

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

—中高6カ年から大学へ（5年計画の5年次）—

筑波大学附属駒場中・高等学校 数学科

吉崎 健太・更科 元子・鈴木 清夫
須田 学・須藤 雄生・町田多加志
三井田裕樹

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

— 中高 6 年から大学へ（5 年計画の 1 年次） —

筑波大学附属駒場中・高等学校 数学科
吉崎 健太・更科 元子・鈴木 清夫・須田 学
須藤 雄生・町田 多加志・三井田 裕樹

要約

2017 年度よりスーパーサイエンスハイスクール 4 期目に新たに指定され、今年で通算 16 年目となる。これまでの 3 期 15 年で本校数学科は日々の授業における教材の開発及び実践・発信に取り組んできた。また、数学的活動の契機となるような数学特別講座や、探求的で深い学びにつながる課題研究等の主体的な探求活動を支援するための取り組みを実施してきた。本稿は今年度の本校数学科の取り組みの報告と、これからの計画について記載したものである。

キーワード：探求的で深い学び，中高大院連携

1 はじめに

本校は 2002 年度から 3 期 15 年にわたりスーパーサイエンスハイスクール（以下、SSH）の指定を受け、本年度は SSH の第 4 期のスタートの年である。高等教育において探求型の学びや対話的な学びが教育の柱となりつつある昨今において、中等教育においても高等教育機関での学びの視点に立った学習指導で活用する教材の開発はますますその重要性を高めている。

本校 SSH 第 4 期の研究主題「国際社会に貢献する科学者・技術者の育成を目指した探求型学習システムの構築と教材開発」のもと、数学科としてこれまで 15 年間継続して取り組んできた教材及びカリキュラムの開発により一層注力する必要がある。また、数学オリンピック参加や課題研究等、生徒の探求的な活動を支援する取り組みを継続しつつ、新しい取り組みも計画している。

これら様々な取り組みの基盤は授業である。教師がどのような教材でどのような学習をさせるかが肝要である。

SSH に指定されたこれまでの 3 期 15 年間、本校数学科は筑波大学や他大学の数学関係者の協力を得ながら、

大学や社会に繋がる中高の教材を開発・実践研究を行ってきた。数学の様々な分野において、これまでに開発した教材数は 100 に届こうとしている。また、これら教材を効果的に実践するための中高 6 年間のカリキュラムの開発も進め、教育研究会や本校数学科主催の数学科教員研修会においてその成果を発信・共有してきた。

これらの開発教材を本校の実態に即した中高一貫のカリキュラムへ配置するとともに、実践例を公開授業等で公開し、その効果を確認することができた。

さらに、教材・カリキュラム開発以外に、生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」、サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した「課題研究（高 2）」および「テーマ学習（中 3）」、数学オリンピックへの参加や数学研究部の報告書作成等の支援を実施している。

そして 2017 年度に SSH 4 期目の指定を受け、数学科として取り組んできた事業を洗練しながら新しい取り組みも計画している。それは、本校 OB で国際数学オリンピックのメダリスト達に協力を仰いだ数学オリンピックワークショップである。今年度はこれを計画し、第 1 回を実施した。

<Project research>
Creative Teaching Materials, Method and the Development of the Curriculum
- From six years of a junior and senior high school to the university -

2 今年度(2017 年度)の研究

2.1 教材・カリキュラムの開発

本校における教材開発の基本姿勢は、「生徒と教員の相互作用で築き上げる」ものであると言える。教員は、これまでの経験や、数学教育の実践における先行研究などに、自らの感性と生徒の実態を踏まえて、素材としての中心課題を提示する。生徒はそれに反応し、自らの発想や、解決にいたる道筋、さらなる発展課題などを見つけていく。その過程では、自らの考えを発表したり、それに対する他の生徒の反応をもとに、足りない部分を補ったりといった活動も行われる。教員は、そこで得られた生徒の発想や、生徒同士の議論を整理し、授業のなかで生徒の思考水準を高めていくとともに、課題を洗練させていく。さらに、週に1度行われる本校数学科の教科会においてその事例を共有し、教員同士でも相互に教材を深めていく。この繰り返しが本校数学科における教育実践の中核であり、一定の深化が得られた開発教材は教育研究会や教員研修会で発信に至る。これを研究成果と位置づけている。

本校数学科では、専任教員がそれぞれ同じ生徒をできるだけ継続して担当し、中高6年間さらに大学での学びをも見通した授業を行うように努めている。数学科の授業の共通目標である『いろいろな現象や事柄に潜む仕組みや法則を数学的に解析し、その本質を捕まえ、そしてそれらを表現できるようになる』は、数学科の教育実践そのものであろう。例えば、入学してすぐの中学1年生には、とにかく自らの考えとその根拠を発表させることに主眼をおいた指導を行い、ときには生徒間で議論をさせたり、発展課題をレポートにまとめたりといった活動を授業の中に取り入れている。これらの活動が、とかく中学受験を経験した子どもたちにありがちな「問題を解き、正解に到達したら勝ち、終わり」という価値観からの脱却を促し、「考える過程とそれを表現することこそが数学の学習の中心である」という意識の醸成につながっていく。また、一方で教員は、その過程で生み出される「生徒自身によって表現された数学」を吸い上げて授業に還元しながら、生徒とともに教材を洗練・整理して形に残すことが務めになってくるということである。

これまでに開発した教材は、第3節に記載した一覧表の通りであるが、開発年度を太字にしたものは今年度新たに研究し、まとめた教材である。★印を付した教材は実際に掲載した。教材につけられた記号についても、後ページに説明があるので、参照されたい。

2.2 教員研修会の実施

開発した教材・カリキュラムを SSH 数学科教員研修会で公開し、全国に広めるとともに、本校における今後の研究の指針を得ることとしている。今年度は8月に愛知県の名城大学附属高等学校・豊田西高等学校にて、11月に本校教育研究会で実施した。

2.2.1 愛知 SSH 数学科教員研修会

実施概要

日程：平成29年8月28日（月）

会場：名城大学付属高等学校

参加者：中高数学科教諭、本校教員 36名

■ 受付 8:30～8:50

■ 開会行事 8:50～9:00

■ 研究授業 9:00～11:20

授業1「2次関数と方程式」

生徒：名城大学附属高等学校 2年生

授業者：須藤 雄生（本校教諭）



授業2「二項定理」

生徒：名城大学附属高等学校 1年生

授業者：橋本 大茂（名城大学附属高校教諭）

■ 研究協議 11:20～12:00

■ SSH 教材等についての報告と研究協議

13:00～16:30

1. 名城大学附属高等学校 発表

「数学科のSSHへの取り組み」 宮田 隆徳

2. 愛知県立明和高等学校 発表

「愛知県立明和高等学校の数学科SSHの取り組み」

服部 展之

3. 筑波大学附属駒場中・高等学校 発表

①「本校数学科のSSHの取り組み／最大公約数と差が等しい数の組み合わせ」 吉崎 健太

- ②「気付いて楽しむ数列に関する教材の提案」 町田 多加志
- ③「2次関数～筑駒中学3年生への授業から～」 鈴木 清夫
- ④「円を使う作図の教材」 更科 元子
- ⑤「正射影ベクトルと内積・外積」 三井田 裕樹
- ⑥「複素数平面における1次分数変換」 須田 学

■ 協議・質疑応答・指導助言 16:30～16:50
助言者：名城大学理工学部数学科 教授 鈴木 紀明



アンケートでは、次のような意見があった。

[参加動機]

- ・本校のSSHの取組につなげるため。
 - ・主体的・対話的で深い学びを数学でどう取り組んでいくのかというヒントを得るため。
 - ・数学の授業力を上げるため。
 - ・自分の知らない観点からの数学を知りたかった。
 - ・SSH 第Ⅲ期を申請するにあたり、数学科の課題研究について勉強したかったから。
 - ・筑駒のSSH研修会に参加したことがあったので。
 - ・教材や授業の指導案などについて学ぶため。
 - ・名城に来られる、また、筑駒での実践を知れる貴重な機会だから。
 - ・自分の知らない色々な知識が学べると思ったから。
- [意見（自由記述）]
- ・教材の話はとても勉強になります。
 - ・授業を構成するヒントをいくつかいただきました。
 - ・教員だからと言って、自分が分からないことに臆病にならなくても良いことを学びました。
 - ・自分の学校はSSHではありませんが、SSH校での取り組みを知れて良かった。
 - ・筑駒の先生方の取り組みを聞いて、もっと数学に対して真剣に向き合うべきだと改めて感じさせられた。

- ・基本的に学力が高めの学校がSSHになれると思うが、低学力層の子でも頑張れる数理探求のネタがどこかにあればきいてみたい。
- ・日程に難あり。もう少し他校の教員も参加できればよかった。

[研修会について（選択）]

A 大いに賛成 B 賛成 C あまり賛成でない D 反対

(1) 研究授業は参考になりましたか。

A (61.1%) B (38.9%) C (0%) D (0%)

(2) 筑駒の教材発表は参考になりましたか。

A (88.9%) B (11.1%) C (0%) D (0%)

(3) 各校のSSHの取組に関する発表は参考になりましたか。

A (55.6%) B (38.9%) C (5.6%) D (0%)

(4) この研修会を有意義に感じられましたか。

A (77.8%) B (22.2%) C (0%) D (0%)

(5) 今回のような自主的教員研修会が今後必要だと思いますか。

A (77.8%) B (22.2%) C (0%) D (0%)

名城大学附属高等学校との共催で、2つの研究授業、研究協議会、SSH教材等についての報告と研究協議を実施した。アンケート結果から、本校の教材発表に対する評価が高く、また、このような研修会を実施する意義が大きいことが分かる。今後も、教材を開発し続け、本校以外の生徒への授業も実施し、教材の提示の仕方も含めて、広く一般に普及するように努めたい。

実施概要

日程：平成29年8月29日（火）

会場：愛知県立豊田西高等学校

参加者：中高数学科教諭、本校教員 15名

■ はじめに

■ 自己紹介

■ 説明・情報交換

(1) 愛知県立豊田西高等学校

ア) 学校紹介 伊地知 豊（教頭）

イ) SSH事業紹介 成田 英宏（SS事業部主任）

ウ) 課題研究・評価・数学関連事業・授業紹介
田中 紀子（数学科主任）

エ) 関連する活動行事、運営方法、施設活用など
成田 英宏



(2) 筑波大学附属駒場中・高等学校

- ア) 学校紹介・SSH 事業紹介（運営方法，施設活用など） 更科 元子（研究部 SSH 担当）
- イ) 数学関連等紹介 吉崎 健太（数学科主任）

■ 協議・質疑応答

■ おわりに

SSH 研究開発課題名「先駆的な科学者・技術者の育成と産学連携教育プログラムの開発」のもと，先進的な取り組みをしている愛知県立豊田西高等学校を訪問し，SSH 事業を中心として，詳細に情報交換することができた．3つの目標

1. 日本の将来の科学技術を担う先駆的な科学者や国際社会で活躍・指導できる技術者を育成する．
2. 本校独自の産学公連携教育カリキュラムを開発し，創造力・探究心を育成する．
3. 世界をリードできる理科力・理科教育力の向上を図るとともに，地域力の強化も図る．

の通り，地元のトヨタ自動車と連携したSSH事業を新たに開発し，教科横断的な教材も開発・実施していることには圧倒された．また，SSH事業で育成される資質能力を適切に評価するため，レディネス評価，事前事後調査，PISA型調査，アンケート調査，4観点11項目に則った評価，課題研究ルーブリック評価，生徒同士と教員による課題研究のポスター評価，の7項目で多角的な調査が実施されている．これは，本校ではまだまだ弱い部分であり，SSH事業の評価方法を確立するために，大変有意義な知見を得られた．

2.2.2 第44回 本校教育研究会

実施概要

日程：平成29年11月18日（日）

会場：本校

研究会主題『探求する学び』

研究授業：

中学3年『円を用いた作図』 更科 元子

高校2年『3次関数』 三井田 裕樹

数学科公開授業・研究協議会参加者数：約170名

教育研究会は，参加者に本校の授業を実際に見ていただける貴重な機会である．今年度は中学3年生，高校2年生の授業を公開するとともに，研究発表を行い，研究協議会においてはさまざまなご意見をいただいた．今後の研究活動に活かしていきたい．



