情報数学III講義（第1回）

平成30年10月3日

1　導入

1.1　微分係数

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の微分係数は，ある $x \in \mathbb{R}$ における平均変化率の極限から以下のように定義される．

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

このとき，$|h|$ が十分小さいとすると，上式から分母を払うことで

$$hf'(x_0) \;\approx\; f(x_0+h) - f(x_0)$$

という近似が成り立つ．ここで，$|h|$ が十分小さいとは $h^2 = 0$ が成り立つことであり，$h = 0$ のときにのみ等式として成立するが，17〜18 世紀ではこのような h がたくさんあるような世界で微積分をしていた．すなわち，次の集合 D（冪零無限小）に含まれる d を考えていた．

$$D = \{d \in \mathbb{R} | d^2 = 0\} \quad (\neq \{0\})$$

極限の考え方では徐々に小さくしていくと接線に近づくが，接線と一致することはない．しかし，当時の数学者は十分小さくて D にはいる距離であれば接線と一致するという考えだった．一般に $h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$ であるため，D に含まれる数は 0 しかあり得ないはずだが，彼らはこのような数が関数 f の点 x における接線の傾きを決定するくらいにたくさん存在するとしていた．したがって，

$$\exists ! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(x_0+d) - f(x_0) = ad \quad (\forall d \in D) \tag{1}$$

となるような唯一の実数 a を導関数 $f'(x_0)$ と定義した．

一般に関数は微分可能とは限らない．しかしここで扱う関数は定義域の任意の点において微分可能であると仮定する．

1.2 導関数の公式

微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の和と積，商の公式：

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= f'+g' && \text{（和の公式）}\\
(fg)' &= f'g+fg' && \text{（積の公式）}\\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g-fg'}{g^2} && \text{（商の公式：}g\neq 0\text{）}
\end{aligned}
$$

の証明を取り上げる．

§ 和の公式

高校数学では，平均変化率の極限を考えて次のように証明する．

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-\{f(x_0)+g(x_0)\}}{h}\\
&\qquad =\lim_{h\to 0}\left\{\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}+\underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{g'(x_0)}\right\}
\end{aligned}
$$

しかし，ニュートンらが活躍した17〜18世紀の考え方では，式 (4) より得られる

$$
\begin{cases}
f(x_0+d) = f(x_0)+f'(x_0)d & (2)\\
g(x_0+d) = g(x_0)+g'(x_0)d & (3)
\end{cases}
$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+d)+g(x_0+d)\\
&\qquad = f(x_0)+f'(x_0)d+g(x_0)+g'(x_0)d\\
&\qquad = f(x_0)+g(x_0)+\{f'(x_0)+g'(x_0)\}d
\end{aligned}
$$

であり，式 (4) より証明される．

§ 積の公式

同様に積の公式（Leibniz の公式）を証明する．高校数学では

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}\\
&\qquad = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}\right\}\\
&\qquad = \lim_{h\to 0}\left\{\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)}_{f'(x_0)g(x_0)}+\underbrace{f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{f(x_0)g'(x_0)}\right\}
\end{aligned}
$$

と証明したかもしれないが，ニュートンらの時代には式 (2)，式 (3) を用いて次のように証明した．

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+d)g(x_0+d)\\
&\quad= \{f(x_0)+f'(x_0)d\}\{g(x_0)+g'(x_0)d\}\\
&\quad= f(x_0)g(x_0)+\{f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\}d+\underline{f'(x_0)g'(x_0)d^2}
\end{aligned}
$$

ここで $d^2=0$ であるから，$f'(x_0)g'(x_0)d^2=0$ であることが分かり，式 (4) より Leibniz の公式が導き出されていることが確認できる．

§ 商の公式

続いて，商の公式を証明する．$g(x_0)\neq 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)\\
&\quad= \frac{f(x_0+d)}{g(x_0+d)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\\
&\quad= \frac{f(x_0+d)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+d)}{g(x_0+d)g(x_0)}\\
&\quad= \frac{\left(f(x_0)+f'(x_0)d\right)g(x_0)-f(x_0)\left(g(x_0)+g'(x_0)\right)d}{\left(g(x_0)+g'(x_0)d\right)g(x_0)}\\
&\quad= \frac{\left(f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)\right)d}{\left(g(x_0)+g'(x_0)d\right)g(x_0)}
\end{aligned}
$$

分母と分子に $g(x_0)-g'(x_0)d$ を掛けると

$$
\begin{aligned}
&\quad= \frac{\left(f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)\right)d\left(g(x_0)-g'(x_0)d\right)}{g(x_0)^3}\\
&\quad= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{g(x_0)^2}d
\end{aligned}
$$

1.3 合成関数の導関数

微分可能な関数 $g,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ の合成関数 $(g\circ f)(x_0)=g(f(x_0))$ の導関数：

