情報数学III講義（第7回）

平成30年12月5日

§ 復習：微分と微分形式

高校では，微分（例えば，$f(x)=x^3$のとき，$f'(x)=3x^2$）において，3という数字は微分係数と呼ばれていたが，$f'(x)$ とはすなわち，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への比例関数（線形写像）と考えることができ，微分係数はすなわち比例定数と考えることができた．

また，第6回の講義で，以下のように微分形式と交代形式を学んできた．

1次の交代形式	$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	線形写像
2次の交代形式	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	二重線形・交代
m次の交代形式	$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{m\text{個}} \to \mathbb{R}$	m 重線形・交代

6.1 複素数を含む微分

これまでの講義で，1変数の微分では比例定数 f' が，多変数の微分では線形関数が出てくることを学んだ．例えば $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の微分は，$f' : \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$，$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$，$dy : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y$ と定義していた．同様に，複素数から複素数の関数 $f:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で複素数の微分を定義したい．

まず，$f_i:\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ という関数を用いて $f=f_1+if_2$ と表す．これを微分すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
df &= df_1 + i df_2 \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy\right) + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで複素数 z について $dz = dx + idy$ を定義する．微分が $df = \alpha\ dz$ と表せるような α の存在条件を調べてみる．すなわち $\exists\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha = a + ib,\ a, b : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ を考えると，

$$
\begin{aligned}
\alpha\ dz &= (a+ib)(dx+idy) \\
&= (adx - bdy) + i(bdx + ady) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

以上 2 式 (1) と (2) の係数を比較すると，以下の条件が得られる．

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = a, \quad -\frac{\partial f_1}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = a, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = b$$

従って，$df = \alpha\ dz$ を満たす必要十分条件は

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

となる．この条件をコーシーリーマン（Cauchy-Riemann）の方程式という．またコーシーリーマンの方程式が成り立つとき，その関数を正則関数や解析関数と呼ぶ．また，この場合の関数 α を微分係数と言う．複素関数論で対象とするのはこの方程式が成り立つ関数のみである．

では，どのような関数が正則関数か，例として以下の関数を確かめよう．

- $f(z) = c$ （定数関数）
  $c = c_1 + ic_2$ とする．$f_1(x,\ y) = c_1,\ f_2(x,\ y) = c_2$ であるので f_i はどちらの変数 x, y で偏微分しても 0 になる．

  $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

  したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，定数関数は正則である．このときの微分係数は $\alpha = a + ib = 0 + 0$ より 0 である．

- $f(z) = z$（恒等関数）
  $z = x + iy$ とする．$f_1(x,\ y) = x,\ f_2(x,\ y) = y$ であるので，以下の計算が成り立つ．

  $$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

  したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，恒等関数は正則である．このときの微分係数は $\alpha = a + ib = 1 + 0$ より 1 である．

- $f(z) = z^2$
  $z = x + iy$ とする．$f(x,\ y) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$ より $f_1(x,\ y) = x^2 - y^2$，$f_2(x,\ y) = 2xy$ であるので，以下の計算が成り立つ．

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y$$

  したがってコーシーリーマンの方程式が成り立つので，この関数は正則である．このときの微分係数は $\alpha = a + ib = 2x + i \cdot 2y = 2(x+iy)$ より $2z$ である．

  この恒等関数に帰納法を用いることで，n が実数のときに $f(z) = z^n$ が正則であることが分かり（→レポート課題 **II**），例えば以下の多項式関数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

