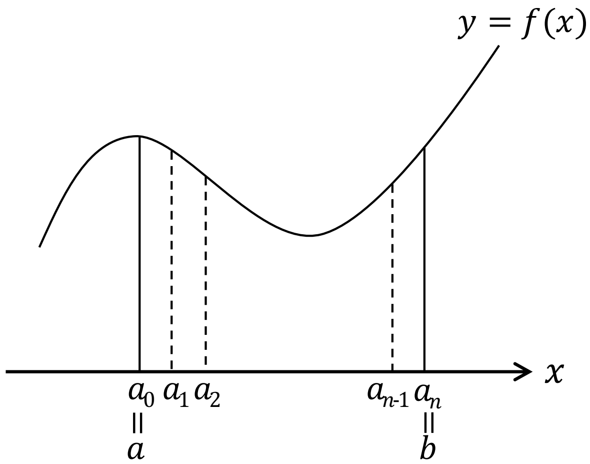
情報数学III講義（第3回）

平成30年10月17日

§ 定積分（前回の復習）



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ において，上図のように $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ を $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する．そうすると，

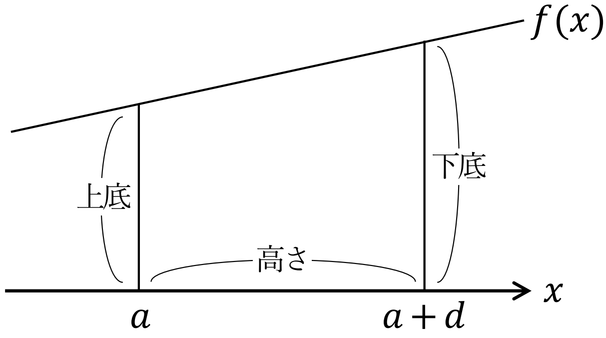
$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

となる．なお，$d_i = a_{i+1} - a_i \in D$ となるくらい細かくする．このとき，a_i の隣の点は $a_{i+1} = a_i + d_i$ と表せる．ここで，次の積分を考える．

$$\int_a^{a+d} f(x)dx$$

Kock-Lawvere の公理より，$f(x)$ は直線になる．したがって，細分した各領域の面積を得るには台形の面積を算出すれば良いことになる．
台形の面積は $\{(\text{上底}) + (\text{下底})\} \times (\text{高さ})/2$ なので，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+d} f(x)dx &= \frac{1}{2}d(f(a) + f(a+d)) \\ &= \frac{1}{2}d(f(a) + f(a) + f'(a)d) \\ &= d \cdot f(a) \qquad\qquad (\because d^2 = 0)\end{aligned}$$



となる（実質長方形の面積を求めたに等しい）．これは微積分学の基本定理である．Kock-Lawvere の公理より，任意の d に対して αd となるような実数 α が一意的に定まる．

$$\underbrace{\int_a^{a+d} f(x)dx}_{f(a)d} \ = \ F(a+d) - F(a) \ = \ \alpha d$$

つまり,「無限小のレベル」で微積分学の基本定理が成り立つように微分係数を定義したということである．これらを用いて実際に $f(x)$ の区間 $[a,b]$ に対しての積分を整理すると

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \ &= \ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \\ &= \ \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)d_i \end{aligned}$$

とも表せる．

2.2 ベクトルの計算

この先ベクトルの計算を行うため，まずベクトル計算において必要な知識を復習する．

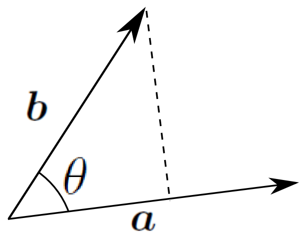
§ 内積（スカラー積）

まず内積について考える．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ の内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と表し, 以下のように定義する：

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \ \stackrel{\text{def}}{=} |\boldsymbol{a}| \ \underbrace{|\boldsymbol{b}| \cos\theta}_{\text{正射影の影の長さ}}$$

（ただし $\stackrel{\text{def}}{=}$ は左を右で定義する記号）
このように内積は $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ というベクトルからスカラーへの写像となり, ゆえにスカラー積と呼ばれる．

