実解析I, 実解析II（ルベーグ積分論入門）

平良 和昭

2002年4月

序文

アンリ・ルベーグ (Henri Lebesgue : 1875–1941) は, 19 世紀末から 20 世紀前半にかけて活躍したフランスの解析学者である．積分論は, 19 世紀の半ばからフーリエ解析と密接に関連して研究されてきたが，リーマン積分の拡張であるルベーグ積分は、フーリエ解析、確率論、偏微分方程式、関数解析等の現代数学の基礎であり、現在では、解析学を学ぶ際に基本的な役割を果たしている。また，情報理論を始め，X 線解析や超音波探査などの工学技術分野でも，ルベーグ積分の成果なしでは今日の姿はなかったと思われる。

最近では, 数学科以外の分野で、ルベーグ積分論が体系的に講義されることは稀である．筆者が講義を担当した 15 年前と今日では、学生の数学的訓練の質も量も変化してきている。したがって、知的財産であるルベーグ積分論が重要であればこそ，理工学系の学生向けの講義においては, 数学科向けとは異なる流儀を踏襲すべきだと考えている。

この講義ノートは、主にルベーグ測度及びルベーグ積分のアイデア及び基本的な性質をまとめた入門書である。特に, ルベーグ積分の持つ効用について，理工学系の意欲的な学生にとって、将来、役に立つことを願って作成されたルベーグ積分論の自習書である。

本講義ノートの最初の原稿を作成するに際して，出口英生氏（富山大学大学院理工学研究部）に多大な協力を仰いだことを記して，感謝の言葉に代えたい。特に、1 次元のルベーグ積分論の内容は、同氏の卒業論文（広島大学理学部数学科： 1997 年度）に手を加えたものである。

目 次

1　ルベーグ積分論

この節では，まず，ルベーグ (Lebesgue) 測度の具体的な構成及び基本的な性質について解説する。ルベーグ測度の構成法をまとめると，以下のようになる：

集合	（外）測度	性質
すべての集合	カラテオドリ外測度	劣加法的測度
可測集合	ルベーグ測度	完全加法的測度
区間塊	有限加法的測度	有限加法的測度
区間	測度	区間の長さ

さらに， ルベーグ積分の基本的な事項，概念，定理等について，丁寧に解説する。ルベーグ積分導入の利点は，たとえば，微分積分学の基本公式

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$

について，リーマン (Riemann) 積分との比較で，次のように述べられる：

分野	$f(x)$	dx
微分積分学	連続的微分可能関数	リーマン測度
実解析学	絶対連続関数	ルベーグ測度

1.1　1 次元ルベーグ測度の構成

簡単のため，しばらくは 1 次元の場合に限って話を進める。

以下では，数直線 $\mathbf{R}$ の半開区間

$$(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

のことを単に**区間**と呼ぶことにする。ここで，$-\infty \leq a < b \leq \infty$ とするが，$b = \infty$ の場合は

$$(a,b] = \{x : a < x < \infty\} = (a,\infty)$$

とする。空集合 $\emptyset$ も便宜上**区間**と考える。

$\mathbf{R}$ における区間全体からなる集合を $\mathcal{I}$ と書く。任意の区間 $I = (a,b] \in \mathcal{I}$ に対して，その長さを

$$|I| = b - a$$

と定義する。ただし，$a = -\infty$ または $b = \infty$ のときは $|I| = \infty$. また $|\emptyset| = 0$ と定める。

定義 1.1. 任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| : I_n \in \mathcal{I}, \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A\right\} \tag{1.1}$$

とおいて，これを A の**ルベーグ** (Lebesgue) **外測度** （またはカラテオドリ (Carathéodory) 外測度）という。

$\mu^*(A) = 0$ となる集合 $A \subset \mathbf{R}$ を（1 次元の）**零集合**という。

例 1.1. 有限個の点からなる集合は，明らかに零集合である。空集合も零集合である。また，有理点全体の集合のように高々可算個の点からなる集合も零集合である。なぜなら，$\mathbf{Q}$ は可算集合であるから，

$$\mathbf{Q} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

と表わされる。次に，任意の正数 ε をとり固定する。点 a_1 を幅 $\varepsilon/2$ の区間で覆う，点 a_2 を幅 $\varepsilon/2^2$ の区間で覆う，…, 点 a_n を幅 $\varepsilon/2^n$ の区間で覆う，…, という操作を順次行うと，

$$\begin{aligned} \mu^*(\mathbf{Q}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

正数 ε は任意にとることができるので，$\mu^*(\mathbf{Q}) = 0$. ゆえに，有理点全体の集合 $\mathbf{Q}$ は零集合である。

以下で， ルベーグ外測度 μ^* の性質を調べるために，位相に関する準備が必要である。

定理 1.1 (有限被覆定理)**.** E を $\mathbf{R}$ の有界閉集合とする。$\mathbf{R}$ の開集合系 $\{G_\lambda\}$ が存在して

$$E \subset \bigcup_{\lambda} G_\lambda$$

となるならば，$\{G_\lambda\}$ の中の有限個のものだけで E を覆うことができる。すなわち，適当な G_{λ_1}, …, G_{λ_n} をとれば

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}$$

となる。

注意 1.1. 定理 1.1 で，閉集合という仮定はおとせない。それは，

$$(0,1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

であるが，有限個の区間 $(1/n, 1)$ で有界開区間 $(0,1)$ を覆うことはできないからである。

また，有界という仮定もおとせない。それは，

$$[1, \infty) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (n-1, n+1)$$

であるが，有限個の区間 $(n-1, n+1)$ で閉区間 $[1, \infty)$ を覆うことはできないからである。

証明. 第 1 段：$E = [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$ の場合。証明は背理法による。

$$E \subset \bigcup_{\lambda} G_\lambda$$

であるが，どのような有限個の G_λ でも E は覆われないとする。

$[a,b]$ の 2 等分点を c とすると $[a,c]$ または $[c,b]$ のうち少なくとも片方は，有限個の G_λ では覆われないはずである。これを $[a_1, b_1]$ とする。次に，$[a_1, b_1]$ に対して上と同様の考察をすると，$[a_1, b_1]$ に含まれて長さが $(b-a)/2^2$ の閉区間 $[a_2, b_2]$ で有限個の G_λ では覆われないようなものが存在する。この操作を次々と繰り返すと，有限個の G_λ では覆われないような閉区間の単調減少列 $\{[a_n, b_n]\}$ が得られ，

$$\begin{aligned} &a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1, \\ &b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \end{aligned}$$

となる。したがって，$\{a_n\}$ は単調増加かつ有界であるから収束する。その極限値を α とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha, \quad a \leq \alpha \leq b$$

となる。この α は E の点であるから，どれかの G_λ に含まれている。G_λ は開集合であったから，正数 ε を十分小にとると

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset G_\lambda$$

となる。n を十分大にとって，$(b-a)/2^n < \varepsilon$ となるようにすれば，

$$[a_n, b_n] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset G_\lambda$$

となって $[a_n, b_n]$ はただ 1 つの G_λ に含まれることになって，矛盾である。

第 2 段：E が $\mathbf{R}$ の任意の有界閉集合の場合。まず，十分大きな閉区間 $[a,b]$ をとれば

$$E \subset [a,b]$$

とできる。

$$E \subset [a,b] \subset \left(\bigcup_{\lambda} G_\lambda\right) \cup E^c$$

であるから，$[a,b]$ は $\bigcup_\lambda G_\lambda$ に 1 つの開集合 E^c を合せた開集合系によって覆われたことになる。第 1 段によって適当な G_{λ_1}, ..., G_{λ_n} をとれば，

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}\right) \cup E^c.$$

よって

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\lambda_k}$$

となる。

定理 1.2. 任意の区間 $I = (a, b]$ に対して，

$$\mu^*(I) = |I| = b - a.$$

証明. $a = -\infty$ または $b = \infty$ のときは $\mu^*(I) = |I| = \infty$ となるから $-\infty < a < b < \infty$ とする。

区間 $I = (a, b]$ は I 自身を覆っているわけだから

$$\mu^*(I) \leq b - a \tag{1.2}$$

が成り立つ。

次に，正数 ε を任意にとって固定する。この ε に対して，$\mu^*(I)$ の定義式 (1.1) から，区間の列 $I_n = (a_n, b_n]$ で

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

かつ

$$\mu^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \leq \mu^*(I) + \varepsilon$$

となるものが存在する。十分小さい正数 δ に対して

$$[a + \delta, b] \subset I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

各区間 I_n を少し広げた開区間の列

$$I_{n,\varepsilon} = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

を考えれば，当然

$$[a + \delta, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,\varepsilon}.$$

ところで，$[a + \delta, b]$ は有界閉区間であるから，被覆定理 1.1 によって，このうちの有限個の開区間 $I_{n,\varepsilon}$ によって覆われている。よって，ある n_0 が存在して

$$[a + \delta, b] \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} I_{n,\varepsilon}.$$

これから

$$\begin{aligned} b - (a + \delta) &\leq \sum_{n=1}^{n_0}\left(b_n + \frac{\varepsilon}{2^n} - a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

したがって，

$$b - a - \delta < \mu^*(I) + 3\varepsilon.$$

すなわち，

$$b - a - \delta - 3\varepsilon < \mu^*(I).$$

ここで，ε や δ は任意の正数であったから

$$b - a \leq \mu^*(I)$$

でなければならない。

(1.2) と合わせて，$\mu^*(I) = b - a$ を得る。

定理 1.2 によって，区間の長さは (1.1) で定義される外測度 μ^* で測っても変わらないことが分かった。

以下で，さらに外測度 μ^* の性質を調べる。$\mathbf{R}$ の部分集合を A, B, A_n, B_n 等で表す。

定理 1.3. 外測度 μ^* は次の性質を持つ：

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \infty, \quad \mu^*(\emptyset) = 0 \quad \text{（\textbf{非負性}）} \tag{1.3}$$

$$A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad \text{（\textbf{単調性}）} \tag{1.4}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \quad \text{（\textbf{劣加法性}）} \tag{1.5}$$

証明. (1.3) の証明：$0 \leq \mu^*(A) \leq \infty$ は μ^* の定義から明らか。

また，$\emptyset \subset \emptyset \in \mathcal{I}$ だから $\mu^*(\emptyset) \leq |\emptyset| = 0$.

(1.4) の証明：$A \subset B$ とし B の覆い方

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n \in \mathcal{I},$$

を考えると

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

でもあるから

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

この右辺で，B のすべての覆い方に対する下限をとれば $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ を得る。

(1.5) の証明：任意の正数 ε を与えるごとに，各 A_n に対して

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_{n_k}| \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

となる $I_{n_k} \in \mathcal{I}$, $k = 1, 2, \ldots,$ がとれる。このとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n_k}.$$

すなわち，右辺は，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

の 1 つの覆い方であるから

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|I_{n_k}| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)+\varepsilon.\end{aligned}$$

ところで，ε は任意の正数であったから，(1.5) が成り立つ。

定理 1.4. 任意有限個の**互いに素**な（共通部分のない）区間 $I_1, \ldots, I_n$ に対して

$$\mu^*(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n)=\sum_{k=1}^{n}\mu^*(I_k)=\sum_{k=1}^{n}|I_k| \tag{1.6}$$

が成り立つ。

証明. 正数 ε が任意に与えられたとき，この ε に対して μ^* の定義から，区間の列 E_j, $j=1$, 2, …, で

$$I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$$

かつ

$$\sum_{j=1}^{\infty}|E_j|\leq\mu^*(I_1\cup\cdots\cup I_n)+\varepsilon$$

となるものが存在する。

次に，

$$\begin{aligned}&E_{1,j}=I_1\cap E_j,\ E_{2,j}=I_2\cap E_j,\ldots,\\ &E_{n,j}=I_n\cap E_j,\ j=1,2,\ldots,\end{aligned}$$

とおくと，各 $E_{k,j}$ は区間であって

$$I_1=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{1,j},\ I_2=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{2,j},\ldots,\ I_n=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_{n,j}.$$

一方，定理 1.2 と劣加法性 (1.5) から

$$|I_1|\leq\sum_{j=1}^{\infty}|E_{1,j}|,\ |I_2|\leq\sum_{j=1}^{\infty}|E_{2,j}|,\ldots,\ |I_n|\leq\sum_{j=1}^{\infty}|E_{n,j}|.$$

また，

$$|E_{1,j}|+|E_{2,j}|+\cdots+|E_{n,j}|\leq|E_j|$$

であるから

$$\begin{aligned}
|I_1|+|I_2|+\cdots+|I_n| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}|E_{1,j}|+\sum_{j=1}^{\infty}|E_{2,j}|+\cdots+\sum_{j=1}^{\infty}|E_{n,j}| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}|E_{k,j}| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}|E_j| \\
&\leq \mu^*(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n)+\varepsilon.
\end{aligned}$$

ここで，正数 ε は任意であったから

$$|I_1|+|I_2|+\cdots+|I_n|\leq \mu^*(I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_n)$$

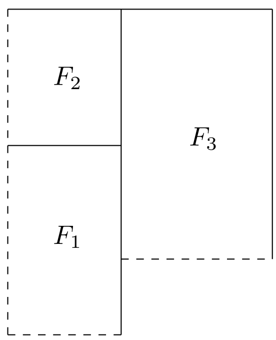
を得る。

また，劣加法性 (1.5) より，

$$\begin{aligned}
\mu^*(I_1\cup\cdots\cup I_n) &\leq \sum_{k=1}^{n}\mu^*(I_k) \\
&= |I_1|+\cdots+|I_n|
\end{aligned}$$

だから，逆の不等式も成り立ち (1.6) が証明された。

有限個の互いに素な区間の和集合として表される集合を**区間塊**という。そして区間塊の全体を $\mathcal{F}$ と表わす。例として，2 次元の場合の区間塊を図示する：



定理 1.5. $\mathbf{R}$ の区間塊の全体 $\mathcal{F}$ は次の性質を持つ：

(i) $\emptyset\in\mathcal{F}$

(ii) $A\in\mathcal{F}\Longrightarrow A^c=\mathbf{R}\setminus A\in\mathcal{F}$

(iii) $A,B\in\mathcal{F}\Longrightarrow A\cup B\in\mathcal{F}$

この 3 条件を満たす集合族を**有限加法族**という。

定理 1.4 と定理 1.5 の直接の帰結として次の定理を得る。

定理 1.6. μ^* は次の性質を持つ：

$$\begin{aligned} &\text{すべての } A \in \mathcal{F} \text{ に対して } 0 \le \mu^*(A) \le \infty, \text{ 特に } \mu^*(\emptyset) = 0, \\ &A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B). \end{aligned} \tag{1.7}$$

性質 (1.7) と帰納法により

$$\begin{aligned} &A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F},\ A_j \cap A_k = \emptyset\ (j \ne k) \\ &\Longrightarrow \mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(A_j) \end{aligned} \tag{1.8}$$

を得る。これは外測度 μ^* の有限加法族 $\mathcal{F}$ での**有限加法性**を示している。

定義 1.2. 集合 $E \subset \mathbf{R}$ が，次の条件 (1.9) を満たすとき，E は**可測**（または μ^*-可測）であるという：任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \tag{1.9}$$

また，

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

であるから，μ^* の劣加法性 (1.5) より，不等式

$$\mu^*(A) \le \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

は常に成り立つ。したがって，集合 E が μ^*-可測であることをいうためには，次の不等式を示せばよい：任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して

$$\mu^*(A) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

$\mathbf{R}$ の μ^*-可測な集合の全体を $\mathcal{M}$ または $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ と書く。

