情報数学III講義（第6回）

平成30年11月21日

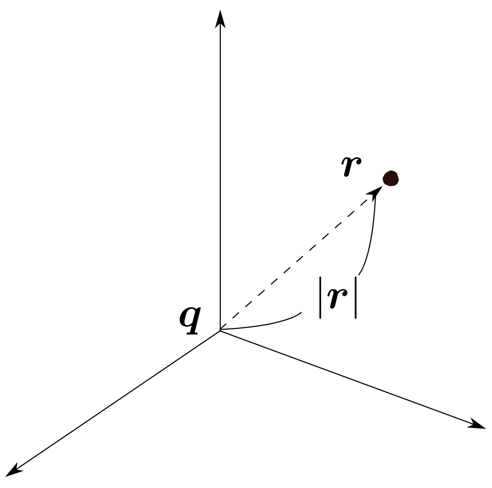
4　発散定理の応用

4.1　逆2乗の法則

力学には万有引力の法則というものがある．2質点（質量 m_1, m_2）間の距離が r の場合，万有引力の大きさは $G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$（G は万有引力定数）と表される．

同様に，電磁気学にクーロンの法則というものがある．距離 r だけ離れたところに q_1, q_2 の電荷を持った点電荷があるとき，その間には $k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$（k は比例定数）で表される力が働く．

万有引力の法則やクーロンの法則のように，距離 r の2乗に反比例している法則を，逆2乗の法則という．ここでは，電磁気学のクーロンの法則について考えてみよう．



まず原点に電荷 q を置き，電荷 q から点 r が受ける力について考える．点 r の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とすると，大きさは $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)} = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ と表せるので，電場（ベクトル場）$\boldsymbol{f}$ は以下の式で表せる．

$$\boldsymbol{f} \;=\; k\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \;=\; kq\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \quad \left(k\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\text{はスカラー値}, \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\text{は単位ベクトル}\right)$$

つまり，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \;=\; kq\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

と表される．この電場の発散を計算すると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{f} \;&=\; kq\left\{\frac{\partial}{\partial x}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right. \\
&\qquad\left. +\frac{\partial}{\partial y}y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{\partial}{\partial z}z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right\} \\
&=\; kq\{3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}-3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2+y^2+z^2)\} \\
&=\; 0
\end{aligned}$$

と 0 になることがわかる．これは逆 2 乗の法則に従うときのみである．つまり万有引力の法則においても同様の結果になる．(→**レポート課題 I**)

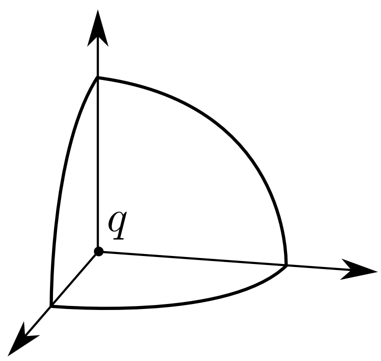
4.2　ガウスの発散定理の条件

閉曲面 σ で囲まれた領域 Ω に電場 $\boldsymbol{f}$ があったとき，ガウスの発散定理が使えた．

$$\int_\sigma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \int_\Omega (\mathrm{div}\boldsymbol{f})dV$$

左辺が面積分，右辺が体積分を表している．例えば．ある場所に電荷をおいたときの位置 $\boldsymbol{r}$ における面積分は，右辺の体積分を計算すれば得られる．

前節では，体積分（発散）が 0 になるという話をしてきたが，今度は原点に電荷 q を置いたときに，原点中心に半径 a の球面における面積分を考えてみる．



そうすると，球面の点は原点に置いた電荷から等距離であるため，力の大きさは球面のどの点でも同じであり，向きは接平面に垂直となる．この面積分は，球

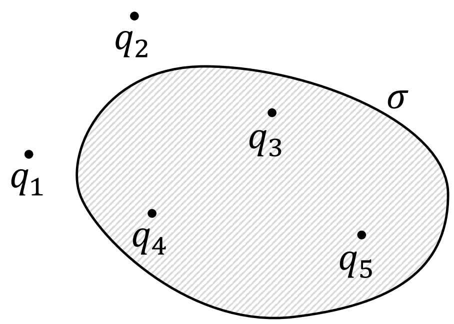
面の表面積 $4\pi a^2$ と力の大きさ $f = \dfrac{kq}{a^2}$ より，この 2 値をかけ合わせることにより $4\pi kq$ となることがわかる．しかし，ガウスの発散定理を使うと 0 になるのに対して，この場合は $4\pi kq$ となり明らかに 0 にならない．

