情報数学III講義（第2回）

平成30年10月10日

1.8　合成関数の微分（前回の続き）

比例関数φ（比例定数a）と比例関数ψ（比例定数b）を考えると，合成関数$\varphi\circ\psi$はやはり比例関数となり，このとき比例定数はbaとなる．
また，$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$のとき，合成関数$g\circ f$の微分は以下で表される．

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

ここで，多変数の合成関数の微分を行うために，これを一般化する．$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^l$のとき，合成関数$g\circ f$の微分は以下で表される．

$$(g\circ f)'(\boldsymbol{x}) = \underbrace{g'(f(\boldsymbol{x}))}_{l\times m}\cdot\underbrace{f'(\boldsymbol{x})}_{m\times n}$$

例えば，1変数の場合は1×1の行列の積と考えればよい．
また，$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$の場合は$g\circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \to z$と表され，微分は以下のようになる．

$$g'((f(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1}f(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial z}{\partial y_2}f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \quad 1\times 2\text{の行列}$$

$$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}(x_1,x_2) \end{pmatrix} \quad 2\times 2\text{の行列}$$

最終的に，行列を掛け算すると以下のように表せる．

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial z}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

このように，線形写像の合成を行列の掛け算で記述することが出来る．

1.9 多変数の Kock-Lawvere の公理

$f : D \to \mathbb{R}^m$ において，

$$\begin{aligned}
f(d) &= \begin{pmatrix} f_1(d) \\ f_2(d) \\ \vdots \\ f_m(d) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(0) + a_1 d \\ f_2(0) + a_2 d \\ \vdots \\ f_m(d) + a_m d \end{pmatrix} \\
&= f(0) + \boldsymbol{a} d \qquad\qquad (\exists! \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m, \forall d \in \mathbb{D})
\end{aligned}$$

が成り立つ．

また，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi : d \in D \mapsto f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} d) \in \mathbb{R}^m$ という関数に対して，多変数の Kock-Lawvere の公理から以下が成り立つ．

$$\exists! \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \quad \text{s.t.} \quad \varphi(d) = \varphi(0) + \boldsymbol{b} d$$

このただひとつの $\boldsymbol{b}$ を $f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})$ と書く．$f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{x_0}$ にも $\boldsymbol{a}$ にも依存する．ここで，$f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})$ が以下の 2 式を満たした線形写像である．ただし，$\boldsymbol{a_1} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a_2} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ である．

$$f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}) = f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1}) + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_2}) \tag{1}$$

$$f'(\boldsymbol{x_0})(\alpha \boldsymbol{a}) = \alpha f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a}) \tag{2}$$

- (1) の証明

$$f(\boldsymbol{x_0} + (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2})d) = f(\boldsymbol{x_0}) + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2})d$$

であることと，以下の数式から示される．

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{x_0} + (\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2})d) \\
&= \ f((\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a_1}d) + \boldsymbol{a_2}d) \\
&= \ f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a_1}d) + f'(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a_1}d)(\boldsymbol{a_2})d
\end{aligned}$$

ここで，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ において，$\mathbb{R}^n$から$\mathbb{R}^m$への線形写像の全体を$L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$と表すと，$f' : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ となる．ここで，$L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ とは，すなわち $m \times n$ の行列 ($\mathbb{R}^{mn}$) である．

つまり，上式の $f'(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a_1}d)$ は $f'(\boldsymbol{x_0}) + f''(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})d$ と変形でき，

$$\begin{aligned}
&= \ f(\boldsymbol{x_0}) + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})d + \{f'(\boldsymbol{x_0}) + f''(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})d\}(\boldsymbol{a_2})d \\
&= \ f(\boldsymbol{x_0}) + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})d + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_2})d + f''(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1})(\boldsymbol{a_2})\underbrace{d^2}_{0} \\
&= \ f(\boldsymbol{x_0}) + \{f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_1}) + f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a_2})\}d
\end{aligned}$$

となる．

1.10 行列表現

関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して微分 f' は線型写像 $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と考えることができる．いま，$\boldsymbol{e}_1 = (1\ 0\ \cdots\ 0)^T$ として $f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)$ について考える．公理より以下のようになる．

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_1 d) \ = \ f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)d$$

x_2から x_n は動かしていないので，x_1 で偏微分していることになる．よって，以下のように表せる．

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_1 d) \ = \ f(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})d$$

次に，$\boldsymbol{a} = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^T = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$ について考える．これは線型写像なのでそれぞれに分けられることを思い出すと，以下のように整理

できる．

$$\begin{aligned} f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{a}) &= f'(\boldsymbol{x})(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= a\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_1)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})} + a_2\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_2)}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})} + \cdots + a_n\underbrace{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_n)}_{\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ のとき，$f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $1 \times n$ 行列で表せる．

また，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $\boldsymbol{x}$（$\in \mathbb{R}^n$）で微分することを考える．このとき，$f'(\boldsymbol{x})$ は $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の線形写像になる．

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$ と置くと，

$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ という $m \times n$ 行列となる．

したがって，微分した関数 f' は，$f' : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$，すなわち $\mathbb{R}^n$から $\mathbb{R}^m$ への線形写像の全体（線形空間）であることが分かる．

なお，この微分関数を再度微分すると，$f'' : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$ となる．

ここで，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ について $\varphi \in L(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$ を考えると，$\varphi(\boldsymbol{x}) \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ である．この線形空間 $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ を $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ とおくと，$\varphi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^m$ となる．