定理 1.7. $\mathbf{R}$ の区間塊はすべて μ^*-可測である。言い換えれば，

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$$

が成り立つ。

証明. $E \in \mathcal{F}$ とする。任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n \in \mathcal{I}$$

なる覆い方を考えると

$$A \cap E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E), \quad A \cap E^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E^c).$$

ところで

$$I_n = (I_n \cap E) \cup (I_n \cap E^c)$$

に注意して，μ^* の $\mathcal{F}$ における有限加法性 (1.8), μ^* の劣加法性 (1.5) と単調性 (1.4) を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(I_n\cap E\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(I_n\cap E^c\right)\\ &\geq \mu^*\left(A\cap E\right)+\mu^*\left(A\cap E^c\right).\end{aligned}$$

したがって，A のすべての覆い方に対する左辺の下限をとることにより

$$\mu^*(A)\geq\mu^*\left(A\cap E\right)+\mu^*\left(A\cap E^c\right)$$

となって，$E\in\mathcal{M}$ である。

以上から，$\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$ を得る。

定理 1.8. 零集合は，すべて μ^*-可測である。

証明. 零集合 E と任意の集合 $A\subset\mathbf{R}$ に対して μ^* の劣加法性 (1.5) と単調性 (1.4) により

$$\begin{aligned}&\mu^*(A)\leq\mu^*\left(A\cap E\right)+\mu^*\left(A\cap E^c\right),\\ &\mu^*\left(A\cap E\right)\leq\mu^*(E)=0.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mu^*(A)\leq\mu^*\left(A\cap E^c\right)\leq\mu^*(A).$$

以上から，

$$\mu^*(A)=\mu^*\left(A\cap E\right)+\mu^*\left(A\cap E^c\right)\quad\left(=\mu^*\left(A\cap E^c\right)\right)$$

が成り立つので $E\in\mathcal{M}$ である。

定理 1.9. $E_k\in\mathcal{M}$, $k=1,\,2,\,\ldots$, $E_j\cap E_k=\emptyset$ $(j\neq k)$ であって，

$$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

ならば

$$S\in\mathcal{M},\quad\mu^*(S)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*\left(E_k\right)\quad\textbf{（完全加法性）}$$

が成り立つ。

証明. まず，任意の $A\subset\mathbf{R}$ と任意の n に対して，

$$\mu^*(A)\geq\sum_{k=1}^{n}\mu^*\left(A\cap E_k\right)+\mu^*\left(A\cap S^c\right)\tag{1.10}$$

が示せたとすると，$n\to\infty$ としてから，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(A\cap E_k\right)=A\cap S$$

であることと μ^* の劣加法性 (1.5) を用いて

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{k=1}^{\infty}\mu^*\left(A\cap E_k\right)+\mu^*\left(A\cap S^c\right)\\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A\cap E_k)\right)+\mu^*\left(A\cap S^c\right)\\ &= \mu^*\left(A\cap S\right)+\mu^*\left(A\cap S^c\right)\end{aligned}\tag{1.11}$$

となるから，$S \in \mathcal{M}$ が示される。

また，(1.11) は等式となる。(1.11) において $A=S$ ととることにより

$$\mu^*(S)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*\left(E_k\right)$$

を得る。

(1.10) を数学的帰納法によって証明する。$n=1$ のとき，$E_1 \in \mathcal{M}$ であることと μ^* の単調性 (1.4) により

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\left(A\cap E_1\right)+\mu^*\left(A\cap E_1^c\right)\\ &\geq \mu^*\left(A\cap E_1\right)+\mu^*\left(A\cap S^c\right).\end{aligned}$$

次に，(1.10) が n まで成り立つと仮定して，A を $A\cap E_{n+1}^c$ で置き換えて

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A\cap E_{n+1}^c\right) &\geq \sum_{k=1}^{n}\mu^*\left(A\cap E_{n+1}^c\cap E_k\right)\\ &\quad +\mu^*\left(A\cap E_{n+1}^c\cap S^c\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mu^*\left(A\cap E_k\right)+\mu^*\left(A\cap S^c\right).\end{aligned} \tag{1.12}$$

一方，$E_{n+1}\in\mathcal{M}$ であったから，(1.12) より，

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\left(A\cap E_{n+1}\right)+\mu^*\left(A\cap E_{n+1}^c\right)\\ &\geq \mu^*\left(A\cap E_{n+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}\mu^*\left(A\cap E_k\right)+\mu^*\left(A\cap S^c\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\mu^*\left(A\cap E_k\right)+\mu^*\left(A\cap S^c\right).\end{aligned}$$

ゆえに，(1.10) が $n+1$ の場合に成り立つことが示された。

定理 1.10. $E,F\in\mathcal{M}$ ならば $E^c\in\mathcal{M}$, $E\setminus F=E\cap F^c\in\mathcal{M}$, $E\cap F\in\mathcal{M}$.

証明. まず，$E^c\in\mathcal{M}$ を示す。$E\in\mathcal{M}$ より，任意の $A\subset\mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\left(A\cap E\right)+\mu^*\left(A\cap E^c\right)\\ &= \mu^*\left(A\cap (E^c)^c\right)+\mu^*\left(A\cap E^c\right)\\ &= \mu^*\left(A\cap E^c\right)+\mu^*\left(A\cap (E^c)^c\right).\end{aligned}$$

ゆえに，$E^c\in\mathcal{M}$ である。

また $E\cap F\in\mathcal{M}$ を証明すれば $E\setminus F=E\cap F^c\in\mathcal{M}$ もいえるので，$E\cap F\in\mathcal{M}$ を示す。

E, F が可測であることを順に使うと，任意の $A\subset\mathbf{R}$ に対して

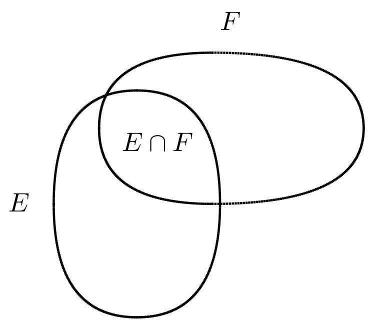
$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*\left(A\cap E\right)+\mu^*\left(A\cap E^c\right)\\ &= \mu^*\left(A\cap E\cap F\right)+\mu^*\left(A\cap E\cap F^c\right)\\ &\quad +\mu^*\left(A\cap E^c\cap F\right)+\mu^*\left(A\cap E^c\cap F^c\right).\end{aligned}$$

一方,

$$
\begin{aligned}
&(A\cap E\cap F^c)\cup(A\cap E^c\cap F)\cup(A\cap E^c\cap F^c)\\
&\quad = A\cap\big((E\cap F^c)\cup(E^c\cap F)\cup(E^c\cap F^c)\big)\\
&\quad = A\cap\big((E\cap F^c)\cup E^c\big)\\
&\quad = A\cap\big((E\cup E^c)\cap(F^c\cup E^c)\big)\\
&\quad = A\cap(F^c\cup E^c)\\
&\quad = A\cap(E\cap F)^c
\end{aligned}
$$

となることと μ^* の劣加法性 (1.5) を使えば

$$
\begin{aligned}
&\mu^*(A\cap E\cap F^c)+\mu^*(A\cap E^c\cap F)+\mu^*(A\cap E^c\cap F^c)\\
&\quad \geq \mu^*((A\cap E\cap F^c)\cup(A\cap E^c\cap F)\cup(A\cap E^c\cap F^c))\\
&\quad = \mu^*(A\cap(E\cap F)^c).
\end{aligned}
$$



ゆえに,

$$\mu^*(A)\geq\mu^*(A\cap E\cap F)+\mu^*(A\cap(E\cap F)^c)$$

となって, $E\cap F\in\mathcal{M}$ であることが分かる。

系 1.1. E_1, E_2, ..., $E_n\in\mathcal{M}$ ならば,

$$\bigcup_{k=1}^n E_k\in\mathcal{M},\quad \bigcap_{k=1}^n E_k\in\mathcal{M}.$$

証明. まず,

$$\bigcap_{k=1}^n E_k\in\mathcal{M}$$

を示す。

$n=1$ のときは明らか。$n=m$ のとき成り立つと仮定する。$n=m+1$ のとき

$$\bigcap_{k=1}^{m+1} E_k=\left(\bigcap_{k=1}^{m} E_k\right)\cap E_{m+1}$$

であり,

$$\bigcap_{k=1}^{m} E_k,\quad E_{m+1}\in\mathcal{M}$$

だから，定理 1.10 により，

$$\bigcap_{k=1}^{m+1} E_k \in \mathcal{M}$$

を得る。よって，任意の自然数 n に対して，

$$\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$$

が成り立つ。

また，定理 1.10 より $E_k \in \mathcal{M}$ ならば $E_k^c \in \mathcal{M}$ であるから

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k^c\right)^c \in \mathcal{M}.$$

定理 1.11. $E_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$, ならば

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}.$$

証明. まず，

$$F_1 = E_1, \quad F_n = E_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \ (n \geq 2)$$

とおくと，定理 1.10 と系 1.1 により $F_n \in \mathcal{M}$. そして，$j \neq k$ のとき $F_j \cap F_k = \emptyset$ だから，定理 1.9 より

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{M}.$$

また，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

が成り立つ。なぜなら，$F_n \subset E_n$ より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

また，$x \in \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ ならば $x \in E_j$ となる j が存在する。このとき，$x \in F_1 \cup \cdots \cup F_j$ だから $x \in \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. ゆえに，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

が成り立ち，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

がいえる。よって，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$$

を得る。

$\mathcal{M}$ に属する集合を（1 次元）**ルベーグ可測集合**という。集合族 $\mathcal{M}$ の基本的な性質をまとめると，

(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$

(ii) $E \in \mathcal{M} \Longrightarrow E^c = \mathbf{R} \setminus E \in \mathcal{M}$

(iii) $E_n \in \mathcal{M},\ n = 1, 2, \ldots, \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ （**完全加法性**）

という形にいい表すことができる。

一般に，このような 3 つの性質をもった集合族を，**完全加法族**，**可算加法族**または σ-**加法族**等と呼ぶ。

μ^* を $\mathcal{M}$ 上に制限したものを μ と書いて，$\mathbf{R}$ における**ルベーグ測度** (Lebesgue measure) という。ルベーグ測度 μ は次の性質を持つ：

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ （**非負性**）

(iii) $A_n \in \mathcal{M},\ n = 1, 2, \ldots,\ A_j \cap A_k = \emptyset\ (j \neq k) \Longrightarrow \mu\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ （**完全加法性**）

集合 $\mathbf{R}$, 完全加法族 $\mathcal{M}$, ルベーグ測度 μ を組み合せたものを（1 次元）**ルベーグ測度空間**と呼び，$(\mathbf{R}, \mathcal{M}, \mu)$ と書く。

定理 1.12. $\mathbf{R}$ の開集合は可測集合である。したがって，閉集合も可測集合である。

証明. $O \subset \mathbf{R}$ を開集合とする。O に含まれる有理点は可算個であるから，これにもれなく番号を付けて，$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ とする。各 x_n に対して $x_n \in I_n \subset O$ となる開区間で最大なものが存在するのでこれを I_n とする。このとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = O$$

である。なぜなら，明らかに

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset O.$$

次に，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset O$$

を背理法によって示す。任意の自然数 n に対して $x \notin I_n$ となるような $x \in O$ が存在するとする。O に含まれる任意の有理点はいずれかの I_n に属するから，$x \in O \setminus \mathbf{Q}$ となる。O は開集合だから，十分小さな正数 δ に対して，開区間 $(x - \delta, x + \delta)$ は O に含まれる。この区間内には有理点が存在するので，その中の 1 つを x_m とすると，x_m を含む開区間 I_m は明らかに，

$$x \in I_m$$

となる。これは，任意の自然数 n に対して $x \notin I_n$ であることに矛盾するので，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset O.$$

よって,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = O.$$

また，開区間は区間の和集合で表されるから，任意の開区間は $\mathcal{M}$ に属する。したがって，定理 1.11 より

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \in \mathcal{M}$$

であるから，$O \in \mathcal{M}$ が分かる。また，閉集合は開集合の補集合だから，定理 1.10 より，閉集合は可測である。

最後に，ルベーグ測度の性質をいくつか述べる。

定理 1.13. $E_n \in \mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots,$ とする。

(i) 集合列 $\{E_n\}$ が単調増加のとき，または，単調減少で $\mu(E_1) < \infty$ のときは,

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{1.13}$$

(ii) 一般の可測集合列 $\{E_n\}$ に対しては

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n), \tag{1.14}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty \text{ ならば，} \mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{1.15}$$

特に，(1.14) と (1.15) から

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty \text{ で } \lim_{n\to\infty} E_n = E \text{ ならば，} \mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{1.16}$$

証明. (i) $\{E_n\}$ が単調増加ならば,

$$A_n = E_n - E_{n-1}, \quad E_0 = \emptyset$$

とおくことによって

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

となるから μ の完全加法性により

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

次に，$\{E_n\}$ が単調減少ならば,

$$A_n = E_1 \setminus E_n$$

は単調増加で,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = E_1 \setminus \lim_{n\to\infty} E_n.$$

ゆえに，$\mu(E_1) < \infty$ に注意し，(1.13) を用いると，

$$\begin{aligned}
\mu(E_1) - \mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) &= \mu\left(E_1 \setminus \lim_{n\to\infty} E_n\right) \\
&= \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\mu(E_1) - \mu(E_n)) \\
&= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).
\end{aligned}$$

したがって，

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

(ii) 一般の場合には，

$$B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$$

とおくと $\{B_n\}$ は単調増加で

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \liminf_{n\to\infty} E_n.$$

よって，$B_n \subset E_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ に注意し，(1.13) を用いると，

$$\begin{aligned}
\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) &= \mu\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \mu(B_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)
\end{aligned}$$

となって，(1.14) が成り立つ。

(1.15) は，

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

とおいて，上と同様に計算することによって示される。

(1.16) は，(1.14) と (1.15) から従う。

注意 1.2. 定理 1.13 の (i) で $\{E_n\}$ が単調減少の場合に $\mu(E_1) < \infty$ なる条件と (1.15) で

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$$

なる条件を一般には除くことができない。

たとえば，$E_n = (n, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : n < x < \infty\}$ とすると，$\{E_n\}$ は単調減少である。すべての n に対して $\mu(E_n) = \infty$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty.$$

一方，

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \mu(\emptyset) = 0$$

である。

次の定理は，ルベーグ（外）測度の不変性を主張している：

定理 1.14. 集合 $E \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$a + E = \{a + x : x \in E\}, \quad a \in \mathbf{R},$$
$$-E = \{-x : x \in E\}$$

とおく。このとき，

$$\mu^*(a + E) = \mu^*(-E) = \mu^*(E).$$

さらに，E が可測ならば，$a + E$, $-E$ も可測であって，

$$\mu(a + E) = \mu(-E) = \mu(E).$$

証明. 集合 E に対して，

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad I_n \in \mathcal{I}$$

なる覆い方を考えると，任意の実数 a に対して，

$$a + E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a + I_n), \quad a + I_n \in \mathcal{I}$$

だから，

$$\mu^*(a + E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a + I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

したがって，E のすべての覆い方に対する右辺の下限をとることにより

$$\mu^*(a + E) \leq \mu^*(E).$$

a と E の代わりにそれぞれ $-a$, $a + E$ を考えると，

$$\mu^*(E) = \mu^*(-a + a + E) \leq \mu^*(a + E).$$

ゆえに，

$$\mu^*(a + E) = \mu^*(E).$$

集合 E が可測な場合は，定義より，任意の $A \subset \mathbf{R}$ に対して，

$$\mu^*(A - a) = \mu^*((A - a) \cap E) + \mu^*((A - a) \cap E^c).$$

上で示したように，各項の集合を a だけ平行移動しても外測度は変わらないから，

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E + a)) + \mu^*(A \cap (E + a)^c).$$

