氏名	庄司 直高	
学位の種類	博士(理学)	
学位記番号	博甲第 8454 号	
学位授与年月日	平成 30年 3月 23日	
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当	
審査研究科	数理物質科学研究科	
学位論文題目		

Spectral theory for interior transmission eigenvalue problems on Riemannian manifolds
(リーマン多様体上の内部透過固有値問題に対するスペクトル理論)

主査	筑波大学教授	筧 知之	博士(理学)
副査	筑波大学准教授	木下 保	博士(理学)
副査	筑波大学准教授	竹山 美宏	博士(理学)
副査	筑波大学講師	久保 隆徹	博士(理学)

論文の要旨

本論文はリーマン多様体上の内部透過固有値問題に関するものであり、次の4つの章からなる。

1. イントロダクション
2. 準備
3. 局所非等方的な内部透過固有値問題
4. 局所等方的な内部透過固有値問題

第1章、イントロダクションでは歴史的背景と先行研究について解説している。第2章は記号などの準備に充てられている。第3章ではリーマン多様体上の局所非等方的な内部透過固有値問題が、そして、第4章ではリーマン多様体上の局所等方的な内部透過固有値問題が扱われ、それぞれの枠組みで主結果が述べられている。

第1章では、まず、非散乱エネルギーと内部透過固有値との関係について論じている。散乱理論では、観測対象に遠方から波あるいは粒子を観測対象へ送り、その散乱状況から観測対象の性質や構造を解明することが主要な課題となっている。ところが、あるレベルのエネルギーの波あるいは粒子を送ると散乱されず、観測対象を素通りしてしまうということが起こり得る。このようなエネルギーは非散乱エネルギーと呼ばれ、近年重要な研究対象となりつつある。そして、非散乱エネルギーは、ある種の非楕円型かつ非自己共役な内部境界値問題の固有値と密接に関係しており、その固有値は内部透過固有値と呼ばれる。この分野の代表的な先行研究として、Colton-Monk, Kirsch による球層状の非均質かつ等方的な媒質に対する音響波動逆散乱問題の研究が挙げられている。例えば、Colton-Monk の論文では、上記の問題

設定で、非散乱エネルギーが内部透過固有値と一致すること、そして、内部透過固有値の存在と離散性を証明している。更に、本論文では、関連する研究結果が幾つか紹介されている。

次に、著者である庄司氏が本論文で取り組んだ問題と主結果の解説へ移る。庄司氏は、共通のエンドを持つ2つの非コンパクトリーマン多様体の構造を比較する散乱問題から出発し、それに対応するコンパクトリーマン多様体上の内部透過固有値問題を考察した。設定は以下の通りである。M_1，M_2 を同じ境界 Γ を持つ d 次元コンパクトリーマン多様体とし、それぞれのリーマン計量を g_1，g_2 、それぞれの対応するラプラス・ベルトラミ作用素を $\triangle_1$、$\triangle_2$ とする。また、屈折率と呼ばれる M_1，M_2 上の関数を導入し、それらをそれぞれ n_1, n_2 とする。更に、M_1, M_2は、境界 Γ の近傍も共有していると仮定する。これらの設定の下で、M_1 上の微分方程式 $(-\triangle_1 - k^2 n_1)u_1 = 0$，　M_2 上の微分方程式 $(-\triangle_2 - k^2 n_2)u_2 = 0$，境界 Γ 上の条件 $u_1 = u_2$ 更に、境界 Γ 上で u_1，u_2の方向微分に関する条件を付加した問題を考える。上記で、k は複素数の定数である。この微分方程式系が非自明な解を持つとき、対応する定数 k を内部透過固有値であると、論文では定めている。実際、上記の問題は、先行研究で扱われたユークリッド空間上の問題のリーマン多様体への一般化と見なすことが出来る。庄司氏は、更に、上記の問題を、本質的に異なる2つの場合、(I)局所非等方的な場合(II)局所等方的な場合、に分けて考察している。(I)の場合は、境界 Γ の近傍で2つのリーマン計量 g_1, g_2 が恒等的には一致しない場合であり、(II)の場合は、境界 Γ の近傍で g_1，g_2 が恒等的に一致する場合である。(I),(II)で本質的にアプローチの仕方は異なり、得られた結果もやや異なる。

