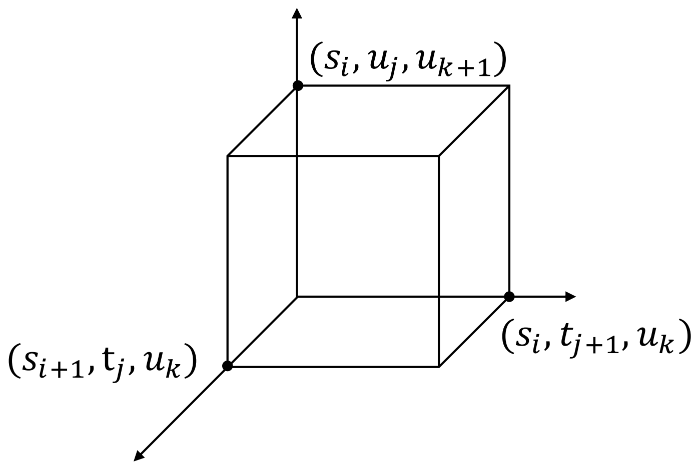
情報数学III講義（第4回）

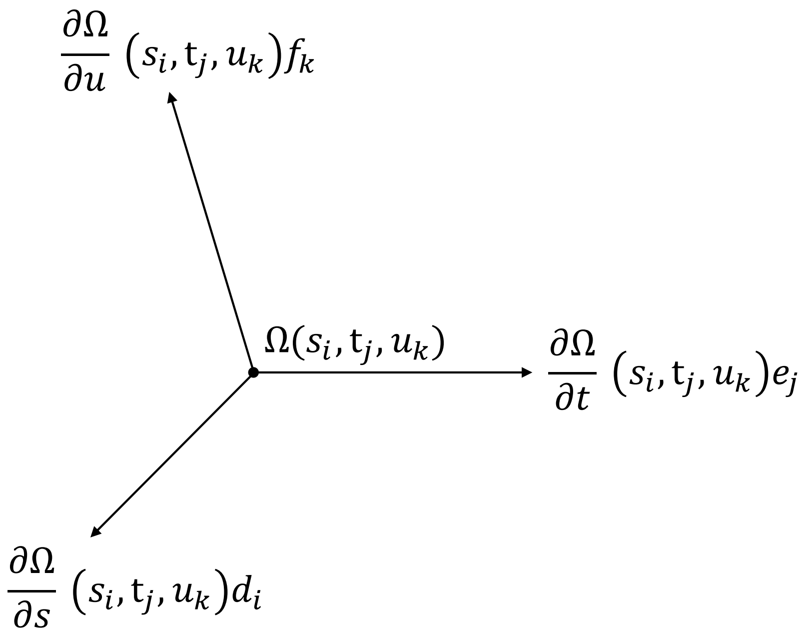
平成30年10月24日

2.7　体積分

領域$\Omega([a_1, a_2]\times[b_1, b_2]\times[c_1, c_2] \to \mathbb{R}^3)$を，$(s_{i+1}, t_j, u_k), (s_i, t_{j+1}, u_k), (s_i, t_j, u_{k+1})$の3点で定められる直方体とする．スカラー場$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$とし，$\sum_\Omega \varphi dV$を求めてみよう．



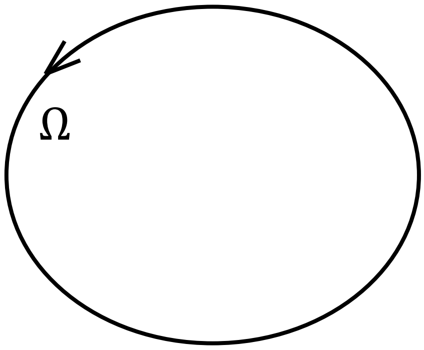
ここで，$s_{i+1} - s_i = d_i \in D, t_{j+1} - j_i = e_j \in D, u_{k+1} - u_k = f_k \in D$とする．このとき，この直方体の体積は微小な平行六面体の総和となる．