ここで $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, + a_3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$ と表し，標準基底の内積について $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 \ = \ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \ = \ 0$，$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i \ = \ 1$，$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \ = \ 0$ を考えると，



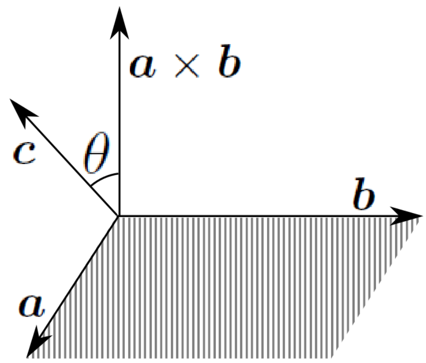
内積は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2, +a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot(b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\
&= a_1b_1\,\underbrace{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1}_{1} \;+\; a_1b_2\,\underbrace{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2}_{0} \;+\; a_1b_3\,\underbrace{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3}_{0} \\
&\quad + a_2b_1\,\underbrace{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1}_{0} \;+\; a_2b_2\,\underbrace{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2}_{1} \;+\; a_2b_3\,\underbrace{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}_{0} \\
&\quad + a_3b_1\,\underbrace{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1}_{0} \;+\; a_3b_2\,\underbrace{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2}_{0} \;+\; a_3b_3\,\underbrace{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3}_{1} \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}
$$

となり, 内積の解析的な定義が導ける.

§ 外積（ベクトル積）

次に外積について考える. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ の外積を $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と表記し,「$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のある平面に右手系になるように直行するベクトルで, 大きさが $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形の面積であるもの」と定義する. このとき外積は $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ というベクトルからベクトルへの写像となり, ゆえにベクトル積と呼ばれる.



ここで，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \\
\boldsymbol{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

と置けば，内積の場合と同様に解析的な定義を得られる．

$$
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
$$

2.3　極座標

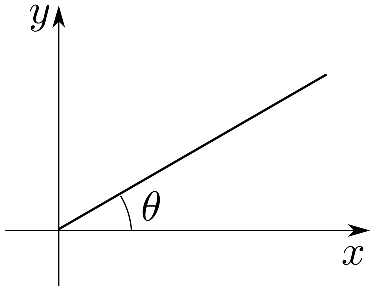
§ 平面

極座標では (x, y) で表していた座標を，原点からの距離 r と，動径と x 軸の正方向の成す角 θ で表す．

直交座標 (x, y) との関係は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

なお，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ である．

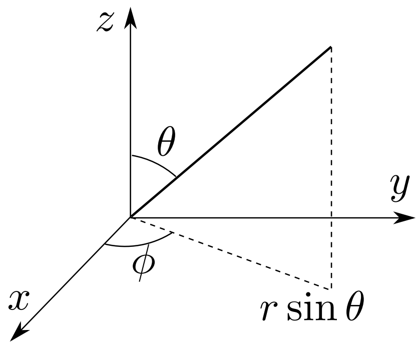


§ 空間

空間では (x, y, z) で表していた座標を，原点からの距離 r と，動径と z 軸の正方向の成す角 θ と，xy 平面上の r の正射影 $r\sin\theta$ と x 軸の成す角 ϕ で表す.
直交座標 (x, y, z) との関係は以下のとおりである.

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

なお，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ である.



2.4 線積分

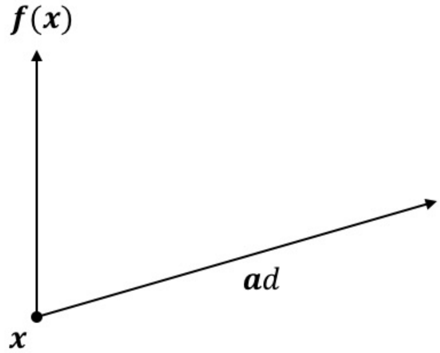
線積分とは，ベクトル場を力の場とした場合において，ある経路に沿って動いた際にどのくらい仕事をしたのか考えることである．線積分を計算する場合はパラメータは自由でかまわないが，どちらが始点でどちらが終点か向きをつける必要がある.