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

は以下のように証明できる．

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}\\
&\quad = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\
&\quad = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x_0)+\{f(x_0+h)-f(x_0)\})-g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\
&\quad = \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{g(f(x_0)+H)-g(f(x_0))}{H}}_{g'(f(x_0))}\cdot\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}
\end{aligned}
$$

ここで，$H=f(x_0+h)-f(x_0)$ としているが，$h\to 0$ のとき $H\to 0$ であるため，合成関数の導関数が導き出される．次に，19 世紀以前の数学者による証明を示す．

$$
\begin{aligned}
g(f(x_0+d)) &= g(f(x_0)+f'(x_0)d)\\
&= g(f(x_0))+g'(f(x_0))d'\\
&\quad（f'(x_0)\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x_0)d=ad\in D\ (d\text{ のスカラー倍は }0)）\\
&= g(f(x_0))+g'(f(x_0))f'(x_0)d
\end{aligned}
$$

d のスカラー倍は 0 について，$a\in\mathbb{R}, d\in\mathbb{D}$ のとき

$$(ad)^2=a^2d^2=0$$

となり，$ad\in\mathbb{D}$（閉じている）となる．
なお，$d_1,d_2\in D$ としたとき

$$(d_1+d_2)^2 = d_1^2+\underbrace{2d_1d_2}_{\neq 0}+d_2$$

となるため，$(d_1+d_2)\notin D$（閉じていない）であり，また

$$(d_1+d_2)^3 = (d_1+d_2)^3=\underbrace{d_1^3}_{0}+\underbrace{d_2^3}_{0}+3\underbrace{d_1^2}_{0}d_2+3d_1\underbrace{d_2^2}_{0}=0$$

である．

1.4 テイラー展開

微分の定義は以下の通りである．

$$f(x+d_1)=f(x)+f'(x)d\quad (d_1\in D)$$

これに対して，$d_1, d_2 \in D$ を用いて $f(x+d_1+d_2)$ を考えてみる．下線部を微分して考えると，

$$
\begin{aligned}
f(\underline{x+d_1}+d_2) &= f(x+d_1) + f'(x+d_1)d_2 \\
&= f(x) + f'(x)d_1 + \{f'(x) + f''(x)d_1\}d_2 \\
&= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + f'(x)d_1d_2
\end{aligned}
$$

ここで，$d_1d_2 = \frac{(d_1+d_2)^2}{2}$ であるため，

$$
f(x+d_1+d_2) \;=\; f(x) + f'(x)(d_1+d_2) + \frac{1}{2}f''(x)(d_1+d_2)^2
$$

となる．これが $f(x)$ における 2 次近似である．続いて，$d_1, d_2, d_3 \in D$ を用いて 3 次近似についても展開して調べてみる．下線部を微分して考えると，

$$
\begin{aligned}
f(\underline{x+d_1+d_2}+d_3) &= f(x+d_1+d_2) + f'(x+d_1+d_2)d_3 \\
&= f(x) + f'(x)(d_1+d_2) \\
&\quad + f''(x)d_1d_2 + \{f'(x) + f''(x)(d_1+d_2) + f'''(x)d_1d_2\}d_3 \\
&= f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) \\
&\quad + f''(x)(d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1) + f'''(x)d_1d_2d_3
\end{aligned}
$$

ここで，$d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^2}{2}, d_1d_2d_3 = \frac{(d_1+d_2+d_3)^3}{3!}$ であるため，3 次近似は

$$
\begin{aligned}
f(x+d_1+d_2+d_3) \;=\; & f(x) + f'(x)(d_1+d_2+d_3) \\
& + \frac{f''(x)}{2}(d_1+d_2+d_3)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(d_1+d_2+d_3)^3
\end{aligned}
$$

のように表せる．

1.5 Kock-Lawvere の公理

Kock-Lawvere の公理

任意の関数 $\varphi : D \to \mathbb{R}$ に対して唯一の実数 a が存在し，$\forall d \in D$ に対して次が成り立つ.

$$
\varphi(d) = \varphi(0) + ad
$$

Kock-Lawvere の公理から式 (1) が導けることを示そう．$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ に対し $\varphi : D \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$
\varphi(d) = f(x_0+d).
$$

このとき次の議論が成立する：

$$
\begin{aligned}
& \forall f : D \to \mathbb{R} \quad \exists! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(d) = f(0) + ad \quad (\forall d \in D) \\
\Rightarrow \quad & \exists! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \varphi(d) = \varphi(0) + ad \quad (\forall d \in D) \\
\Rightarrow \quad & \exists! a \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(x_0 + d) = f(x_0) + ad \quad (\forall d \in D). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