これは，$a + E$ が可測であることを意味する。よって，

$$\mu(a + E) = \mu(E).$$

集合 $-E$ についても，同様の議論で示せる。

定理 1.15. 集合 $E \subset \mathbf{R}$ が可測ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
G \supset E, \quad \mu(G \setminus E) < \varepsilon, \\
F \subset E, \quad \mu(E \setminus F) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

を満たす開集合 G と閉集合 F が存在する。

証明. (a) まず，開集合 G についての主張を証明する。

$S_n = \{x \in \mathbf{R} : |x| < n\}$ とおく。E が有界なときは，$E \subset S_{n_0}$ となる n_0 が存在し，$\mu(E) < \infty$ である。任意の $\varepsilon > 0$ に対して，区間の列 I_n で，

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

かつ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \mu^*(E) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

となるものが存在する。各 I_n を

$$I_n = (a_n, b_n]$$

と表すと，開区間

$$G_n = \left(a_n, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$$

は

$$\mu(G_n) = |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

を満たす。$G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ とおくとこれは開集合で，

$$
\begin{aligned}
G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E, \\
\mu(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|I_n| + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) < \mu(E) + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

よって，

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) < \varepsilon$$

となる。

E が有界でないときは，各 n に対して $E_n = E \cap S_n$ とおくと，E_n は有界な可測集合だから，上で示したことより，

$$G_n \supset E_n, \quad \mu(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たす開集合 G_n が存在する。$G = \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ とおくとこれも開集合で，

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

さらに，$G \setminus E \subset \cup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$ だから，

$$\mu(G \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

(b) 次に，閉集合 F についての主張を証明する。

E が有界なときは，$E \subset S_{n_0}$ となる n_0 が存在する。$\overline{S_{n_0}} = \{x \in \mathbf{R} : |x| \leq n_0\}$ とすると，$\overline{S_{n_0}} \setminus E$ も可測集合だから，(a) より

$$G \supset \overline{S_{n_0}} \setminus E, \quad \mu(G \setminus (\overline{S_{n_0}} \setminus E)) < \varepsilon$$

を満たす開集合 G が存在する。よって，$F = \overline{S_{n_0}} \setminus G$ とおくとこれは閉集合で，$F \subset \overline{S_{n_0}} \setminus (\overline{S_{n_0}} \setminus E) = E$ を満たす。まとめると，

$$F \subset E \subset \overline{S_{n_0}} \subset G \cup F \quad (G \cap F = \emptyset).$$

このことから，

$$G \cup F \supset (\overline{S_{n_0}} \setminus E) \cup (E \setminus F) \cup F$$

が分かる。$G \cap F = \emptyset$ だから，

$$G \supset (\overline{S_{n_0}} \setminus E) \cup (E \setminus F).$$

よって，

$$E \setminus F \subset G \setminus (\overline{S_{n_0}} \setminus E)$$

となるので

$$\mu(E \setminus F) \leq \mu(G \setminus (\overline{S_{n_0}} \setminus E)) < \varepsilon$$

が成り立つ。

E が有界でないときは，$E_1 = E \cap S_1$, $E_n = E \cap (S_n \setminus S_{n-1})$, $n \geq 2$, とおくと，各 E_n は有界な可測集合だから，上で示したことより

$$F_n \subset E_n, \quad \mu(E_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たす閉集合 F_n が存在する。$F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ とおくと，これは閉集合となる。

実際に，$x \in F^c = \cap_{n=1}^{\infty} F_n^c$ とし，$x \in S_{m-1}$ となる m をとる。このとき，任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して，

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset S_m$$

であり，$(\cup_{n=m+1}^{\infty} F_n)^c \supset S_m$ だから，

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} F_n \right)^c = \bigcap_{n=m+1}^{\infty} F_n^c.$$

各 F_n^c は開集合だから，$n = 1, \ldots, m$ に対して，$\delta_n \in (0,1)$ が存在して，$(x - \delta_n, x + \delta_n) \subset F_n^c$. $\delta = \min_{1 \leq n \leq m} \delta_n$ とすると，$n = 1, \ldots, m$ に対して，$(x - \delta, x + \delta) \subset F_n^c$. すなわち，

$$(x - \delta, x + \delta) \subset \bigcap_{n=1}^{m} F_n^c.$$

まとめると，

$$(x - \delta, x + \delta) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c = F^c$$

となり，F^c は開集合，すなわち，F は閉集合である。

$F \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ であり，$E \setminus F \subset \cup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus F_n)$ だから，

$$\mu(E \setminus F) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus F_n) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \setminus F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

1.2　1 次元ルベーグ積分の定義

定義 1.3. 集合 $E \in \mathcal{M}$ を

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$$

と有限個の互いに素な可測集合の和集合であるとし，

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x) \tag{1.17}$$

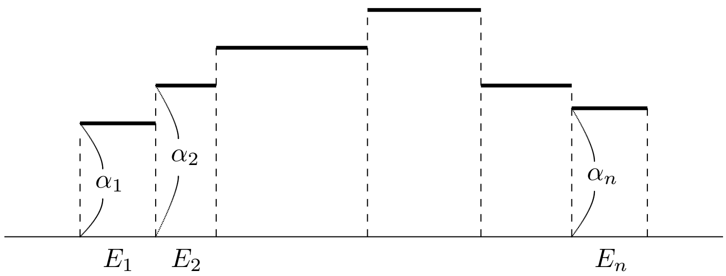
の形に表される関数を，**単関数**または**階段関数**という。ここで，α_j は実数，$\chi_{E_j}(x)$ は E_j の**定義関数**，すなわち

$$\chi_{E_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ x \in E_j, \\ 0 & \text{if } \ x \notin E_j \end{cases}$$

である。

このような単関数に対しては，リーマン積分の考え方を拡張して

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \alpha_1 \mu(E_1) + \alpha_2 \mu(E_2) + \cdots + \alpha_n \mu(E_n)$$



と定義するのが自然である。

そして，一般の関数 $f(x)$ に対しては，$f(x)$ がこのような単関数列 $\{f_k(x)\}$ の極限として表されるとき，$f_k(x)$ の積分値 $\int_E f_k(x)\, d\mu(x)$ の $k \to \infty$ としたときの極限をもって

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) := \lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, d\mu(x)$$

が定義できるということをこの小節で示す。

まず

$$\overline{\mathbf{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

とする。その位相は，次の形の線分の和集合を開集合と呼ぶことによって定義される：

$$(a, b), \quad [-\infty, a), \quad (a, +\infty].$$

$\overline{\mathbf{R}}$ の元を，**拡張された実数**という。

関数 $f(x)$ は，可測集合 $E \in \mathcal{M}$ で定義され，拡張された実数値をとるものとする。以下では，$0 \cdot \pm\infty = 0$ と規約する。

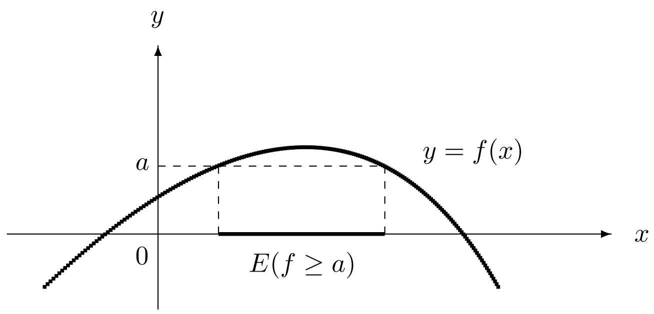
a を拡張された実数とするとき

$$E(f > a) = \{x \in E : f(x) > a\}$$

と定義する。

同様にして

$$E(f \leq a) = \{x \in E : f(x) \leq a\},$$
$$E(a < f \leq b) = \{x \in E : a < f(x) \leq b\}$$



等も定義される。

定義 1.4. 任意の実数 a に対して

$$E(f > a) \in \mathcal{M}$$

が成り立つとき，$f(x)$ を**ルベーグ可測関数**，または単に**可測関数**という。

例 1.2. (1.17) の形で表される単関数は，可測関数である。実際に，任意の実数 a に対して

$$E(\chi_{E_j} > a) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } a \geq 1, \\ E_j & \text{if } 0 \leq a < 1, \\ \mathbf{R} & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

であり，$\emptyset, E_j, \mathbf{R} \in \mathcal{M}$ だから，可測集合 E_j の定義関数 $\chi_{E_j}(x)$ は可測関数である。同様にして，単関数 (1.17) が可測関数であることも証明できる。

$f(x)$ が可測関数であることと，任意の実数 a に対して次の各集合が $\mathcal{M}$ に属することとは互いに同値である：

$$E(f \leq a) = E \setminus E(f > a) \in \mathcal{M}$$
$$E(f \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f > a - \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{M}$$
$$E(f < a) = E \setminus E(f \geq a) \in \mathcal{M}$$

また，$f(x)$ が可測ならば，次の各集合は可測である：

$$E(f = a) = E(f \geq a) \cap E(f \leq a) \in \mathcal{M}$$
$$E(f < \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f < n) \in \mathcal{M}$$
$$E(f = \infty) = E \setminus E(f < \infty) \in \mathcal{M}$$
$$E(f > -\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > -n) \in \mathcal{M}$$
$$E(f = -\infty) = E \setminus E(f > -\infty) \in \mathcal{M}$$

E で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して

$$E(f > g) = \{x \in E : f(x) > g(x)\}$$

等の記号を用いる。

定理 1.16. 関数 $f(x)$, $g(x)$ が E $(\in \mathcal{M})$ で可測ならば，集合 $E(f > g)$, $E(f \geq g)$, $E(f = g)$ はすべて $\mathcal{M}$ に属する。

証明. すべての有理数の集合 $\mathbf{Q}$ は可算集合であることに注意すると，

$$E(f > g) = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} \{E(f > r) \cap E(r > g)\} \in \mathcal{M}.$$

同様にして，$E(g < f) \in \mathcal{M}$ でもあるから

$$\begin{aligned} E(f \geq g) &= E \setminus E(g < f) \in \mathcal{M}, \\ E(f = g) &= E(f \geq g) \setminus E(f > g) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

である。

定理 1.17. 関数 $f(x)$ が可測ならば，任意の実数 $\alpha \neq 0$ に対して，べき $|f(x)|^\alpha$ も可測である。ただし，$\alpha < 0$ のとき $f(x) = 0$ なる点 x においては $|f(x)|^\alpha = \infty$ と約束する。

証明. $\alpha > 0$ の場合：$a > 0$ ならば

$$E\left(|f|^\alpha \geq a\right) = E\left(|f| \geq a^{\frac{1}{\alpha}}\right) = E\left(f \geq a^{\frac{1}{\alpha}}\right) \cup E\left(f \leq -a^{\frac{1}{\alpha}}\right) \in \mathcal{M}.$$

$a \leq 0$ ならば，$E(|f|^\alpha \geq a) = E \in \mathcal{M}$ だから，$|f(x)|^\alpha$ は可測関数である。
$\alpha < 0$ の場合も同様に証明できる。

定理 1.18. 関数 $f(x)$, $g(x)$ が可測であり各点で有限な値をとるならば，任意の実数 α, β に対して，一次結合 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ も可測である。

証明. $\alpha \cdot \beta = 0$ のときは明らかである。
$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ のときは，任意の実数 a に対して，$\beta \gtrless 0$ に従って，

$$E(\alpha f + \beta g > a) = E\left(g \gtrless -\frac{\alpha}{\beta} f + \frac{a}{\beta}\right)$$

となるから，任意の実数 α, β に対して，関数 $\alpha f(x) + \beta$ が可測であることがいえれば，定理 1.16 によって証明が終わる。ところで，$\alpha f(x) + \beta$ が可測関数であることを示すのは容易である。

定理 1.19. 関数 $f(x)$, $g(x)$ が可測であり各点で有限な値をとるならば，積 $f(x) \cdot g(x)$ も可測である。

証明. 積 $f \cdot g$ は

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\{(f+g)^2 - (f-g)^2\}$$

と表される。定理 1.18 により，$f + g$, $f - g$ は可測であり，定理 1.17 により，$(f+g)^2$, $(f-g)^2$ も可測である。よって，再び定理 1.18 により，

$$\frac{1}{4}\{(f+g)^2 - (f-g)^2\}$$

は可測である。

定理 1.20. $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots,$ が可測関数ならば

$$\sup_{1 \le n < \infty} f_n(x), \quad \inf_{1 \le n < \infty} f_n(x), \quad \limsup_{n \to \infty} f_n(x), \quad \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$$

も可測関数である。特に，$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在すれば，極限関数 $f(x)$ も可測関数である。

証明. まず，$g(x) = \sup_{1 \le n < \infty} f_n(x)$ とおく。任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} E(g > a) &= E\left(\sup_{1 \le n < \infty} f_n > a\right) \\ &= E(f_1 > a \text{ or} \ldots \text{or } f_n > a \text{ or} \ldots) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a) \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

だから，$g(x)$ は可測である。

また，

$$\inf_{1 \le n < \infty} f_n(x) = -\sup_{1 \le n < \infty} \{-f_n(x)\}$$

であるから，$\inf_{1 \le n < \infty} f_n(x)$ も可測関数である。

さらに，

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} f_n(x) &= \inf_{1 \le n < \infty} \left\{ \sup_{n \le k < \infty} f_k(x) \right\}, \\ \liminf_{n \to \infty} f_n(x) &= \sup_{1 \le n < \infty} \left\{ \inf_{n \le k < \infty} f_k(x) \right\} \end{aligned}$$

だから，$\limsup_{n \to \infty} f_n(x)$ と $\liminf_{n \to \infty} f_n(x)$ も可測関数となる。よって，$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在すれば

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \limsup_{n \to \infty} f_n(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$$

となるので，極限関数 $f(x)$ は可測関数である。

例 1.3. $\mathbf{R}$ 上で連続な関数はすべて可測関数である。なぜならば，$f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の連続関数とすると，任意の実数 a に対して，

$$E(f > a) = \{x \in E : f(x) > a\} = E \cap \{x \in \mathbf{R} : f(x) > a\}$$

であるが，$\{x \in \mathbf{R} : f(x) > a\}$ は開集合となり，定理 1.12 より，可測集合だからである。$\{x \in \mathbf{R} : f(x) > a\}$ が開集合であることは，f の連続性より，$f(b) > a$ を満たす任意の実数 b に対して，ある正数 δ が存在して，

$$x \in (b - \delta, b + \delta) \Longrightarrow f(x) > a$$

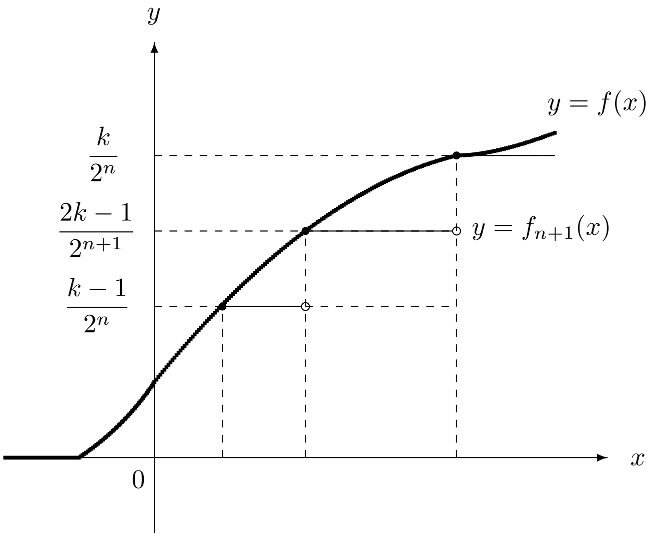
となることから従う。よって，定理 1.20 により，連続関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して $\limsup_{n \to \infty} f_n(x)$, $\liminf_{n \to \infty} f_n(x)$ は可測関数となる。また，ほとんどすべての x に対して（測度が 0 となる集合の点以外のすべての点 x で）$\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ が存在すればこれも可測関数となる。