§ 力の場

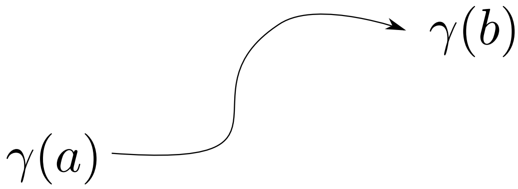
空間の各点に力が働いているとして, 私たちはそれをどのように観測したらよいのだろうか．近代科学は実験・観測に基づく学問であり, 観測できないもの（例えば神など）は対象にできない. そこで力そのものを観測するかわりに, 力の場で移動を行った際に発生する仕事量を観測することを考える. 仕事量は例えば熱に変換することで観測することができる.
点 $\boldsymbol{x}$ で力 $\boldsymbol{f}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ が働いていたとして, その作用のもとで, $\boldsymbol{x}$ からベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿う無限小の移動を行うと, なされる仕事量は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot d\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}$$

である.（ただし $d \in D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$）



では，下図のような $\gamma:[a,b]\mapsto\mathbb{R}^3$ という空間中の曲線に沿って動いたときにどれだけ仕事がされるかについて考える．(例えば，$\theta\in[0,2\pi]\mapsto(r\texttt{cos}\theta, r\texttt{sin}\theta, 0)$ という写像は，x,y,z の 3 次元平面において，xy 平面上にある，原点中心，半径 r の円を指す)



力 $\boldsymbol{f}$ の中で曲線 γ に沿って動いたとき，

$$\int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$$

という仕事がなされる（参考：力学的な仕事を表す式は $W=F\cdot s$）．

$[a,b]\mapsto t$ とすると，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{f}(\gamma(a_i))\cdot\gamma'(a_i)d_i\\ =\ &\int_a^b \boldsymbol{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt\end{aligned}$$

とおける．

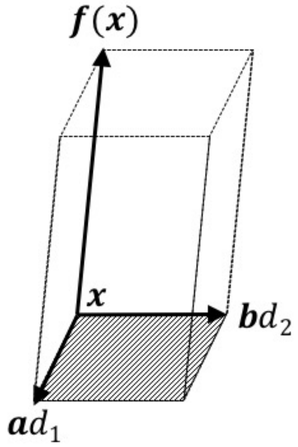
2.5 面積分

それぞれの区間 $[a_1,b_1]\in s$，$[a_2,b_2]\in t$ について，曲面 $\Sigma(s,t)\to\mathbb{R}^3$ 上でベクトル場 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ が定義されているとする．このとき，曲面 Σ を細分して微小領域ごとに面積の大きさの法線ベクトルを考える．

§ 流れの場

流れの場（例えば水の流れ）について考える．点 $\boldsymbol{x}$ での流れは, $\boldsymbol{x}$ を起点として 2 つのベクトル $d_1\boldsymbol{a}, d_2\boldsymbol{b}$ で張られる小さな升を考えて, 単位時間に横切る水の量（体積）を観測

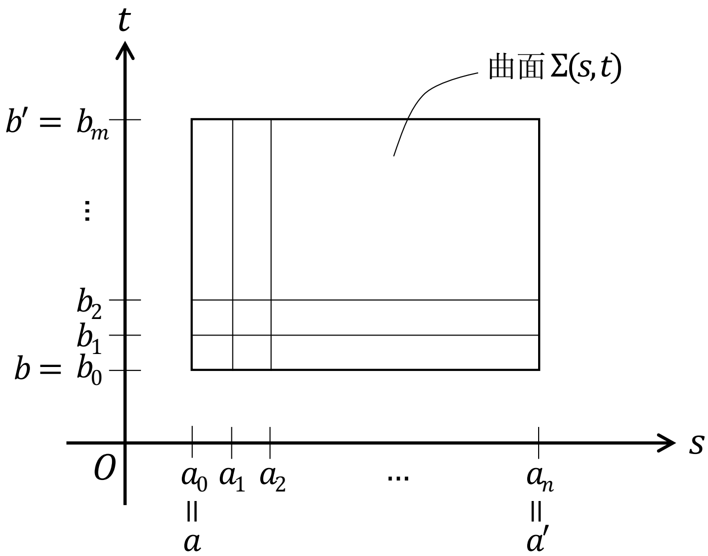
すればよい（ただし $d_1, d_2 \in D, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$）．このとき求める体積は