$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1}\varphi(\Omega(s_i,t_j,u_k))\left(\frac{\partial\Omega}{\partial s}(s_i,t_j,u_k)d_i\cdot\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}(s_i,t_j,u_k)e_j\times\frac{\partial\Omega}{\partial u}(s_i,t_j,u_k)f_k\right)\right)\\
=&\int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{c_1}^{c_2}\varphi(\Omega(s,t,u))\left(\frac{\partial\Omega}{\partial s}(s,t,u)\cdot\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}(s,t,u)\times\frac{\partial\Omega}{\partial u}(s,t,u)\right)\right)dsdtdu
\end{aligned}
$$

2.8 閉曲面

閉曲線 Ω について線積分を行う向きを決める．積分は向きを逆にすると符号が逆になってしまうからである．ここでは曲面に対し旗を立てたとき，常に左手方向に旗が見えるように進む方向（図に見える側を表とした場合，表側から見て反時計回り）を正とする．また，面積分は常に立体の外側が表側になるように考え，ベクトル積はその面に対して垂直に立てて考える．

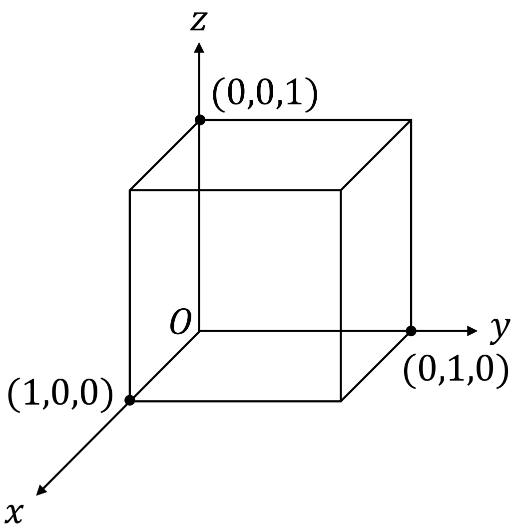


また，閉曲面には必ず，縁となる曲面がある（例えば，閉曲面な輪状のリングに石鹸水をつけることで石鹸水の膜ができるが，この膜はそもそもリングが閉じていないと出来上がらないことが，閉曲面に縁がある証拠である）．

