann（リーマン）	1826–1866
Riesz（リース）	1880–1956
Rolle（ロル）	1652–1719
Schauder（シャウダー）	1899-1943
Schmidt（シュミット）	1876–1959
Schur（シューア）	1875–1941
Schwartz, L.（シュワルツ）	1915–2002
Schwarz（シュワルツ）	1843–1921
Sobolev（ソボレフ）	1908–1989
Steinhaus（シュタインハウス）	1887–1972
Taylor（テイラー）	1685–1731
Weierstrass（ワイエルストラス）	1865–1942
Weyl（ワイル）	1875–1955
Young（ヤング）	1863–1942
Zermelo（ツェルメロ）	1871–1953
Zorn（ツォルン）	1906–1993
吉田耕作	1909–1990