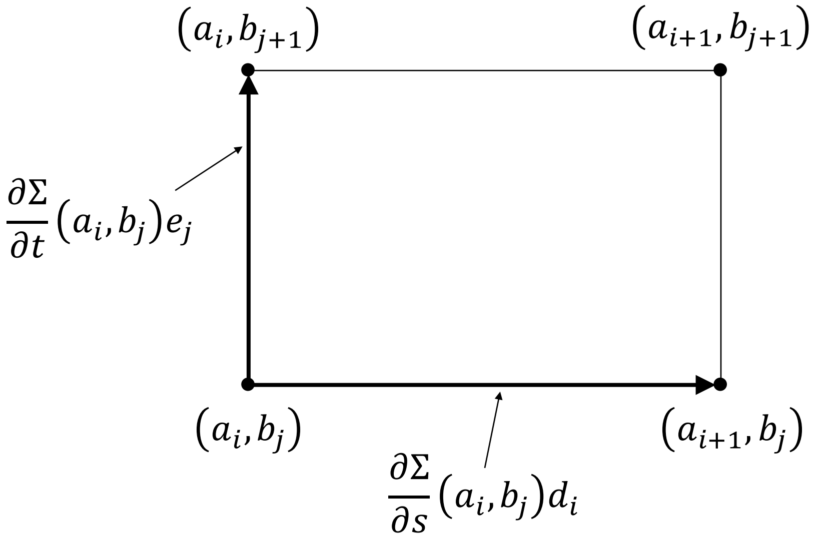
$$|d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = (d_1\boldsymbol{a} \times d_2\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = d_1 d_2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

となる．

　では実際に面積分を求めてみよう．ベクトル場として，水の流れ場を考える．このとき，曲面 $\Sigma[a, a'] \times [b, b'] \to \mathbb{R}^3$ について，次のような図を考える．

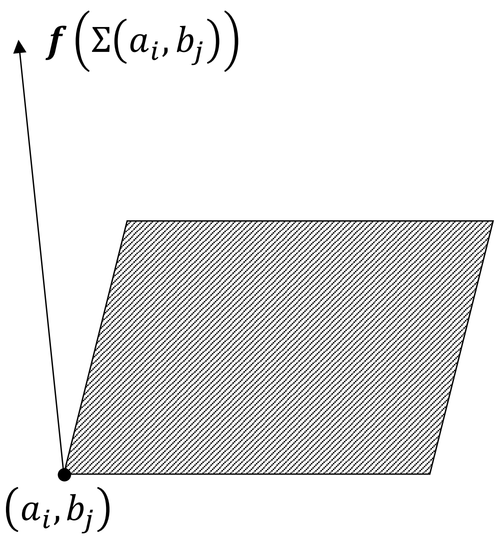


　このとき，$(a_i, b_j), (a_{i+1}, b_j), (a_i, b_{j+1}), (a_{i+1}, b_{j+1})$ の 4 点で囲まれる微小な領域は平行四辺形とみなすことができる．その一部を取り出すと次のような図になる．



ここで，この平行四辺形は 2 本のベクトル $\frac{\partial \Sigma}{\partial s}(a_i, b_j)d_i$ と $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)e_j$ で張られる（$d_i = a_{i+1} - a_i$，$e_j = b_{j+1} - b_j$）.

さらに次の図を考える.



ここで考える面積分とはすなわち，面を横切る水の量であり，これは微小領域の平行四辺形の面積（図の斜線部）に高さを掛けた，平行六面体の体積と考えることができる．よって面積分は

$$\boldsymbol{f}(\Sigma(a_i, b_j)) \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(a_i, b_j)d_i \times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(a_i, b_j)e_j$$

の微小領域分の総和となり（注：$\cdot$ は内積，$\times$ は外積（ベクトル積）を示す），これを

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}\\
&= \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{f}\left(\Sigma(a_i,b_j)\right)\cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(a_i,b_j)\times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(a_i,b_j)d_ie_j\\
&= \int_b^{b'}\int_a^{a'} \boldsymbol{f}\left(\Sigma(s,t)\right)\cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s,t)\times \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s,t)dsdt
\end{aligned}
$$

