

氏名	于冬暁
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	博甲第8455号
学位授与年月日	平成30年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審査研究科	数理解物質科学研究科
学位論文題目	

Crystals for an extremal weight module over the quantized hyperbolic Kac-Moody algebra of rank 2

(ランク2双曲型量子群上のあるエクストリーマル・ウェイト加群に関連したクリスタルについて)

主査	筑波大学准教授	佐垣 大輔	博士(理学)
副査	筑波大学教授	宮本 雅彦	理学博士
副査	筑波大学教授	森田 純	理学博士
副査	筑波大学講師	木村 健一郎	博士(数理科学)

## 論文の要旨

※ 以下,  $\lambda$ ,  $\Lambda$  はそれぞれギリシャ文字の小文字, 大文字のラムダを表す. また  $_a$  は下付きの添え字の  $a$  を表す.

本論文では, ランク2の双曲型 Kac-Moody 代数に付随した量子群  $U_q$  に関して, 型  $\lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$  の Lakshmibai-Seshadri (LS) パス全体のなすクリスタル  $LS(\lambda)$  の構造, および, エクストリーマル・ウェイト  $\lambda$  のエクストリーマル・ウェイト加群  $V(\lambda)$  の結晶基底  $B(\lambda)$  の (クリスタルとしての) 構造を研究している.

第1節は論文の序文である. 第2節では, 本論文を通して使用される記号や基本事項の復習にあてられている. 具体的には, Kac-Moody 代数や量子群に関する基本的な記号の導入 (2.1 節), 結晶基底およびクリスタルに関する基本事項の復習 (2.2 節), エクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底の復習 (2.3 節), LS パスの定義およびそのクリスタル構造に関する復習 (2.4 節) である. 第3節が本論文の主要部である. 3.1 節でランク2の双曲型 Kac-Moody 代数に関連したいくつかの記号を導入した後, 3.2 節で上記のウェイト  $\lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$  の基本性質が示されている. そして, 3.3 節に本論文の主結果 (以下の4つの定理と1つの系) が簡潔にまとめられている. Theorem 3.5 では, 結晶基底  $B(\lambda)$  の任意の元が,  $V(\lambda)$  の生成元に対応する  $B(\lambda)$  の元に, 上昇柏原作用素だけをいくつか作用させるか, 下降柏原作用素だけをいくつか作用させるかによって得られることが述べられている. このことから, 特に,  $B(\lambda)$  のクリスタル・グラフが連結であることが分かる. Theorem 3.5 の系として,  $V(\lambda)$  の各ウェイト空間は有限次元であること, 特に,  $V(\lambda)$  のウェイト  $\lambda$

のウェイト空間は1次元であることが示される (Corollary 3.6). Theorem 3.7 では, 結晶基底  $B(\lambda)$  のエクストリーマル元全体の集合が,  $V(\lambda)$  の生成元に対応する  $B(\lambda)$  の元の Weyl 群軌道と一致することが述べられている. Theorem 3.8 では,  $LS(\lambda)$  のクリスタル・グラフが連結であることが述べられている. Theorem 3.9 では  $LS(\lambda)$  の元の具体的な形が与えられている. 3.4 節以降は, これらの定理の証明にあてられている. Theorem 3.5 は 3.4 節において, Theorem 3.7 は 3.5 節において, Theorem 3.8 は 3.6 節において, Theorem 3.9 は 3.7 節において, それぞれ証明されている. 最後の補遺では, Theorem 3.9 の応用として,  $LS(\lambda)$  上のルート作用素の具体的な公式が与えられている.

## 審 査 の 要 旨

### [批評]

Kac-Moody 代数は有限型, アフィン型, 不定型の3つに分類される. 本論文で扱っているランク2の双曲型は不定型に含まれる. 一般に, 不定型の Kac-Moody 代数に関する表現論や組み合わせ論は, 研究が非常に困難であり, いまだ十分な研究が進んでいない. 実際, 有限型やアフィン型の場合には当論文で研究された内容は完全に研究が終わっているのだが, 不定型の場合にはまったく研究されていない. 于氏の論文で扱われているのは非常に特別な場合だけであるが, 不定型の場合に LS パスやエクストリーマル・ウェイト加群の結晶基底の構造を非常に深く研究した最初の論文であり, 高く評価できる.

さらに, 于氏の論文で得られた結果の重要な応用として,  $V(\lambda)$  が既約表現であること, および,  $LS(\lambda)$  と  $B(\lambda)$  がクリスタルとして同型であること(同型定理)が証明される(これらの結果は, 共著論文として, 現在投稿中である). また, 近い将来, Theorem 3.9 と同型定理を応用して,  $V(\lambda)$  の(既約)指標の計算しようと考えている. ランク2の双曲型 Kac-Moody 代数は, フィボナッチ数列と関係していることが知られている. 本論文のさらなる応用として「 $V(\lambda)$  の指標をフィボナッチ数列を用いて表す」といった興味深い研究結果が得られるのではないかと期待している. このように于氏の結果は, 応用力, 将来性も十分に兼ね備えている.

以上により, 于氏の論文は博士論文としてふさわしいものであると判断する.

### [最終試験結果]

平成 30 年 2 月 16 日, 数理物質科学研究科学学位論文審査委員会において審査委員の全員出席のもと, 著者に論文について説明を求め, 関連事項につき質疑応答を行った. その結果, 審査委員全員によって, 合格と判定された.

### [結論]

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき, 著者は博士(理学)の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める.