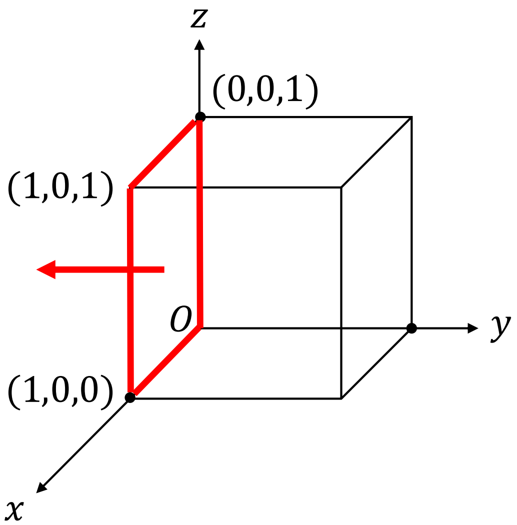
この考え方を用いて，先週分のレポート課題を解いてみよう．

§ 先週のレポート課題

I. (3)　ベクトル場 $\boldsymbol{r} : (x, y, z) \to (x, y, z)$ において，下図の六面体について面積分せよ

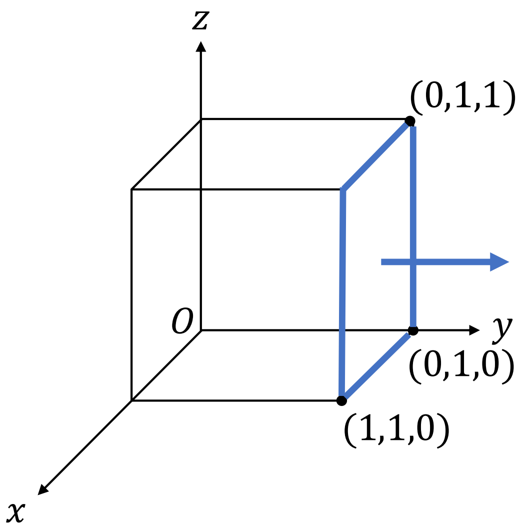


この問題は，すなわち六面体の内部から単位時間に溢れ出す水の量を考えることで求められる．上図の左側面を考えてみよう．



このとき，この側面は常に y 軸方向に水が流れる（xz 平面に対し垂直）と考えられるため，結局ベクトル場の y 成分だけを考えれば良い．しかし y 成分を考えるとき，この面は $y=0$（定数）なのは明らかであり，内積を考えると面積分の値は［面積 $\times\, 0(=y)$］となる．面積は $1\,(=1\times 1)$ なので，この面の面積分は $1\times 0=0$ である．

続いて向かい側の面を考えよう．



同様に考えると，面積分は［面積 $\times\, 1(=y)$］と考えることができ，この面における面積分は 1 である．

また残りの面を考えると，x や z の値が 0 になっている面は軒並み面積分の値が 0 になり，1 になっている面は面積分の値が 1 になる．

したがって，最終的な答えは $0+1+0+1+0+1=3$ となる．

2.9 復習：微積分学の基本定理

次を微積分学の基本定理と呼ぶ.

微積分学の基本定理

$F'=f,\, d\in D$ とする．このとき次が成り立つ．

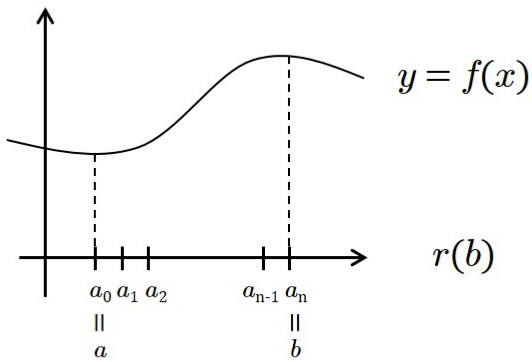
$$\int_a^{a+d} f(x)dx = f(a)d = F(a+d)-F(a)$$

$$\left(a+d=b \text{ と置くことで, } \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)\right)$$

ここで主張したいのは, 基本定理が無限小レベルで成立するという仮定を置くと,

そこから一般の基本定理が導けるということである．この「仮定」とは第1回の授業で導入したKock-Lawvereの公理にほかならない．

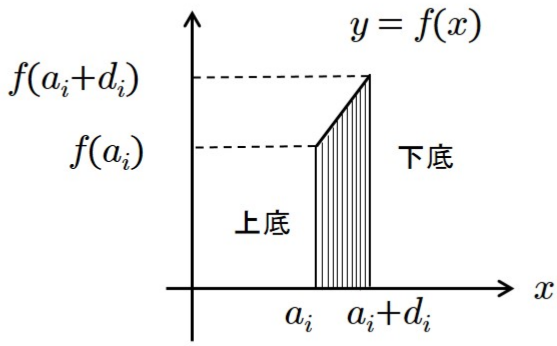
下図のように区間 $[a,b]$ を，任意の i について $a_{i+1}-a_i \in D$ が成り立つくらいに細かい区間 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する．



このとき分割した細長い領域の面積をそれぞれ求めてから足し合わせても結果は変わらないため，次が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx.$$

さて，ここで上式の右辺において i を固定して考える．任意の i について $a_{i+1}-a_i \in D$ が成り立つくらいに細かい区間に分けてあるため，当然この i についてもそれが成り立つ．したがってKock-Lawverの公理より f は微小区間 $[a_i, a_{i+1}]$ において直線となる．（下図参照．なお，$d_i := a_{i+1}-a_i$ としている．）