と表す．

線積分はベクトル場を力の場と考えて曲線に沿って動いた時にどれくらいの仕事をするかを考えたが，面積分ではベクトル場を流れの場として，単位時間にどれだけの流量が面を横切るかを考えている．このとき，パラメータの定義は自由だが，線積分と同様に向きをつけることが重要である．特に球面のように内と外を分ける（境界がない）曲面では外向きを表にする．表と裏を入れ替えた曲面を $-\Sigma$ で表すと，

$$
\iint_{-\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S} \;=\; -\iint_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}
$$

となる．

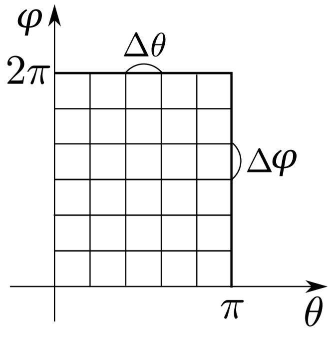
曲面の境界は曲線であるため，こちらも向きが重要となる．境界の向きは，曲面の表に旗を立ててやり，左手に旗が見えるように回るのが順方向と定義される．

§ 球の表面積の考え方

原点 O を中心とする半径 a の球面を考える．球の表面を Σ，(θ,φ) に対する球面上の点を $\Sigma(\theta,\varphi)$ $(\in [0,\pi]\times[0,2\pi])$ とする．この媒介変数表示は以下のようになる．

$$
\Sigma(\theta,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a\sin\theta\cos\varphi\\ a\sin\theta\sin\varphi\\ a\cos\theta \end{pmatrix}
$$

なお，$0\le\theta\le\pi$，$0\le\varphi\le 2\pi$ である．このとき，球の表面積を求めるためには，図のようにパラメータを細分する．



ただし，$\Delta\theta \in D,\ \Delta\varphi \in D$ とする．この細かく分けた小さな部分は，直交座標では微小な平行四辺形になっているためその面積を求める．平行四辺形の面積は，2 つのベクトルのベクトル積の大きさ：

$$\left|\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} \times \frac{\partial\Sigma}{\partial\varphi}\right|$$

を求めれば良いことになる.（→レポート課題 **II.**）

2.6 古典的な解析と交代形式

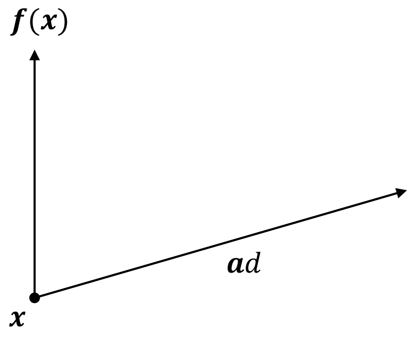
ベクトル解析においては，力の場や流れの場など，ベクトルで表すことのできるベクトル場と，温度や湿度など実数値で表すことのできるスカラー場に分けて考えることができる．この場は，以下のように変換することができる．

$$\textbf{スカラー場} \xrightarrow{\text{grad}} \textbf{ベクトル場} \xrightarrow{\text{rot}} \textbf{ベクトル場} \xrightarrow{\text{div}} \textbf{スカラー場}$$

なお，grad（gradient）は勾配，rot（rotation）は回転，div（divergence）は発散の意である．

§ 1 次の交代形式

まず力の場について考える.



点 $\boldsymbol{x}$ で力 $\boldsymbol{f}$ が働いていたとして, その作用のもとで, $\boldsymbol{x}$ からベクトル $\boldsymbol{a}$ に沿う無限小の移動を行うと, なされる仕事量は

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}d$$

であった.（ただし $d \in D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$.）

ここで $\varphi : \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}$ を考える．これは $\mathbb{R}^3$から $\mathbb{R}$ への線形写像と考えられる．φ は線形性, 交代性（引数を入れ替えると符号が変わる）をもつため **1 次の交代形式**と呼ばれる．空間の各点に 1 次の交代形式を対応させる写像を **1 次の微分形式**と呼ぶ．空間の各点にベクトル場を対応させる写像をベクトル場と呼ぶ．1 次の交代形式の全体は線形空間（3 次元）をなす.