まず、(I)の非等方的場合から始める。微分方程式系をソボレフ空間の内積に関する2次形式の形で表したとき正値性が失われてしまうという意味で、この問題は非楕円型となっており、通常の楕円型方程式の理論は適用出来ない。庄司氏は、T-coercive 法を適用し、正値性を持つ別の2次形式を構成することで、この困難さを克服している。更に、コンパクト作用素を巧みに用いることにより、従来よりも弱い仮定の下で、内部透過固有値の離散性を証明することに成功している。また、やはり、T-coercive 法を修正して適用することで、内部透過固有値の非存在領域が複素平面上のある角領域を含んでいることも証明している。

次に、(I)の等方的場合について述べる。この場合、庄司氏は、前述の微分方程式の固有値問題をディリクレ−ノイマン写像の方法を用いて解いている。これはリーマン多様体 M_l (l=1,2)上のディリクレ問題: M_l 上で $(-\triangle_l - \lambda n_l)u_l = 0$，$\Gamma$ 上で $u_l = f_l$　(l=1,2) を考え、各 f_l に、解 u_l の Γ 上での方向微分を対応させる写像をディリクレ−ノイマン写像と呼び、本論文では $\Lambda_l(\lambda)$ (l=1,2) と表されている。このディリクレ−ノイマン写像 $\Lambda_l(\lambda)$ (l=1,2) は λ の作用素値関数と見たとき、有理型関数となる。庄司氏は、内部透過固有値を求める問題を、上記の2つのディリクレ−ノイマン写像の差 $\Lambda_1(\lambda) - \Lambda_2(\lambda)$ を用いて表される、Γ 上のある種の楕円型擬微分作用素の非自明核を調べることに帰着させて、内部透過固有値が離散的であることを証明している。更に、局所等方的である場合は、内部透過固有値で実数となるものの個数の数え上げ関数を下から評価するワイル型不等式を与えている。ここで、庄司氏が与えたワイル型不等式というのは、粗く言えば、λ までの正の内部透過固有値の数 $N(\lambda)$に関する、$N(\lambda) \geqq C\lambda^{d/2} +$ (λ に関する低次の項) なる形の不等式で、d は M_1，M_2 の次元であり、定数 C は M_1，M_2 の体積および屈折率から定まる

幾何学的な量である。庄司氏は、ここでも、上記のディリクレ-ノイマン写像の作用素値関数としての性質を詳しく調べることでワイル型不等式の基となる評価式を導いている。そして、この不等式から正の内部透過固有値が無限に存在することが示されている。

以上をまとめると、本論文では、今までユークリッド空間上でのみ扱われてきた内部透過固有値の問題がリーマン多様体上の場合に一般化され、主結果として、内部透過固有値に関する離散性、非存在領域、ワイル型不等式が与えられている。

審　査　の　要　旨

〔批評〕

ユークリッド空間上でのみ研究されてきた内部透過固有値の問題をリーマン多様体上の問題として定式化し、離散性を証明したこと、非存在領域を与えたこと、および、ワイル型不等式を与えたことは高く評価したい。これらはどれも特筆すべき結果である。また、対象とする微分方程式系が非楕円型であること、非自己共役であること、これら2つの困難さを、庄司氏が独自のアイディアで克服し、結論へと到達したことも併せて評価したい。更に、証明では擬微分作用素の理論を始め、幾つもの高度な理論が本質的に用いられており、庄司氏が微分方程式に関して深い力量と広い見識を持っていることを付記しておきたい。内部透過固有値の研究と関連する非散乱エネルギーの研究は、ステルス技術とも関係し、物理学や工学への応用が期待される。また、近年発展しつつある多様体上の幾何学的散乱理論とも深く結びついている。その意味で本論文は重要なテーマを扱っており、その学術的価値は高い。　以上の理由から、庄司氏の研究は学位に値すると結論される。

〔最終試験結果〕

平成30年2月14日、数理物質科学研究科学位論文審査委員会において、審査委員全員の出席のもと、著者に論文についての説明を求め、関連事項について質疑応答を行った。その結果、審査委員全員によって、合格と判定された。

〔結論〕

上記の論文審査ならびに最終試験の結果に基づき、著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。