

# 学校数学における数学的モデル化能力の育成に関する研究

——初等教育段階に焦点を当てて——

平 林 真 伊

## 1. 研究意図と目的

日常生活の中で直面する問題を単純化したり理想化したり、仮定を設定したりすることで、数学の問題に置き換えて解決を試みるための手段となる活動として数学的モデル化がある。数学的モデル化を遂行することで、現実世界と数学を結びつけ、現実世界における問題についての理解を深め、解決を試みるのである。

平成29年3月に告示された小学校学習指導要領では、数学的モデル化過程の図式が算数の学習過程のイメージとして提示された。現実事象を数学の舞台に載せ、数学的結論を現実世界に戻すといった数学的モデル化を、今後の学習指導要領に明示的に位置づけようとしている。

しかし、これまでの算数科では、現実的な文脈ではあるものの、ある程度の定式化がなされた文章題の解決に代表されるように、現実的な場面を扱いながらも数学的内容を指導することが先行している。従来の文章題に対して、川口は、内容と問題解決の技能とは互いに対立する概念ではなく、並列するものとしてみるべきであると述べている。そして、学習指導に有意義な「場」を組み込むことで、幅の広い自由な思考活動が要求される学習、及び問題解決的な学習形態を生かした系統学習を構成し得ることを示唆している(川口, 1957)。児童は、中等教育段階で学習されるような高度な数学を利用せずとも、小学生なりの手段を用いて問題場面を解釈し得るという意味で、数学的モデル化における問題場面の解釈に関して有能であることが想

定される。そうであるならば、かつて川口によって提案されたように、小学校においても、数学的内容の学習指導を踏まえた上で数学的なプロセス面を強調した学習指導を行うことができる。初等教育段階における学習指導が充実するとともに、中等教育段階での学習がより充実したことになることが期待される。

文章題を数学的モデル化研究の対象として扱うために、文章題の解決過程を捉えなおす必要がある。その際、新たな視点から数学的モデル化を捉えなおす Lesh らによる着想が示唆的である。Lesh らは、問題場面を数学的に解釈することを目的とした数学的モデル化を視点に、問題の条件から目標を導くことが目的であった従来の問題解決に対し、問題の条件と目標を理解する反復的なサイクルとして問題解決を捉えなおした(Lesh & Zawojewski, 2007)。本研究は Lesh らによる着想を援用し、数学的モデル化を「問題場面を数学的に解釈すること」とし、数学的モデル化の視点から文章題解決を相対的に捉えなおし、初等教育段階における数学的モデル化能力を育成する学習指導の構想を試みる。

以上の背景から、本研究では、数学的モデル化能力を育成する学習指導を構想するために、初等教育段階における文章題の解決過程に着目し、数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する方法を明らかにすることを目的とする。

## 2. 研究課題と研究方法

本研究では、上述の研究目的を達成するために、次の二つの研究課題を設定する。第一は、数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する方法を提示することである。この研究課題

は、数学的モデル化に関する文献の解釈、及び算数科において扱われる文章題の分析による理論的考察から解決を試みる。

第二の研究課題は、第一の研究課題で提示された方法に基づいて教授実験を実施し、数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する方法の有効性を明らかにすることである。この研究課題は、教授実験の実施と分析による実践的考察から解決を試みる。

### 3. 論文の概要

第1章では、数学的モデル化に関する先行研究の課題を指摘した。中等教育段階に関しては、有意義な研究成果が数多く蓄積されている一方で、初等教育段階に関する研究では、児童の能力や授業時数の側面から、児童が数学的モデル化を遂行することには制約があると考えられ、数学的モデル化過程の各相に焦点化し、アプローチしていることが多いことを指摘した。

第2章では、数学的モデル化過程の「定式化」と「解釈・評価」に焦点を当て、児童による数学的モデル化能力の概念規定を行った。それぞれに対応する児童による活動を「みなすこと」と「あてはめること」と呼び、それらの概念規定を行った。「みなすこと」は、適切であろうと不適切であろうと（暗黙的に）仮定を設定することで、ある問題場면을解釈した結果としてのモデルを導出する行為である。「あてはめること」は、自身で設定した根拠に基づき、数学的結論をもとの現実場面と関連づけることで、問題場면을解釈した結果として現実世界における結論を求める行為である。

第3章では、児童による数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する二つの方法を理論的に明らかにした。第一は、問題場面の構造に関する手立てである。「みなすこと」に関しては、はじめの問題場面の条件を変更して作成された問題場面を与えることで、モデルの改良を促すことを試みる。「あてはめること」に関しては、問題場面に新たな条件を追加することで作成された別の問題場면을提示することで、結論の修正を促すことを試みる。第二は、他者との

相互作用に関する手立てである。相互作用の機会を意図的に設定することで、児童たちに他者の存在を意識させ、自身による解釈はどの点で修正すべきなのかを検討させ、モデルや結論の問い直し・見直しを促すことを試みる。