中学3年生の公開授業の様子



高校2年生の公開授業の様子

2.3 数学特別講座の実施

今年度に実施した特別講座のテーマと日程・講師は以下の通りである。回数は14年前からの通算、テーマと内容は生徒への募集案内に記載したものである

募集案内を配布して希望者を募り、期末考査後の特別授業期間中に講義して頂いた。

○第47回数学特別講座

『「エントロピー入門—どうやって複雑さを測るか—」』

日 時：平成29年7月12日（水）13:30～15:00

場 所：オープンスペース

講 師：山下 真 氏（お茶の水女子大学・
本校50期卒業生）

参加者：中1から高3までの希望者32名



内 容：(参加募集案内より)

エントロピーとはたくさんの物からなる系の複雑さを測る尺度です。

19世紀後半にボルツマンらによる熱力学の研究の中でその原型が定式化され、20世紀半ばのシャノンによる通信方法の複雑性や情報量の研究をきっかけとして数学でよく用いられるようになりました。「複雑さ」をどうやって定量化すればよいかということを直感的に理解することは難しく、古代から知られていた個数・長さ・面積などの基礎的な概念や近世に確立した確率などの概念と比べるとはるか遅くに見出されたわけですが、現代数学の急激な発展を通じて、もともとのきっかけであった物理学や工学の枠を大きく越えて純粋数学・応用数学の幅広い分野で様々な対象の複雑性を理解するのに欠かせない強力な道具になりました。

この講座ではそんなエントロピーの考え方を、現代数学の問題意識や方法論が垣間見えるような形で紹介しようと思います。

アンケート結果から、参加者はいずれの講座にも興味を持って臨み、期待通りあるいは期待以上の内容に満足し、数学に関する興味関心を深めたようであった。また、自由記述では主に以下のような生徒の感想が寄せられた。

・特に印象的だったのが、文字が持つ「情報量」としてのエントロピーだった。(高1)

・数学者の活動、その前なども含めて理解した。数学者は大変な職業だということがわかった。(楽しい側面もあるかもしれない…) (中3)

・熱変化に関する考えから様々な情報量の変化につながる考えが生まれた点が衝撃的だった。(高1)

・将来使えるようになりたい。(中1)

・公理化という手段はとても有効な手段だと思った。 $\log x$ がエントロピー関数の満たすべき性質を満たしているのはすごいなと思った。(高3)

2.4 数学オリンピックワークショップの開催

今年度から新たに企画した取り組みで、2学期の期末考査後の特別授業期間中に設定した。本ワークショップでは、国際数学オリンピック（以下IMO）のメダリストであるTAに事前問題および当日問題を用意してもらい、体験談や問題の解説をしていただいた。

実施概要

日 時：2017年12月19日（火）、20日（水）

場 所：本校図書スペース

講 師：大島 芳樹（本校OB 大阪大学 IMO出場5回）

TA4名（本校OB、IMOメダリスト）

参加者：両日とも生徒30名程度



図書スペースで実施

本ワークショップは2日間に分けて行い、1日目は主にJJMOに挑戦する中学生向け、2日目はJMOに挑戦する高校生向けとした。対象が異なるため問題が異なるが、2日間とも同様の以下のプログラムで実施した。

1. 講師による講座
2. TA体験談、アドバイス
3. 問題演習
4. 問題解説
5. 講評、助言

TAに用意してもらった分野別の事前演習問題は、係の教員がそれぞれのTAとのメールのやりとりで入手し、印刷・配布を行った。難易度の高いものであったが、抽選で選ばれた参加者のなかには自分なりの考えをまとめたレポートを持参した者も多数おり、この企画への生徒の期待度は極めて高いものであることが伺えた。

講師の大島先生は本校卒業生でもあり、昨年度の特別講座でお話いただいた際とは違った語り口で、生徒の興味・関心を高めるだけでなく、「憧れの先輩」としての存在感を生徒が大いに感じていたことも記しておきたい。普段の授業では問題を早く解きたがる生徒たちも、この日ばかりは目を輝かせながら真剣に話を聞いていた。大島先生が用意してくださった例題の背景には、国際数学オリンピックでも通用する定理や公式が背景にあり、問題に取り組んだ後に定理を味わうといった貴重な体験をすることができた。



TA体験談

さらに今回は、63期～65期の4名のTAにもそれぞれの体験談を大いに語っていただいた。本校では数学オリンピックのメダリスト報告会のような企画はこれまでに無く、日本代表までの道のりにどんなことがあ

るのか等、他では聞けない生の話にも生徒は真剣に耳を傾けていた。特に、過去問をすべて解いてしまって問題が無くなった時に、「問題を探す」という姿勢に感銘を受けた生徒が多かったことが印象的であった。



参加した生徒のアンケートによると、全体的な満足度は極めて高く、自らすすんで数学を学習する絶好の契機となった。中でも、難問に自力で正解にたどり着けた中学1年生が、忘れられない日になったと興奮しながら嬉しそうに話してくれ、準備の苦労を忘れてしまうほどであった。

[アンケート項目・結果]

JJMO 30名, JMO 23名, 計 53名が回答

1. 講座の内容を理解できたか。
よく理解できた (38%) / まあ理解できた (53%) / あまり理解できなかった (8%) / 理解できなかった (2%)
2. 講座を受講した動機 (複数回答可)。
受講が必修 (6%) / 面白そうな内容 (74%) / 学習に役立つ (62%) / 講師の先生にひかれて (9%) / 友達に誘われて (4%) / その他 (2%)
3. 講座の内容は期待通りだったか。
期待以上だった (49%) / 期待通りだった (32%) / ほぼ期待通りだった (17%) / あまり期待通りではなかった (0%) / 期待はずれだった (2%)
4. 講座の内容は学習の役に立ったか。
大いに役立った (68%) / 役立った (30%) / あまり役立ちそうにない (2%) / 役立たなかった (0%)

TAの活躍が大きかったことは言うまでもない。当日の体験談やTA業務だけでなく、事前の問題作成と、詳

細で丁寧な解答まで作成してくれた労力は想像を絶する。負担が大きすぎるのではないかと危惧したが、TA自身も、「自分が中学1年生の時に聞いたかった話を伝えることができて、すごく楽しかったし、嬉しかった」と、来年に向けた意欲的で前向きな感想をいただくことができた。

今年初めて、手探りで始めた企画だったが、参加者の満足度だけでなく、主催者側の満足度も高かったことを鑑みれば大成功であったと言えよう。

課題としては、時期的なものがまず挙げられた。数学オリンピックの予選が1月上旬なので、もう少し早く設定した方が良いとか、事前問題の難易度、当日の時間配分等も挙げられた。これらの課題を数学科できちんと整理して来年につなげたい。

2.5 学年を超えた少人数学習の研究と実践

○全国SSH生徒研究成果発表会

1. 概要

全国SSH研究成果発表会は、全国のSSH校がすべて集まり、研究成果をポスター発表するものである。発表参加校は200校を超え、来場者も非常に多いため、参加する生徒は多くの人とサイエンスコミュニケーションを中心とした交流が期待できる。今年度は数学課題研究から高3が1名、高2が2名参加した。

2. 実施

日時：2017年8月8日（水）9日（木）

会場：神戸国際展示場（兵庫県神戸市）

3. 本校からの研究発表

学校に対して1つブースが与えられる形式のポスター発表で、多くの学校が1つの研究内容を発表する中、本校のブースは独立した内容の以下の3本のポスターを掲示した。

『正多胞体の双対性について』

『点の配置と角度』

『フィボナッチ数列を複素数に拡張』



4. 検証

会場が広く、他校の生徒の研究発表準備を目の当たりにし、少し緊張をした様子であった。3本とも純粋数学の問題を独自の視点で研究をしており、タイトルも本格的な数学を予見させるようなものであったため、主たる来場者の高校生からは敬遠されていたように感じた。そうした中でも、審査員の先生方をはじめ、数学の研究者、本当に興味を持った人が話を聞きに来てくれたことに大きな喜びを感じていたようだ。本格的すぎたのか、大衆賞で1票も獲得できなかったが、「地味な研究があってもいいじゃないか。科学の基盤がそうなのだから」と自然科学への探求心と志を新たにすることが最大の成果であろう。

○マス・フェスタ（数学生徒研究発表会）

1. 概要

「マス・フェスタ（全国数学生徒研究発表会）」は、SSH校である大阪府立大手前高等学校が毎年実施しているもので、今回が9回目である。数学に興味・関心をもつ高校生たちが全国より集まることで、互いの研究発表を通して交流し、研究を深めていくことができる。本校も昨年度に続き代表生徒2名とともに参加した。

2. 実施

日時：2017年8月26日（土）9:30～16:00

会場：関西学院大学（兵庫県宝塚市）

3. 本校からの研究発表

高2課題研究数学選択生徒1名が口頭発表とポスター発表、2名がポスター発表を行った。

『1を単位分数の和で表す』（口頭・ポスター）

『最短経路問題』（ポスター）

『ビュフォンの針』（ポスター）



4. 検証

今回の参加者3名は高2課題研究数学受講者で、日頃教室で仲間研究を発表している生徒である。大好きな数学を通して全国からの参加者とすぐに打ち解け、数学の課題研究を行う者同士、仲間意識を高めたようであった。また、発表時の指導・助言をもとにして、今後の研究をどう進めたらよいかのヒントが得られたようで、2学期以降の本校での活動で研究をさらに発展させることができ、口頭発表は本校で取り組む台湾の台中にある台中第一高級中学での研究発表（12月）にも参加する予定である。このイベントは大阪開催ということで前泊し、発表時間まで熱心に準備をする姿に熱意を実感した。また、それぞれから、自らの発表経験の重大さに気が付いた、他校の発表に刺激を受けたとの感想を得た。

○第7回高校生によるMIMS現象数理学発表会

1. 概要

このプログラムは、明治大学先端数理科学インスティテュート（MIMS）が2011年から「高校生による自主研究の成果を発表する機会を提供し、現象数理学の奨励・普及を図る」ことを目的として明治大学中野キャンパスで行われている。本校は第1回から参加している経緯がある。こうした場で発表するためには研究はもちろん、発表のための準備が必要であり、その際に自らの研究を振り返り、理解をさらに深めることが期待できる。また、他者の研究発表を聞き質問をすることでお互いの研究の理解が深まるとともに、サイエンス・コミュニケーション能力の育成が期待できる。

2. 方法

2.1 プログラムの内容

日時：2017年10月8日 10:00～16:30

場所：明治大学中野キャンパス

概要：開会式、口頭発表、ポスター発表、閉会式・講評、表彰

本研究発表会においては、高校生による6件の口頭発表と29件のポスター発表が行われた。

2.2 本校からの参加生徒の活動

本校からは課題研究で数学を選択している高校2年生18名と引率教員2名で参加し、そのうち1名が口頭発表とポスター発表、2名がポスター発表を行った。

・口頭発表およびポスター発表

『高速道路の合流部における渋滞のシミュレーション』（エクセルを用いて合流部分の長さや条件でシミュレーションし考察した）

・ポスター発表

『滑走路の最適化』（羽田空港に5本目の滑走路を作るとした場合の検討した）



『水で π を近似する』（二項定理から π の近似まで考察した）

発表した3件は個人研究であるが、高2課題研究『数学は最強の学問である』の授業の中で発表し検討してきたもので、課題研究参加生徒だけでなく、大学の先生や大学院生からの助言指導を受けて取り組んできたものである。このうち、『水で π を近似する』の研究がポスター発表優秀賞およびオーディエンス賞を受賞した。

本発表会は現象数理の発表会であるため、身近な現象のちょっと不思議なことを数理的な解析や実験、考察を高校生ならではの視点で行っている研究が多い。他校の口頭発表に対しては、積極的に手を挙げて質疑応答に参加する姿が見られた。発表生徒だけでなくオーディエンスとして参加した生徒も良い刺激を受け、貴重な経験となった。



3. 検証

SSH 関係の生徒発表はいくつかあるが、大抵は発表者のみの参加が多い。学校に近い会場で行われた今回のような会では見学の希望者も気軽に参加できる点で貴重である。今年も昨年に引き続き発表者だけでなく高2 課題研究の数学講座選択者は見学者として全員参加した。今後は高2 だけでなく、中学生を含む見学希望生徒の参加も検討していきたい。発表者の感想文からは、非常に有意義な時間を過ごし、貴重な経験を得たとのことであった。また、見学者も自分たちの仲間や他校の生徒の発表に大いに刺激を受け、自分の研究をさらに高めるためのモチベーションを得た様子であり、彼らの今後の研究の飛躍が楽しみである。