定理 1.21. 関数 $f(x)$ が E $(\in \mathcal{M})$ で可測で非負ならば，E で可測で非負なる単関数の単調増加列 $\{f_n(x)\}$ で $f(x)$ に E の各点で収束するものが存在する。

証明. まず，E 上非負なる単関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \text{if } \ x \in E\left(\frac{k-1}{2^n} \le f < \frac{k}{2^n}\right), \ (k = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n), \\ n & \text{if } \ x \in E(f \ge n) \end{cases}$$

で定義する。$f_n(x)$ の値の分割の仕方が $1/2^n$ 等分なので，$n+1$ のときは n のときの細分になっている。したがって，各点 $x \in E$ で $\{f_n(x)\}$ は単調増加である。



次に，$f_n(x)$ の可測性を示す。任意の $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$E(f_n > a) = \begin{cases} E & \text{if } a < 0, \\ \bigcup_{k=k'}^{n \cdot 2^n + 1} E\left(f_n = \frac{k-1}{2^n}\right) & \text{if } 0 \le a < n, \\ & \left(k' = \min\left\{k : \frac{k-1}{2^n} > a\right\}\right) \\ \emptyset & \text{if } a \ge n \end{cases}$$

であって，

$$E\left(f_n = \frac{k-1}{2^n}\right) = \begin{cases} E\left(\frac{k-1}{2^n} \le f < \frac{k}{2^n}\right) & \text{if } k = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n, \\ E(f \ge n) & \text{if } k = n \cdot 2^n + 1. \end{cases}$$

$f(x)$ が可測なことにより

$$E\left(f_n = \frac{k-1}{2^n}\right) \in \mathcal{M}$$

だから，単関数 $f_n(x)$ は可測である。

$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ なることは，まず $f(x) = \infty$ なる点 x においては，$f_n(x) = n$ だから $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$. また，$f(x) < \infty$ なる点 x では，$n > f(x)$ となるすべての n に対して

$$0 \le f(x) - f_n(x) \le \frac{1}{2^n}$$

となっているから，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となる。

定理 1.20 と定理 1.21 を合せると，

定理 1.22. 関数 $f(x)$ は E $(\in \mathcal{M})$ で非負とする。このとき，$f(x)$ が E で可測であるための必要十分条件は，非負なる可測な単関数の単調増加列 $\{f_n(x)\}$ が存在して，$f(x)$ に E の各点で収束することである。

　ここで，単関数の積分に戻る。$f(x)$ が単関数で非負のとき

$$
\begin{aligned}
(1.18)\qquad & f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \\
& E = E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n,\ E_j \in \mathcal{M}, \\
& E_0 = E(f=0),\ E_j \cap E_k = \emptyset\ (j \neq k), \\
& \alpha_0 = 0,\ \alpha_j > 0\ (j \geq 1)
\end{aligned}
$$

と表される。このような $f(x)$ に対して

$$
(1.19)\qquad \int_E f(x)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j)
$$

という定義が意味を持つためには，(1.19) の右辺の値が $f(x)$ の (1.18) のような表し方に無関係なことを示す必要がある。

　いま，$f(x)$ が (1.18) のほかに

$$
\begin{aligned}
& f(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \chi_{F_k}(x), \\
& E = F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_m,\ F_j \in \mathcal{M}, \\
& F_0 = E(f=0) = E_0,\ F_j \cap F_k = \emptyset\ (j \neq k), \\
& \beta_0 = 0,\ \beta_j > 0\ (j \geq 1)
\end{aligned}
$$

とも表されたとすると，$E_j \cap F_k \neq \emptyset$ ならば

$$
\alpha_j \mu(E_j \cap F_k) = \beta_k \mu(E_j \cap F_k)
$$

によって $\alpha_j = \beta_k$ である。

　(a) $\mu(E_j \cap F_k) = \infty$ となる $j,\ k \geq 1$ が存在する場合には，その $j,\ k$ に対しては $\mu(E_j) = \mu(F_k) = \infty$ だから

$$
\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) = \infty = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(F_k).
$$

(b) もしすべての j, k に対して $\mu(E_j \cap F_k) < \infty$ の場合は，$\alpha_0 = \beta_0 = 0$ によって

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) &= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j \cap \left(\bigcup_{k=0}^{m} F_k\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mu\left(\bigcup_{k=0}^{m} (E_j \cap F_k)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{k=0}^{m} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} \alpha_j \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \beta_k \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \beta_k \sum_{j=0}^{n} \mu(F_k \cap E_j) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(F_k).
\end{aligned}
$$

ゆえに，$f(x)$ の表現を変えても (1.19) の右辺の値は変わらない。

定理 1.23. (i) $f(x), g(x)$ が E 上の単関数で非負ならば

$$\int_E (f(x) + g(x))\, d\mu(x) = \int_E f(x)\, d\mu(x) + \int_E g(x)\, d\mu(x).$$

(ii) $f(x)$ が E 上の単関数で非負，$E \supset A \cup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ ならば

$$\int_{A \cup B} f(x)\, d\mu(x) = \int_A f(x)\, d\mu(x) + \int_B f(x)\, d\mu(x).$$

証明. (i) 単関数 $f(x), g(x)$ が次のように表されているとする。

$$
\begin{aligned}
& f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k \chi_{F_k}(x), \\
& E = E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n = F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_m, \\
& E_j \cap E_k = \emptyset \ (j \neq k), \quad F_j \cap F_k = \emptyset \ (j \neq k), \\
& \alpha_0 = 0 < \alpha_j \ (j \geq 1), \quad \beta_0 = 0 < \beta_k \ (k \geq 1).
\end{aligned}
$$

このとき，$f(x) + g(x)$ も単関数で

$$f(x) + g(x) = \sum_{j,k} (\alpha_j + \beta_k) \chi_{E_j \cap F_k}(x)$$

と表される。

(a) $\mu(E_j) = \infty$ なる $j \geq 1$ がある場合には，少なくとも 1 つの k $(0 \leq k \leq m)$ に対して $\mu(E_j \cap F_k) = \infty$ となるから

$$\int_E (f(x) + g(x))\, d\mu(x) = \infty = \int_E f(x)\, d\mu(x) + \int_E g(x)\, d\mu(x)$$

が成り立つ。

(b) $\mu(F_k) = \infty$ となる $k \geq 1$ がある場合も同様である。

(c) すべての j, $k \geq 1$ に対して $\mu(E_j) < \infty$, $\mu(F_k) < \infty$ となる場合は,

$$\begin{aligned}
\int_E (f(x) + g(x))\, d\mu(x) &= \sum_{(j,k)\neq(0,0)} (\alpha_j + \beta_k)\mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{(j,k)\neq(0,0)} \alpha_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{(j,k)\neq(0,0)} \beta_k \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=0}^{m} \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \sum_{j=0}^{n} \mu(E_j \cap F_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(E_j \cap \left(\bigcup_{k=0}^{m} F_k\right)\right) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu\left(\left(\bigcup_{j=0}^{n} E_j\right) \cap F_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(F_k) \\
&= \int_E f(x)\, d\mu(x) + \int_E g(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

(ii) 次に,

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad E = E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n, \\
&E_0 = E(f = 0), \quad E_j \cap E_k = \emptyset\ (j \neq k), \quad \alpha_0 = 0 < \alpha_j\ (j \geq 1)
\end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f(x)\, d\mu(x) &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j \cap (A \cup B)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu((E_j \cap A) \cup (E_j \cap B)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mu(E_j \cap A) + \mu(E_j \cap B)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j \cap A) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j \cap B) \\
&= \int_A f(x)\, d\mu(x) + \int_B f(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

定理 1.24. $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ も $g(x)$ も E 上の単関数で非負とし, $\{f_n(x)\}$ は n について単調増加で,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq g(x), \quad \forall x \in E$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) \geq \int_E g(x)\, d\mu(x). \tag{1.20}$$

証明. $E_0 = E(g = 0)$, $F = E \setminus E_0$ とおくと，定理 1.23 により

$$\int_E g(x)\,d\mu(x) = \int_{E_0} g(x)\,d\mu(x) + \int_F g(x)\,d\mu(x) = \int_F g(x)\,d\mu(x)$$

だから，はじめから E 上で $g(x) > 0$ として証明すればよい。

このとき，

$$g(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad 0 < \alpha_j < \infty$$

と表されるから，

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}, \quad \beta = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$$

とおくと，

$$0 < \alpha \leq g(x) \leq \beta < \infty.$$

したがって，$0 < \varepsilon < \alpha$ なる任意の実数 ε に対して，$g(x) - \varepsilon$ は単関数で正である。

ここで

$$F_n = E(f_n > g - \varepsilon), \quad n = 1, 2, \ldots$$

とおくと，$\{f_n(x)\}$ が単調増加で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq g(x)$$

であったから，$\{F_n\}$ は単調増加で

$$\lim_{n\to\infty} F_n = E.$$

これから定理 1.13 によって

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(E).$$

以下，2 つの場合にわけて証明する：

(1) $\mu(E) < \infty$ のとき：この場合は，

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E \setminus F_n) = \mu(E) - \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$$

だから，先の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 n_0 が存在して

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \mu(E \setminus F_n) < \varepsilon.$$

したがって，定理 1.23 を用いて

$$\begin{aligned}
\int_E f_n(x)\,d\mu(x) &\geq \int_{F_n} f_n(x)\,d\mu(x) \quad \geq \quad \int_{F_n} (g(x) - \varepsilon)\,d\mu(x) \\
&= \int_{F_n} g(x)\,d\mu(x) - \varepsilon\mu(F_n) \\
&\geq \int_E g(x)\,d\mu(x) - \int_{E\setminus F_n} g(x)\,d\mu(x) - \varepsilon\mu(E) \\
&\geq \int_E g(x)\,d\mu(x) - \beta\mu(E \setminus F_n) - \varepsilon\mu(E) \\
&> \int_E g(x)\,d\mu(x) - \varepsilon(\beta + \mu(E)).
\end{aligned}$$

ここで，$n \to \infty$ として

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) \geq \int_E g(x)\,d\mu(x) - \varepsilon(\beta + \mu(E)).$$

$\beta+\mu(E)<\infty$ で ε は任意に小さくとれるので，(1.20) が成り立つ。

(2) $\mu(E)=\infty$ のとき：この場合は,

$$\begin{aligned} f_n(x) &\geq (g(x)-\varepsilon)\chi_{F_n}(x) \\ &\geq (\alpha-\varepsilon)\chi_{F_n}(x). \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) &\geq \int_E (\alpha-\varepsilon)\chi_{F_n}(x)\,d\mu(x) \\ &= (\alpha-\varepsilon)\mu\left(F_n\right). \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x) &\geq (\alpha-\varepsilon)\lim_{n\to\infty}\mu\left(F_n\right) \\ &= (\alpha-\varepsilon)\mu(E) \\ &= \infty \\ &\geq \int_E g(x)\,d\mu(x) \end{aligned}$$

となるから，(1.20) が成り立つ。

定理 1.25. E 上の非負単関数列 $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ がどちらも n について単調増加であって

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

とすると

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\,d\mu(x).$$

証明. 自然数 m を任意に固定する。仮定により

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)\geq g_m(x)$$

だから 定理 1.24 により

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x)\geq\int_E g_m(x)\,d\mu(x).$$

この左辺は m に無関係だから，$m\to\infty$ として

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x)\geq\lim_{m\to\infty}\int_E g_m(x)\,d\mu(x). \tag{1.21}$$

単関数列 $\{f_n(x)\}$ と $\{g_n(x)\}$ の役割を入れ換えて，同じ論法で (1.21) の逆の不等式を得る。したがって，(1.21) の両辺は相等しい。

ここで，ようやく一般の非負値可測関数 $f(x)$ に対する積分を定義することができる。この場合，定理 1.21 により，非負の単関数 $f_n(x)$ の単調増加列で $f(x)$ に近づくもの $\{f_n(x)\}$ が存在する。このとき，$\{\int_E f_n(x)\,d\mu(x)\}$ も n について単調増加である。したがって

$$\int_E f(x)\,d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x) \tag{1.22}$$

と定義すると，この右辺の極限値は上の定理 1.25 によって $f(x)$ に近づく単関数の増加列 $\{f_n\}$ のとり方に関係しない。それゆえ (1.22) は $f(x)$ の積分の定義として意味を持つ。

定理 1.26. (i) $f(x)$, $g(x)$ が E 上で可測かつ非負ならば

$$\int_E (f(x)+g(x))\,d\mu(x) = \int_E f(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x).$$

(ii) $f(x)$ が E 上で可測かつ非負で $E \supset A \cup B$ $(A \cap B = \emptyset)$ ならば

$$\int_{A\cup B} f(x)\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_B f(x)\,d\mu(x).$$

証明. 積分の定義に定理 1.23, 定理 1.25 を適用すれば容易である。

定義 1.5. 一般の可測関数 $f(x)$ に対して

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

とおくと，$f^+(x)$, $f^-(x)$ は可測で

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad f^+(x) \geq 0,\ f^-(x) \geq 0$$

となり，(1.22) のようにして

$$\int_E f^+(x)\,d\mu(x), \quad \int_E f^-(x)\,d\mu(x)$$

が定義される。この 2 つの値が有限のとき，$f(x)$ は E 上で**ルベーグ積分可能** (Lebesgue integrable) であるといい，

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E f^+(x)\,d\mu(x) - \int_E f^-(x)\,d\mu(x) \tag{1.23}$$

と定義して，この値を E 上での $f(x)$ の**定積分**という。

リーマン積分とルベーグ積分の関係について，本講義ノートで必要となる，積分範囲が有界閉区間で，被積分関数が連続な場合のみを説明する。

定理 1.27. 関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ 上で連続ならば，$[a,b]$ 上での $f(x)$ のリーマン積分とルベーグ積分の値は等しい。

証明. $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と分けて考えれば，$f(x) \geq 0$ の場合だけを証明すればよい。

区間 $[a,b]$ を 2^n 等分した分点を

$$a = x_{n,0} < x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,2^n} = b, \quad x_{n,k} = a + \frac{k(b-a)}{2^n}$$

とし，

$$f_n(x) = f(a)\chi_{\{a\}}(x) + \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{(x_{n,k-1},x_{n,k}]} f(x)\cdot\chi_{(x_{n,k-1},x_{n,k}]}(x), \quad a \leq x \leq b,$$

とおく。$f_n(x)$ は非負の単関数で，$[a,b]$ の分割の仕方により，n に関して単調増加である。さらに，f の一様連続性から，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. よって，ルベーグ積分の定義より，

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n(x)\,d\mu(x).$$

右辺の積分を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\int_{[a,b]} f_n(x)\,d\mu(x) &= f(a)\mu(\{a\}) + \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{(x_{n,k-1},x_{n,k}]} f(x)\cdot\mu((x_{n,k-1},x_{n,k}]) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{[x_{n,k-1},x_{n,k}]} f(x)\cdot\frac{b-a}{2^n}. \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