  における微分

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}$$

  もまた正則となることが分かる．

また，f, g を正則関数だとする．微分を $df = f'(z)dz$ と表すと，

$$d(f+g) \ = \ df + dg \ = \ f'dz + g'dz \ = \ (f' + g')dz$$

となる．したがって，g, f が正則なら $f+g$ も正則であり，なおかつ，$(f+g)' = f' + g'$ が言える．また，複素数 α において

$$d(\alpha f) \ = \ \alpha df \ = \ \alpha f' dz$$

であるため，$(\alpha f)' = \alpha f'$ が言える．

さらに，テイラー（Taylor）展開を考える．これは無限次の多項式で定義されている式である．

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

と同様にして，z を複素数として

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots$$

を定義すると，この微分は

$$(e^z)' = 0 + 1 + z + \frac{1}{3!} \cdot 3z^2 + \cdots$$

すなわち

$$(e^z)' = e^z$$

である．

ほかにも

$$\mathrm{sin}x = x - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$\mathrm{cos}x = x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

について，z を複素数として

$$\mathrm{sin}z = z - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots$$

$$\mathrm{cos}z = z - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots$$

を定義すると，それぞれの微分は

$$(\mathrm{sin}z)' = 1 - \frac{1}{3!} \cdot 3z^2 + \frac{1}{5!} \cdot 5z^4 - \cdots = \mathrm{cos}z$$

$$(\mathrm{cos}z)' = -\frac{1}{2!} \cdot 2z + \frac{1}{4!} \cdot 4z^3 - \frac{1}{6!} \cdot 6z^5 + \cdots = -\mathrm{sin}z$$

となる．

同様にして $e^{i\theta} = \mathrm{cos}\theta + i\mathrm{sin}\theta$ も求められる（オイラーの関係式）ほか，$e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ を計算することで加法定理を導くこともできる．(→レポート課題 **IV**）

以上のことは，複素関数の世界では，指数関数も三角関数も統一的に扱えることを示している．

§ 復習

ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ において，ガウスの発散定理について，閉曲面での囲まれた領域 Ω を用いて以下のような式が成り立っていた．

$$\int_\sigma \boldsymbol{f} d\boldsymbol{S} = \int_\Omega (div\boldsymbol{f})dV$$

これは，2 次の微分形式 ω を用いて

$$\int_\sigma \omega d\boldsymbol{S} = \int_\Omega (div\omega)dV$$

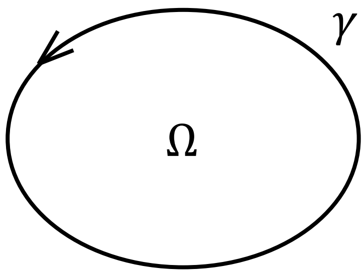
とも表された．

6.2 積分定理

では，次の線積分を考える．閉曲線 γ で囲まれた領域について，1 次の微分形式 ω を用いて

$$\int_\gamma \omega = \int_\Omega d\omega \tag{3}$$

が成り立つ．



a を複素数とし，中心 a，半径 R の円を考えると

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \quad (\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto R(\cos\theta + i\sin\theta) + a) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{R(\cos\theta + i\sin\theta) + a - a} \cdot \frac{dz}{d\theta} d\theta \\
&\left(\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(R(\cos\theta + i\sin\theta) + a \right) = R(-\sin\theta + i\cos\theta) \text{ より} \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{R(-\sin\theta + i\cos\theta)}{R(\cos\theta + i\sin\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i
\end{aligned}$$

となる．つまり，この線積分は半径に依存しないことになる．

さらに，$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ について，1 次の微分形式 dz を用いて上式 (3) が成り立つとすると $\int_\gamma f dz = \int_\Omega d(f dz)$ となる．このとき，左辺（1 次の微分形式）を積分すると 0 次の微分形式（スカラー場）になるはずである．そこで，$d(f dz) = 0$ となるのはどのような場合か調べるために，γ を閉曲線として

$$\int_\gamma f dz = \int_\Omega d(f dz) = 0$$

を満たす関係式を調べよう．関数 $f = f_1 + i f_2$, $dz = dx + i dy$ を使って以下の式を考える．

$$f dz = (f_1 + i f_2)(dx + i dy) = (f_1 dx - f_2 dy) + i(f_2 dx + f_1 dy)$$

両辺を微分したのち $dx \wedge dy$ の交代性に注意しながら式変形すると,

$$\begin{aligned} d(fdz) &= \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy + i \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dy \right) \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dy \wedge dx + i \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) dy \wedge dx. \end{aligned}$$