第4章では、「みなすこと」に焦点を当て、児童による問題場面の解釈を促進する方法を実践的に明らかにした。児童による問題場面の解釈の実際を明らかにするために実施した質問紙調査では、三つの花壇の球根の混み具合を比較する場면을設定し、「球根が集まっている方が混んでいる」という他者（架空の人物）の考えを示した上で、一番混んでいる花壇を尋ねた。質問紙調査の結果、全体の約7割の児童が、他の問題場面においても有用であるとはいえない前数学的モデル（図の見た目の状態や、自身の経験に基づく表現）と加法的モデル（球根の数あるいは花壇の面積の量の差で比較する解法）を導出したことが示された。

そして、「みなすこと」を促進する方法を事前に検討し、質問紙調査を実施した児童たちの中から抽出した5年生と6年生の各ペアを対象として実施した教授実験から得られた知見に基づき、事前に考察した促進の方法を再検討し、精緻化した。その結果、「みなすこと」を促進するためには、導出したモデルが類似した構造を持つ他の問題場面においても再利用可能であるかを確認させるために、条件を変更した問題場면을提示することが有効であることが明らかになった。また、他者との相互作用の機会を意図的に設定することで、児童たちが互いに考えを説明し、理解し合う際に、自身によるモデルの問い直し・見直しをすることが促され、「みなすこと」が促進し得ることが示された。

第5章では、「あてはめること」に焦点を当て、児童による問題場面の解釈を促進する方法を実践的に明らかにした。質問紙調査では、歌の発表会において69人の1年生が座るための長いすを用意する場면을設定し、三人の他者（架空の人物）の考えを示した上で、必要な長いすの数を尋ねた。その結果、一般的に正答とされる解答に見られる価値観である「一般性」（もと

の問題場面で与えられた条件を遵守する)を示した児童の割合が大きいが示された。この価値観に基づいた結論は、例えば、社会的価値観の「同情」(1人で長いすに座るのは可哀想である)に基づいて結論を導いた児童を納得させられないため、適切であるとはいえない。

そして、児童による「あてはめること」を促進する方法を事前に検討し、質問紙調査を実施した児童たちの中から抽出した3年生と4年生の各ペアを対象として実施した教授実験から得られた知見に基づき、事前に考察した促進の方法を再検討し、精緻化した。その結果、「あてはめること」を促進するためには、新たな条件を追加することで、はじめの問題場面とは異なる問題場면을提示したり、自身とは異なる他の価値観に焦点化させたりすることが有効であることが明らかになった。また、他者との相互作用の機会を意図的に設定することで、児童たちは新たな価値観を知り得ることが示された。

第6章では、第4章及び第5章の教授実験の結果を総合的に考察し、数学的モデル化能力を育成する学習指導について、教材のあり方と教師の役割から議論した。教材のあり方として、理想的な問題場面の構造を変えることで、児童がその問題場面の本質を探究するように促すことを指摘した。また、問題場面に他者の考えを含めることで、様々な視点からの解法を知ることができ、それらを踏まえてよりよい解法を導き出す機会になることが期待される。

そして、教師の役割として、完全には構造化されていない問題場面、あるいは、反例となる問題場면을提示することを指摘した。これにより、児童が問題の条件はどのように成り立っているのか、どの程度まで変更可能なのかというように、問題場面の理解を深めていくことが期待される。また、授業において、異なる価値観に基づいて結論を求めた児童同士による議論の場を積極的に設けることにより、児童はこれまでにない新たな価値観を知ったり、それに基づいて結論を修正したりすることができると考えられる。その結果として、児童による問題場面の理解が深まることが期待される。

#### 4. 研究の意義と今後の課題

本研究の意義は、次の三つである。第一は、数学的モデル化における問題場面の解釈に関して、児童の有能さを実証的に示したことである。第二は、数学的モデル化における問題場面の解釈を促進する方法を明らかにしたことである。第三は、数学的モデル化の導入時期を拡張する指針を与えるとともに、数学的モデル化の意義や概念の教育上の拡張をはかったことである。これらは、初等教育段階においても数学的モデル化に関する学習を行い得ることを示しており、主に中等教育段階に焦点を当てていた従来の先行研究に対して、研究対象の幅を広げることを提案し得るものである。

今後の課題は、次の三つである。第一に、本研究で実施した教授実験の対象とは異なる児童を対象としたり、本研究における調査問題とは異なる題材を用いたり、教室において授業を実践したりすることによって、本研究で得られた結論の妥当性をより吟味していくことである。第二に、本研究の結論に基づいて構想された指導を複数の題材を通じて継続的に受けた児童の数学的モデル化能力の経年変化を捉えるといった、長期的な研究を行うことである。第三に、初等教育段階において数学的モデル化を扱うために、カリキュラム構成を考察することである。

#### 主要引用・参考文献

- 川口 延 (1957). 算数科における問題解決学習と系統学習：問題解決学習か系統学習か. 中野佐三編, 算数科の教育心理 (pp. 39-76). 金子書房.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age.
- 三輪辰郎 (1983). 数学教育におけるモデル化についての一考察. 筑波数学教育研究, 2, 117-125.

(学位取得年月日：平成29年3月24日)