2.6 生徒の数学的活動の支援

○高校生科学技術チャレンジ (JSEC) の応募支援

JSEC とは、2003 年に朝日新聞社主催で開始した科学技術の自由研究コンテストである。全国から直接応募を受け付け、専門家の審査委員による審査と、プレゼンテーション審査で優秀な研究作品を表彰するものである。今年度、高校2 年生の数学課題研究の中で飛び抜けた成果を得た生徒研究があったため、応募した。

概要

日時：2017 年12 月9 日（土）10 日（日）
場所：未来科学館（お台場）

参加者：生徒1 名（ファイナリスト）

研究主題：ある種の単位分数の有限和による1 の表示について

書類審査論文の締め切りは2017 年10 月2 日で、応募総数は170 点あまり、書類審査で約半数には残ったと通知を受けたのが10 月中旬であった。さらに30 点を選出するための1 次審査通過の通知を受けたのが11 月初旬で、ファイナリストまで残った。



彼が考えている問題は古典的な問題で、世界初の具体例の構築に至ったものであったが、その後の応用が乏しく（完結した研究）、惜しくも賞を取ることは出来なかった。この研究について少しだけ触れておくと、1 を異なる分数の和で表現する、という古代エジプトの問題である。分母が半素数（＝異なる素数の積）のみの単位分数の有限和で1 を表現した例のうち、48 項の例は世界では1 件しか知られていなかった。彼は独自の方法で場合の数を突き止め、世界初の例を19 件構成することに成功した。実際は20 件の構成であったが、うち1 件は既に知られていた唯一の例と一致した。

数学オリンピックで目覚ましい成果を上げる生徒が在籍する一方で、こうした研究中心の数学を進める者も多いのも、数学科の取り組みの大きな成果であろう。

○数学オリンピック参加支援

特別講座同様、生徒の数学への興味関心を高めるために数学オリンピック(JMO)・数学ジュニアオリンピック(JJMO)への参加を募っている。今年度も多数が応募している。国際数学オリンピックには、日本が初参加した第32 回大会から2016 年夏の第57 回大会までに、のべ40 名の生徒が日本代表として参加した。

《国際数学オリンピック (IMO) の近年の成績》

2015 第56 回国際数学オリンピック (IMO) タイ大会
の日本代表選手 1 名銀メダル 1 名銅メダル獲得
(2015 年7 月)

- 2016 第 57 回国際数学オリンピック (IMO) 香港大会
の日本代表選手 2 名銀メダル獲得 (2016 年 7 月)
- 2017 第 58 回国際数学オリンピック (IMO) ブラジル
大会の日本代表 銀メダル 1 名 銅メダル 1 名
(2017 年 7 月)

○部活動「数学科学研究会 (MATHIC)」の活動支援

本校数学科では、数学に興味関心を持った生徒が集まり研究活動を行い、数学を楽しむ部活動「数学科学研究会」の支援を行っている。今年度も文化祭での発表に多数の来場者を得るとともに、研究レポート集“Café Bollweck”を発行した。

○名古屋大学主催 論文コンクールへの応募支援

2017 年高 2 課題研究を選択した生徒の研究成果を 10 本程度投稿した。その他にも中学生、高校 1 年生からも応募支援を行った。このうち、ジュニア (中学生) では大賞 1 名、優秀賞 1 名、論文賞 1 名であった。高校の部では、個人優良賞 1 名、共著論文賞 3 名、個人論文賞 1 名であった。受賞生徒は全校生徒の前で表彰を行った。

○算数・数学の自由研究作品コンクールへの応募支援

算数・数学の自由研究とは、(財)理数教育研究所が主催するコンクールで、日常生活や学校での学びなどで感じた疑問や課題を、数学の力を活用して探究し、気付いたことやわかったことをレポートにまとめて応募する企画である。2016 年度高 2 課題研究を選択した 18 名の研究成果を冊子にまとめるとともにコンクールに応募した。その結果、4 名の研究が推薦され、1 名が Rimse 奨励賞を受賞した。

3. 開発教材一覧および開発教材の実際

★印 今年度開発中のもので本稿に記載。

「A. 代数(Algebra)」, 「An. 解析(Analysis)」, 「G. 幾何(Geometry)」, 「P. 確率(Probability)」, 「S. 統計(Statistics)」, 「D. 微分方程式(Differential Equation)」, 「O. その他(Others)」

各項目を整理する際、中学を小文字、高校を大文字にして、校種を区別した。また、教材開発の際に想定している、もしくは、実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は、数字の代わりに「f」を用いた。

〔例〕 an2 合成関数とグラフ

An. は解析であり、先頭が小文字なので中学生対象、すなわち中学 2 年の「解析」の教材を表す。

以下、表に続いて、★で示した教材について具体的に報告する。

なお、今年度より下記教材はすべて本校 HP の数学科のページにて pdf で閲覧できるようにした。パスワードによる閲覧制限を設けているが、パスワードは教育研究会および教員研修会で周知している。また、HP 閲覧者から問い合わせがあれば対応している。

URL

<https://www.komaba-s.tsukuba.ac.jp/~sugakuka/index.html>

<http://ur0.link/zMYX> (短縮 URL)

開発教材一覧（筑波大学附属駒場中・高等学校数学科）2017年度

表左端のアルファベットの記号は次の略であり，中学は小文字，高校は大文字，数字は実施学年である。もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。教材名の末尾の数字は開発年度である。

「A. 代数(Algebra)」 「An. 解析(Analysis)」 「G. 幾何(Geometry)」 「P. 確率(Probability)」
「D. 微分方程式(Differential Equation)」 「S. 統計(Statistics)」 「O. その他(Others)」

a1.	整数	2008	g3-4.	ヘロンの公式の幾何的証明と応用	2013
a1-2.	有理数	2007	g3-5.	双心四角形の性質	2015
a1-3.	剰余類の演算とウィルソンの定理	2014	g3-6.	円を使う作図の教材	2017
a1-4.	速算術	2015	G1.	四面体の幾何	2008
a1-5.	最大公約数と差が等しい数の組み合わせ	2017	G1-2.	デカルトの円定理	2009
a3.	暗号理論と整数論	2006	G1-3.	正多角形と等積な正方形の作図法	2013
A1.	数と方程式	2008	G2.	正17角形の作図	2008
A1-2.	平方根の連分数展開について	2012	G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011
A1-3.	高校における整数問題	2014	G2-3.	正射影ベクトルと内積・外積	2017★
A1-4.	開平方と連分数による平方根の近似値	2014	s1.	統計の基本	2006
A1-5.	オイラー関数について	2015	s2.	標準偏差・近似直線	2006
A1-6.	集合と場合の数の導入	2016★	s3.	正規分布と標準化	2006
A2.	離散な数列と連続な関数	2009	s3-2.	シミュレーションによる授業	2006
A2-2.	ΣK^4 と区分求積法	2011	S1.	回帰直線・近似曲線	2006
A2-3.	斜交座標の薦め	2015	S1-2.	数理統計学入門	2009
A2-4.	漸化式	2015	S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007
A3.	置換と正多面体群	2007	S3.	主成分分析入門	2007
A3-2.	1次変換の線形性	2008	S3-2.	正規分布の平均の推定	2008
A3-3.	複素数と複素数平面	2015	S3-3.	中心極限定理	2016
A3-4.	複素数平面における1次分数変換	2017★	d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和	2017
an1.	2元1次方程式とその応用	2007	d1-2.	『数える』	2010
an2.	合成関数とグラフ	2009	d2.	グラフや図形の移動・変形	2006
an3.	絶対値を含む関数のグラフ	2009	d3.	2次関数の接線	2006
an3-2.	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウェアによるグラフ描画	2010	d3-2.	面積・体積	2006
an3-3.	中学での2次関数の扱い	2017	d3-3.	最大・最小	2006
An1.	2次関数	2007	d3-4.	放物線で囲まれる面積	2013
An1-2.	2次関数（2）	2009	d3-5.	場合の数～樹形図から漸化式へ～	2014
An1-3.	和や積のグラフ	2010	D1.	包絡線	2006
An1-4.	図で証明する三角関数の性質	2013	D2.	グラフ描画の方法－テクノロジーへの挑戦－	2007
An2.	円周率の近似	2007	D2-2.	3次関数の性質	2014
An2-2.	三角関数表を作る	2006			
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006	D3.	包絡線(その2)	2006
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011	D3-2.	微分方程式	2006
g1.	四角形の合同条件	2008	D3-3.	微分方程式の応用	2006
g1-2.	作図の教材	2009	D3-4.	関数のグラフの描画法	2008
g1-3.	四角形の性質（包含関係）	2010	D3-5.	曲線と面積	2008
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角	2012	Of.	4元数を高校数学へ	2007
g1-5.	三平方の定理	2013	O2.	有限世界の数学	2007
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007	p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011
g3.	立方体の切断	2007	Pf1.	組み合わせの確率モデル	2007
g3-2.	反転法	2007	Pf2.	EBIと確率・統計	2007
g3-3.	立方体の切断（2）	2009	Pf3.	無限集合の確率	

筑駒数学科HPより，PDFファイルを閲覧できます

<http://ur0.link/zMYX>

<https://www.komaba-s.tsukuba.ac.jp/~sugakuka/index.html>

QRコードはこちら⇒



A1-6. 集合と場合の数の導入教材

～各位の数の和が一定である自然数の個数～

関連分野：離散数学
 高等数学：集合論，離散数学
 対象学年：中学1年生／高校1年生
 関連単元：場合の数と確率，
 集合と論理
 教材名：各位の数の和が一定である自然数の個数

《はじめに》

場合の数の学習活動において，筆者は，「数える」とはどういうことか，ということを第一の視点として考えている。正確にものを数えるためには，例えば，数える対象をはっきりさせ，その対象をもれなく，だぶりなく数えるための場合分けを考案することが必要である。また，数えることとは数える対象である集合と，数集合との一対一対応を考えることであるから，数える対象のかわりに，要素の個数が等しいほかの「より数えやすい集合」を考えることが役立つこともある。これらのことを意識できる教材を，高校1年数学Aの導入として扱いたいと考え，本教材を開発した。なお，扱い方（表記など）によっては，中学1年の数の指導でも扱えると考え。

《導入課題～3桁の場合》

各位の数の和が一定である3桁の自然数の個数

3桁の正の整数について，次の問いに答えなさい。

- (1) 122 や 500 のように，各位の数の和が5であるものは全部で何個あるか。
- (2) 983 や 776 のように，各位の数の和が20であるものは全部で何個あるか。
- (3) 753 や 960 のように，各位の数の和が15であるものは全部で何個あるか。

上記の課題を，数学Aの第1回授業における導入課題として提示した。出題側としては，考えやすくするために具体例を示したつもりである。

生徒の反応はさまざまであった。特に(1)は和が5という，地道に数えることも可能な設定にしたので，実際に数えている生徒もいた。そこで，まずはその解法をとりあげる。

《(1)の解法とその比較》

(1)の解法 A

数の小さい順に書き上げると，
 104, 113, 122, 131, 140,
 203, 212, 221, 230,
 302, 311, 320,
 401, 410,
 500 で，合計 $5+4+3+2+1=15$ (個) …答

この解法を扱いながら，やみくもに（思いついた順に）数えるだけでは，正確に数えるのは難しく，「小さい順」や「大きい順」などの順序をつけることが「数える」ことの基本である，ということを確認した。

一方で，先取り学習をしている生徒などは，組合せの考えを使うと早い，という。授業では，その解法も取り上げ，解法Aとの比較を試みていった。

(1)の解法 B

和が5であることを ○○○○○ と表す。
 この5個の○を，百の位，十の位，一の位に分ける2本の仕切り | の入れ方が何通りかを求めればよい。
 百の位は1以上であるから，一番左の○を切り離し，
 ○ (○○○○ | |) のカッコ内を並べかえる。
 その方法は， ${}_6C_2 = 15$ (通り) よって15個…答

この解法自体はいわゆる重複組合せの考え方であり，教科書的には「かなり先」の解法である。この解法をすべて解説してしまうと導入ではとても扱いきれないが，授業では組合せ ${}_nC_r$ については知識として知っているという生徒が多そうな様子であったので，これを
 $6 \times 5 \div 2 = 15$ (個)