したがって,

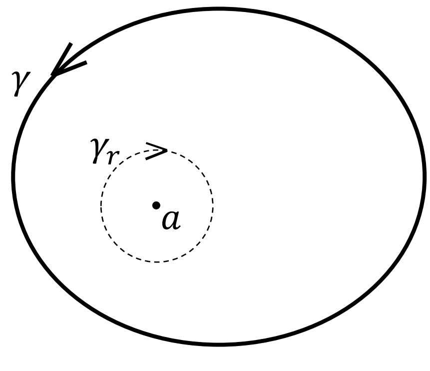
$$d(fdz) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$$

となる. これはコーシーリーマンの関係式に一致する. 従って $d(fdz) = 0$ が示された. これは, f という正則関数を微分して, 閉曲線に沿って線積分を行う（つまり面積分）と, その値は 0 になることを示す.

さて, 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ は正則関数であったが, 先程示したように, $\int_\gamma \dfrac{dz}{z-a}$ の値は 0 にはならず, $2\pi i$ であった. これは, 内部に特異点 a があるために起きた現象である. では, この特異点周囲を除外するように, 次のような図に対して計算をしてみよう. つまり,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

を計算してみよう.



このままでは積分定理を使えないので, 点 a の周りを半径 r の小さな球で囲み, 円周を γ_r と定義する. そして, 以前やったことと同様に $\gamma \cup \gamma_r$ を考えるわけだが, 閉曲線は左手に内部が見えるように向きをつけるため, 図のように γ と γ_r の方向が異なることに注意する.

このように囲むことで, $\gamma \cup \gamma_r$ の内部で囲まれた領域には特異点がなくなるため,

$$\int_{\gamma \cup \gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz \ = \ 0$$

が得られる．これについて，γ_r の向きに注意して分解してやると，

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}dz \ = \ 0$$

となる．ここで，点 a を囲んだ球の半径 r をどんどん小さくする．つまり，$r \to 0$ なので $f(z) \to f(a)$ となり定数に近づく．$f(z)$ を定数 $f(a)$ と見なすとすると，

$$f(a) \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a}$$

を計算すれば良いことになる．これは先ほど，a を原点として計算したときに，半径に依存せず $2\pi i$ になることがわかっている．したがって，

$$f(a) \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

が言える．

これを**コーシー（Cauchy）の積分公式**と呼ぶ．この計算をもう少し厳密にしてみよう．$\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos\theta + i\sin\theta + a)$ とし，半径を r とすると，

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{f(r(\cos\theta + i\sin\theta) + a)}{r(\cos\theta + i\sin\theta) + a - a} \cdot \frac{dz}{d\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} i f(r(\cos\theta + i\sin\theta) + a) d\theta
\end{aligned}$$

となる．この最終式を r の関数と見立て $\varphi(r)$ とすると，$\varphi(r)$ が半径によらないことから，$\varphi(0)$ を計算することで $\varphi(r) = 2\pi i f(a)$ が導ける．

§ 今週のレポート課題

I.

関数 f, g が正則ならば fg が正則であることを確認し，$(fg)'f(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ であることを示せ．また同様に，関数 f, g が正則ならば $\dfrac{f}{g}$ が正則であることを確認し，$\left(\dfrac{f}{g}\right)' f(z) = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$ であることを示せ

II.

数学的帰納法を用いて $f(z) = z^n$ が正則であることを確認し，$f'(z) = nz^{n-1}$ であることを示せ

III.

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ が正則であることを確認し，指数法則が複素数においても成り立つことを示せ

IV.

$e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ を計算することで加法定理を導け