上式における a が，x での微分係数 $f'(x_0)$ となる．

1.6 多変数の微分

§ 1 変数の微分

$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0$ を使って $f(x_0)$ 上にある点を (x_0, y_0) として，x の変化量 $\Delta x = x - x_0$ と y の変化量 $\Delta y = y - y_0$ について考える．このとき Δy は $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ と一般的に複雑な形になる．この複雑な $f(x)$ による関数を簡単にするため，点 (x_0, y_0) における接線を用いて近似すると $\Delta y = a\Delta x$ (a は定数, $a = f'(x_0)$) のようにひとつの数で特徴付けられた比例関数で表せる．

§ 2 変数の微分

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，すなわち $f(x, y)$ を微分すると，接平面

$$z - f(x_0,\ y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) \qquad (a,\ b \text{ は定数})$$

を求めることができる．

このとき y を y_o に固定する（$y = y_0$ という平面で切る）と，$x \mapsto f(x,\ y_0)$ であり，このときの定数 a は

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)$$

で求められる．同様に x を x_o に固定する（$x = x_0$ という平面で切る）と，$y \mapsto f(x_0,\ y)$ であり，このときの定数 b は

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\ y_0)$$

で求められる．これを偏微分と呼ぶ．a を求める偏微分のイメージは，図 1 のような風呂敷状のグラフを xy 平面と平行に切断して得られる断面での微分といえる．定数 $a,\ b$ を求めることで，接平面を導出できる．

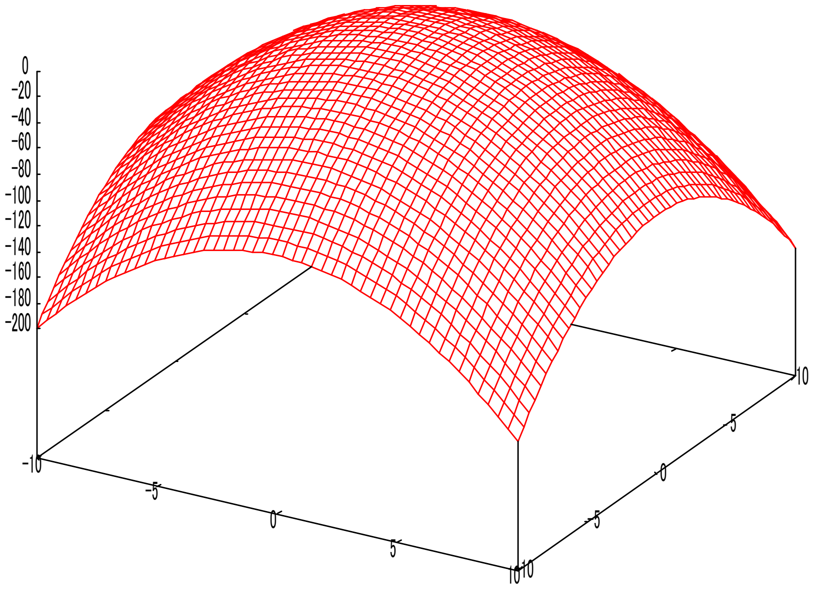

図 1: $z = f(x, y)$ のグラフ

1.7 線形写像

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ の場合

$$\begin{aligned}\Delta z &= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \\ &= \underline{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と多変数の微分を行列の積で表すことができる．特に下線の項は比例を示す．

- $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ の場合

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$ と置けるとすと，

$$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{という } m \times n \text{ 行列となる．}$$

以上をまとめると，

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の関数を微分すると比例関係が出る．
- $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像

と考えられる．このように，線形写像を行列の形で考えることが出来る．

1.8 合成関数の微分

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ のとき，合成関数 $g \circ f$ の微分は以下で表される．

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

ここで，多変数の合成関数の微分を行うために，これを一般化する．$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^l$ のとき，合成関数 $g \circ f$ の微分は以下で表される．

$$(g \circ f)'(\boldsymbol{x}) = \underbrace{g'(f(\boldsymbol{x}))}_{l \times m} \cdot \underbrace{f'(\boldsymbol{x})}_{m \times n}$$

例えば，1 変数の場合は 1×1 の行列の積と考えればよい．
また，$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ の場合は $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \to z$ と表され，微分は以下のようになる．

$$g'(f(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1} f(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial z}{\partial y_2} f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \quad 1 \times 2 \text{ の行列}$$

$$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \text{ の行列}$$

最終的に，行列を掛け算すると以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1} & \dfrac{\partial z}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial z}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial z}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

このように，線形写像の合成を行列の掛け算で記述することが出来る．

§ 今週のレポート課題

I.

$n, m \in \mathbb{N}$ のとき, $d_1 \in D_n$かつ $d_2 \in D_m$ ならば $d_1 + d_2 \in D_{m+n}$ を示せ.
（ヒント：二項定理）

II.

$d_1, \cdots, d_n \in D = D_1$ ならば $d_1 + \cdots + d_n \in D_n$ であることを示せ.
（ヒント：**I.** の結果から，n に関して帰納法を使う）

III.

(i) $f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$

(ii) $f(x_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)$

をそれぞれ計算せよ.