以上について，$\alpha \in \mathbb{R}$ として，

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) &= \varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \varphi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) \\ \varphi(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \alpha\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) &= \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \\ \varphi(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) &= \alpha\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

以上のような性質を持つ．これは $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ となる二重線形性をもつことを意味する．

2　ベクトル解析

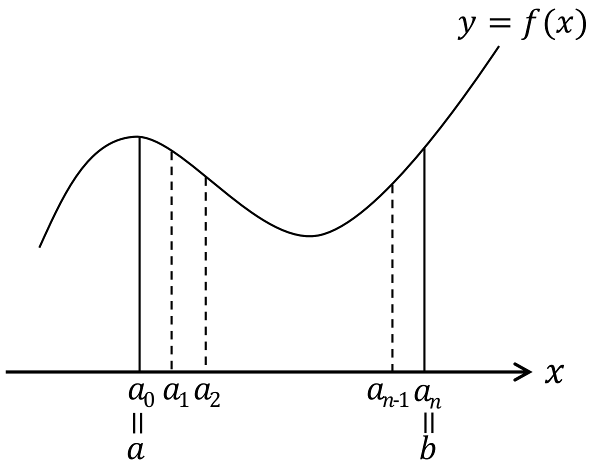
ここからベクトル解析に入る．ベクトル解析は電磁気学のために作られた数学で, 主に3次元空間, ベクトル場とスカラー場を扱う．スカラー場とは空間の各点にスカラーを対応させることである．例えば部屋の各店に温度や湿度を対応させたものはスカラー場となる．一方, ベクトル場とは空間の各点にベクトルを対応させるもののことである．ベクトル場の代表的なものとしては力の場と流れの場がある．例えば地球上の各点では地球の中心に向かって引力が働いている．力はベクトル（向きと大きさをもつ）で, これは力の場の例である．流れの場としては部屋の空気の流れや水の流れなどが挙げられる．

2.1　微積分学の基本定理

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であり，F が f の原始関数であるとき，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．高校の微分の定義は極限を使って定義するが，これについて考える．



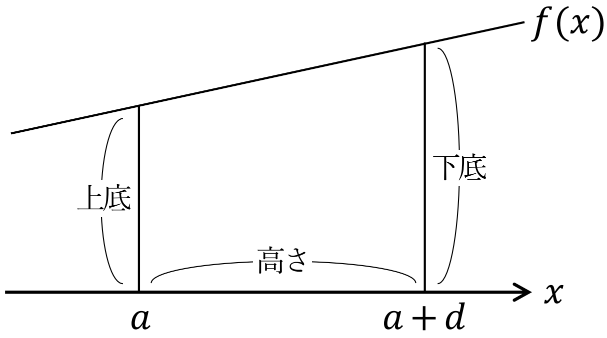
上図のように $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ を $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に細分する．そうすると，

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

となる．なお，$d_i = a_{i+1} - a_i \in D$ となるくらい細かくする．このとき，a_i の隣の点は $a_{i+1} = a_i + d_i$ と表せる．ここで，次の積分を考える．

$$\int_a^{a+d} f(x)dx$$

Kock-Lawvere の公理より，$f(x)$ は直線になる．したがって，細分した各領域の面積を得るには台形の面積を算出すれば良いことになる．



台形の面積は $\{$(上底) $+$ (下底)$\} \times$ (高さ)$/2$ なので，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+d} f(x)dx &= \frac{1}{2}d(f(a)+f(a+d)) \\ &= \frac{1}{2}d(f(a)+f(a)+f'(a)d) \\ &= d \cdot f(a) \qquad\qquad (\because d^2=0)\end{aligned}$$

となる（実質長方形の面積を求めたに等しい）．これは微積分学の基本定理である．Kock-Lawvere の公理より，任意の d に対して αd となるような実数 α が一意的に定まる．

$$\underbrace{\int_a^{a+d} f(x)dx}_{f(a)d} \;=\; F(a+d)-F(a) \;=\; \alpha d$$

つまり,「無限小のレベル」で微積分学の基本定理が成り立つように微分係数を定義したということである．これらを用いて実際に $f(x)$ の区間 $[a,b]$ に対しての積分を整理すると

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(F(a_{i+1})-F(a_i)) \\ &= (F(a_1)-F(a_0))+(F(a_2)-F(a_1))+\cdots \\ &= F(a_n)-F(a_0) \\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}$$

となる．

§ 今週のレポート課題

I.
2 ページの式 (2) $f'(\boldsymbol{x_0})(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha f'(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})$ を証明せよ．なお，$\alpha \in \mathbb{R}$ である

II.
定理【二重線形写像 $f''(\boldsymbol{x}_0)$ は対称である】ことを示せ

（ヒント）

- $f''(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = f''(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ を示せば良い
- 左辺は $f''(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = f''(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b})$ である
- $f'(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{a}d_1) - f'(\boldsymbol{x}) = f''(\boldsymbol{x_0})(\boldsymbol{a})d_1$ $(\forall d_1 \in D)$ なので
  $f'(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a}d_1)(\boldsymbol{b})d_2 - f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{b})d_2 = f''(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b})d_1 d_2$ である
- 同様に $f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a}d_1 + \boldsymbol{b}d_2) - f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a}d_1) = f'(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{a}d_1)(\boldsymbol{b})d_2$ であり，
  $f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}d_2) - f(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{b})d_2$ である
- 右辺も同様に考える