という解法である，として扱い，解法Aとの比較という観点でのみ扱うことにした。このようにみることで，三角数との関連に気付く生徒もいた。

また，授業では扱うことができなかったが，解法Bの1本目の仕切り位置に着目すると解法Aも説明がつくことに触れても良いであろう。

ただし，この方法は，(2)でそのまま適用しようとしても，うまくいかない。各位の数は，0から9までしかとることができないからである。

そこで(2)では，別の解法が必要になる。

《(2)の解法とその比較》

(2)の解法 A

数の小さい順に書き上げると、
299,
389, 398,
479, 488, 497,
569, 578, 587, 596,
659, 668, 677, 686, 695,
749, 758, 767, 776, 785, 794
839, 848, 857, 866, 875, 884, 893
929, 938, 947, 956, 965, 974, 983, 992
で、合計 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ (個) …答

(2)を解く前に、(1)で解法 B を扱うと、このような解法で(2)を解く生徒はかなり少なくなる。実際、授業においても、この解法を用いた生徒は、(1)の解法を検討する前に(2)も解いていたという生徒がほとんどであると思われた。一方、このようにして書き上げたときにできる「数の三角形」は、(1)とは上下逆さの三角形になっていることは気に留めておきたい。

筆者の授業では先に(1)の解法 B を扱っていたので、(2)でもどのように考えれば解法 B、すなわち

$$9 \times 8 \div 2 = 36$$

という方法で解けるかということが焦点になった。解法 B の○と仕切り | の考えそのままに、20 個の○を並べて ${}_{21}C_2$ というわけにはいかない。それは、各位の数は必ず 9 以下であり、「○が 10 個以上連続で並んではいけない」という新たな規則に対応しなければならぬからである。

これについて次のような解法が生徒から寄せられた。

(2)の解法 B

各位の数の和が 20 である数を 999 からひくと、「各位の数の和が 7 である、3 桁以下の正の整数」(*)になる。この対応は一つ一対一であるから、(*)の整数が何個あるか数えればよい。それは、百の位に 0 を許してもよいのと同じであり、
○○○○○○○ | | の並べかえ方と同じだから、
 ${}_9C_2 = 36$ (個) …答

この解法は、「個数の同じである、別のものへの対応づけを考えることで、より数えやすいものを数える」という考えを次々と使っていくものである。

一方で、結果が ${}_9C_2$ であるということから天下り的に考えると、「各位の和が 8 であるもの」と「各位の和が 20 であるもの」は同じ個数である。このことから、解法 B において、あらかじめ百の位に 1 をたしておけば、各位の和が 8 であるものになる、ということにも気付ける。

(2)の解法 B'

各位の数の和が 20 である数を 1099 からひくと、「各位の数の和が 8 である 3 桁の正の整数」(★)になる。この対応は一つ一対一であるから、(★)の整数が何個あるか数えればよい。

○ (○○○○○○○ | |) のカッコ内を並べかえて、 ${}_9C_2 = 36$ (個) …答

1099 からひくことによって、各位の数の和が 20 であるものと、各位の数の和が 8 であるものに一つ一対一の対応がつくということは、解法 A のように数を小さい順に書き上げた三角形が、(1)と(2)で上下逆さの形になることの説明にもなっている。

ちなみに授業では出てこなかったが、「○が 10 個以上並んではいけない」という新たな規則に対応させながら組合せを用いて解くと、次のようになる。

(2)の解法 C

各位の数が 10 未満であることを無視して数えると、

○ (○19 個と仕切り | 2 本) のカッコ内を並べかえて、 ${}_{21}C_2 = 210$ (個)

このうち、10 以上の数の位が 2 つあるものは (百の位が 10、十の位が 10、一の位が 0) と (百の位が 10、十の位が 0、一の位が 10) の 2 個。百の位のみが 11 以上であるものは、

○11 個 (○9 個と仕切り | 2 本) のカッコ内を並べかえて、 ${}_{11}C_2 = 55$ (個)

百の位のみちょうど 10 であるものは、残りの位は 1 以上で和が 10 だから、9 個。十の位のみが 11 以上であるものは、

○ (○8 個と仕切り | 2 本) のカッコ内を並べかえたあと、十の位に○を 11 個加えれば作れるから、 ${}_{10}C_2 = 45$ (個)

十の位のみちょうど 10 であるものは、残りの位は 1 以上で和が 10 だから、9 個。一の位については十の位と同様であるから、

求める個数は、

$$210 - 2 - (55 + 9) - (45 + 9) \times 2 = 36 \text{ (個)} \cdots \text{答}$$

一方で、(3)の場合はさらに状況が異なってくる。次にそれを考える。

《(3)の解法とその比較》

(3)の解法 A

数の小さい順に書き上げると、

159, 168, 177, 186, 195,
249, 258, 267, 276, 285, 294,
339, 348, 357, 366, 375, 384, 393,
429, 438, 447, 456, 465, 474, 483, 492,
519, 528, 537, 546, 555, 564, 573, 582, 591,
609, 618, 627, 636, 645, 654, 663, 672, 681, 690,
708, 717, 726, 735, 744, 753, 762, 771, 780,
807, 816, 825, 834, 843, 852, 861, 870,
906, 915, 924, 933, 942, 951, 960

で、合計 $5+6+7+8+9+10+9+8+7$
 $=69$ (個) \cdots 答

書き上げてみると、こんどは数が三角形状に並ばず、このように先のとがった五角形状となる。これをどのように数えるか。授業では、先述のとおり早い段階で(1)も(2)も解法 B が出てきていたので、(3)でこの形に着目する生徒ははじめあまり出てこなかった。解法 B にあたるものを考えきれず、仕方なく解法 A に流れてきたと思われる生徒もいたが、三角数の計算でいえば、

(3)の解法 B ?

$$(5+10) \times 6 \div 2 + (7+9) \times 3 \div 2 = 69 \text{ (個)} \cdots \text{答}$$

という計算であり、なかなか意味を見つけるのは難しかった。あるいは中学 1 年生のほうが、この式に何らかの意味を見つけられるかもしれない。

授業では扱わなかったが、「10 以上になる位を除いていく」解法を用いると、次のようになるであろう。

(3)の解法 C

各位の数が 10 未満であることを無視して数えると、

○ (○14 個と仕切り | 2 本) のカッコ内を
並べかえて、 ${}_{16}C_2 = 120$ (個)

各位の数の和が 15 であるから、10 以上の位が現れるとすれば 1 つである。

百の位のみが 10 以上であるものは、

○10 個 (○5 個と仕切り | 2 本) のカッコ内を
並べかえて、 ${}_7C_2 = 21$ (個)

十の位のみが 10 以上であるものは、

○ (○4 個と仕切り | 2 本) のカッコ内を
並べかえたあと、十の位に○を 10 個加えれば作れるから、 ${}_6C_2 = 15$ (個)

一の位については十の位と同様であるから、

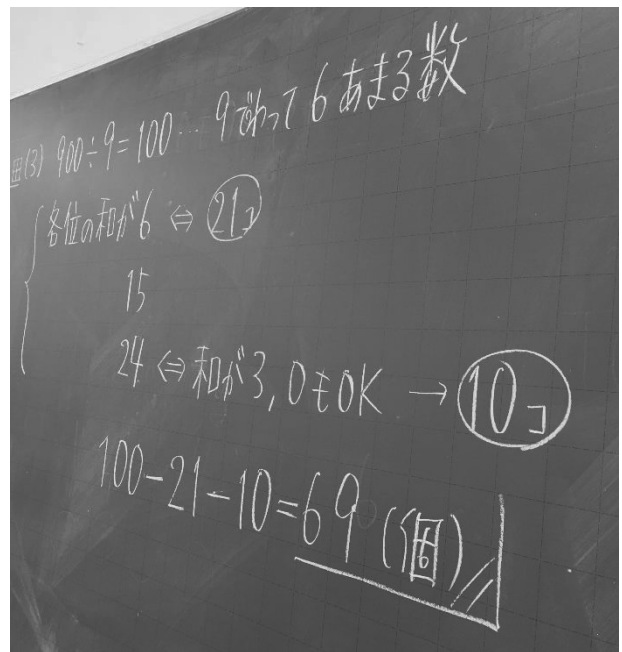
求める個数は、

$$120 - 21 - 15 \times 2 = 69 \text{ (個)} \cdots \text{答}$$

解法 C は、各位の数が 10 以上になってしまう場合が、和が 20 の場合よりも簡単な場合分けですんでいる。導入課題において、出題の順序を変えれば、この解法が注目されることもあると考えられる。

一方で、(3)においてはじめて、全く異なるアプローチの解法を編み出す生徒が現れた。

(3)の解法 D



3 桁の正の整数を 9 で割った余りと、その各位の数の和を 9 で割った余りは一致する。

よって、各位の数の和が 15 である 3 桁の正の整数を、9 で割った余りは 6 である。

3 桁の正の整数は全部で 900 個であるから、9 で割

った余りが6であるものは全部で100個ある。
 そのうち、各位の数の和が6であるものが21個、
 各位の数の和が24であるものが10個
 あり、残りはすべて各位の数の和が15であるものの
 はずである。
 よって、 $100 - 21 - 10 = 69$ (個) …答

この解法は、3桁の正の整数900個を、9で割った余りによって100個ずつの9組に分け、それぞれの組のなかで各位の数の和に着目していくという発想である。各位の数の和と、9で割った余りによって、900個の正の整数はすべてもれなく、だぶりなく場合分けされていくので、この解法はきわめて強力である。この発想が急にどこから出てきたのかは、発表者以外のほぼ全員の生徒が不思議がっていたが、その効力の大きさには感心しきりであった。

《各位の数の和が n であるもの（一般化）》

3桁の正の整数において、各位の数の和は最小で1、最大で27である。そこで、次の課題を設定する。

一般化された課題

3桁の正の整数のうち、
 各位の数の和が n ($1 \leq n \leq 27$, n は整数) であるものの個数 $T(n)$ を、 n の式で表しなさい。

なお、 $T(n)$ について、ここまでにあげた解法にもとづいて計算すると、次のような結果を得る。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T(n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$T(n)$	54	61	66	69	70	69	66	61	54

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$T(n)$	45	36	28	21	15	10	6	3	1

これらの一般化の過程は、授業中に出了もの、授業後にレポートで提出されたもの、それぞれをあわせて次のようになった。まず、式でのアプローチが容易である解法Dから紹介する。

(3)の解法Dに基づく一般化

$$1 \leq n \leq 9 \text{ のとき,}$$

$$T(n) = {}_{n+1}C_2 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$19 \leq n \leq 27$ のとき, $1 \leq 28 - n \leq 9$ で,

$$T(n) = T(28 - n)$$

$$= \frac{1}{2}(29 - n)(28 - n)$$

$10 \leq n \leq 18$ のとき,

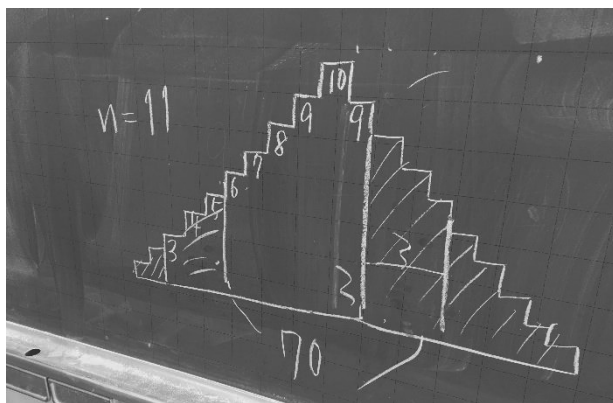
$$T(n) = 100 - T(n - 9) - T(n + 9)$$

$$= 100 - \frac{(n - 9)(n - 8)}{2} - \frac{(20 - n)(19 - n)}{2}$$

$$= -n^2 + 28n - 126$$

一方、解法Aに基づく一般化は、三角数を利用して図形的に考えるものが多かった。

(3)の解法Aに基づく一般化



図形的に考えると、次のように35個の数を並べておき、(はじめの0とおわりの0は各8個)

0, 0, 0, ..., 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, ..., 0

これを n 番目から順に $(n+8)$ 番目まで9個加えたものが $T(n)$ である、と考えることができる。(一部の生徒はこれを「動く山理論」と名付けていた)

したがって、 $1 \leq n \leq 9$ および $19 \leq n \leq 27$ については、 $T(n)$ は三角数である。

一方、 $10 \leq n \leq 18$ について、図のように「山の中央部」へ移動すると、必ず正方形のかたちで余る。この正方形の一辺は、中心からのずれ $|n - 14|$ である。「山の中央部」 $T(14) = 70$ であるから、

$$T(n) = 70 - (n - 14)^2 \quad (10 \leq n \leq 18)$$

が成り立つ。

なお本校では、中学校において絶対値のグラフやガウス記号の含まれた関数のグラフなどを扱っていることから、 $1 \leq n \leq 9$, $10 \leq n \leq 18$, $19 \leq n \leq 27$ の3通りの場合分けをすることなく、1本の式に表す