ここで，dx, dy, dz を基底とした線形写像 ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

$$dx : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x,\ dy : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y,\ dz : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto z$$

を考えると，任意のベクトルを表す式

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3$$

と 1 次の交代形式

$$\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz$$

は対応している．同様に，ベクトル場 $f_i : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ について

$$f_1(x, y, z)\boldsymbol{e}_1 + f_2(x, y, z)\boldsymbol{e}_2 + f_3(x, y, z)\boldsymbol{e}_3$$

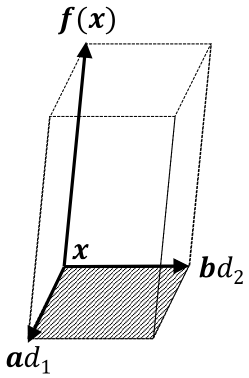
と 1 次の微分形式

$$f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz$$

は対応している．

§ 2 次の交代形式

次に流れの場（例えば水の流れ）について考える．点 $\boldsymbol{x}$ での流れは, $\boldsymbol{x}$ を起点として 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}d_1, \boldsymbol{b}d_2$ で張られる小さな升を考えて, 単位時間に横切る水の量（体積）を観測すればよい．（ただし $d_1, d_2 \in D,\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.）このとき求める体積は次のようになった．



$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a}d_1 \times \boldsymbol{b}d_2) = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}))\, d_1 d_2$$

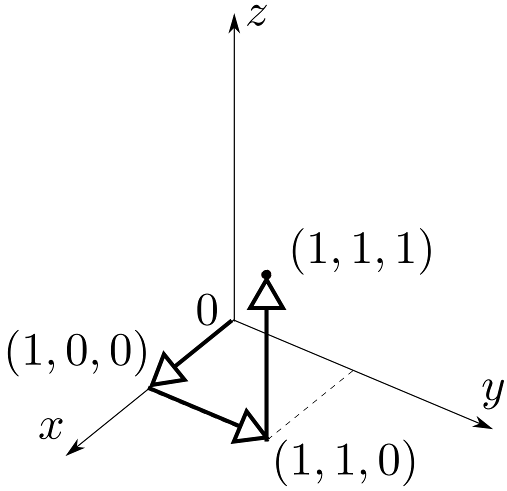
ここで先ほどと同様に $\varphi : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ を考える．これは $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$から $\mathbb{R}$ への線形写像と考えられる．外積は二重線形性, 交代性をもつため, これを **2 次の交代形式**という．空間の各点に 2 次の交代形式を対応させたものを **2 次の微分形式**と呼ぶ．2 次の交代形式の全体は線形空間（3 次元）をなす．

§ 今週のレポート課題

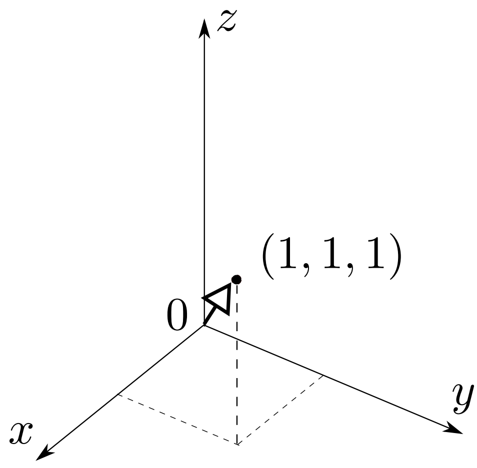
I.

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ベクトル場 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$ において次の経路における線積分を求めよ

(1) $\gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto (t,0,0),\ \gamma_2 : t \in [0,1] \mapsto (1,t,0),\ \gamma_3 : t \in [0,1] \mapsto (1,1,t)$



(2) $\boldsymbol{\gamma} : t \in [0,1] \mapsto (t,t,t)$



（次のページに続く）

II.

次の問に答えよ

(1) 原点中心，半径 a の球の表面積を計算せよ

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{r} : (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ において，(1) の面積分を計算せよ

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{r} : (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ において，下図の六面体について面積分せよ