情報数学III講義（第9回）

平成30年12月19日

§ 前回の復習

半径 $R(>1)$ の半円 γ_R の線積分

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}dz$$

を考える．この答えが $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ になることを確かめよう．x 軸上の経路を γ_R^1，半円周上の経路を γ_R^2 とする．

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}dz &= \int_{\gamma_R^1} \frac{z^2}{1+z^4}dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{z^2}{1+z^4}dz \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx + 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ここで，右辺第2項が0になるのは，

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| &\leq MX(M \text{ は } f(x) \text{ の上界}, X \text{ は曲線}\gamma\text{の長さ}) \\ &= \frac{R^2}{R^4-1} \times \pi R = \pi \cdot \frac{R^3}{R^4-1} \to 0 \quad (R \to \infty)\end{aligned}$$

によるものである．

（上界の求め方）

$$\left|\frac{z^2}{1+z^4}\right| = \frac{|z^2|}{|1+z^4|}$$

であり，$z^4=(1+z^4)-1$ と考えると

$$|z^4| \leq |1+z^4|+1 \Leftrightarrow |z^4|-1 \leq |1+z^4| \Leftrightarrow R^4-1 \leq |1+z^4|$$

となる．したがって

$$\frac{|z^2|}{|1+z^4|} \leq \frac{R^2}{R^4-1}$$

7.1　練習問題

様々な線積分を求めてみよう．

まずは

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

を求める．偶関数であることを利用すると，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx \\ =\int_{\gamma_R} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz &= \int_{\gamma_R^1} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{z^2+1}{z^4+1}dz\end{aligned}$$

である．第 1 項は $\displaystyle\int_{-R}^R \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ に等しい．(→**レポート課題 I**)

続いて

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \quad (a>0)$$

を求めよう．

このとき，$z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，逆数は $\dfrac{1}{z}=e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ となる．これらは指数法則が成り立つため，$e^{i\theta}e^{-i\theta}=e^{i(\theta-\theta)}=1$ となることがわかる．また，この 2 つを足して割ると以下の式が得られる．

$$\cos\theta \;=\; \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$$

ここで，$\dfrac{dz}{d\theta}=-\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta+i\sin\theta)$ から $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ であるため，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} &= \int_C \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i}\int_C \frac{dz}{z^2+2az+1}\end{aligned}$$

と変形できる.（→レポート課題 **II**）

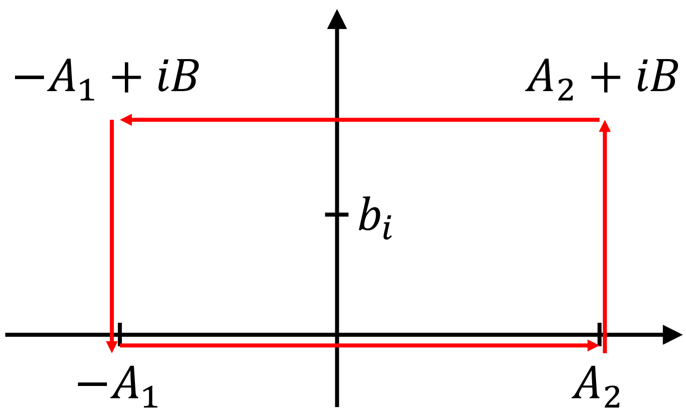
さらに別の式を見てみよう.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+b^2} dx \quad (a,\ b>0)$$

複素数に置き換えて

$$\int_{\gamma} \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2} dz$$

これを以下の図にして考える.



$z=\pm bi$ は特異点である．$B>\sqrt{2}b$ であるとき，

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma} \frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2} dz \\ &= \left(\int_{S[-A_1,\ A_2]} + \int_{S[A_2,\ A_2+iB]} + \int_{S[A_2+iB,\ -A_1+iB]} + \int_{[-A_1+iB,\ -A_1]}\right) \frac{z^{iaz}}{z^2+b^2} dz\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2} dz = \frac{ze^{iaz}}{(z+bi)(z-bi)} = \frac{1}{z-bi} \cdot \frac{ze^{iaz}}{z+bi}$$

であり，$g(z)=\dfrac{ze^{iaz}}{z+b_i}$ とおくと，$g(bi)=\dfrac{e^{-ab}}{2}$ である．これより，

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{S[-A_1,\ A_2]}+\int_{S[A_2,\ A_2+iB]}+\int_{S[A_2+iB,\ -A_1+iB]}+\int_{[-A_1+iB,\ -A_1]}\right)\frac{z^{iaz}}{z^2+b^2}dz\\
=&2\pi i\cdot g(bi)\\
=&\pi i e^{-ab}
\end{aligned}
$$