ことはできないだろうか考える生徒も複数おり，発展レポートとして提出する生徒もいた。

《拡張～4桁の場合》

各位の数の和が一定である4桁の自然数の個数

4桁の正の整数のうち，
各位の数の和が n ($1 \leq n \leq 36$, n は整数) である
ものの個数 $T(n)$ を， n の式で表しなさい。

4桁になると，すべて書き上げていく解法 A では限界があるので，自然と解法 B, C, D を中心に考えていくことになるだろう。これについては，授業では発展課題として与えたが，別の機会で高校3年生（授業対象とは異なる学年）の実力テストとして出題した。

4桁では， $1 \leq n \leq 9$, $10 \leq n \leq 18$, $19 \leq n \leq 27$, $28 \leq n \leq 36$ の4通りに場合分けすることになる。解法 B のように，4桁の場合は10999 との差をとることによって，各位の数の和が n であるものと，各位の数の和が $(37 - n)$ であるものとの一対一対応を考えることができるから，実質的には $1 \leq n \leq 18$ について考えればよい。また， $1 \leq n \leq 9$ については各位の数が10以上になってしまうことを考える必要がないから， ${}_{n+2}C_3$ で求められる。残りは， $10 \leq n \leq 18$ の場合のみである。

(2016 須藤)

A3-4. 複素数平面における 1 次分数変換

関連分野：幾何分野

高等数学：解析幾何

対象学年：高校 3 年生

関連単元：複素数平面

教材名：複素数平面における 1 次分数変換

《複素数平面における 1 次分数変換》

東京大学の 2017 年度入試において、次の問題が出題された。

東京大学 (2017) 第 3 問

複素数平面の原点以外の点 z に対して、 $w = \frac{1}{z}$ とする。

- (1) α を 0 でない複素数とし、点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき、点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。
- (2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

この入試問題に限らず、 z を w に対応させる変換 $w = \frac{1}{z}$ を題材とした問題は多く、数学的にも興味深い性質を多く持つことが知られている。ここでは、この変換の一般化である 1 次分数変換がどのような変換であるかを考察する。また、平面幾何における反転との関係も明らかにする。

A3-4.1. 1 次分数変換

\mathbb{R} を実数全体の集合、 \mathbb{C} を複素数全体の集合とする。すなわち、 i を虚数単位として、

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad (i^2 = -1)$$

である。

問 1. 定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ に対して、 $-\frac{\delta}{\gamma}$ と異なる複素数を定義域とする関数 $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ を考える (すなわち、 $\gamma z + \delta \neq 0$)。このとき、 $f(z)$ が定数となる (z の値によらず一定の値をとる) ような $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の条件を求めよ。

解 $f(z_1), f(z_2)$ について、

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f(z_2) \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} &= \frac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta} \\ \Leftrightarrow (\alpha z_1 + \beta)(\gamma z_2 + \delta) &= (\alpha z_2 + \beta)(\gamma z_1 + \delta) \\ \Leftrightarrow \alpha \delta z_1 + \beta \gamma z_2 &= \alpha \delta z_2 + \beta \gamma z_1 \\ \Leftrightarrow (\alpha \delta - \beta \gamma) z_1 &= (\alpha \delta - \beta \gamma) z_2 \\ \Leftrightarrow (\alpha \delta - \beta \gamma)(z_1 - z_2) &= 0 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

が成立する。 $f(z)$ が定数であるならば、 $z_1 \neq z_2$ に対して、 $f(z_1) = f(z_2)$ を満たすので、 $z_1 - z_2 \neq 0$ 、 $(\alpha \delta - \beta \gamma)(z_1 - z_2) = 0$ より、 $\alpha \delta - \beta \gamma = 0$ を得る。逆に、 $\alpha \delta - \beta \gamma = 0$ のとき、 $(\alpha \delta - \beta \gamma)(z_1 - z_2) = 0$ から、定義域のすべての z_1, z_2 に対して $f(z_1) = f(z_2)$ となるので、 $f(z)$ は定数となる。よって、求める条件は $\alpha \delta - \beta \gamma = 0$ である。□

定数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ が $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$ を満たすとき、 z を w に対応させる変換

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\text{ただし, } \alpha \delta - \beta \gamma \neq 0)$$

を 1 次分数変換という。条件 $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$ があることから、問 1 の結果より、 $f(z)$ は定数とはならない。さらに、問 1 の解で得られた同値 (*) に注意すると、

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

なので、 $f(z)$ は単射 (1 対 1 に対応する写像) でもある。

例 1. 1 次分数変換 $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ は、次の変換 (移動) を含む。ただし、 $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$ を満たすことにも注意しておく。

- (1) 平行移動

$$w = z + \beta$$

$\alpha = 1, \gamma = 0, \delta = 1$ のときで、

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1 \cdot 1 - \beta \cdot 0 = 1 \neq 0 \text{ を満たす。}$$

- (2) 原点 O を中心とする相似拡大 (縮小)

$$w = \alpha z \quad (\text{ただし, } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$$

$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$ のときで、

$$\alpha \delta - \beta \gamma = \alpha \cdot 1 - 0 \cdot 0 = \alpha \neq 0 \text{ を満たす。}$$

(3) 原点 O を中心とする回転移動

$$w = \alpha z \quad (\text{ただし, } |\alpha| = 1)$$

$|\alpha| = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$ のときで,
 $\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha \cdot 1 - 0 \cdot 0 = \alpha \neq 0$ を満たす.

(4) 回転伸縮 (原点 O を中心とする回転移動と相似拡大の合成で定義する)

$$w = \alpha z \quad (\text{ただし, } \alpha \neq 0)$$

$\alpha \neq 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$ のときで,
 $\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha \cdot 1 - 0 \cdot 0 = \alpha \neq 0$ を満たす.

(5) 逆数変換 (次の式で定義する)

$$w = \frac{1}{z}$$

$\alpha \neq 0, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0$ のときで,
 $\alpha\delta - \beta\gamma = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$ を満たす.

問 2. 1 次分数変換

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\text{ただし, } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

は, 平行移動, 回転伸縮, 逆数変換のいくつかの合成で表されることを示せ.

解 $\gamma \neq 0$ のとき, $\alpha z + \beta$ を $\gamma z + \delta$ で割ると,

$$\alpha z + \beta = \frac{\alpha}{\gamma}(\gamma z + \delta) + \beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}$$

と書けるので,

$$\begin{aligned} w &= \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma z + \delta) + \beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)} \\ &= \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{\delta}{\gamma}} \end{aligned}$$

より, $\gamma \neq 0, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ に注意して,

$$f_1(z) = z + \frac{\delta}{\gamma} \quad (\text{平行移動})$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{逆数変換})$$

$$f_3(z) = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \cdot z \quad (\text{回転伸縮})$$

$$f_4(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma} \quad (\text{平行移動})$$

とおくと,

$$w = (f_4(f_3(f_2(f_1(z))))) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$$

であり, 題意の合成で表される.

一方, $\gamma = 0$ のとき, $0 \neq \alpha\delta - \beta\gamma = \alpha\delta - \beta \cdot 0 = \alpha\delta$ より, $\alpha \neq 0, \delta \neq 0$ を得るので,

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{0 \cdot z + \delta} = \frac{\alpha}{\delta} \cdot z + \frac{\beta}{\delta}$$

より,

$$g_1(z) = \frac{\alpha}{\delta} \cdot z \quad (\text{回転伸縮})$$

$$g_2(z) = z + \frac{\beta}{\delta} \quad (\text{平行移動})$$

とおくと,

$$w = g_2(g_1(z)) = (g_2 \circ g_1)(z)$$

であり, 題意の合成で表される. \square

問 2 の結果より, 1 次分数変換の性質を知るには, 平行移動, 回転伸縮, 逆数変換を考察すればよいことになる. ここでは, 複素数平面で初めて扱うことになる逆数変換 $w = \frac{1}{z}$ の性質を調べてみよう.

問 3. z を w に対応させる逆数変換 $w = \frac{1}{z}$ について, z が次の図形上を動くとき, w はどのような図形をえがくか. ただし, $z \neq 0, w \neq 0$ とする. つまり, z と w は原点 O を除いて考える.

- (1) 原点を中心とする円
- (2) 原点以外を中心とする円
- (3) 原点を通る直線
- (4) 原点を通らない直線

解 $w = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{w}$ が成立する.

(1) この円の半径を $r (> 0)$ とすると, z は $|z| = r$ を満たし, $z = \frac{1}{w}$ を代入して,

$$r = |z| = \left| \frac{1}{w} \right| = \frac{1}{|w|}$$

より, $|w| = \frac{1}{r}$ を得るので, w は原点を中心として半径が $\frac{1}{r}$ の円をえがく.

(2) この円の半径を $r (> 0)$, 中心を α ($0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$) とおくと, z は $|z - \alpha| = r$ を満たし, $z = \frac{1}{w}$ を代入して,

$$r = |z - \alpha| = \left| \frac{1}{w} - \alpha \right| = \left| \frac{1 - \alpha w}{w} \right| = |\alpha| \left| \frac{w - \frac{1}{\alpha}}{w} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left| w - \frac{1}{\alpha} \right|}{|w|} = \frac{r}{|\alpha|} \Leftrightarrow |w| : \left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = |\alpha| : r$$

を得る. よって, w は次の図形をえがく. $|\alpha| = r$ のとき (z が原点を通る円上にあるとき), $|w| = \left| w - \frac{1}{\alpha} \right|$ より, $0, \frac{1}{\alpha}$ を端点とする線分の垂直二等分線. $|\alpha| \neq r$ のとき (z が原点を通らない円上にあるとき),

$$|w| : \left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = |\alpha| : r \neq 1 : 1$$

より, $0, \frac{1}{\alpha}$ からの距離の比が $|\alpha| : r$ ($\neq 1 : 1$) である点によるアポロニウスの円.

(3) 原点を通る直線は, ある α ($0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$) により, $\alpha, -\alpha$ を端点とする線分の垂直二等分線として表せるので, このとき, z は $|z - \alpha| = |z - (-\alpha)|$, すなわち, $|z - \alpha| = |z + \alpha|$ を満たし, $z = \frac{1}{w}$ を代入して,

$$\left| \frac{1}{w} - \alpha \right| = \left| \frac{1}{w} + \alpha \right| \Leftrightarrow |1 - \alpha w| = |1 + \alpha w|$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{\alpha} - w \right| = \left| \frac{1}{\alpha} + w \right| \Leftrightarrow \left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = \left| w - \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \right|$$

より, w は $\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}$ を端点とする線分の (原点を通る) 垂直二等分線をえがく.

(4) 原点を通らない直線は, 原点に対する対称点を α ($0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$) とすると, 原点と α を端点とする垂直二等分線として表せるので, このとき, z は $|z| = |z - \alpha|$ を満たし, $z = \frac{1}{w}$ を代入して,

$$\left| \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{1}{w} - \alpha \right| \Leftrightarrow 1 = |1 - \alpha w| = |\alpha| \left| \frac{1}{\alpha} - w \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| w - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

より, w は $\frac{1}{\alpha}$ を中心として, 半径が $\frac{1}{|\alpha|}$ の (原点を通る) 円をえがく. \square

ここでは, $z \neq 0, w \neq 0$ として議論したが, $w = \frac{1}{z}$ により,

$$z \rightarrow 0 \Leftrightarrow w \rightarrow \infty,$$

$$z \rightarrow \infty \Leftrightarrow w \rightarrow 0$$

であることから, 形式的に

$$z = 0 \Leftrightarrow w = \infty \text{ (無限遠点),}$$

$$z = \infty \text{ (無限遠点)} \Leftrightarrow w = 0$$

のように対応していることにして, ∞ (無限遠点) が任意の直線上にあるとすると, 次のようにまとめられる.

逆数変換は, 円と直線を次のように (形式的に) 写す.

- 原点を通らない円を原点を通らない円に写す.
原点を通る円を原点を通らない直線に写す.
((1), (2) より)
- 原点を通る直線を原点を通る直線に写す.
((3) より)
- 原点を通らない直線を原点を通る円に写す.
((4) より)

さらに, 平行移動, 回転伸縮では, 円を円に写し, 直線を直線に写すので, 問 2 の結果より, 次を得る.

1 次分数変換は, 「円または直線」を「円または直線」に (形式的に) 写す.