$f(x)$ は $[a,b]$ 上でリーマン可積分だから，$n\to\infty$ のとき，(1.24) の右辺は,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

に収束する。

以上により,

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

以下，ルベーグ積分の基本的な性質を列挙する：

定理 1.28. 可測関数 $f(x)$ が集合 E 上で積分可能であることと $|f(x)|$ が集合 E 上で積分可能であることとは同値である。このとき，さらに

$$\left|\int_E f(x)\,d\mu(x)\right| \le \int_E |f(x)|\,d\mu(x)$$

が成り立つ。

証明. $f=f^+-f^-$, $|f|=f^++f^-$ から，$f(x)$ の可積分性と $|f(x)|$ の可積分性は同値であることが分かる。さらに，定理 1.26 の (i) より,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_E f(x)\,d\mu(x)\right| &= \left|\int_E f^+(x)\,d\mu(x) - \int_E f^-(x)\,d\mu(x)\right| \\
&\le \int_E f^+(x)\,d\mu(x) + \int_E f^-(x)\,d\mu(x) = \int_E |f(x)|\,d\mu(x).
\end{aligned}
$$

定理 1.29. $\mu(E)=0$ ならば，任意の可測関数 $f(x)$ は集合 E 上で積分可能であって,

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = 0.$$

証明. $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$ に対して，非負単関数の単調増加列 $\{f_n^+(x)\}$ が存在し，$f_n^+\to f^+$ かつ

$$\int_E f^+(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n^+(x)\,d\mu(x)$$

である。さらに,

$$\int_E f_n^+(x)\,d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{n,j}\mu(E_{n,j}), \quad E = E_{n,1}\cup\cdots\cup E_{n,m_n},\ E_{n,j}\cap E_{n,k}=\emptyset\ (j\ne k)$$

と表されるとすると，$\mu(E_{n,j})\le\mu(E)=0$ だから,

$$\int_E f_n^+(x)\,d\mu(x) = 0.$$

よって，

$$\int_E f^+(x)\,d\mu(x) = 0.$$

$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ に対しても同様にして，

$$\int_E f^-(x)\,d\mu(x) = 0$$

だから主張が成り立つ。

定理 1.30. 可測関数 $f(x)$ が集合 E 上で積分可能ならば，

$$\mu\left(E(f=+\infty)\right) = \mu\left(E(f=-\infty)\right) = 0.$$

証明. 定理 1.26 の (ii) より，任意の $\alpha > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_E f^+(x)\,d\mu(x) &= \int_{E(f=+\infty)} f^+(x)\,d\mu(x) + \int_{E\setminus E(f=+\infty)} f^+(x)\,d\mu(x)\\ &\geq \int_{E(f=+\infty)} \alpha\,d\mu(x) \quad = \quad \alpha\mu(E(f=+\infty)).\end{aligned}$$

$f(x)$ は E 上積分可能だから，

$$0 \leq \int_E f^+(x)\,d\mu(x) < \infty$$

であって，α は任意に大きくとれるから，$\mu(E(f=+\infty)) = 0$ である。同様にして，$\mu(E(f=-\infty)) = 0$ も証明できる。

定義 1.6. 集合 E 上の可測関数 $f(x)$, $g(x)$ が，条件

$$\mu(E(f \neq g)) = 0$$

を満たしているとき，$f(x)$, $g(x)$ は**ほとんどいたるところで等しい**といい，$f(x) = g(x)$ a.e. 等と表す。ここで，a.e. は almost everywhere の略記号である。

定理 1.31. 可測関数 $f(x)$ は E 上非負で

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = 0$$

ならば E 上ほとんどいたるところで $f(x) = 0$ である，すなわち，$f(x) = 0$ a.e. $x \in E$.

証明. まず

$$E_n = \left\{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\right\} = E\left(f > \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

とおく。このとき，$\{E_n\}$ は単調増加で，$E_n \subset E$, $n = 1, 2, \ldots,$ を満たす。もしある n に対して $\mu\left(E_n\right) > 0$ となったとすると

$$0 = \int_E f(x)\,d\mu(x) \geq \int_{E_n} f(x)\,d\mu(x) \geq \frac{1}{n}\mu\left(E_n\right) > 0$$

となって，矛盾である。したがって，$\mu\left(E_n\right) = 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ でなければならない。

一方，

$$E(f>0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f > \frac{1}{n}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n$$

であるから，定理 1.13 の (i) より

$$\mu(E(f>0)) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0.$$

ゆえに，$f(x)=0$ a.e. $x\in E$ が成り立つ。

定理 1.32. 可測関数 $f(x)$ が集合 A, B $(A\cap B=\emptyset)$ 上で積分可能ならば，和集合 $A\cup B$ 上で積分可能であって，

$$\int_{A\cup B} f(x)\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_B f(x)\,d\mu(x).$$

証明. 定理 1.26 の (ii) より，

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f^+(x)\,d\mu(x) &= \int_A f^+(x)\,d\mu(x) + \int_B f^+(x)\,d\mu(x),\\
\int_{A\cup B} f^-(x)\,d\mu(x) &= \int_A f^-(x)\,d\mu(x) + \int_B f^-(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

この 2 つの式の右辺の各項は仮定により有限である。よって，f は $A\cup B$ で積分可能であって，

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f(x)\,d\mu(x) &= \int_A f^+(x)\,d\mu(x) + \int_B f^+(x)\,d\mu(x) - \int_A f^-(x)\,d\mu - \int_B f^-(x)\,d\mu(x)\\
&= \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_B f(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

定理 1.33. 可測関数 $f(x)$ が集合 E 上で積分可能ならば，任意の実数 α に対して，スカラー倍 $\alpha f(x)$ も E 上で積分可能であって，

$$\int_E \alpha\, f(x)\,d\mu(x) = \alpha \int_E f(x)\,d\mu(x).$$

証明. 積分の定義より明らか。

定理 1.34. 可測関数 $f(x)$, $g(x)$ が集合 E 上で積分可能ならば，和 $f(x)+g(x)$ も集合 E 上で積分可能であって，

$$\int_E (f(x)+g(x))\,d\mu(x) = \int_E f(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x).$$

証明.

$$\begin{aligned}
E_{11} &= E(f\ge 0,\ g\ge 0), \quad E_{12} = E(f\ge 0,\ g<0),\\
E_{21} &= E(f<0,\ g\ge 0), \quad E_{22} = E(f<0,\ g<0)
\end{aligned}$$

とおくと，これらはそれぞれ互いに素であって，$E=E_{11}\cup E_{12}\cup E_{21}\cup E_{22}$. よって，定理 1.32 より，各 E_{jk} 上で主張を証明すれば良い。各 E_{jk} 上では f, g は一定符号だから，E 上で f, g が一定符号の場合に帰着される。さらに，f, g が同符号ならば，定理 1.26 の (i) より，この定理の主張は従う。$f\ge 0\ge g$ の場合を考える（$f\le 0\le g$ の場合も同様である）。

まず，

$$A=E(f+g\ge 0), \quad B=E(f+g<0)$$

とおく。このとき，A において，

$$f=(f+g)+(-g), \quad f+g\ge 0,\ -g\ge 0$$

だから，定理 1.26 の (i) と定理 1.33 より，

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\,d\mu(x) &= \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu(x) + \int_A (-g(x))\,d\mu(x) \\ &= \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu(x) - \int_A g(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

よって，

$$0 \le \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu(x) = \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_A g(x)\,d\mu(x) < \infty.$$

また，B において，

$$-g = f + (-(f+g)), \quad f \ge 0,\ -(f+g) > 0$$

となることを用いると，上と同様にして，

$$0 \ge \int_B (f(x)+g(x))\,d\mu(x) = \int_B f(x)\,d\mu(x) + \int_B g(x)\,d\mu(x) > -\infty.$$

したがって，定理 1.32 より，$f+g$ は $E = A \cup B$ 上で積分可能であって，

$$\begin{aligned}\int_E (f(x)+g(x))\,d\mu(x) &= \int_A (f(x)+g(x))\,d\mu(x) + \int_B (f(x)+g(x))\,d\mu(x) \\ &= \int_A f(x)\,d\mu(x) + \int_B f(x)\,d\mu(x) + \int_A g(x)\,d\mu(x) + \int_B g(x)\,d\mu(x) \\ &= \int_E f(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

定理 1.35. 集合 E 上の可測関数 $f(x)$, $g(x)$ はほとんどいたるところで等しいとする。このとき，$f(x)$ が集合 E 上で積分可能ならば，$g(x)$ も集合 E 上で積分可能であって，

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \int_E g(x)\,d\mu(x).$$

証明. 仮定より $\mu(E(f \ne g)) = 0$ だから，定理 1.32 と定理 1.29 により，

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,d\mu(x) &= \int_{E(f=g)} f(x)\,d\mu(x) + \int_{E(f\ne g)} f(x)\,d\mu(x) \quad = \quad \int_{E(f=g)} f(x)\,d\mu(x) \\ &= \int_{E(f=g)} g(x)\,d\mu(x) \quad = \quad \int_E g(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

最後に，ルベーグ積分の絶対連続性の定理（定理 1.38）を証明する。そのために，2 つの定理を準備する：

定理 1.36. 関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ の部分集合 E 上でルベーグ積分可能とする。このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|\int_E f(x)\,d\mu(x) - \int_E f_\varepsilon(x)\,d\mu(x)\right| \le \int_E |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,d\mu(x) < \varepsilon$$

を満たし，ある有界集合の外では恒等的に 0 となる $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f_\varepsilon(x)$ が存在する。

証明. 最初の不等式は明らかである。また，

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad (f^+(x) \ge 0,\ f^-(x) \ge 0)$$

だから，$f(x) \geq 0$ と仮定してよい。

$\varepsilon > 0$ を任意に固定する。

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{if } x \in E\left(\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}, \quad |x| < n\right), \ (k = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n) \\ 0 & \text{if } x \in E(f \geq n) \cup E(|x| \geq n) \end{cases}$$

とすると，$\{f_n(x)\}$ は E 上の非負単関数の単調増加列で，$f_n \to f$ である。$f_n(x) \leq f(x)$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_E f(x)\, d\mu(x) - \int_E f_n(x)\, d\mu(x) \right) = 0.$$

よって，n を十分大きくとれば，

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\, d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.25}$$

この n を固定して，$S_n = \{x : |x| < n\}$ とおくと，

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \quad \alpha_j > 0, \quad E_j \subset S_n$$

と表される。定理 1.15 より，各可測集合 E_j に対して

$$F_j \subset E_j \subset G_j \subset S_n, \quad \mu(G_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}$$

となるような閉集合 F_j と開集合 G_j が存在する。また，これに対して

$$g_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in F_j, \\ 0 & \text{if } x \in {G_j}^c \end{cases}$$

となる $\mathbf{R}$ 上で $0 \leq g_j(x) \leq 1$ を満たす連続関数 $g_j(x)$ が存在する。たとえば次のような関数を考えればよい：

$$g_j(x) = \frac{d(x, G_j^c)}{d(x, G_j^c) + d(x, F_j)}.$$

このとき，$x \notin G_j \setminus F_j$ ならば $\chi_{E_j}(x) = g_j(x)$ だから

$$\int_{E_j} |\chi_{E_j}(x) - g_j(x)|\, d\mu(x) \leq \mu(G_j - F_j) < \frac{\varepsilon}{2m\alpha_j}.$$

よって，

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g_j(x)$$

とすると，f_ε は $\mathbf{R}$ で連続で，$x \notin S_n$ ならば $f_\varepsilon(x) = 0$ を満たし，

$$\int_E |f_n(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \leq \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_E |\chi_{E_j}(x) - g_j(x)|\, d\mu(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.26}$$

ゆえに，(1.25), (1.26) より，

$$\begin{aligned} \int_E |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) &\leq \int_E |f(x) - f_n(x)|\, d\mu(x) + \int_E |f_n(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

次の定理は，ルベーグ積分に特有な平行移動および反転に関する不変性を主張している：

定理 1.37 (ルベーグ積分の不変性)**.** $\mathbf{R}$ 上の可測関数 $f(x)$ が，定積分

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\, d\mu(x)$$

を持つとする。このとき，任意の $y \in \mathbf{R}$ に対して，関数

$$f(x+y), \quad f(-x)$$

も，x の関数として可測であって，定積分を持つ。

さらに，

$$\int_{\mathbf{R}} f(x+y)\, d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} f(-x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, d\mu(x).$$

証明. $f(x) \geq 0$ の場合を示せばよい。まず，$f(x)$ が単関数

$$f(x) = \sum_j a_j \chi_{E_j}(x)$$

の場合は，

$$f(x+y) = \sum_j a_j \chi_{E_j - y}(x).$$

定理 1.14 より，$f(x+y)$ は x の可測関数であり，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} f(x+y)\, d\mu(x) &= \sum_j a_j \mu(E_j - y) \\
&= \sum_j a_j \mu(E_j) \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

となることが分かる。

$f(x)$ が一般の場合は，$f(x)$ に近づく単関数 $f_n(x)$ の単調増加列をとれば，$f_n(x+y)$ も単関数の単調増加列で，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x+y) = f(x+y).$$

よって，$f(x+y)$ は x の可測関数で，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} f(x+y)\, d\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x+y)\, d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbf{R}} f(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

関数 $f(-x)$ についても，同様の議論で示せる。

次の定理は，ルベーグ積分の絶対連続性を主張している：

定理 1.38 (ルベーグ積分の絶対連続性)**.** 関数 $f(x)$ が $\mathbf{R}$ 上でルベーグ積分可能ならば，

$$\lim_{|y|\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f(x)|\, d\mu(x) = 0.$$

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，定理 1.36 と定理 1.37 から，

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f_\varepsilon(x+y)| \, d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \, d\mu(x) < \varepsilon, \quad \forall y \in \mathbf{R} \tag{1.27}$$

となるある有界集合の外で恒等的に 0 となる連続関数 $f_\varepsilon(x)$ が存在する。

次に，$S_n = \{x : |x| < n\}$ とすると，$f_\varepsilon(x)$ に依存して n を十分大きくとり，$|y| < 1$ であれば，

$$\{x : f_\varepsilon(x+y) \neq 0\} \subset S_n \tag{1.28}$$

とできる。関数 $f_\varepsilon(x)$ は有界閉集合 $\overline{S_n} = \{x : |x| \leq n\}$ で連続だから，特に，一様連続である。よって，

$$\lim_{|y| \to 0} \left\{ \sup_{x \in S_n} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \right\} = 0.$$

したがって，

$$\lim_{|y| \to 0} \int_{S_n} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \, d\mu(x) \leq \lim_{|y| \to 0} \left\{ \sup_{x \in S_n} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \right\} \mu(S_n) = 0. \tag{1.29}$$

ところが，(1.27), (1.28) より，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f(x)| \, d\mu(x) &\leq \int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f_\varepsilon(x+y)| \, d\mu(x) + \int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \, d\mu(x) \\
&\quad + \int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \, d\mu(x) \\
&< \varepsilon + \int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x)| \, d\mu(x) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

両辺の極限 $\limsup_{|y| \to 0}$ をとると，(1.29) より，

$$\limsup_{|y| \to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f(x)| \, d\mu(x) \leq 2\varepsilon.$$

ゆえに，

$$\lim_{|y| \to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+y) - f(x)| \, d\mu(x) = 0.$$

1.3　項別積分等の種々の極限操作

ルベーグ積分では，リーマン積分の場合よりも種々の極限をとる操作において，はるかに作業が簡単かつ明瞭となる。たとえば，連続関数の列 $\{g_n(x)\}$ に対して，その極限関数