実は，ガウスの発散定理を使うためには非常に重要な条件がある．それは，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ は空間全体で定義されなくても良いが，少なくとも曲面内部ではベクトル場が定義されていなければならないというものである．今回の場合は，球面内部にある電荷が置いてある場所（原点）においてベクトル場が定義されていない．このような点を数学では特異点と呼ぶ．ガウスの発散定理は閉曲面内に特異点が存在しないという制約のもとで成立する定理なのである．

つまり今回の例であれば，閉曲面の**外**に電荷 q があれば，ガウスの発散定理が使えることになる．

4.3　ガウスの法則

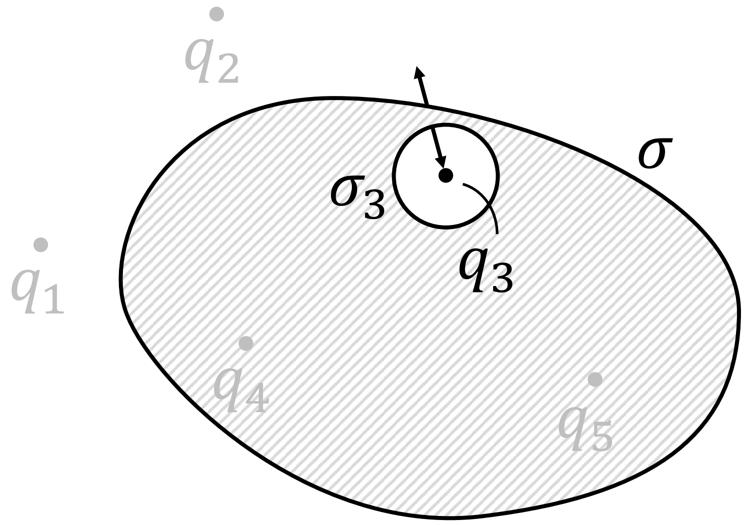
今度は空間の中に閉曲面 σ があり，この空間の中に電荷が散らばっているとする．



この 5 つの電荷によって生じる電場 $\boldsymbol{f}$ は，q_1 によって生じる電場 $\boldsymbol{f}_1$ と q_2 によって生じる電場 $\boldsymbol{f}_2$ と $\cdots$ と定義すると，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3 + \boldsymbol{f}_4 + \boldsymbol{f}_5$ のように表せる（重ね合わせの原理）．したがって，この面積分は分解したそれぞれの面積分を計算すれば良い．

$$\int_\sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \;=\; \sum_{i=1}^{5} \int_\sigma \boldsymbol{f}_i \cdot d\boldsymbol{S}$$

ここで，q_1 と q_2 に関しては特異点が閉曲面の中にないので，ガウスの発散定理を使って 0 になることがわかる．しかし，他の電荷に関しては閉曲面の内部に特異点が存在してしまうため，ガウスの発散定理をそのまま使うことができない．そこで，特異点がある部分（例えば q_3）を小さな球面 σ_3 で囲って隔離する．
2 つの閉曲面を合体させた $\sigma \cup \sigma_3$（次図の斜線部）を考えると，電荷 q_1 に対する特異点がこの合体させた閉曲面の外になるため，ガウスの発散定理が使える．合



体させた閉曲面に対し外向きを表とする（上図の矢印の向き）ため，曲面の向きに注意すると以下のような関係が得られる．

$$\underbrace{\int_{\sigma\cup\sigma_3} \boldsymbol{f}_3 \cdot d\boldsymbol{S}}_{=0} = \int_{\sigma} \boldsymbol{f}_3 \cdot d\boldsymbol{S} + \left(-\int_{\sigma_3} \boldsymbol{f}_3 \cdot d\boldsymbol{S}\right)$$

したがって，電荷 q_3 を中心とした半径 a の球面を考えると，

$$\int_{\sigma} \boldsymbol{f}_3 \cdot d\boldsymbol{S} \ = \ \int_{\sigma_3} \boldsymbol{f}_3 \cdot d\boldsymbol{S} \ = \ 4\pi k q_1$$

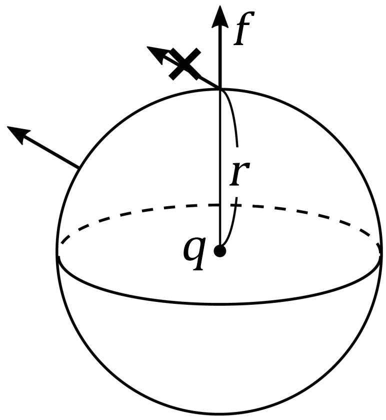
ということがわかる．q_4 と q_5 も同様に考えると，

$$\int_{\sigma} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \ = \ 4\pi k(q_3 + q_4 + q_5)$$