さらに, 直線を半径が ∞ の円とみなして,

1 次分数変換は, 円を円に (形式的に) 写す

と表現する場合もある.

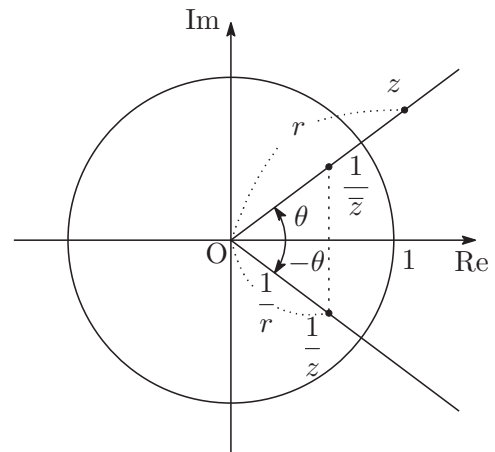
これらの結果から, 初等幾何における反転を思い出す生徒も多い. 実際, $z \neq 0$ のとき, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$) とおくと,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos \theta - i \sin \theta)}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)),$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{r}(\cos \theta + i \sin \theta)$$

であるから, 次の図のような位置関係を得る.



z と $\frac{1}{\bar{z}}$ は、単位円に関して反転の位置にあり、 $\frac{1}{\bar{z}}$ を実軸に関して対称移動して $\frac{1}{z}$ を得る。つまり、 z を単位円に関して反転させて、さらに実軸に関して対称移動すると $\frac{1}{z}$ となる。これは、

$$w = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

からも容易に確認できる。逆に、単位円に関する反転は、 z を w に対応させる変換 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ として表せるので、

$$w = \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

より、この反転は、逆数変換して、さらに実軸に関して対称移動する変換と捉えられる。実軸に関する対称移動は、原点を原点に、直線を直線に、円を円に写すので、この反転は、逆数変換と全く同様な次の性質を持つ。

単位円に関する反転 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ は、円と直線を次のように (形式的に) 写す。

- 原点を通らない円を原点を通らない円に写す。
- 原点を通る円を原点を通らない直線に写す。
- 原点を通る直線を原点を通る直線に写す。
- 原点を通らない直線を原点を通る円に写す。

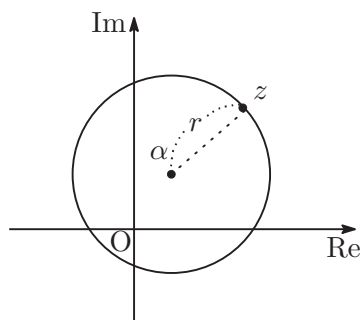
幾何的には、逆数変換 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ よりも、単位円に関する反転 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ の方が意味を捉えやすいので、反転を中心に記述してある書籍も多い。以下、反転について考察する。

A3-4.2. 円と直線の複素方程式と反転

複素数平面における中心 α 、半径 r の円は、 z を変数とする複素方程式

$$|z - \alpha| = r \quad (\alpha \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, r > 0)$$

で表せる。その一般化を考えてみよう。



同値変形を考えると、

$$\begin{aligned} |z - \alpha| = r &\Leftrightarrow |z - \alpha|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - r^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、 $z\bar{z}$ 、 z 、 \bar{z} の係数と定数項は順に

$$1, -\bar{\alpha}, -\alpha, \alpha\bar{\alpha} - r^2$$

で、 $-\bar{\alpha}$ と $-\alpha$ が共役であること、 $1 \in \mathbb{R}$ 、 $\alpha\bar{\alpha} - r^2 \in \mathbb{R}$ などに気付く。よって、この複素方程式を自然に一般化した複素方程式

$$az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0 \quad (a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \beta \in \mathbb{C})$$

を考えることにする。同値変形により、

$$\begin{aligned} az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c &= 0 \\ \Leftrightarrow z\bar{z} + \frac{\bar{\beta}}{a}z + \frac{\beta}{a}\bar{z} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{\beta}{a}\right) \left(\bar{z} + \frac{\bar{\beta}}{a}\right) - \frac{\beta}{a} \cdot \frac{\bar{\beta}}{a} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{\beta}{a}\right) \overline{\left(z + \frac{\beta}{a}\right)} &= \frac{\beta\bar{\beta}}{a^2} - \frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow \left|z + \frac{\beta}{a}\right|^2 &= \frac{\beta\bar{\beta} - ac}{a^2} \end{aligned}$$

を得て、 $\beta\bar{\beta} - ac \in \mathbb{R}$ 、 $0 \neq a \in \mathbb{R}$ から $a^2 > 0$ であることに注意すると、 $\frac{\beta\bar{\beta} - ac}{a^2} > 0$ のとき、さらに

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left|z + \frac{\beta}{a}\right| &= \sqrt{\frac{\beta\bar{\beta} - ac}{a^2}} \\ \Leftrightarrow \left|z - \left(-\frac{\beta}{a}\right)\right| &= \frac{\sqrt{\beta\bar{\beta} - ac}}{|a|} \end{aligned}$$

となるので、中心 $-\frac{\beta}{a}$ 、半径 $\frac{\sqrt{\beta\bar{\beta} - ac}}{|a|}$ の円を表す。これらは、次のようにまとめられる。

複素方程式

$$\begin{aligned} (*) \quad az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c &= 0 \\ (a, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \beta \in \mathbb{C}, \beta\bar{\beta} - ac &> 0) \end{aligned}$$

は、中心 $-\frac{\beta}{a}$ 、半径 $\frac{\sqrt{\beta\bar{\beta} - ac}}{|a|}$ の円を表す。逆に、任意の円を表す複素方程式は (*) の形で書ける。

逆については、①で

$$a = 1 (\in \mathbb{R}), \beta = -\alpha (\in \mathbb{C}), c = \alpha\bar{\alpha} - r^2 (\in \mathbb{R})$$

とおくと、

$$\beta\bar{\beta} - ac = (-\alpha)(-\bar{\alpha}) - 1 \cdot (\alpha\bar{\alpha} - r^2) = r^2 > 0$$

を満たすことから、成立が証明される。

補足 (*)において、一般に $\beta\bar{\beta} = |\beta|^2 \geq 0$ なので、

$$ac < 0 \Rightarrow \beta\bar{\beta} - ac > 0$$

であるから、 $ac < 0$ のとき、 $\beta\bar{\beta} - ac > 0$ は必ず成立することにも注意しておく。

問 4. 次の複素方程式が円を表すことを示し、その中心と半径を求めよ。

$$(1) 3z\bar{z} + (6-i)z + (6+i)\bar{z} - \frac{1}{3} = 0$$

$$(2) 3z\bar{z} + (6-i)z + (6+i)\bar{z} + \frac{1}{3} = 0$$

解 (1) (*)において、 $a = 3, \beta = 6+i, c = -\frac{1}{3}$ とおけて、

$$\beta\bar{\beta} - ac = |6+i|^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 6^2 + 1^2 + 1 = 38 > 0$$

を満たすので、この複素方程式は円を表す。中心は $-\frac{\beta}{a} = -\frac{6+i}{3}$ 、半径は $\frac{\sqrt{\beta\bar{\beta} - ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{38}}{3}$ である。

(2) (*)において、 $a = 3, \beta = 6+i, c = \frac{1}{3}$ とおけて、

$$\beta\bar{\beta} - ac = |6+i|^2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 6^2 + 1^2 - 1 = 36 > 0$$

を満たすので、この複素方程式は円を表す。中心は $-\frac{\beta}{a} = -\frac{6+i}{3}$ 、半径は $\frac{\sqrt{\beta\bar{\beta} - ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{36}}{3} = 2$ である。□

(*)において、形式的に $a = 0$ とすると、 $\beta\bar{\beta} - ac = |\beta|^2 - 0 \cdot c = |\beta|^2$ より、 $\beta\bar{\beta} - ac > 0 \Leftrightarrow \beta \neq 0$ を得る。このことに注意して、次の複素方程式を考えてみよう。

問 5. 次の複素方程式

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0 \quad (c \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0)$$

が表す図形を求めよ。

解 $c \neq 0$ のとき、

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0 \Leftrightarrow c\bar{\beta}z + c\beta\bar{z} + c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta\bar{\beta}z\bar{z} + c\bar{\beta}z + c\beta\bar{z} + c^2 = \beta\bar{\beta}z\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{\beta}z + c)(\beta\bar{z} + c) = \beta\bar{\beta}z\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{c}{\bar{\beta}}\right)\left(\bar{z} + \frac{c}{\beta}\right) = z\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{c}{\bar{\beta}}\right)\overline{\left(z + \frac{c}{\bar{\beta}}\right)} = z\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow \left|z + \frac{c}{\bar{\beta}}\right|^2 = |z|^2$$

$$\Leftrightarrow \left|z - \left(-\frac{c}{\bar{\beta}}\right)\right| = |z|$$

より、原点と $-\frac{c}{\bar{\beta}} \left(= -\frac{c}{|\beta|^2}\beta\right)$ を端点とする線分の垂直二等分線である。一方、 $c = 0$ のとき、

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\bar{\beta}z + \beta\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{\beta}z + \beta\bar{z} = -(\bar{\beta}z + \beta\bar{z})$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \beta\bar{\beta} = z\bar{z} - \bar{\beta}z - \beta\bar{z} + \beta\bar{\beta}$$

$$\Leftrightarrow (z + \beta)(\bar{z} + \bar{\beta}) = (z - \beta)(\bar{z} - \bar{\beta})$$

$$\Leftrightarrow |z + \beta|^2 = |z - \beta|^2$$

$$\Leftrightarrow |z - (-\beta)| = |z - \beta|$$

より、 $\beta, -\beta$ を端点とする線分の(原点を通る)垂直二等分線である。

さらに、 c, β の値を動かすことにより、任意の直線を表す。□

この結果より、(*)の複素方程式は、形式的に $a = 0$ とおくと、任意の直線を表せることが分かる。これらの結果をまとめると、次のようになる。

円または直線を表す複素方程式

$$az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$$

$$(ただし、a, c \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, \underline{\beta\bar{\beta} - ac > 0})$$

$$(i) a \neq 0 \text{ のとき } \left|z + \frac{\beta}{a}\right|^2 = \frac{\beta\bar{\beta} - ac}{a^2} \text{ より、}$$

$$\text{中心 } -\frac{\beta}{a}, \text{ 半径 } \frac{\sqrt{\beta\bar{\beta} - ac}}{|a|} \text{ の円}$$

特に $c = 0$ のとき、 $az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} = 0$ より、原点を通る円

(ii) $a = 0$ のとき $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$ より, 原点と $\beta(\neq 0)$ を通る直線に垂直で $-\frac{c}{2\beta}$ を通る直線

((i) で形式的に $a = 0$ として, 中心 ∞ , 半径 ∞ の円とみなしてもよい)

特に $c = 0$ のとき, 原点を通る直線, 逆に $c \neq 0$ のとき, 原点を通らない直線

最後に, この結果を用いて, 単位円に関する反転の性質を証明してみよう.

問 6. 複素方程式

$$az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0$$

$$(a, c \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, \beta\bar{\beta} - ac > 0)$$

で表される「円または直線」を, 単位円に関する反転 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ で変換した図形を求めよ.

解 $w = \frac{1}{\bar{z}}$ なので, 「円または直線」上に原点 O があるとき (すなわち, $c = 0$ のとき), $z = 0$ に対して, $w = \infty$ (無限遠点) が対応する. また, 「直線」のとき (すなわち, $a = 0$ のとき), $z = \infty$ (無限遠点) に対して, $w = 0$ が対応する.

以下, これらを除いて, $(z, w) \neq (0, \infty), (\infty, 0)$ として, $w = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{w}}$ が成立することを利用する. 与式に $z = \frac{1}{\bar{w}}$ を代入して同値変形すると, $\bar{z} = \frac{1}{w}$ に注意して,

$$az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow a\frac{1}{\bar{w}}\frac{1}{w} + \bar{\beta}\frac{1}{\bar{w}} + \beta\frac{1}{w} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow cw\bar{w} + \bar{\beta}w + \beta\bar{w} + a = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

なので, $\beta\bar{\beta} - ca = \beta\bar{\beta} - ac > 0$ より, w の複素方程式②の表す図形は, 「直線または円」となる.

ここで, ① \Leftrightarrow ② について, 次の対応にも注意しておく.