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

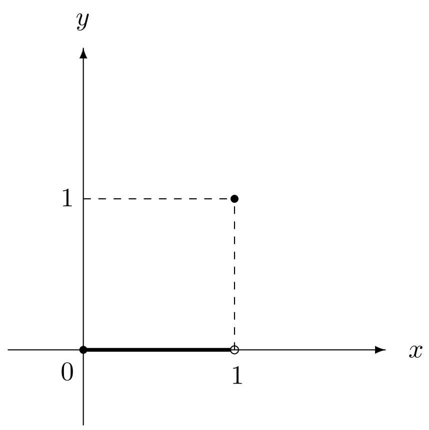
が存在したとしても，連続となるとは限らないが，常にルベーグ可測関数となる。実際，定理 1.20 の帰結として，可測関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し，極限関数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{(a.e.)}$$

が存在する場合には，$f(x)$ は可測関数になるからである。

例 1.4. $E = [0, 1]$ 上で，関数列 $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots,$ を考える。

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{if } \ 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{if } \ x = 1. \end{cases}$$



$f(x)$ は，$[0, 1]$ 上で不連続であるが，区間 $[0, 1)$ で 0, 一点 $\{1\}$ で 1 という値をとる階段関数で，もちろん可測である。

この小節では，集合はすべてルベーグ可測集合族 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbf{R})$ に属し，関数はすべてルベーグ可測関数とする。

定理 1.39. 集合 E 上で $f(x)$ は非負，$g_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は非負な単関数で

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad \text{a.e. } x \in E$$

ならば

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E g_n(x)\,d\mu(x)$$

が成り立つ。

証明. まず,

$$h_N(x) = g_1(x) + \cdots + g_N(x)$$

とおくと，$h_N(x)$ は非負なる単関数であって，定理 1.23 より,

$$\begin{aligned}
\int_E h_N(x)\,d\mu(x) &= \int_E (g_1(x) + \cdots + g_N(x))\,d\mu(x) \\
&= \int_E g_1(x)\,d\mu(x) + \cdots + \int_E g_N(x)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_E g_n(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

一方, $\{h_N(x)\}$ は非負単関数の単調増加列で,

$$\lim_{N\to\infty} h_N(x) = f(x) \quad \text{a.e. } x \in E$$

だから，積分の定義により

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\,d\mu(x) &= \lim_{N\to\infty} \int_E h_N(x)\,d\mu(x) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_E g_n(x)\,d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E g_n(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

定理 1.40. 集合 E 上で $\{f_n(x)\}$ は非負の可測関数列で

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

とすると

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x).$$

証明. 各 $f_n(x)$ に対して，定理 1.21 により，非負なる単関数の単調増加列 $\{f_{nm}(x)\}_{m=1}^{\infty}$ が存在して

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} f_{nm}(x)$$

となる。

このとき,

$$h_{n1}(x) = f_{n1}(x), \quad h_{nm}(x) = f_{nm}(x) - f_{n,m-1}(x), \quad m = 2, 3, \ldots,$$

とおくと，$h_{nm}(x)$ は非負な単関数で

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \lim_{i\to\infty} f_{ni}(x) \quad = \quad \lim_{i\to\infty} \sum_{m=1}^{i} h_{nm}(x) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} h_{nm}(x)
\end{aligned}$$

が成り立つ。そこで,

$$\{h_{nm}(x)\}_{\substack{1\le n<\infty\\ 1\le m<\infty}}$$

を一列に並びかえたものを改めて $\{g_1(x), g_2(x), \ldots\}$ とすると，正項級数の足す順序をかえても和は等しいから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} h_{nm}(x) \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} g_N(x) \end{aligned}$$

である。

したがって，定理 1.39 により

$$\begin{aligned} \int_E f(x)\,d\mu(x) &= \sum_{N=1}^{\infty}\int_E g_N(x)\,d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_E h_{nm}(x)\,d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E \sum_{m=1}^{\infty} h_{nm}(x)\,d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x). \end{aligned}$$

定理 1.41 (単調収束定理またはベッポ・レヴィ (Beppo–Levi) の定理)**.** 可測集合 E 上で

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots,$$

であって，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ならば

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x). \tag{1.30}$$

証明. (a) E の各点で $f_n(x)$ が有限値の場合にまず証明する。この場合

$$g_1(x) = f_1(x), \quad g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

とおくと

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \quad g_k(x) \ge 0$$

だから，定理 1.40 により

$$\begin{aligned} \int_E f(x)\,d\mu(x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_E g_k(x)\,d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E g_k(x)\,d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_E f_1(x)\,d\mu(x) + \int_E (f_2(x) - f_1(x))\,d\mu(x)\right. \\ &\qquad \left. + \cdots + \int_E (f_n(x) - f_{n-1}(x))\,d\mu(x)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,d\mu(x). \end{aligned}$$

(b) 次に，$\mu\left(E(f_n=\infty)\right)>0$ となる n が存在する場合には，集合 $E\left(f_n=\infty\right)$ 上で $f(x)=\infty$ だから (1.30) は $\infty=\infty$ となって定理は成立する。

したがって，すべての n に対して $\mu\left(E(f_n=\infty)\right)=0$ とすると，集合

$$E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(f_n=\infty\right)$$

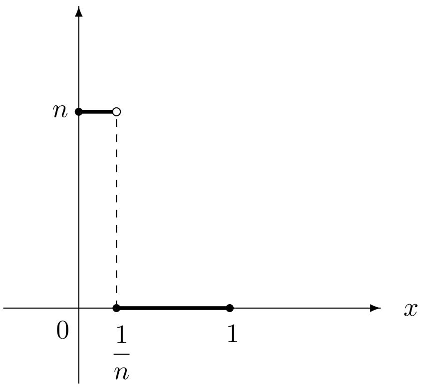
も

$$0\le\mu\left(E_0\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E(f_n=\infty)\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E(f_n=\infty)\right)=0$$

により，零集合であって，定理 1.29 より，E_0 上で任意の関数の積分は 0 であるから，結局，E の各点で $f_n(x)$ が有限値の場合に帰着される。

例 1.5. 定理 1.41 で $\{f_n(x)\}$ が単調という条件をはずすと，定理の結論は必ずしも成り立たなくなる。その例をあげる。閉区間 $[0,1]$ で

$$f_n(x)=\begin{cases} n & \text{if } \ 0\le x<\dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{if } \ \dfrac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$$



に対して，極限関数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases} \infty & \text{if } \ x=0, \\ 0 & \text{if } \ 0<x\le 1 \end{cases}$$

が存在する。

一方，

$$\int_{[0,1]}f_n(x)\,d\mu(x)=1,\quad n=1,2,\dots,\quad \int_{[0,1]}f(x)\,d\mu(x)=0$$

であって (1.30) は成立しない。

定理 1.42. 関数 $f(x)$ は E 上で定積分を持つとする（積分の値は，有限でなくてもよい）。このとき，

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,\quad E_n\cap E_m=\emptyset\ (n\ne m)$$

ならば

$$\int_E f(x)\,d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)\,d\mu(x).$$

証明. 前小節で述べたように，$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と分けて考えれば $f(x) \geq 0$ の場合だけを証明すればよい。このとき

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if} \ \ x \in E_n \\ 0 & \text{if} \ \ x \in E \setminus E_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

なる関数 $f_n(x)$ も可測で，

$$f_n(x) \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

だから，定理 1.40 によって

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\, d\mu(x).$$

定理 1.43 (ファトゥ (Fatou) の補助定理)**.** 集合 E 上で $f_n(x)$ は非負ならば

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x). \tag{1.31}$$

証明. 下極限の定義は

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} f_k(x) \right)$$

であったから，

$$g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

とおくと，仮定から $g_n(x) \geq 0$ であり，関数列 $\{g_n(x)\}$ は単調増加で E の各点で

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

となる。したがって，単調収束定理（定理 1.41）により

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\, d\mu(x) &= \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, d\mu(x) \\ &= \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x). \end{aligned} \tag{1.32}$$

一方，各 n に対して $g_n(x) \leq f_n(x)$ だから

$$\int_E g_n(x)\, d\mu(x) \leq \int_E f_n(x)\, d\mu(x).$$

この両辺の下極限をとると，左辺には極限値が存在するので

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n(x)\, d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x). \tag{1.33}$$

以上，(1.32) と (1.33) から (1.31) を得る。

定理 1.44 (ルベーグの優収束定理)**.** 関数 $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots,$ は集合 E 上で可測であり，E 上で積分可能な関数 $\varphi(x) \geq 0$ が存在して，E の各点で

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.34}$$

とする。このとき

(i) $$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x) \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x),$$

(ii) $$\int_E \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x) \ge \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x).$$

したがって，極限関数 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在すれば

(iii) $$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x).$$

証明. まず,

$$g(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \quad h(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

とおく。

$$|f_n(x)| \le \varphi(x)$$

なる仮定により

$$\varphi(x) + f_n(x) \ge 0, \quad \varphi(x) - f_n(x) \ge 0$$

だから，定理 1.43 と

$$\liminf_{n\to\infty}(-f_n(x)) = -\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = -h(x)$$

なることを用いて

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \int_E (\varphi(x) + f_n(x))\,d\mu(x) &\ge \int_E \liminf_{n\to\infty}(\varphi(x) + f_n(x))\,d\mu(x) = \int_E (\varphi(x) + g(x))\,d\mu(x),\\
\liminf_{n\to\infty} \int_E (\varphi(x) - f_n(x))\,d\mu(x) &\ge \int_E \liminf_{n\to\infty}(\varphi(x) - f_n(x))\,d\mu(x) = \int_E (\varphi(x) - h(x))\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned}
\int_E \varphi(x)\,d\mu(x) + \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) &\ge \int_E \varphi(x)\,d\mu(x) + \int_E g(x)\,d\mu(x),\\
\int_E \varphi(x)\,d\mu(x) - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\mu(x) &\ge \int_E \varphi(x)\,d\mu(x) - \int_E h(x)\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

この 2 つの式から，それぞれ (i), (ii) が得られる。
(iii) は (i), (ii) で等号の成り立つ場合として得られる。

例 1.6. $f(x)$ が $[0,\infty)$ 上ルベーグ積分可能ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,d\mu(x) = 0.$$

実際に,

$$|f(x)e^{-nx}| \le |f(x)|$$

であり,

$$\lim_{n\to\infty} f(x)e^{-nx} = 0 \quad \text{a.e. } x \in [0,\infty).$$

よって，ルベーグの優収束定理（定理 1.44）より,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,d\mu(x) = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f(x)e^{-nx}\,d\mu(x) = 0.$$

系 1.2 (有界収束定理). $\mu(E) < \infty$ なる集合 E 上の可測関数列 $\{f_n(x)\}$ が一様有界，すなわち，定数 $M > 0$ が存在して E 上で $|f_n(x)| \le M$, $n = 1, 2, \ldots,$ となり，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するならば，$f_n(x)$ も $f(x)$ も E 上で積分可能であって

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x).$$

証明. $\varphi(x) \equiv M$ とおくと，$\mu(E) < \infty$ なることにより $\varphi(x)$ は E 上で積分可能である。ゆえに，ルベーグの優収束定理（定理 1.44）から，この系 1.2 を得る。

例 1.7.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}\, d\mu(x) = 0$$

である。実際に，

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) < \infty, \\
&|e^{-n\sin x}| \le 1, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ n \in \mathbf{N}, \\
&\lim_{n\to\infty} e^{-n\sin x} = 0 \quad \text{a.e. } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

だから，有界収束定理（系 1.2）より，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n\sin x}\, d\mu(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to\infty} e^{-n\sin x}\, d\mu(x) = 0.$$

系 1.3. $\mu(E) < \infty$ なる集合 E 上で $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots,$ が積分可能であって，E 上で一様に $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となるならば，極限関数 $f(x)$ も E 上で積分可能であって

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x)$$

が成り立つ。

証明. $\{f_n\}$ が E 上で f に一様収束することから，ある自然数 N が存在して，$n \ge N$ ならばすべての $x \in E$ に対して

$$|f_n(x) - f_N(x)| \le 1.$$

したがって

$$|f_n(x)| \le |f_N(x)| + 1$$

となる。ゆえに，

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|\, d\mu(x) &= \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|\, d\mu(x) \\
&\le \int_E |f_N(x)|\, d\mu(x) + \mu(E)
\end{aligned}$$

より $f(x)$ は E 上積分可能である。

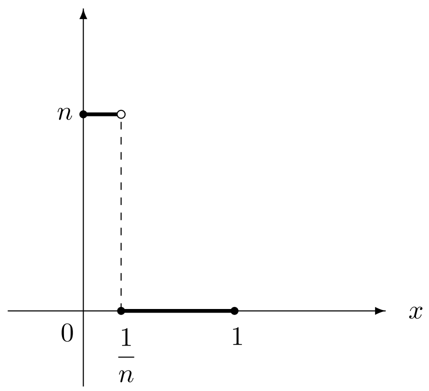
また，$\varphi(x) = |f_N(x)| + 1$ とおいて，$\{f_n(x) : n \ge N\}$ にルベーグの優収束定理（定理 1.44）を適用することによって，

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu(x)$$

も分かる。

注意 1.3. 定理 1.44 において (1.34) を満たすような積分可能な関数 $\varphi(x)$ が存在するという仮定を除くことはできない。例 1.5 で与えられた関数列

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{if } 0 \le x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{if } \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$



を再び考えてみる。すでに示したように，この $f_n(x)$ に対して，

$$\int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x) \neq \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, d\mu(x).$$

可測関数 $\varphi(x)$ が

$$f_n(x) \le \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1,\ n = 1, 2, \ldots,$$

を満たすならば,

$$\varphi(x) \ge n, \quad \frac{1}{n+1} \le x < \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots,$$

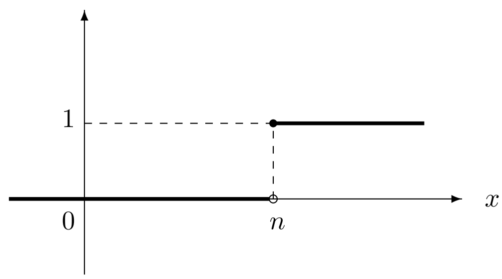
だから

$$\int_{[0,1]} \varphi(x)\, d\mu(x) \ge \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

となる。したがって，この $\{f_n(x)\}$ に対して条件 (1.34) を満たす可積分関数 $\varphi(x)$ は存在しない。

注意 1.4. 系 1.2 で，一般に $\mu(E) < \infty$ なる条件を除くことはできない。たとえば

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \le x < \infty, \\ 0 & \text{if } -\infty < x < n, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$



という関数列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると

$$\begin{aligned} &0 \le g_n(x) \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ &\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}} g_n(x)\, d\mu(x) = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x)\, d\mu(x) = \infty, \\ &\int_{\mathbf{R}} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} 0 \;\, d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

次の定理は，積分記号下での微分法を保証する結果である：

定理 1.45 (積分記号下での微分定理)**.** 関数 $f(x,\alpha)$, $(x,\alpha) \in E \times (a,b)$, は x の関数として，E 上で積分可能，α の関数としては，(a,b) で微分可能とする。さらに，E 上で積分可能な関数 $\varphi(x)$ が存在して

$$\left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha) \right| \le \varphi(x), \quad (x,\alpha) \in E \times (a,b)$$