が得られる．要するに，複数の電荷がある場合の面積分は，閉曲面で囲まれた中の電荷を足し合わせれば良いということである．これをガウスの法則と呼ぶ．このようなことが言えるのは，クーロンの法則が逆 2 乗の関係になっているからにほかならない．

ここまではクーロンの法則が成り立つものとしてガウスの法則を導いたので，次はその逆を考える．いま，電荷 q がある点を中心に半径 r の球を考える．そうすると，生じる電場は接平面に垂直になるはずである．また，球は対称であるため，回転しても球面上で電場の大きさが変化することはない．

ガウスの法則が成り立つので面積分を計算すると，どんな電場が生じているかわからないが $4\pi kq$ が得られる．また，表面積は $4\pi r$ であるため力の大きさ f とすると $4\pi kq \ = \ 4\pi r^2$ が成り立つ．したがって，$f = \dfrac{kq}{r^2}$ となり，クーロンの法則を導くことができた．



§ 復習：作用素ナブラ

作用素 ∇（ナブラ，nabla）というものを導入する．これは形式的に $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ で定義される擬似ベクトルとして表現される．∇ を用いて $\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$ を表すことができる．

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対して，

$$\mathrm{grad}\ \varphi \ = \ \nabla\varphi \ = \ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

によって定義されるベクトル場をスカラー場 φ の勾配という．また，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ に対して，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f} \ = \ \nabla\cdot\boldsymbol{f} \ = \ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

によって定義されるスカラー場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の発散という．同様に，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} \ = \ \nabla\times\boldsymbol{f} \ = \ \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

によって定義されるベクトル場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の回転という．

5　微分形式と交代形式

前回までの講義で交代形式を学んできた．

1 次の交代形式	$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	線形写像
2 次の交代形式	$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	二重線形・交代
m 次の交代形式	$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{m\text{個}} \to \mathbb{R}$	m 重線形・交代

ここで，m 次の微分形式とは $\mathbb{R}^n$ の各点に m 次の交代形式を対応させる写像をいい，例えば 1 次の交代形式の全体は線形空間であるが，n 次元のベクトルについて基底 $dx_i(1 \leq i \leq n)$ は

$$dx_i : \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} \to \underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}}$$

と表される．

例えば，$\mathbb{R}^3$ において 1 次の交代形式を考えたとき，基底は

$$dx : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1$$

$$dy : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_2$$

$$dz : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_3$$

と表され，交代形式は $\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$ と一意的に表されるが，これは 2 次の交代形式と対応する．(詳細は第 5 回講義 2.11，2.12 節を参照)

また，$\mathbb{R}^3$ において 3 次の交代形式を考えたとき，

$$\left(\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

であり，基底は $dx \wedge dy \wedge dz$ である．これは，0 次の交代形式（実数 α : 1 次元）と対応するものである．

空間の各点に n 次の交代形式を対応させる写像を n 次の微分形式と呼ぶ．

スカラー関数である 0 次の微分形式 $\varphi(x,y,z)$ を微分すると

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

という 1 次の微分形式となる．

また 1 次の微分形式 $\omega=f_1dx+f_2dy+f_3dz\ (f_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R})$ を微分すると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right)\wedge dx\\
&+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right)\wedge dy\\
&+\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx+\frac{\partial f_3}{\partial y}dy+\frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right)\wedge dz\\
=&\frac{\partial f_1}{\partial x}\underline{dx\wedge dx}+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz\wedge dx\\
&+\frac{\partial f_2}{\partial x}dx\wedge dy+\frac{\partial f_2}{\partial y}\underline{dy\wedge dy}+\frac{\partial f_2}{\partial z}dz\wedge dy\\
&+\frac{\partial f_3}{\partial x}dx\wedge dz+\frac{\partial f_3}{\partial y}dz\wedge dx+\frac{\partial f_3}{\partial z}\underline{dz\wedge dz}
\end{aligned}$$

ここで下線を引いた部分については，微分形式の性質で $\varphi\wedge\varphi=0$ であることから全て 0 になる．また，$\varphi\wedge\psi=-\psi\wedge\varphi$ であることを利用して次のように変形できる．

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

さて，ここまでベクトル解析と微分形式を学習してきたことをまとめると次表のようになる．

ベクトル解析	スカラー場 φ	$\xrightarrow{grad}$	ベクトル場 $f_1e_1+f_2e_2+f_3e_3$	$\xrightarrow{rot}$	ベクトル場	$\xrightarrow{div}$	スカラー場
微分形式	0次の微分形式		1次の微分形式 $f_1dx+f_2dy+f_3dz$		2次の微分形式 $f_1dy\wedge dz$ $+f_2dz\wedge dx$ $+f_3dx\wedge dy$		3次の微分形式 $\varphi dx\wedge dy\wedge dz$

上記で示したように，0（1）次の微分形式を微分することで 1（2）次の微分形式を導き出すことができる．これは，1（2）次の微分形式をベクトル場に戻して

考えることで，スカラー場から grad（ベクトル場から rot）の計算を行ったことに等しい.（→レポート課題 **II**）

例えば，1 次の微分形式（$\mathbb{R}^2$）に対して 1 階微分を行うと

$$
\begin{aligned}
d(f_1dx+f_2dy) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy\right)\wedge dy \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial f_2}{\partial x}dx\wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy
\end{aligned}
$$

となる（→レポート課題 **III**）.