- ①の表す図形が, 原点 O を通る「円または直線」のとき, すなわち, $c = 0$ のとき, ②の表す図形が直線であり, 無限遠点を通る.
- ①の表す図形が「直線」のとき, すなわち, $a = 0$ のとき, ②の表す図形が, 原点 O を通る「円または直線」である. \square

G2-3. 正射影ベクトルと内積・外積

関連分野：幾何分野

高等数学：ベクトル

対象学年：高校2年生

関連単元：ベクトル

教材名：ベクトルの内積と正射影の利用

《内積・外積の応用へ》

高等学校で学ぶ「内積」は、教科書の定義により導入され、内積そのものを「どのように応用させるか」という視点が少ない。もちろん、内積を使った入試問題や例題は数多くあるが、「何故内積を使うのか」という疑問を持ったまま学習する生徒が多い。しかし、内積を用いた演算には、「正射影」という図形的な意味を含むことが多く、その意味を理解して学習することで、空間図形への応用として、利用価値が非常に高いものとなる。

そこで、ベクトルの授業を実施する際、単元の最大目標を「四面体の体積を求めること」とし、その目標を達成するための道具として、ベクトルの内積・外積を導入し、授業を進めた。その結果、四面体の体積に留まらず、様々な多面体の体積を求める方法を、生徒からのレポートで報告されたので、それらを紹介したい。

本稿では、内積の意味付けとして、「正射影」を用いることで、空間図形への応用を授業で実践し、多くの生徒が取り組んだ求積問題を報告する。

2.3-1. ベクトルの内積の定義

ある2つのベクトルの内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を、図のように、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\angle BOA = \theta$ として

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

と定義する。

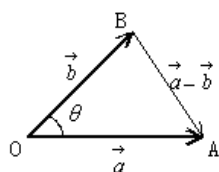


Fig 1.1 ベクトルの内積

注意したいのは、この定義が、平面や空間の区別を必要としない点である。教科書では、平面ベクトルと空

間ベクトルの両方で定義されることが多いが、この区別が必要なのは次の成分表示だけであり、内積そのものの意味付けには繋がらない。

・ベクトルの成分表示 (平面)

次に図のように、座標平面上において、 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ であるとき、 $\triangle OAB$ に余弦定理を適用して、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

と計算できる。

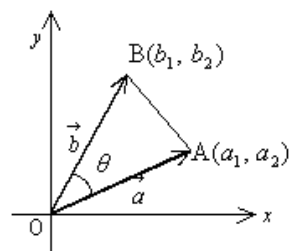


Fig 1.2 ベクトルの成分表示

この導入は教科書通りではあるが、生徒にとっては唐突であり、内積の意味付けと、「内積を計算することによって何ができるのか」という視点を植え付けがたいと言える。平面ベクトルの内積と空間ベクトルの内積を区別して授業を進めることが多いが、ここでは、あえてあまり区別せずに進めたい。というのは、内積の計算は「次元を拡張できる」という大きなメリットがあり、図形的には3次元での拡張で、大いにその力を発揮するからである。

しかし、教科書通りの進め方では、内積の持つ図形的な意味を理解し、応用することは難しい。そこで、内積をベクトルの正射影としてとらえる方法で、色々なベクトルの性質を学習していく。

2.3-2. 内積を正射影でとらえる

図のように、ベクトル $|\vec{b}| \cos \theta$ を $|\vec{b}|$ の \vec{a} 上への正射影として扱うことで、内積が2つの長さの積として図形的にイメージする。

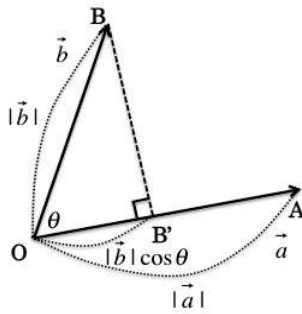


Fig. 2.1 ベクトルの正射影

ただし、ベクトルの内積を一方のベクトルをもう一方のベクトルへの正射影によって与える場合、2つのベクトルがなす角 θ が鋭角のときは正の値を、鈍角の場合には負の値をとることに注意する必要がある。生徒の中には、角 θ と $\cos\theta$ の値の関係がはっきりしていない者がいることに留意する必要がある。

すなわち、

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos\theta = |\vec{OA}| |\vec{OB}'| \quad (3.1)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos\theta = -|\vec{OA}| |\vec{OB}'| \quad (3.2)$$

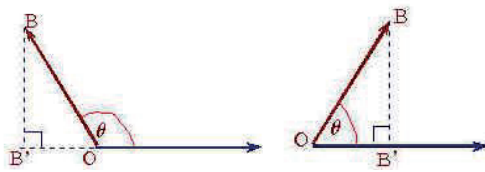


Fig. 2.2. θ が鈍角の場合 θ が鋭角の場合

である。

2.3-3. 正射影ベクトルと法線ベクトル

内積を正射影でとらえることで、平面空間を問わず、3点で与えられた三角形において、正射影ベクトルと法線ベクトルが容易に計算することができる。ここで強調すべきなのは、「内積によって正射影ベクトルを計算する際、角度の情報は必要ない」という点である。すなわち、正射影の大きさも、射影されるベクトルの大きさを用いて表現できる点が最も重要である。

また、単位ベクトルを用いて、正射影の大きさをもつベクトルに変形することを注意したい。ベクトルという量の意味は、「大きさ」と「向き」同時に扱う量であることを十分に理解させた上で、この議論を進めていく。次の図において、正射影ベクトルと法線ベクトル

をそれぞれ \vec{v}, \vec{h} として定義する。

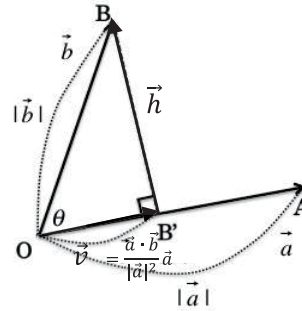


Fig.2.3 \vec{b} を \vec{a} に写した正射影ベクトル

正射影ベクトルの定義

\vec{v}_a を「 \vec{b} を \vec{a} に写した正射影ベクトル (Fig. 2.3)」,

\vec{v}_b を「 \vec{a} を \vec{b} に写した正射影ベクトル」とするとき、

$$\vec{v}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

$$\vec{v}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

で表される。

正射影ベクトルを用いることで、法線ベクトルを表現することができる。ここで扱う法線ベクトルとは、それぞれのベクトルの終点から降ろした垂線に相当するベクトルとする。

法線ベクトル

\vec{h}_a を「 \vec{a} の法線ベクトル」、 \vec{h}_b を「 \vec{b} の法線ベクトル」とするとき、

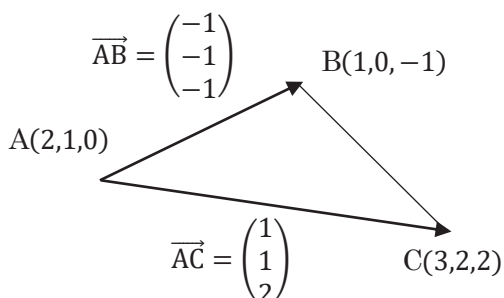
$$\vec{h}_a = \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

$$\vec{h}_b = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

法線ベクトルの大きさを用いることで、次のような空間上にある三角形の面積を計算できる。内積を計算することで、二つのベクトルなす角を計算し、 $\sin\theta$ を求めることで面積を計算できるが、空間座標においては煩雑である。法線ベクトルの大きさを利用することで、角度の情報は必要ないことがわかる。

例

3点, $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, -1)$, $C(3, 2, 2)$ で与えられる $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。



解

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \cdots (*) \text{ より,}$$

B から AC に下した垂線の足を H とし, \overrightarrow{AC} の法線ベクトル \overrightarrow{BH} を求めると,

$$\overrightarrow{BH} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

従って, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{BH}| |\overrightarrow{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|^2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \right| |\overrightarrow{AC}| \end{aligned}$$

両辺を二乗し, 平方根をとると,

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{|\overrightarrow{AC}|^4} |\overrightarrow{AC}|^2 - 2 \frac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}{|\overrightarrow{AC}|^2} + |\overrightarrow{AB}|^2 \right) |\overrightarrow{AC}|^2 \\ \rightarrow S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \cdots (2.1) \end{aligned}$$

ここに (*) を代入し,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 6 - (-4)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。さらに, \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} のなす角を θ とし, 式変形すると,

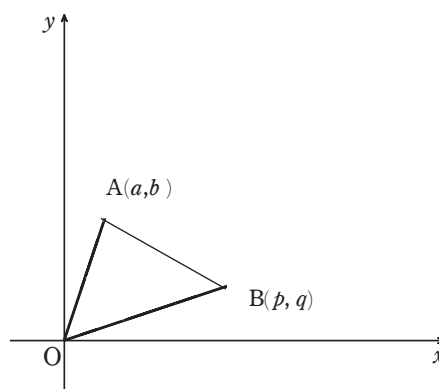
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta \cdots (2.2)$$

このように計算されるが, 内積の成分計算をすることにより, 面積の計算が正射影ベクトルと法線ベクトルの大きさで表現できる。これを xy 平面で考えると, 次の面積公式の証明を与えることができる。

問題

図のように xy 平面上に 2 点 $A(a, b)$, $B(p, q)$ があり, 原点 O とする。 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。



(2.1)の式より,

$$\begin{aligned} \Delta OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) - (ap + bq)^2} \cdots (2.3) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(aq - bp)^2} = \frac{1}{2} |aq - bp| \end{aligned}$$

面積の公式として有名ではあるが, 余弦定理を用いた証明と共に, 正射影と法線ベクトルを用いた証明をすることで, 内積の応用を学習できる。重要なのは, 二つのベクトルのなす角を使わずに, 成分だけで計算できる点である。授業では, 「角度の情報がなくとも, 面積の計算ができる」と伝えた。

また, (2.3) 式の平方根の中はコーシー・シュワルツの不等式を導出する式である。これらはすべて, 面積計算なので, ベクトル表示と成分表示の両方で,

$$|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2 \geq 0$$

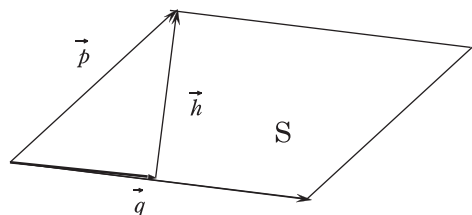
$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)(p^2 + q^2) - (ap + bq)^2 \geq 0$$

は明らかである。また, この不等式の等号成立条件

は、 $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$ であることも容易に理解できる。

そして、これを空間ベクトルへ拡張すると、次のようになる。

一般に、一次独立な2つのベクトルで張られる平行四辺形の面積 S は、正射影と法線ベクトルの大きさを使い、次のように表すことができる。



$$S = |\vec{h}| |\vec{q}| = \left| \frac{(\vec{p} \cdot \vec{q})}{|\vec{q}|^2} \vec{q} - \vec{p} \right| |\vec{q}|$$

この式から、次節の外積を学習することで、内積と外積の関わりを、より深い理解へ導く。

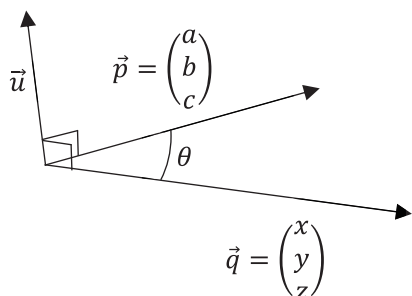
2.3-4. 外積の演算

外積の計算方法と定義だけを伝えと、唐突なので、前節の面積計算から逆算できる形で、正射影を考えると、内積と外積の違いと、計算の目的をハッキリさせる。

外積の計算方法と内積の違いは、計算結果がベクトルで表されることにある。従って、結果として与えられるベクトルの意味を丁寧に扱う。そこで、次の二つの定義を吟味し、内積を扱う際の目的とのすり合わせを計算しながら学習していく。

①外積の計算方法

次の図のように \vec{p}, \vec{q} とすると、 \vec{p}, \vec{q} の外積 $\vec{p} \times \vec{q}$ は



$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} \equiv \vec{u}$$

と計算される。

②外積の定義 I :

内積計算では二つのベクトルのなす角 θ について、 $\cos \theta$ を使うが、外積では $\sin \theta$ を使い、次のように定義できる。

前節で計算した、平行四辺形の面積を使い、成分をあてはめて、次の式を証明させる。以下の証明は実際の授業で生徒が発表したものである。

問題 $|\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \theta$ であることを示せ。

証明

$$\begin{aligned} |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \theta &= |\vec{p}| |\vec{q}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 - (\vec{p} \cdot \vec{q})^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2} \\ &= \sqrt{(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2} \\ &= |\vec{u}| = |\vec{p} \times \vec{q}| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