とすると，積分 $\int_E f(x,\alpha)\, d\mu(x)$ は α の関数として (a,b) で微分可能であって，

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_E f(x,\alpha)\, d\mu(x) \right) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha)\, d\mu(x) \tag{1.35}$$

が成り立つ。

証明. まず，任意の $\alpha_0 \in (a,b)$ に対して，仮定により

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,\alpha_0+h) - f(x,\alpha_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha_0) \tag{1.36}$$

だから

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x,\alpha_0) = f_\alpha(x,\alpha_0)$$

は可測関数の極限関数として可測である。

また，微分法の平均値の定理により，適当な $\delta > 0$ をとれば，$0 < |h| < \delta$ なる限り

$$\frac{f(x,\alpha_0+h) - f(x,\alpha_0)}{h} = f_\alpha(x,\alpha_0+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

ここで，θ は x, α_0, h に関係するが $0 < \theta < 1$ であるから，仮定により

$$\left| \frac{f(x,\alpha_0+h) - f(x,\alpha_0)}{h} \right| \le \varphi(x). \tag{1.37}$$

(1.36) と (1.37) によりルベーグの優収束定理（定理 1.44）が適用でき

$$\lim_{h\to 0} \int_E \frac{f(x,\alpha_0+h) - f(x,\alpha_0)}{h}\, d\mu(x) = \int_E f_\alpha(x,\alpha_0)\, d\mu(x).$$

ところで，$\alpha_0 \in (a,b)$ は任意であったから，微分

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_E f(x,\alpha)\, d\mu(x) \right)$$

が存在して，(1.35) が成り立つ。

例 1.8 (リーマン・ルベーグの定理)**.** 可測関数 $f(x)$ が $-\infty < x < \infty$ でルベーグ可積分，すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, d\mu(x) < \infty$$

ならば，関数（フーリエ (Fourier) 変換）

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, d\mu(x)$$

は $-\infty < \lambda < \infty$ において有界かつ連続である。さらに

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \varphi(\lambda) = 0$$

が成り立つ。

証明. (1) まず,

$$\begin{aligned}
|\varphi(\lambda)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x} f(x)|\, d\mu(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}||f(x)|\, d\mu(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

が成り立つので，関数 $\varphi(\lambda)$ は有界である。

(2) 次に，関数 $\varphi(\lambda)$ の連続性を示す。任意に λ を固定して，

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda + h) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda x} - e^{i(\lambda+h)x}\right) f(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \left(1 - e^{ihx}\right) f(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して，$h \to 0$ のとき $1 - e^{ihx} \to 0$ であり，

$$|e^{i\lambda x} \left(1 - e^{ihx}\right) f(x)| \leq 2|f(x)|$$

であるから，ルベーグの優収束定理（定理 1.44）を適用できて，

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda) - \lim_{h\to 0} \varphi(\lambda + h) &= \lim_{h\to 0} (\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda + h)) \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}(1 - e^{ihx}) f(x)\, d\mu(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} e^{i\lambda x}(1 - e^{ihx}) f(x)\, d\mu(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって,

$$\varphi(\lambda) = \lim_{h\to 0} \varphi(\lambda + h)$$

となり，$\varphi(\lambda)$ は $\mathbf{R}$ 全体で連続である。

(3) より詳しく，関数 $\varphi(\lambda)$ の一様連続性を示す。そのために，定理 1.36 を使う。任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) < \varepsilon$$

を満たし，ある有界閉区間 $[-R, R]$ の外では恒等的に 0 となる $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f_\varepsilon(x)$ が存在する。そこで，

$$\psi(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f_\varepsilon(x)\, d\mu(x) = \int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} f_\varepsilon(x)\, d\mu(x)$$

とおく。このとき，

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda) - \psi(\lambda)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} (f(x) - f_\varepsilon(x))\, d\mu(x) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

一方，

$$|\psi(\lambda) - \psi(\eta)| = \left| \int_{-R}^{R} f_\varepsilon(x) \left(e^{i\lambda x} - e^{i\eta x} \right) d\mu(x) \right|$$

であって，

$$e^{i\lambda x} - e^{i\eta x} = e^{i\lambda x} \left(1 - e^{i(\eta - \lambda)x} \right).$$

ところで，

$$\left| e^{ia} - 1 \right| \leq |a|, \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} |\psi(\lambda) - \psi(\eta)| &= \left| \int_{-R}^{R} f_\varepsilon(x) \left(e^{i\lambda x} - e^{i\eta x} \right) d\mu(x) \right| \\ &\leq \int_{-R}^{R} |f_\varepsilon(x)| \left| e^{i\lambda x} - e^{i\eta x} \right| d\mu(x) \\ &\leq \int_{-R}^{R} |f_\varepsilon(x)| |(\lambda - \eta)x|\, d\mu(x) \\ &\leq R\, |\lambda - \eta| \int_{-R}^{R} |f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x) \end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda) - \varphi(\eta)| &\leq |\varphi(\lambda) - \psi(\lambda)| + |\psi(\lambda) - \psi(\eta)| + |\psi(\eta) - \varphi(\eta)| \\ &< 2\varepsilon + R\, |\lambda - \eta| \int_{-R}^{R} |f_\varepsilon(x)|\, d\mu(x). \end{aligned}$$

これより，

$$\limsup_{|\lambda - \eta| \to 0} |\varphi(\lambda) - \varphi(\eta)| \leq 2\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，関数 $\varphi(\lambda)$ の一様連続性が従う。

(4) 関数 $f_\varepsilon(x)$ は一様連続だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して，

$$|x|, |y| \leq R, \quad |x - y| < \delta \implies |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| < \varepsilon.$$

そこで，閉区間 $[-R, R]$ を次のように n 等分する：

$$x_0 = -R, \quad x_n = R, \quad x_h - x_{h-1} < \delta.$$

このとき，定理 1.27 より，有界閉区間上の連続関数のルベーグ積分とリーマン積分の値は等しいことに注意すると，

$$\begin{aligned}
|\psi(\lambda)| &= \left|\int_{-R}^{R} e^{i\lambda x} f_\varepsilon(x)\,d\mu(x)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x_k))e^{i\lambda x}\,d\mu(x)\right. \\
&\quad \left. +\sum_{k=1}^{n} f_\varepsilon(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{i\lambda x}\,d\mu(x)\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f_\varepsilon(x)-f_\varepsilon(x_k)|\,d\mu(x) \\
&\quad +\sum_{k=1}^{n}|f_\varepsilon(x_k)|\left|\frac{1}{i\lambda}\left(e^{i\lambda x_k}-e^{i\lambda x_{k-1}}\right)\right| \\
&< 2R\varepsilon+\frac{2}{|\lambda|}\sum_{k=1}^{n}|f_\varepsilon(x_k)|.
\end{aligned}$$

これより，

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}|\psi(\lambda)|\le 2R\varepsilon.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\limsup_{|\lambda|\to\infty}|\varphi(\lambda)| &\le \limsup_{|\lambda|\to\infty}(|\varphi(\lambda)-\psi(\lambda)|)+\lim_{|\lambda|\to\infty}|\psi(\lambda)| \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_\varepsilon(x)|\,d\mu(x)+\lim_{|\lambda|\to\infty}|\psi(\lambda)| \\
&< \varepsilon+\lim_{|\lambda|\to\infty}|\psi(\lambda)| \\
&\le (2R+1)\varepsilon.
\end{aligned}$$

ところで，$\varepsilon>0$ は任意だから，

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\varphi(\lambda)=0.$$

1.4 n 次元ルベーグ積分

n 次元ユークリッド (Euclid) 空間 $\mathbf{R}^n$ におけるルベーグ積分は，1 次元の場合と同じ手順で定義される。この小節では，このことを簡潔に説明する。

まず，$\mathbf{R}^n$ において，

$$I = \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k] = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_k < x_k \leq b_k,\ k = 1, \ldots, n\}$$

の形の集合を（n 次元の）**区間**と呼ぶ。ここで，$-\infty \leq a_k < b_k \leq \infty$, $k = 1, \ldots, n$ とする。$\mathbf{R}$ の場合と同様に，空集合 $\emptyset$ も区間と考える。$\mathbf{R}^n$ における区間全体からなる集合を $\mathcal{I}_n$ と書く。任意の区間 $I \in \mathcal{I}_n$ に対して，その体積を

$$|I| = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

と定義する。また，$|\emptyset| = 0$ と定める。

このとき，1 次元の場合と同じ手順で，ルベーグ外測度 μ^*, ルベーグ可測集合族 $\mathcal{M}$, ルベーグ測度 μ, 可測関数，ルベーグ積分が定義される。そして，集合 $\mathbf{R}^n$，完全加法族 $\mathcal{M}$，ルベーグ測度 μ を組み合せたものを n 次元ルベーグ測度空間と呼び，$(\mathbf{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ と書く。

1.5　フビニの定理

積空間上の積分について考察する。$(X, \mathcal{M})$ および $(Y, \mathcal{N})$ を共に σ–有限な可測空間，$\mu \times \nu$ を μ と ν の積測度とする。 関数 $f(x, y)$ が $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$–可測であって，その積分が存在する場合，慣習上，

$$\iint_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y)$$

と書く。この積分は，関数 $f(x, y)$ の**重積分**と呼ばれる。さらに，関数

$$g(x) = \int_Y f(x, y)\, d\nu(y), \quad x \in X$$

が定義され，その積分が存在すれば，積分 $\int_X g\, d\mu$ を，次の記号のどれかを使って表す：

$$\begin{gathered} \textstyle\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\right)\, d\mu(x), \quad \int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y)\, d\nu(y), \\ \textstyle\iint_{X \times Y} f(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x), \quad \iint_{X \times Y} f(x, y)\, d\nu\, d\mu. \end{gathered}$$

同様に，

$$\begin{gathered} \textstyle\int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y), \quad \int_Y d\nu(y) \int_X f(x, y)\, d\mu(x), \\ \textstyle\iint_{X \times Y} f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y), \quad \iint_{X \times Y} f(x, y)\, d\mu\, d\nu \end{gathered}$$

と書く。これらの積分は，関数 $f(x, y)$ の**累次積分**と呼ばれる。

次の定理は，重積分と累次積分の間の最も重要な関係を記述している：

定理 1.46 (フビニ (Fubini) の定理)**.** (i) 関数 $f(x, y)$ が $\mu \times \nu$–積分可能ならば，$f_x(y) = f(x, y)$, $y \in Y$ で定義される関数 $f_x(y)$ は，μ 測度についてほとんどすべての $x \in X$ に関して，ν–積分可能である。同様に，$f^y(x) = f(x, y)$, $x \in X$ で定義される関数 $f^y(x)$ は，ν 測度についてほとんどすべての $y \in Y$ に関して，μ–積分可能である。さらに，関数

$$g(x) = \int_Y f_x(y)\, d\nu(y) = \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$$

は，μ 測度についてほとんどすべての $x \in X$ に関して，μ–積分可能である。同様に，関数

$$h(y) = \int_X f^y(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$$

は，ν 測度についてほとんどすべての $y \in Y$ に関して，ν–積分可能である。このとき，

$$\iint_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu) = \int_X g(x)\, d\mu = \int_Y h(y)\, d\nu$$

が成り立つ。

(ii) 逆に，関数 $f(x, y)$ が $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$–可測ならば，関数

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \textstyle\int_Y |f(x, y)|\, d\nu(y), \quad x \in X, \\ \psi(y) &= \textstyle\int_X |f(x, y)|\, d\mu(x), \quad y \in Y \end{aligned}$$

は，それぞれ，$\mathcal{M}$–可測，$\mathcal{N}$–可測であって，

$$\iint_{X \times Y} |f(x, y)|\, d(\mu \times \nu) = \int_X \varphi(x)\, d\mu = \int_Y \psi(y)\, d\nu$$

が成り立つ。さらに，関数 $\varphi(x)$ が μ–積分可能あるいは関数 $\psi(y)$ が ν–積分可能ならば，関数 $f(x, y)$ は $\mu \times \nu$–積分可能であって，前半の (i) が適用できる。

1.6 ルベーグ空間

$(\mathbf{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$ を n 次元ルベーグ測度空間とする。$\mathbf{R}^n$ で定義された複素数値関数 $f(x)$ がルベーグ可測であるとは,

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \quad f_1(x) = \operatorname{Re} f(x),\ f_2(x) = \operatorname{Im} f(x),$$

と表したとき，$f_1(x)$ と $f_2(x)$ が，それぞれ可測関数となる場合をいう。

以下，特に断らない限り，関数は $\mathbf{R}^n$ 上で定義された複素数値関数とし，関数 $f(x)$ の集合 $E \in \mathcal{M}$ 上でのルベーグ測度による積分を

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f_1(x)\,dx + i\int_E f_2(x)\,dx$$
$$f_1(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

と定義して，上記のように $d\mu(x)$ の代わりに，μ を省略して dx と書くことにする。さらに，$E = \mathbf{R}^n$ のときは，ルベーグ積分を，単に $\displaystyle\int f(x)\,dx$ と書くことにする。

定義 1.7. $1 \le p < \infty$ とする。$\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $f(x)$ で

$$\int |f(x)|^p\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p\,dx < \infty$$

となるもの全体を $L^p(\mathbf{R}^n)$ または単に L^p と書く。ただし，$f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^n$ となる f と g は同一視するものとする。$f \in L^p$ に対して

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

を $f(x)$ の L^p–**ノルム**という。

同様にして，$\mathbf{R}^n$ のルベーグ可測な部分集合 E に対して $L^p(E)$ が定義される。

定義 1.8. $\mathbf{R}^n$ 上の可測関数 $f(x)$ で，測度 0 の集合を除いて有界（これを**本質的に有界**という）となるもの全体を $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ または単に L^∞ と書く。ただし，$f(x) = g(x)$ a.e. $x \in \mathbf{R}^n$ となる f と g は同一視する。$f \in L^\infty$ に対して

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^n)} = \inf\{K : |f(x)| \le K \text{ a.e. } x \in \mathbf{R}^n\}$$

を $f(x)$ の L^∞–**ノルム**という。

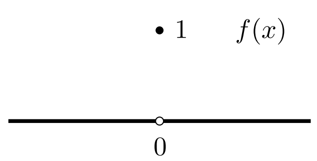
また，$\|f\|_\infty$ を

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}^n} |f(x)|$$

(ess sup = essential supremum) とも表す。

同様にして，$\mathbf{R}^n$ のルベーグ可測な部分集合 E に対して $L^\infty(E)$ が定義される。

例 1.9. 次のような関数を考える。



このとき

$$\begin{cases} \sup f(x) = 1 \\ \operatorname{ess\,sup} f(x) = 0 \end{cases}$$

となり，sup と ess sup との違いが分かる。

定理 1.47 (シュワルツ (Schwarz) の不等式)**.** f, $g \in L^2$ ならば,

$$\left| \int f(x)\overline{g(x)}\,dx \right|^2 \le \int |f(x)|^2\,dx \cdot \int |g(x)|^2\,dx. \tag{1.38}$$

証明. f, $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ とする。まず,

$$(|f(x)| - |g(x)|)^2 \ge 0$$

だから，不等式

$$2|f(x)\overline{g(x)}| \le |f(x)|^2 + |g(x)|^2$$

が従い，積分

$$\int f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

の存在が分かる。

次に，f, $g \in L^2$ に対して

$$(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx \tag{1.39}$$

とおく。このとき $\|f\|_2$ を単に $\|f\|$ と書けば，シュワルツの不等式 (1.38) は

$$|(f,g)|^2 \le \|f\|^2\|g\|^2 \tag{1.40}$$

となる。$f(x) = 0$ a.e. のとき (1.40) は明らかに成り立つ。$f(x) = 0$ a.e. でないとすると $\|f\| > 0$ である。任意の複素数 α に対して

$$\begin{aligned} (\alpha f - g, \alpha f - g) &= \int (\alpha f(x) - g(x))\overline{(\alpha f(x) - g(x))}\,dx \\ &= \int |\alpha f(x) - g(x)|^2\,dx \\ &= \|\alpha f - g\|^2 \quad \ge \quad 0. \end{aligned}$$