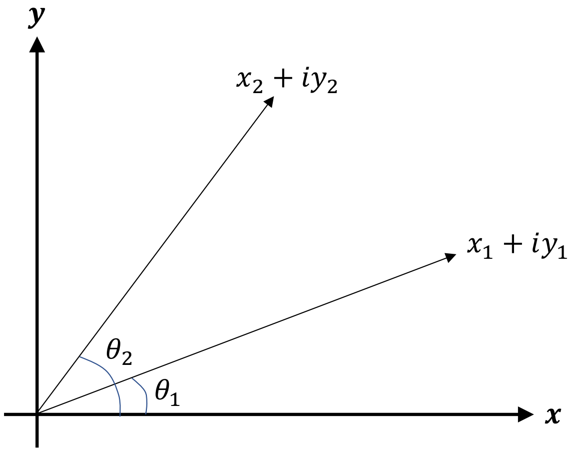
6　複素関数論

§ 高校での積分

例えば，スカラー関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を微分すると，1 次の微分形式 $f'dx$ が求められる．また，$dx:x\mapsto x$ における定積分 $\int_a^b fdx$ とは，1 次の微分形式を線積分したに等しくなる．

§ 極座標，複素数の積の復習

図のように，偏角 θ_1,θ_2 で，動径の大きさ r_1，r_2 の 2 複素数 x_1+iy_1，x_2+iy_2 を考える．



ここで極形式で $x_j=r_j\mathrm{cos}\theta_j$，$y_j=r_j\mathrm{sin}\theta_j$ と表されるので，複素数の積は加法定理を用いることにより

$$
\begin{aligned}
&(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\\
&=\{r_1(\mathrm{cos}\theta_1+i\mathrm{sin}\theta_1)\}\{r_2(\mathrm{cos}\theta_2+i\mathrm{sin}\theta_2)\}\\
&=r_1r_2\{\mathrm{cos}\theta_1\mathrm{cos}\theta_2-\mathrm{sin}\theta_1\mathrm{sin}\theta_2+i(\mathrm{sin}\theta_1\mathrm{cos}\theta_2+\mathrm{cos}\theta_1\mathrm{sin}\theta_2\}\\
&=r_1r_2\{\mathrm{cos}(\theta_1+\theta_2)+i\mathrm{sin}(\theta_1+\theta_2)\}
\end{aligned}
$$

と表される．

§ 次回の講義へ向けて

これまでの講義で，1 変数の微分では比例定数 f' が，多変数の微分では線形関数が出てくることを学んだ．例えば $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の微分は，$f':\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$，$dx:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto x$，$dy:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto y$ と定義していた．同様に，複素数から複素数

の関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ で複素数の微分を定義したい．

まず，$f_i:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ という関数を用いて $f=f_1+if_2$ と表す．これを微分すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} df &= df_1+idf_2 \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy\right)+i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy\right) \end{aligned} \tag{1}$$

ここで複素数 z について $dz=dx+idy$ を定義する．微分が $df=\varphi\ dz$ と表せるような φ の存在条件を調べてみる．すなわち $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を考えると，

$$\begin{aligned} \varphi\ dz &= (\varphi_1+i\varphi_2)(dx+idy) \\ &= (\varphi_1 dx-\varphi_2 dy)+i(\varphi_2 dx+\varphi_1 dy) \end{aligned} \tag{2}$$

となる（→レポート課題 **IV**）．

§ 今週のレポート課題

I.

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ において電場 $\boldsymbol{f}$ に関する次式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) \;=\; kq\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}|^{\alpha} \quad (\alpha \text{ は定数})$$

の発散を計算し，$\alpha = -\dfrac{3}{2}$ の場合のみ発散が 0 になることを確かめよ．

II.

2 次の微分形式 $f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$ を微分することにより，2 次の微分形式の微分がベクトル解析における div の計算に対応することを示せ．

III.

0 次の微分形式 φ について，$d(d\varphi)$ を計算せよ．

IV.

10 ページ式 (1), (2) より，複素数において微分を定義するための必要十分条件を求めよ．