この結果より、「外積計算で与えられるベクトルの大きさは平行四辺形の面積」であることが確認できる。生徒にとって、外積計算そのものに唐突感が無く、必要性を感じながら学習を進めていた。また、この式をみて、「コーシー・シュワルツの不等式だ」と気が付いた生徒も多く見られた。

③外積の定義 II

外積計算で表されるベクトルは、一次独立な二つのベクトルに直交するベクトルである。このことは、次の問題を設定し、容易に確認できる。

問題 $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{u}$ が \vec{p}, \vec{q} とそれぞれ直交することを示せ。

証明 それぞれの内積を計算すると、

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{p} &= (abz - acy) + (bcx - abz) + (acy - bcx) = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{q} &= (bxz - cxy) + (cxy - ayz) + (ayz - bxz) = 0 \end{aligned}$$

であるから、 $\vec{u} \perp \vec{p}$, $\vec{u} \perp \vec{q}$ である。

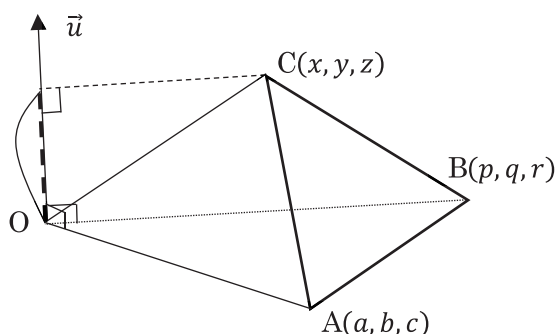
従って、 $\vec{p} \times \vec{q} = \vec{u}$ は二つの一次独立なベクトルで張られる平面の法線ベクトルとなるので、次のように四面体の体積が計算することができる。

2.3-5. 四面体の体積計算

授業では、四面体の体積計算を、正射影と外積計算から導出する方法を扱った。最初は初等幾何や、三角比を使って考える生徒もいたが、正射影と外積という強力な道具を使うことで、圧倒的に計算量が減ることを実感していた。

問題

次の図のように、3点 $A(a, b, c)$, $B(p, q, r)$, $C(x, y, z)$ と原点 O を結んでできる四面体の体積 V を求めよ。



解

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} br - cq \\ cp - ar \\ aq - bp \end{pmatrix}$$

\overrightarrow{OC} の \vec{u} へ写した正射影の大きさは、点 C から $\triangle OAB$ へ下ろした垂線の長さとなるので、垂線の長さを h とすると、

$$h = \left| \frac{(\overrightarrow{OC} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|} \right|$$

であるから、四面体 $OABC$ の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} h \times \frac{1}{2} |\vec{u}| \\ &= \frac{1}{6} \left| \frac{(\overrightarrow{OC} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|} \right| \times |\vec{u}| = \frac{1}{6} |\overrightarrow{OC} \cdot \vec{u}| \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} br - cq \\ cp - ar \\ aq - bp \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} |(brx - cqx) + (cpy - ary) + (aqz - bpz)| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} |(aqz + brx + cpy) - (cqx + ary + bpz)|$$

となる。なお、この体積の絶対値の中は、次の行列式で計算される。

$$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = (aqz + brx + cpy) - (cqx + ary + bpz)$$

行列計算は高校の教育課程からは外れてしまったが、「こういう計算もある」と補足してもいいだろう。

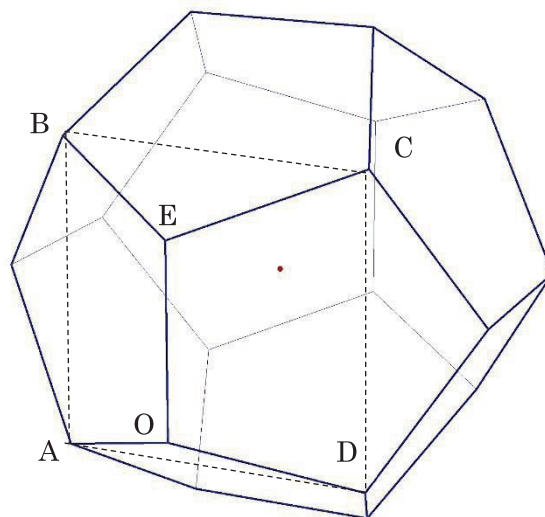
$$\left| \frac{(\overrightarrow{OC} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|} \right| |\vec{u}| = |\overrightarrow{OC} \cdot \vec{u}| = \left| \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} \right|$$

この行列式の絶対値は3つのベクトルで張られる平行六面体の体積であり、興味深いのは、3個の位置ベクトルの成分を入れ替えても、正負は変わるが、対称性から同様の結果が得られることである。

2.3-6. 多面体の体積

次に、正射影ベクトル、法線ベクトルを用いて、色々な正多面体の体積を求めるレポート課題を出したところ、多くの生徒が多面体の体積をベクトルで計算する方法を考えた。提出されたレポートの中から、そのいくつかを紹介したい。ここでは、計算を簡単にするため、一辺の長さを1とする。

I : 正十二面体



図のように、点 $OABCDE$ とおく。すると、正十二面体は正方形 $ABCD$ を面に持つ立方体と、断頭三角

柱 $OE-ABCD$ の6個分に切断できる。また、正五角形の対角線の長さとなる OB や AB は、

$$AB = OB = OC = OD = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

であることは、先に計算しておく。A から、OE に下した垂線の足を H、とすると、

$$|\overline{OH}| = \left| \frac{(\overline{OA} \cdot \overline{OC})}{|\overline{OC}|} \right| = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$|\overline{AH}|^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2$$

H から、AD に下ろした垂線の足を H' とすると、

$$|\overline{HH'}|^2 = |\overline{AH}|^2 - \left| \frac{\overline{AD}}{2} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

よって、 $\triangle ADH$ の面積は、

$$(\triangle ADH \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{8}$$

従って、断頭三角柱 $OE-ABCD$ の体積は、
(断頭三角柱 $OE-ABCD$ の体積)

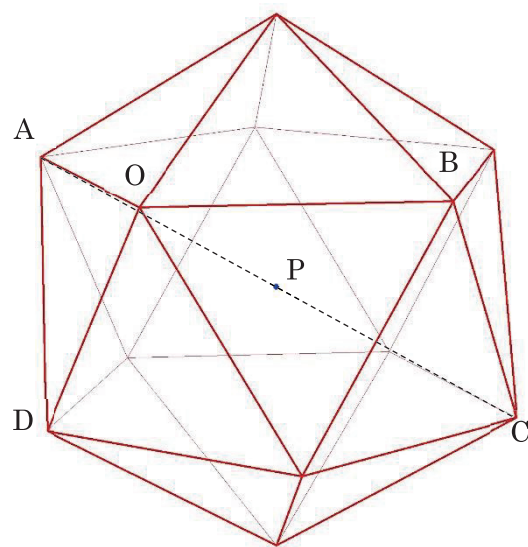
$$\begin{aligned} &= (\triangle ADH \text{ の面積}) \cdot \frac{1}{3} \cdot (|\overline{OE}| + |\overline{AB}| + |\overline{DC}|) \\ &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{8} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left\{ 2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 1 \right\} \\ &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{24} \end{aligned}$$

以上より、求める体積 V は、

$$V = 6 \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{24} \right) + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \quad \blacksquare$$

他にも、正十二面体の外接球の中心から各頂点へのベクトルの正射影を利用し、正五角錐の体積を求める方針の解法をとったレポートもあった。二重根号が多く含まれるが、最後の結果には二重根号が含まれないことが確認できる。ここでは、計算過程が煩雑なため、割愛する。

II. 正二十面体



図のように、点 $OABCD$ とおく。このとき、

$$\overline{AO} \cdot \overline{OB} = \overline{OB} \cdot \overline{BC} = \overline{AO} \cdot \overline{BC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} |\overline{AC}|^2 &= |\overline{AO}|^2 + |\overline{OB}|^2 + |\overline{BC}|^2 \\ &\quad + 2(\overline{AO} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{BC} + \overline{AO} \cdot \overline{BC}) \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

AC の中点を P とすると、P はこの正二十面体の外接球の中心である。従って、 $\triangle OAD$ の外心を G とすると、 $PA=PB=PC$ より、 $PG \perp \triangle OAD$ であるから、

$$\begin{aligned} |\overline{PG}|^2 &= \left| \frac{\overline{AC}}{2} \right|^2 - |\overline{AG}|^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} - \frac{1}{3} = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{24} \\ \Rightarrow |\overline{PG}| &= \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$\triangle OAD$ の面積 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ より、三角錐 $P-OAD$ の体積 V' は、

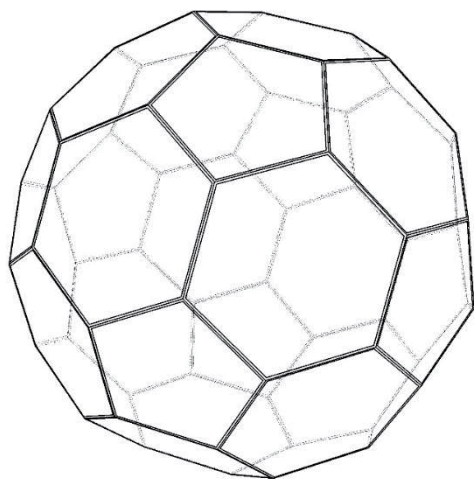
$$V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{48}$$

となるので、求める体積 V は、

$$V = 20V' = 20 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{48} \right) = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \quad \blacksquare$$

I で計算した，正十二面体の各面にある重心を結んで作られる正二十面体を考え，正十二面体の各頂点から四面体を切断した図形で体積を計算したレポートもあった。次の切頂二十面体の体積に繋がる発想として重要である。ただ，計算がとても煩雑なので，ここでは割愛する。

III. 切頂二十面体（サッカーボール型）



一辺の長さが 3 の正二十面体の各頂点より，一辺の長さ 1 の正五角錐を 12 個切り取ることを考える。

右図のように，正五角形の外接円の

半径 $|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{OB}|$ について，

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|^2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

であり，

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2$$

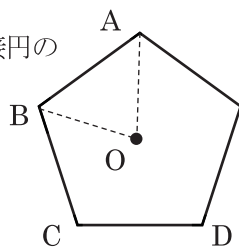
$$- 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2|\overrightarrow{OA}|^2 - 2\left(|\overrightarrow{OA}|^2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{2}{5-\sqrt{5}}$$

正五角形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= 5 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= 5 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^4 - \left(|\overrightarrow{OA}|^2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} \end{aligned}$$



$$= \frac{5}{2} |\overrightarrow{OA}|^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5-\sqrt{5}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

切断する正五角錐の高さ h は，

$$h = \sqrt{1 - |\overrightarrow{OA}|^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{5-\sqrt{5}}}$$

より，切り取る部分の体積 V' は

$$V' = 12 \cdot \frac{1}{3} Sh$$

$$\begin{aligned} &= 12 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5-\sqrt{5}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} \right) \sqrt{1 - \frac{2}{5-\sqrt{5}}} \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

以上から，一辺の長さが 3 の正二十面体から V' を除いた求める体積 V は

$$V = 3^3 \left(\frac{15+5\sqrt{5}}{12} \right) - \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \frac{125+43\sqrt{5}}{4} \quad \blacksquare$$

2.3.6. おわりに

ベクトルの授業では，どうしても計算問題を解くことが多くなり，ベクトルが持つ幾つかの性質を深く理解することが難しい。また，参考書などでは，正射影ベクトルや外積計算を，一つの受験数学のテクニックとして掲載されることが多い。しかし，内積の意味，外積の意味だけではなく，「それらがどのように利用されるのか」という視点で，正射影ベクトルを利用した面積計算や体積計算を目標に設定することにより，「空間図形の計量にベクトルを使う」という場面を作ることができた。教科書通りに定義や公式を追うのではなく，できるだけ生徒が能動的にベクトルを学習できるよう，それぞれの概念の繋がりを，授業で気づかせる教材を展開することを心掛けた。レポートの課題で様々な求積問題にチャレンジさせたが，多くの生徒が取り組み，アイデアを出し合いながら難しい立体図形の体積も計算していた。

今後は，ベクトルの考え方に留まらず，これを空間における平面の方程式や，直線の方程式，球面の方程式など，「図形と方程式」の単元へ応用していくことを考えている。

(2017 三井田)