この左辺を $(\cdot,\cdot)$ の定義 (1.39) に従って書き直すと

$$|\alpha|^2\|f\|^2 - \alpha(f,g) - \overline{\alpha}(g,f) + \|g\|^2 \ge 0.$$

ここで，$\alpha = (g,f)/\|f\|^2$ とおけば

$$\frac{|(g,f)|^2}{\|f\|^2} - \frac{(g,f)(f,g)}{\|f\|^2} - \frac{\overline{(g,f)}(g,f)}{\|f\|^2} + \|g\|^2 \ge 0.$$

(1.39) により，$(g,f) = \overline{(f,g)}$ だから，これを上式に代入して両辺に $\|f\|^2$ をかけることにより (1.40) が得られる。

定理 1.48 (ヘルダー (Hölder) の不等式とミンコウスキー (Minkowski) の不等式). $1 \leq p, q \leq \infty$ は $1/p+1/q=1$ をみたすとする。ただし，$1/\infty = 0$. このとき，任意の $f \in L^p$, $g \in L^q$ に対して，

$$\left| \int f(x)g(x)\,dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \tag{1.41}$$

が成り立つ。これを**ヘルダーの不等式**という。$p=2$ のときシュワルツの不等式 (1.38) となる。

また，$1 \leq p \leq \infty$ のとき，任意の $f, g \in L^p$ に対して，

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.42}$$

が成り立つ。これを**ミンコウスキーの不等式**という。

証明. $p = 1, \infty$ のとき，不等式 (1.41), (1.42) が成り立つのは明らかであるので，$1 < p < \infty$ の場合だけを証明する。

準備として，$1 < p < \infty$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明する：任意の実数 α, $\beta \geq 0$ に対して

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \tag{1.43}$$

(a) $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ のときは明らか。

(b) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ の場合を証明する。(1.43) の両辺を β^q で割ると

$$\alpha\beta^{1-q} \leq \frac{1}{p}\alpha^p\beta^{-q} + \frac{1}{q}$$

となる。$p = q/(q-1)$ より

$$(\alpha\beta^{1-q})^p = \alpha^p\beta^{p(1-q)} = \alpha^p\beta^{-q}$$

が成り立つことに注意して $\lambda = \alpha\beta^{1-q}$ とおくと，不等式

$$\lambda \leq \frac{1}{p}\lambda^p + \frac{1}{q}, \quad \lambda > 0$$

を示すことに帰着される。

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{p}\lambda^p + \frac{1}{q} - \lambda$$

とおくと，$\varphi'(\lambda) = \lambda^{p-1} - 1$ より，$0 < \lambda < 1$ のとき，$\varphi'(\lambda) < 0$. $\lambda = 1$ のとき，$\varphi'(\lambda) = 0$. $\lambda > 1$ のとき，$\varphi'(\lambda) > 0$. ゆえに，$\varphi(\lambda)$ は $\lambda = 1$ のとき最小値 0 をとるので，上記の不等式は成り立つ。

(1.41) の証明：$\|f\|_p = 0$ または $\|g\|_q = 0$ ならば

$$f(x)g(x) = 0 \text{ a.e.}$$

であるから (1.41) は成り立つ。

よって，$\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$ とすると，(1.43) において $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ は任意であったから

$$\alpha = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad \beta = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

とおいて，両辺を $\mathbf{R}^n$ で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int |f(x)g(x)|\,dx &\leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int |g(x)|^q\,dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad = \quad 1. \end{aligned}$$

したがって，

$$\left|\int f(x)g(x)\,dx\right| \le \int |f(x)g(x)|\,dx \le \|f\|_p\|g\|_q$$

を得て，これは，(1.41) にほかならない。

(1.42) の証明：

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)|+|g(x)|$$

だから，$f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$ の場合を証明すれば十分である。

不等式

$$(f(x)+g(x))^p \le (2\max\{f(x),g(x)\})^p \le 2^p(f(x)^p+g(x)^p), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

により

$$\int (f(x)+g(x))^p\,dx < \infty$$

であることに注意する。

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))^p\,dx &= \int (f(x)+g(x))^{p-1}f(x)\,dx \\ &\quad + \int (f(x)+g(x))^{p-1}g(x)\,dx\end{aligned}$$

と書けるので，ここで，

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

なる q $(=p/(p-1))$ をとり右辺の各項にヘルダーの不等式 (1.41) を適用すると，

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))^p\,dx &\le \left(\int (f(x)+g(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int f(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int (f(x)+g(x))^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int g(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int (f(x)+g(x))^p\,dx\right)^{1-\frac{1}{p}}(\|f\|_p+\|g\|_p).\end{aligned}$$

これから

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p,$$

すなわち，(1.42) を得る。

1.7　ルベーグ空間の完備性

定理 1.49 (リース・フィッシャー (Riesz–Fischer) の定理)**.** 関数空間 L^p $(1 \le p < \infty)$ はノルム $\|\cdot\|_p$ に関して完備である。したがって，バナッハ (Banach) 空間である。

証明. $\{f_n\}$ を L^p のコーシー (Cauchy) 列とする：すなわち，

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_m - f_n\|_p = 0.$$

このとき，$\{f_n\}$ の適当な部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をとり

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0$$

となる $f \in L^p$ の存在を証明すれば

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p \le \lim_{n,k\to\infty} \|f_n - f_{n_k}\|_p + \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0,$$

すなわち，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ となる。

上のような $\{f_{n_k}\}$ は次のようにして求められる。仮定から，まず n_1 を

$$n > n_1 \Longrightarrow \|f_n - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2}$$

となるようにとることができる。次に n_2 を，$n_2 > n_1$ でかつ

$$n \ge n_2 \Longrightarrow \|f_n - f_{n_2}\|_p < \frac{1}{2^2}$$

となるようにとれる。これを繰り返して，自然数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ を

$$\begin{cases} n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots, \\ n \ge n_k \Longrightarrow \|f_n - f_{n_k}\|_p < \dfrac{1}{2^k} \end{cases}$$

となるようにとれる。したがって，特に

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

ゆえに，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{1.44}$$

となる。この $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0 \tag{1.45}$$

となる関数 $f \in L^p$ の存在を証明すればよい。

そこで，

$$g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

とおくと，

$$g_k \in L^p, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_k(x) \leq \cdots$$

であって，(1.44) とミンコウスキーの不等式 (1.42) によって

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_p &\leq \|f_{n_1}\|_p + \left\| \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right\|_p \\
&\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \\
&< \|f_{n_1}\|_p + 1.
\end{aligned}$$

単調収束定理（定理 1.41）により

$$\begin{aligned}
\int \lim_{k\to\infty} g_k(x)^p\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int g_k(x)^p\, dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p \leq (\|f_{n_1}\|_p + 1)^p < \infty
\end{aligned}$$

を得る。よって，ほとんどいたる所で有限な $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ が存在して，

$$g \in L^p, \quad \|g\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1$$

となることが分かる。$g(x)$ が有限となる点 $x \in \mathbf{R}^n$ では，級数

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

は絶対収束する。ゆえに，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

は収束し，

$$|f_{n_k}(x)| \leq g_k(x) \to g(x) \quad (k \to \infty).$$

したがって，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して有限な

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$$

が存在する。f は可測関数の極限だから可測であり，

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x)| \leq g(x).$$

ゆえに，$f \in L^p$ である。

また，

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_{n_k}(x)| &= \left| \lim_{\ell\to\infty} f_{n_{\ell+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right| \\
&= \left| \lim_{\ell\to\infty} \sum_{j=k}^{\ell} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) \right| \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \quad \leq \quad g(x)
\end{aligned}$$

だから

$$|f(x) - f_{n_k}(x)|^p \leq g(x)^p.$$

ルベーグの優収束定理（定理 1.44）により

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p^p &= \lim_{k\to\infty} \int |f(x) - f_{n_k}(x)|^p \, dx \\ &= \int \lim_{k\to\infty} |f(x) - f_{n_k}(x)|^p \, dx = 0. \end{aligned}$$

これから (1.45) が示されたことになる。

次に，関数の**合成積** (convolution) または**たたみ込み**と呼ばれる算法について説明する。$f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$h(x) = \int f(x-y)g(y)\, dy = \int f(y)g(x-y)\, dy$$

はほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ で有限な値をとり $h \in L^1(\mathbf{R}^n)$ である。このことは，たとえば，$\varphi(x,y) = |f(x-y)||g(y)|$ にフビニの定理（定理 1.46）を適用することによって分かる。この関数 $h(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成積**または**たたみ込み**といい，$f * g(x)$ 等と書く。また

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

が成り立つことも同時に導かれる。

さらに，一般に次の定理が成り立つ。

定理 1.50. $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ ならば，合成積 $f * g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ であって

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1 \tag{1.46}$$

が成り立つ。これを**ヤング** (Young) **の不等式**という。

証明. $p = \infty$ の場合は明らか。$1 < p < \infty$ の場合について証明する。

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}} \cdot |g(y)|^{\frac{1}{q}}, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

と考えて，ヘルダーの不等式 (1.41) を用いるために次の評価を行う。フビニの定理（定理 1.46）を用いると，

$$\begin{aligned} \int dx \int |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy &= \int \left(\int |f(x-y)|^p \, dx \right) |g(y)|\, dy \\ &= \|f\|_p^p \cdot \int |g(y)|\, dy \\ &= \|f\|_p^p \cdot \|g\|_1 \\ &< \infty \end{aligned} \tag{1.47}$$

となるから，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\int \left(|f(x-y)||g(y)|^{1/p} \right)^p dy < \infty.$$

また，$g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ だから

$$\int \left(|g(y)|^{1/q} \right)^q dy < \infty.$$

よって，ヘルダーの不等式 (1.41) が適用でき，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\int f(x-y)g(y)\,dy\right|^p &\le \left(\int |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}} \cdot |g(y)|^{\frac{1}{q}}\,dy\right)^p \\ &\le \int |f(x-y)|^p|g(y)|\,dy \cdot \left(\int |g(y)|\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

を得る。

したがって，ほとんどすべての $x \in \mathbf{R}^n$ に対して，合成積 $f * g(x)$ が定義される。この不等式の両辺を x で積分して (1.47) を用いると

$$\|f * g\|_p^p \le \|f\|_p^p \cdot \|g\|_1^{1+\frac{p}{q}}.$$

この両辺の p 乗根をとれば,

$$\begin{aligned}&f * g \in L^p, \\ &\|f * g\|_p \le \|f\|_p \cdot \|g\|_1\end{aligned}$$

が導かれる。

定理 1.51. L^∞ はノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して完備である。

証明. $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ を L^∞ のコーシー列とする。すなわち

$$\lim_{j,k\to\infty} \|f_j - f_k\|_\infty = 0$$

とする。このとき，任意の自然数 m に対して

$$\lim_{j,k\to\infty} \mu\left(\left\{x \in \mathbf{R}^n : |f_j(x) - f_k(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) = 0$$

すなわち，ある零集合 $\mathcal{N}_m \subset \mathbf{R}^n$ が存在して

$$\limsup_{j,k\to\infty} |f_j(x) - f_k(x)| \le \frac{1}{m}, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{N}_m$$

となる。

$$\mathcal{N} = \bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{N}_m$$

も零集合であって

$$\lim_{j,k\to\infty} |f_j(x) - f_k(x)| = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{N}.$$

これは，$x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{N}$ のとき数列 $\{f_j(x)\}_{j=1}^\infty$ が複素数の集合 $\mathbf{C}$ のコーシー列であることを意味する。$\mathbf{C}$ は完備であるから，極限値

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x)$$

が存在する。そこで

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} f_j(x), & x \in \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{N} \\ 0, & x \in \mathcal{N}\end{cases}$$

とおけば,

$$\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_\infty = 0$$

が成り立ち，L^∞ の完備性が証明された。

$\mathbf{R}^n$ で連続で，ある有界集合の外では恒等的に 0 となる関数の全体を $C_0(\mathbf{R}^n)$ と書く。

定理 1.52. 関数空間 $C_0(\mathbf{R}^n)$ は $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, のなかで，ノルム $\|\cdot\|_p$ に関して稠密である。

証明. $f \in L^p$ とする。$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$ とおくと，

$$f_1^+,\ f_1^-,\ f_2^+,\ f_2^- \in L^p$$

となる。よって，$f \ge 0$ として考えても一般性は失わない。

$\varepsilon > 0$ を任意に固定する。$S_m = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < m\}$ とおくと，

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

より，自然数 m を

$$\int_{\mathbf{R}^n - S_m} |f(x)|^p \, dx < \varepsilon^p$$

となるようにとれる。この m に対して，

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in S_m, \\ 0 & \text{if } x \in {S_m}^c \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \|f_m - f\|_p &= \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f_m(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}^n - S_m} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

ところで，$f_m \ge 0$ より，定理 1.21 が適用でき，$f_m(x)$ は非負単関数の単調増加列の極限として表せることに注意。ゆえに，単関数 $g(x)$ を，

$$f_m(x) \ge g(x) \ge 0, \quad \int_{\mathbf{R}^n} (f_m(x) - g(x))^p \, dx < \varepsilon^p$$

となるようにとれる。よって，

$$\|f_m - g\|_p < \varepsilon.$$

また，$g(x)$ は，

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}(x) \quad (\alpha_j > 0, \quad E_j \subset S_m)$$

と書ける。定理 1.15 より，各 E_j に対し，

$$F_j \subset E_j \subset G_j, \quad \mu(G_j - F_j) < \left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j} \right)^p$$

を満たすような閉集合 F_j，開集合 G_j が存在する。S_m は開集合だから，$G_j \subset S_m$ とできる。$h_j(x)$ を $\mathbf{R}^n$ 上で $0 \le h_j(x) \le 1$ となる連続関数で，

$$h_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in F_j, \\ 0 & \text{if } x \in {G_j}^c \end{cases}$$

とする。たとえば次のような関数を考えればよい：

$$h_j(x) = \frac{d(x, G_j^c)}{d(x, G_j^c) + d(x, F_j)}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{E_j}(x) - h_j(x)|^p \, dx &\leq \int_{G_j \setminus F_j} 1^p \, dx \\ &= \mu(G_j \setminus F_j) \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{k\alpha_j} \right)^p. \end{aligned}$$

よって，

$$\|\chi_{E_j} - h_j\|_p < \frac{\varepsilon}{k\alpha_j}.$$

$h(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j h_j(x)$ とおくと，$h \in C_0(\mathbf{R}^n)$ で，

$$\begin{aligned} \|g - h\|_p &\leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \|\chi_{E_j} - h_j\|_p \\ &< \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \|f - h\|_p &\leq \|f - f_m\|_p + \|f_m - g\|_p + \|g - h\|_p \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

参考文献

[1] Lebesgue, Henri： ルベーグ積分・長さおよび面積．現代数学の系譜 3，共立出版株式会社 1969 年

[2] 溝畑茂：ルベーグ積分．岩波全書，岩波書店．1966 年

[3] 松澤忠人，原優，小川吉彦：積分論と超関数論入門，学術図書出版社，1996 年

[4] 伊藤清三：ルベーグ積分入門，裳華房，1996 年