である．

この計算の中身について見てみる．長方形の縦の辺（虚軸に平行な辺）$S[A_k, A_k+iB]$ $(k=1,\ 2)$ について，

$$
\frac{2}{A_k}\left[-\frac{1}{a}e^{-ay}\right]_0^B = 2\frac{1-e^{-ab}}{aA_k} \leq \frac{2}{aA_k}
$$

であり，長方形の横の辺（実軸に平行な辺）について

$$
\left|\frac{ze^{-iaz}}{z^2+b^2}\right| \leq \frac{|z|e^{-ay}}{|z|^2-b^2} \leq 2\frac{e^{-ay}}{|z|}(y\text{ は }z\text{ の像}) \leq 2\frac{e-aB}{B}
$$

であることから，

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{[-A,\ A_2]}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}dz-\pi i e^{-ab}\right|\\
\leq&\frac{2}{a}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)+2\frac{(A_1+A_2)e^{-ab}}{B}
\end{aligned}
$$

ここで，B, A_1, A_2 の順に無限大に持っていくと

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}dz = \pi i e^{-ab}
$$

が求められる．両辺の虚部を取ると，

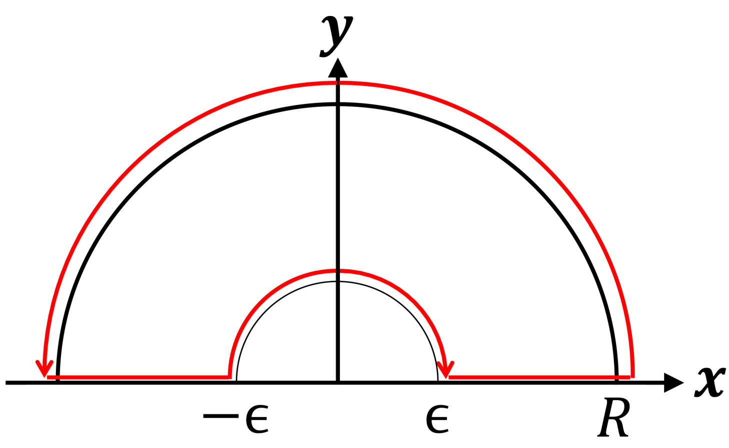
$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx = \pi e^{-ab}
$$

となる．(→**レポート課題 III**)

他にも以下のような式も計算できる．

$$
\int_0^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{x}\quad(\lambda\text{は正の実数})
$$

ここでは $\left(\int_{S[-R,\ -\epsilon]}-\int_{C^+(0,\ \epsilon)}+\int_{S[\epsilon,\ R)}+\int_{C^+(0,\ R]}\right)\frac{e^{i\lambda z}}{z}dz=0$ （C^+は上円を示す）を用いる（下図参照）．



（参考計算）

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C^+(0,\ \epsilon)}\frac{e^{i\lambda z}}{z}\\
=&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C^+(0,\ \epsilon)}\frac{dz}{z}\\
=&\lim_{z\to 0}\int_0^{\pi} id\theta=\pi i \text{ より}\\
&\left|\int_{C^+(0,\ R)}\frac{e^{i\lambda z}}{z}dz\right|\le\int_0^{\pi}e^{-\lambda R\sin\theta}d\theta\\
=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\lambda R\sin\theta}d\theta
\end{aligned}
$$

ここで，$\sin\theta>\dfrac{2}{\pi}\theta\quad\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が満たされる（Jordan の不等式）．
さらに，$R\to+\infty$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C^+(0,\ R)}\frac{e^{i\lambda z}}{z}dz\right|\le&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R\theta}d\theta\\
=&\frac{\pi(1-e^{-\lambda R})}{\lambda R}\to 0
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\int_0^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}dx=\frac{\pi}{2}
$$

である．

§ 今週のレポート課題

I.

次の線積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)}$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2}$

II.

次の線積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \quad (a>1) \quad \left(\text{ヒント：答えは}\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\text{になる}\right)$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+3\cos^2\theta)^2}$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(p^2\cos^2\theta+q^2\sin^2\theta)} \quad (p>q>0)$

III.

次の線積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$