求める斜線部分は台形であり，台形の面積公式は (上底)+(下底)×(高さ)/2 なので，求める面積は

$$\frac{1}{2}d_i(f(a_i)+f(a_i)+f'(a_i)d_i) = f(a_i)d_i$$

となる．つまりこの台形の面積は, 縦が $f(a_i)$ で横が d_i の長方形の面積と等しいということを示している．ここからただちに無限小レベルでの基本定理, すなわち任意の i に対し

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = F(a_{i+1}) - F(a_i)$$

が言える．

いま「Kock-Lawvere の公理を認める $\Rightarrow$ 無限小レベルでの基本定理が成り立つ」を示した．最後に「無限小レベルでの基本定理が成り立つ $\Rightarrow$ 基本定理が一般にも成り立つ」を示そう．こちらは以下のような式変形より導ける．

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \\ &= \sum_{i-0}^{n-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) \\ &= (F(a_1) - F(a_0)) + (F(a_2) - F(a_1)) + \cdots \\ &= F(a_n) - F(a_0) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

つまり中間部分は丁度打ち消し合ってなくなってしまうため, 区間の端だけが残るというわけである.

さらに，ここで 1 次元の閉区間 $[a, b]$ を考える．ここで，a, b は境界（端点）である．これについて a から b に向かって積分を試みる．このとき端点に向きとして，a に $-$, b に$+$ をつける．点に向きをつけることで，a から b に向かった積分は

$$\underset{+}{\underline{F(b)}} - \underset{-}{\underline{F(a)}}$$

となる．

2.10 積分定理

では，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ におけるスカラー場（関数）$\varphi(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ による線形写像を考える．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ のとき，

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \ \ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \ \ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\boldsymbol{x}) \right]$$

と表される．ここで，

$$\boldsymbol{x} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(\boldsymbol{x}) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(\boldsymbol{x}) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

のベクトル場を，$grad\ \varphi$ と定義する．

さて，ベクトル場 $grad\ \varphi$ を曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ に沿って線積分してみる．$\gamma = (\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3)^T$ とするとき，次の計算が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (grad\ \varphi) \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_a^b (grad\ \varphi)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(\gamma(t)) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma(t)) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \gamma_3'(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \frac{\partial \gamma}{\partial z}(\gamma(t))\gamma_3'(t) \right) dt
\end{aligned}$$

さらに，作用素 ∇（ナブラ，nabla）というものを導入する．これは形式的に $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ で定義される擬似ベクトルとして表現される．∇ を用いて $\mathrm{grad}, \mathrm{div}, \mathrm{rot}$ を表すことができる．

スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ に対して，

$$\mathrm{grad}\ \varphi \ = \ \nabla\varphi \ = \ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

によって定義されるベクトル場をスカラー場 φ の勾配という．また，ベクトル場 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ に対して，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{f} \ = \ \nabla \cdot \boldsymbol{f} \ = \ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

によって定義されるスカラー場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の発散という．同様に，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} \ = \ \nabla \times \boldsymbol{f} \ = \ \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

によって定義されるベクトル場をベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の回転という．

例えば，$rot\boldsymbol{f}$ は次の通りに導かれる．

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \boldsymbol{f} \\
=& \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & f_2 \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & f_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} & f_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & f_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & f_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & f_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

なお，回転には次の定理が成り立つ．

Stokes の定理

閉曲線 γ を境界とする曲面 σ に対して，ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ があるとき，以下の等式が成り立つ．

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \ = \ \int_\sigma (\mathrm{rot}\boldsymbol{f}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

§ 今週のレポート課題

I.

原点中心，半径 a の球の体積を，極座標を用いて求めよ.（回転体の計算を用いてはいけない）

II.

次の内容を証明せよ.

(1) スカラー場 φ において，$rot(grad\ \varphi) = \boldsymbol{o}$

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ において，$div(rot\ \boldsymbol{f}) = 0$

III.

ベクトル場 $\boldsymbol{r} : (x, y, z) \mapsto (x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)^k \quad (k \in \mathbb{R})$ における回転 rot を求めよ.